МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Омский государственный технический университет»

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебное текстовое электронное издание
локального распространения

Рекомендовано редакционно-издательским советом
Омского государственного технического университета

Омск
Издательство ОмГТУ
2020

Сведения об издании: 1, 2

Составители: *Г. А. Троценко*, *О. Г. Жукова*

Рецензент *В. Н. Горюнов*, д-р техн. наук, профессор

Операционное исчисление [Электронный ресурс] : практикум / Минобрнауки России, ОмГТУ ; [сост.: Г. А. Троценко, О. Г. Жукова]. – Электрон. текст. дан. (1,23 Мб). – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2020. – 1 электрон. опт. диск. – Минимальные системные требования: процессор Intel Pentium 1,3 ГГц и выше; оперативная память 256 Мб и более; свободное место на жестком диске 260 Мб и более; операционная система Microsoft Windows XP/Vista/7/10; разрешение экрана 1024×768 и выше; акустическая система не требуется; дополнительные программные средства Adobe Acrobat Reader 5.0 и выше.

Содержит теоретический материал по операционному исчислению, примеры решения типовых задач, задания для самостоятельного решения.

Предназначен для студентов радиотехнических, электротехнических и теплоэнергетических специальностей. Может быть использован также при чтении дисциплин, где применяются методы операционного исчисления.

Редактор *Т. А. Москвитина*

Компьютерная верстка *Е. В. Макарениной*

Сводный темплан 2020 г.

Подписано к использованию 07.04.20.

Объем 1,23 Мб.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Практикум предназначен для студентов, изучающих курс высшей математики. Содержит теоретический материал, примеры решения задач раздела «Операционное исчисление» курса «Математика», входящего в стандарт образования студентов радиотехнических, электротехнических и теплоэнергетических специальностей.

Изложение материала по практикуму подразделяется на три части. В первой части (§ 1–5) приведены основные понятия и правила операционного исчисления, в том числе удобное правило восстановления оригинала по его лапласовому изображению по формуле обращения.

Во второй части (§ 6–7) рассмотренный материал применяется к решению задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений и систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Предложен способ решения задачи Коши для линейной системы приведением к стандартному виду

$$\dot{x} - Ax = f, \qquad x(0) = x_0$$

с последующим применением преобразования Лапласа; здесь в построении решения участвует резольвента $(pI - A)^{-1}$ матрицы A системы.

Третья часть (§ 8–11) посвящена приложению к теории автоматического управления. Вначале вводятся и иллюстрируются на примерах фундаментальные понятия «линейная стационарная цепь (ЛСЦ)», «передаточная функция ЛСЦ», указана связь между передаточной функцией и другим фундаментальным понятием теории ЛСЦ – частотной характеристикой. Затем после проведенной в § 8 подготовки (вводится понятие «свертка», доказывается теорема о свертке) выводится широко применяемая в инженерных расчетах формула Дюамеля, представляющая собой удобное правило задания ЛСЦ на языке оригиналов. Заключительный параграф кратко знакомит читателя с дельта-функцией и ее приложением к теории ЛСЦ.

В конце каждого параграфа приводятся задания для самостоятельной работы.

§ 1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

В этом параграфе приведены простейшие сведения о комплексных числах, используемые в дальнейшем.

Комплексным числом z называется выражение вида $z = x + iy$, где x и y – действительные числа; i – *мнимая единица*, $i^2 = -1$.

Число x называется *действительной частью* комплексного числа z и обозначается $x = \operatorname{Re} z$, y – *мнимой частью* z, $y = \operatorname{Im} z$.

Пусть задана прямоугольная система координат на плоскости. Тогда каждое комплексное число $z = x + iy$ может быть изображено точкой плоскости с координатами (x, y). В частности, действительные числа $(y = 0,\ z = x)$ изображаются точками оси абсцисс, называемой поэтому *действительной* осью; чисто мнимые числа $(x = 0,\ y \neq 0,\ z = iy)$ изображаются точками оси ординат, называемой поэтому *мнимой* осью.

Полярные координаты (r, φ) точки (рис. 1) называются соответственно *модулем* и *аргументом* комплексного числа z и обозначаются соответственно $|z|$, $\operatorname{Arg} z$. Очевидно, при $z \neq 0$ $\operatorname{Arg} z$ имеет бесконечно много значений: $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, где $\arg z$ – какое-либо одно из значений $\operatorname{Arg} z$. Условимся в дальнейшем под $\arg z$ понимать значение $\operatorname{Arg} z$, *заключенное в промежутке* $(-\pi, \pi]$:

$$-\pi < \arg z \leq \pi,$$

и называть его *главным значением* аргумента z. При $z = 0$ аргумент z *не определен.*

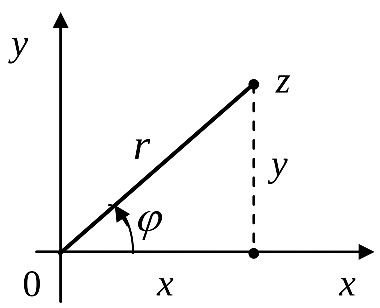

Рис. 1

Из рис. 1 следует, что модуль z определяется по формуле

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

аргумент z определяется из формулы

$$tg\varphi = \frac{y}{x},$$

откуда получим

$$\arg z = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x} & \textit{для внутренних точек I, IV четвертей,} \\ arctg\dfrac{y}{x} + \pi & \textit{для внутренних точек II четверти,} \\ arctg\dfrac{y}{x} - \pi & \textit{для внутренних точек III четверти.} \end{cases}$$

Так как $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, то

$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right).$$

Такая запись называется *тригонометрической формой* комплексного числа z.

Пусть $z = x + iy$; тогда комплексное число $\bar{z} = x - iy$ называется *сопряженным* к z. Числа $z, \bar{z}$ изображаются точками, *симметричными относительно действительной оси.* В частности, действительные числа (и только они) сопряжены себе.

Очевидны равенства

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Пусть $z = x + iy$. По определению примем

$$e^z = e^x\left(\cos y + i\sin y\right).$$

Известно, что для любых действительных чисел x_1, x_2 верно равенство $e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}$. Покажем, что это свойство сохраняется для комплексных показателей степени:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}.$$

Пусть $z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2$.

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{x_1 + iy_1} \cdot e^{x_2 + iy_2} = e^{x_1}\left(\cos y_1 + i\sin y_1\right) \cdot e^{x_2}\left(\cos y_2 + i\sin y_2\right) =$$

$$= e^{x_1 + x_2}\left(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2\right) + i\left(\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2\right) =$$

$$= e^{x_1 + x_2}\left(\cos\left(y_1 + y_2\right) + i\sin\left(y_1 + y_2\right)\right) =$$

$$= e^{x_1 + x_2 + i\left(y_1 + y_2\right)} = e^{\left(x_1 + iy_1\right) + \left(x_2 + iy_2\right)} = e^{z_1 + z_2}.$$

Имеют место формулы

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2},\ \sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i},$$

называемые *формулами Эйлера*.

Действительно, по определению комплексного показателя степени имеем

$$e^{i\alpha} = e^{0 + i\alpha} = e^{0}\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right) = \cos\alpha + i\sin\alpha.$$

$$e^{-i\alpha} = e^{i(-\alpha)} = \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha) = \cos\alpha - i\sin\alpha.$$

Складывая эти равенства, получим

$$2\cos\alpha = e^{i\alpha} + e^{-i\alpha},\ \text{т.е.}\ \cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2},$$

вычитая равенства, получим

$$2i\sin\alpha = e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}, \text{ т.е. } \sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}.$$

Формулы Эйлера устанавливают связь между тригонометрическими и показательными функциями.

Задания для самостоятельной работы.

1) Найти модуль и аргумент комплексных чисел:

а) 1; б) -3; в) $2i$; г) $-i$;

д) $1+i$; е) $-1+i$; ж) $-1-\sqrt{3}i$; з) $\sqrt{3}-i$.

2) Вычислить:

а) $(2+3i)\left(1-(-i)^9\right)$; б) $\dfrac{1-i}{1+i}$;

в) $\dfrac{3-4i}{4+3i} - i^{23} + 3$; г) $(2-5i)^2 + \dfrac{5+2i}{i}$.

Ответы:

1) а) $|z| = 1, \arg = 0$; б) $|z| = 3, \arg = \pi$; в) $|z| = 2, \arg = \dfrac{\pi}{2}$;

г) $|z| = 1, \arg = -\dfrac{\pi}{2}$; д) $|z| = \sqrt{2}, \arg = \dfrac{\pi}{4}$; е) $|z| = \sqrt{2}, \arg = \dfrac{3\pi}{4}$;

ж) $|z| = 2, \arg = -\dfrac{2\pi}{3}$; з) $|z| = 2, \arg = -\dfrac{\pi}{6}$.

2) а) $-1+5i$; б) $-i$; в) 3; г) $-19-25i$.

§ 2. ОРИГИНАЛ. L-ИЗОБРАЖЕНИЕ ОРИГИНАЛА

Будем рассматривать функции времени (сигналы) со свойствами:

1^0. $y(t) \equiv 0$ при $t < 0$;

2^0. $y(t)$ непрерывна при $t \ge 0$;

3^0. $y(t)$ растет не быстрее экспоненты при $t \to +\infty$: существуют числа $a > 0$, $v \ge 0$ такие, что

$$|y(t)| \le a e^{vt} \quad (t \ge 0).$$

Число v_0, для которого неравенство в условии 3^0 выполняется при любом $v = v_0 + \varepsilon\ (\varepsilon > 0)$ и не выполняется при $v = v_0 - \varepsilon$, называется показателем роста функции $y(t)$ (v_0 – точная нижняя грань чисел v). Функция со свойствами $1^0 - 3^0$ называется *оригиналом* (рис. 2).

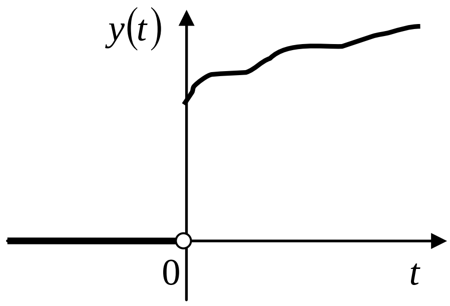

Рис. 2

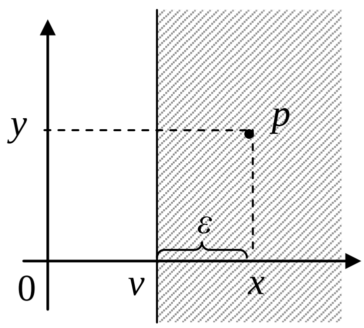

Рис. 3

Определение 1. *Преобразованием Лапласа* или L*-изображением* оригинала $y(t)$ называется функция комплексного переменного p, вычисляемая по формуле

$$L[y] = \hat{y}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} y(t)\,dt. \tag{1}$$

Поставим вопрос: при каких значениях p существует несобственный интеграл (1)? Рассмотрим на p-плоскости полуплоскость $\operatorname{Re} p > v$, где v – показатель роста $y(t)$ (рис. 3).

Лемма 1. *Интеграл (1) сходится при всех p в полуплоскости* $\operatorname{Re} p > v$.

Доказательство. Воспользуемся теоремой сравнения для несобственных интегралов: если $|f(t)| \le g(t)$ при $t \ge 0$ и интеграл $\int_0^\infty g(t)dt$ сходится, то интеграл $\int_0^\infty f(t)dt$ также сходится. Имеем: при $p = x + iy$

$$\left|e^{-pt}\right| = \left|e^{-(x+iy)t}\right| = \left|e^{-xt} \cdot e^{-iyt}\right| = \left|e^{-xt}\right| \cdot \left|e^{-iyt}\right| = e^{-xt}\left|\cos y - i\sin y\right| =$$

$$= e^{-xt}\sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = e^{-xt},$$

откуда с учетом свойства 3^0 оригинала следует оценка

$$\left|e^{-pt}y(t)\right| = \left|e^{-pt}\right| \cdot |y(t)| \le ae^{-xt} \cdot e^{vt} = ae^{-(x-v)t} = ae^{-\varepsilon t} \quad (t \ge 0).$$

При p в полуплоскости $\operatorname{Re} p > v$ будет $\varepsilon > 0$ (рис. 3) и интеграл от правой части этого неравенства по промежутку $[0,\infty)$ сходится (проверьте это), тем самым и подавно сходится интеграл (1).

Теория преобразования Лапласа называется операционным исчислением. Далее излагаются (как правило, без доказательства) и иллюстрируются на примерах основные правила операционного исчисления, затем построенный математический аппарат применяется к некоторым задачам теории дифференциальных уравнений и теории автоматического управления.

В заключение этого параграфа рассмотрим несколько простых примеров на вычисление L-изображений по определению.

Пример 1. Найти L-изображение функции Хевисайда (рис. 4)

$$1(t) = \begin{cases} 1, & t \ge 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Решение. Функция $1(t)$ очевидным образом удовлетворяет требованиям 1^0–3^0 с показателем роста $v = 0$, тем самым является оригиналом.

По лемме 1 L-изображение определено в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$ (рис. 5). По формуле (1) найдем

$$\hat{1}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \lim_{s \to +\infty} \int_0^{s} e^{-pt} dt = \lim_{s \to +\infty} \left. \frac{e^{-pt}}{p} \right|_s^0 = \lim_{s \to +\infty} \frac{1 - e^{-xs} \cdot e^{-iys}}{p} = \frac{1}{p};$$

$$L[1(t)] = \frac{1}{p}. \tag{2}$$

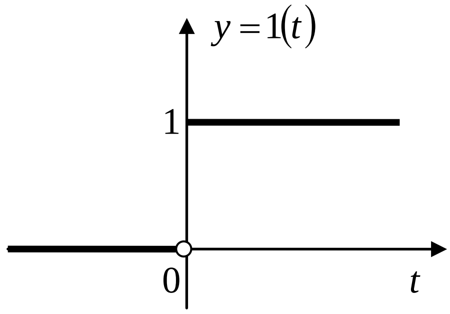

Рис. 4

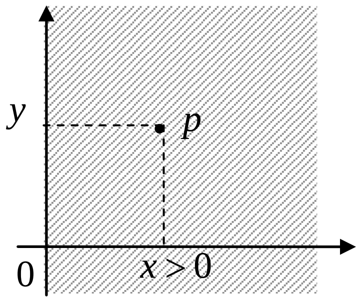

Рис. 5

Пример 2. Найти L-изображение функции $y(t) = \begin{cases} \cos t, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

Данная функция является оригиналом с показателем роста $\nu = 0$, поэтому $\hat{y}(p)$ определена в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$.

По формулам Эйлера и (1) имеем

$$L[\cos t] = L\left[\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right] = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(e^{-(p-i)t} + e^{-(p+i)t}\right) dt =$$

$$= \lim_{s \to +\infty} \frac{1}{2} \int_0^{s} \left(e^{-(p-i)t} + e^{-(p+i)t}\right) dt = \frac{1}{2} \lim_{s \to +\infty} \left. \left(\frac{e^{-(p-i)t}}{p-i} + \frac{e^{-(p+i)t}}{p+i}\right) \right|_s^0 =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{s \to +\infty} \left(\frac{1}{p-i} + \frac{1}{p+i} - \frac{e^{-xs} \cdot e^{-i(y-1)s}}{p-i} - \frac{e^{-xs} \cdot e^{-i(y+1)s}}{p+i}\right) =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i}+\frac{1}{p+i}\right)=\frac{p+i+p-i}{2\left(p^2-i^2\right)}=\frac{p}{p^2+1};$$

$$L[\cos t]=\frac{p}{p^2+1}.$$

Пример 3. Найти L-изображение функции $y(t)=\begin{cases} e^{\alpha t}, & t\ge 0, \\ 0, & t<0. \end{cases}$

Решение. Данная функция (рис. 6) является оригиналом с показателем роста $v=\alpha$, поэтому $\hat{y}(p)$ определена в полуплоскости $\operatorname{Re} p>\alpha$ (рис. 7).

По формуле (1) имеем

$$L\left[e^{\alpha t}\right]=\int_0^\infty e^{-pt}e^{\alpha t}dt=\int_0^\infty e^{-(p-\alpha)t}dt=\lim_{s\to+\infty}\int_0^s e^{-(p-\alpha)t}dt=$$

$$=\lim_{s\to+\infty}\left.\frac{e^{-(p-\alpha)t}}{p-\alpha}\right|_s^0=\lim_{s\to+\infty}\frac{1-e^{-\varepsilon s}\cdot e^{-iys}}{p-\alpha}=\frac{1}{p-\alpha};$$

$$L\left[e^{\alpha t}\right]=\frac{1}{p-\alpha}. \tag{3}$$

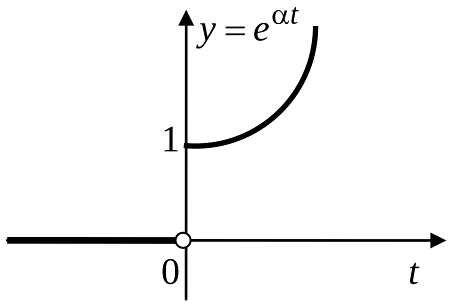

Рис. 6

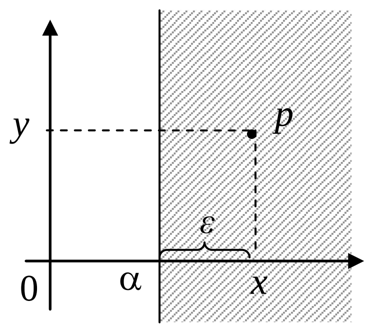

Рис. 7

Отметим, что формула (2) формально содержится в (3): случай $\alpha=0$.

Замечание 1. Формула (3) была получена при условии $\operatorname{Re} p > \alpha$. Однако правая часть (3) определена при всех $p \neq \alpha$. Будем считать формулу (3) верной при всех $p \neq \alpha$. Также будем поступать и в других случаях: *будем считать формулу для L-изображения верной при всех p, при которых полученное выражение имеет смысл.* Говорят так: L-изображение аналитически продолжается из полуплоскости $\operatorname{Re} p > v$ в комплексную плоскость.

Замечание 2. Далее всегда будем задавать оригиналы их значениями на полуоси $t \geq 0$, не оговаривая всякий раз требование $y = 0$ при $t < 0$.

Задания для самостоятельной работы.

Проверить, что данные функции – оригиналы, и вычислить их L-изображения (1):

а) $y(t) = 5$; б) $y(t) = t$; в) $y(t) = \sin 2t$; г) $y(t) = te^t$.

Ответы:

а) $L[5] = \dfrac{5}{p}$; б) $L[t] = \dfrac{1}{p^2}$;

в) $L[\sin 2t] = \dfrac{2}{p^2 + 4}$; г) $L\left[te^t\right] = \dfrac{1}{(p-1)^2}$.

§ 3. СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

В приложениях операционного исчисления систематически используются следующие правила: 1^0–8^0. Далее в 2^0–8^0 $\hat{y}(p)$ – L-изображение оригинала $y(t)$.

1^0 . **Теорема линейности:**

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2];\ L[Cy] = CL[y]\ \ (C = \text{const}).$$

2^0. **Теорема подобия:**

$$L\left[y(\omega t)\right] = \frac{1}{\omega}\hat{y}\left(\frac{p}{\omega}\right) \quad (\omega > 0).$$

3^0. **Теорема смещения:**

$$L\left[e^{\alpha t}y(t)\right] = \hat{y}(p - \alpha) \quad (\alpha \in \mathbb{C}).$$

4^0. **Теорема запаздывания:**

$$L\left[y(t - a)\right] = e^{-ap}\hat{y}(p) \quad (a > 0).$$

5^0. **Изображение производных:**

$$L[y'(t)] = p\hat{y}(p) - y(0),$$

$$L[y''(t)] = p^2\hat{y}(p) - py(0) - y'(0),$$

$$\cdots$$

$$L\left[y^{(n)}(t)\right] = p^n\hat{y}(p) - p^{n-1}y(0) - p^{n-2}y'(0) - \ldots - py^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0).$$

6^0. **Изображение интеграла:**

$$L\left[\int_0^t y(s)\,ds\right]=\frac{\hat{y}(p)}{p}.$$

7^0. **Дифференцирование изображения:**

$$L\left[t^n y(t)\right]=(-1)^n\,\hat{y}^{(n)}(p)\quad \left(n-\text{целое}\ge 0\right).$$

8^0. **Интегрирование изображения:**

$$L\left[\frac{y(t)}{t}\right]=\int_p^\infty \hat{y}(s)\,ds.$$

Свойство 1^0 непосредственно следует из определения (1). Предлагаем доказать свойства 2^0–5^0. Отметим, что при доказательстве теоремы запаздывания существенно используется требование 2^0 в определении оригинала.

Замечание. В приложениях операционного исчисления к теории автоматического управления, радиотехнике, электротехнике оригинал $y(t)$ (выходной сигнал линейной стационарной цепи), как правило, удовлетворяет требованию $y(0)=0$. В этом случае первая формула 5^0 принимает вид

$$L[y'(t)]=p\hat{y}(p).$$

Это означает: основная операция математического анализа – дифференцирование – в переводе на язык L-изображений $\hat{y}(p)$ есть *операция умножения* на независимую переменную p. Аналогично формула 6^0 означает: другая основная операция математического анализа – интегрирование – в переводе на язык L-изображений есть *операция деления* на независимую переменную p. *Эти два факта позволяют в ряде случаев заменить задачи,* *требующие применение методов математического анализа, равносильными более простыми задачами алгебры. В этом состоит основной замысел операционного исчисления.*

Рассмотрим несколько примеров на применение формул 1^0–8^0.

Примеры. Найти *L*-изображения следующих функций.

1) $y(t)=1+2t$.

Решение. По формулам 1^0, 7^0 с учетом (2) имеем

$$L[1+2t]=L\left[1(t)\right]+2L\left[t\cdot 1(t)\right]=\frac{1}{p}+2\cdot(-1)\cdot\hat{1}'(p)=\frac{1}{p}-2\cdot\left(\frac{1}{p}\right)'=\frac{1}{p}+\frac{2}{p^2}=\frac{p+2}{p^2}.$$

2) $y(t)=\sin t$.

Решение. По формуле Эйлера и формулам 1^0, (3) получим

$$L[\sin t]=L\left[\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right]=\frac{1}{2i}\left(L\left[e^{it}\right]-L\left[e^{-it}\right]\right)=$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{p-i}-\frac{1}{p+i}\right]=\frac{p+i-p+i}{2i\left(p^2-i^2\right)}=\frac{1}{p^2+1}.$$

3) $y(t)=\sin 2t$.

Решение. Обозначим $z(t)=\sin t$, тогда $\hat{z}(p)=\dfrac{1}{p^2+1}$ (пример 2). По формуле 2^0 найдем

$$L[\sin 2t]=\frac{1}{2}\hat{z}\left(\frac{p}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{p}{2}\right)^2+1}=\frac{2}{p^2+4}.$$

4) $y(t)=e^{3t}\sin 2t$.

Решение. Обозначим $u(t)=\sin 2t$, тогда $\hat{u}(p)=\dfrac{2}{p^2+4}$ (пример 3).

По формуле 3^0

$$L\left[e^{3t}\sin 2t\right]=\hat{u}(p-3)=\frac{2}{(p-3)^2+4}=\frac{2}{p^2-6p+13}.$$

5) $y(t)=\sin(t-5)$.

Решение. Имеем по формуле 4^0

$$L[\sin t]=\frac{1}{p^2+1}; \qquad L[\sin(t-5)]=\frac{e^{-5p}}{p^2+1}.$$

6) $y(t)=\begin{cases} t-1, & t\in(1,3), \\ 0, & t\notin(1,3). \end{cases}$

Используем единичную функцию Хевисайда $1(t)=\begin{cases} 1, & t\ge 0, \\ 0, & t<0 \end{cases}$, т. е.

$$y(t)=(t-1)\cdot 1(t-1)-(t-1)\cdot 1(t-3),$$

$$y(t)=t\cdot 1(t-1)-1(t-1)-t\cdot 1(t-3)+1(t-3).$$

По формуле 4^0

$$L\left[1(t)\right]=\frac{1}{p}\Rightarrow L\left[1(t-1)\right]=\frac{e^{-p}}{p}, \quad L\left[1(t-3)\right]=\frac{e^{-3p}}{p}.$$

Аналогично примеру 1:

$$L\left[t\cdot 1(t-1)\right]=-\left(\frac{e^{-p}}{p}\right)'=-\frac{-e^{-p}\cdot p-e^{-p}}{p^2}=\frac{e^{-p}(p+1)}{p^2},$$

$$L\left[t\cdot 1(t-3)\right]=-\left(\frac{e^{-3p}}{p}\right)'=-\frac{-3e^{-3p}\cdot p-e^{-3p}}{p^2}=\frac{e^{-3p}(3p+1)}{p^2}.$$

По формуле 1^0 получим

$$L\left[y(t)\right]=\frac{e^{-p}(p+1)}{p^2}-\frac{e^{-p}}{p}-\frac{e^{-3p}(3p+1)}{p^2}+\frac{e^{-3p}}{p}=$$

$$=\frac{pe^{-p}+e^{-p}-pe^{-p}-3pe^{-3p}-e^{-3p}+pe^{-3p}}{p^2}=\frac{-2pe^{-3p}+e^{-p}-e^{-3p}}{p^2}.$$

7) $y(t)=t^2$.

Решение. По формуле 7^0 имеем

$$L\left[t^2\right]=L\left[t^2\cdot 1(t)\right]=(-1)^2\cdot\left(L\left[1(t)\right]\right)''=(-1)^2\cdot\left(\frac{1}{p}\right)''=\left(-\frac{1}{p^2}\right)'=\frac{2}{p^3}.$$

8) $y(t)=te^{2t}$.

Решение. По формулам 7^0 и (2)

$$L\left[te^{2t}\right]=(-1)\cdot\left(L\left[e^{2t}\right]\right)'=(-1)\cdot\left(\frac{1}{p-2}\right)'=\frac{1}{(p-2)^2}.$$

9) $y(t)=\int\limits_0^t se^{2s}ds$.

Решение. По формуле 6^0

$$L\left[\int\limits_0^t se^{2s}ds\right]=\frac{L\left[te^{2t}\right]}{p}=\frac{\frac{1}{(p-2)^2}}{p}=\frac{1}{p(p-2)^2}$$

(учтен результат примера 7).

10) $y(t)=\dfrac{e^{3t}-e^t}{t}$.

Решение. По формуле 8^0

$$L\left[\frac{e^{3t}-e^t}{t}\right]=\int\limits_p^\infty \hat{y}(s)ds,\ \text{где}\ \hat{y}(p)=L\left[e^{3t}-e^t\right].$$

Так как по формуле 3^0

$$L\left[e^{3t}-e^{t}\right]=L\left[e^{3t}\right]-L\left[e^{t}\right]=\frac{1}{p-3}-\frac{1}{p-1},$$

то

$$L\left[\frac{e^{3t}-e^{t}}{t}\right]=\int_{p}^{\infty}\left(\frac{1}{s-3}-\frac{1}{s-1}\right)ds=\lim_{b\to\infty}\left(\int_{p}^{b}\frac{d(s-3)}{s-3}-\int_{p}^{b}\frac{d(s-1)}{s-1}\right)=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(\ln|s-3|-\ln|s-1|\right)\Big|_{p}^{b}=\lim_{b\to\infty}\ln\left|\frac{s-3}{s-1}\right|\Bigg|_{p}^{b}=\lim_{b\to\infty}\left(\ln\left|\frac{b-3}{b-1}\right|-\ln\left|\frac{p-3}{p-1}\right|\right)=$$

$$=\ln 1-\ln\left|\frac{p-3}{p-1}\right|=\ln\left|\frac{p-1}{p-3}\right|.$$

Задания для самостоятельной работы.

Пользуясь свойствами преобразования Лапласа, найти L-изображения следующих функций:

а) $y(t)=3$; б) $y(t)=\cos t$; в) $y(t)=\cos 4t$;

г) $y(t)=e^{-3t}\cos 4t$; д) $y(t)=\operatorname{ch} t$; е) $y(t)=\begin{cases}3-t, & t\in(1,4),\\ 0, & t\notin(1,4).\end{cases}$;

ж) $y(t)=t\cos t$; з) $y(t)=t^2\sin t$; и) $y(t)=t^3$;

к) $y(t)=\int_0^t \sin s\,ds$; л) $y(t)=\int_0^t s^2e^{-s}ds$; м) $y(t)=\dfrac{\sin 2t\cdot\sin 4t}{t}$.

Ответы:

а) $L[3]=\dfrac{3}{p}$; б) $L[\cos t]=\dfrac{p}{p^2+1}$;

в) $L[\cos 4t]=\dfrac{p}{p^2+16}$; г) $L\left[e^{-3t}\cos 4t\right]=\dfrac{p+3}{p^2+6p+25}$;

д) $L[\operatorname{ch} t] = \dfrac{p}{p^2 - 1}$; е) $L\left[y(t)\right] = \dfrac{(2p-1)e^{-p} + (p+1)e^{-4p}}{p^2}$;

ж) $L[t\cos t] = \dfrac{p^2 - 1}{\left(p^2+1\right)^2}$; з) $L\left[t^2 \sin t\right] = \dfrac{6p^2 - 2}{\left(p^2+1\right)^3}$;

и) $L\left[t^3\right] = \dfrac{6}{p^4}$; к) $L\left[\int_0^t \sin s\, ds\right] = \dfrac{1}{p\left(p^2+1\right)}$;

л) $L\left[\int_0^t s^2 e^{-s}\, ds\right] = \dfrac{2}{p(p+1)^3}$; м) $L\left[\dfrac{\sin 2t \cdot \sin 4t}{t}\right] = \dfrac{1}{4} \ln \dfrac{p^2 + 36}{p^2 + 4}$.

§ 4. ТАБЛИЦА НЕКОТОРЫХ *L*-ИЗОБРАЖЕНИЙ

Далее при вычислении *L*-изображений будут использоваться приводимые в таблице формулы 1–16; первые две доказаны выше, остальные доказываются с помощью приемов, примененных при решении примеров в § 3.

	$y(t)$	$\hat{y}(p)$		$y(t)$	$\hat{y}(p)$
1.	$1(t)$	$\frac{1}{p}$	9.	$e^{\alpha t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$
2.	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$	10.	$e^{\alpha t}\cos\omega t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$
3.	$t^n\ \ (n-\text{целое})$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	11.	$e^{\alpha t}\operatorname{sh}\omega t$	$\frac{\omega}{(p-\alpha)^2-\omega^2}$
4.	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	12.	$e^{\alpha t}\operatorname{ch}\omega t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2-\omega^2}$
5.	$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	13.	$t\sin\omega t$	$\frac{2\omega p}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$
6.	$\operatorname{sh}\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$	14.	$t\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$
7.	$\operatorname{ch}\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$	15.	$t\operatorname{sh}\omega t$	$\frac{2\omega p}{\left(p^2-\omega^2\right)^2}$
8.	$e^{\alpha t}\cdot t^n$	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$	16.	$t\operatorname{ch}\omega t$	$\frac{p^2+\omega^2}{\left(p^2-\omega^2\right)^2}$

Подробные таблицы *L*-изображений содержатся в книге [4].

Примеры. Пользуясь свойствами преобразования Лапласа и таблицей L-изображений, найти L-изображения следующих функций.

1) $y(t) = e^{-2t} \sin 2t \cos 3t$.

Решение. Представим произведение $\sin 2t \cos 3t$ в виде разности синусов: $\sin 2t \cos 3t = \frac{1}{2}[\sin 5t - \sin t]$. Пользуясь теоремой линейности и затем формулой 9 из таблицы, получим

$$\hat{y}(p) = \frac{1}{2}\left(L\left[e^{-2t}\sin 5t\right] - L\left[e^{-2t}\sin t\right]\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{(p+2)^2+25} - \frac{1}{(p+2)^2+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{5\left(p^2+4p+5\right)-\left(p^2+4p+29\right)}{\left(p^2+4p+29\right)\left(p^2+4p+5\right)} = \frac{2\left(p^2+4p-1\right)}{\left(p^2+4p+29\right)\left(p^2+4p+5\right)}.$$

2) $y(t) = a^t \ (a > 0)$.

Решение. Имеем $a = e^{\ln a}$, поэтому $y(t) = e^{(\ln a)t}$. По формуле 2 из таблицы найдем

$$\hat{y}(p) = \frac{1}{p - \ln a}.$$

3) $y(t) = \cos^3 t$.

Решение. Представляя $\cos t$ формулой Эйлера, получим

$$\cos^3 t = \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{i3t} + 3e^{it} + 3e^{-it} + e^{-i3t}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{e^{i3t}+e^{-i3t}}{2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \frac{1}{4}\cos 3t + \frac{3}{4}\cos t.$$

По теореме линейности и формуле 5 из таблицы найдем

$$\hat{y}(p) = \frac{1}{4}\cdot\frac{p}{p^2+9} + \frac{3}{4}\cdot\frac{p}{p^2+1} = \frac{p^3+7p}{\left(p^2+1\right)\left(p^2+9\right)}.$$

Задания для самостоятельной работы.

Найти L-изображения следующих функций:

а) $y(t)=2e^{-3t}+5-2\cos 4t$;

б) $y(t)=(t+2)\cos t$;

в) $y(t)=\sin^3 t$;

г) $y(t)=e^{-3t}\sin t\cos 3t$;

д) $y(t)=\operatorname{sh}2t\sin t$;

е) $y(t)=t\operatorname{ch}\dfrac{t}{2}$.

Ответы:

а) $L\left[2e^{-3t}+5-2\cos 4t\right]=\dfrac{5p^3+9p^2+112p+240}{p(p+3)\left(p^2+16\right)}$;

б) $L\left[(t+2)\cos t\right]=\dfrac{2p^3+p^2+2p-1}{\left(p^2+1\right)^2}$;

в) $L\left[\sin^3 t\right]=\dfrac{6}{\left(p^2+9\right)\left(p^2+1\right)}$;

г) $L\left[e^{-3t}\sin t\cos 3t\right]=\dfrac{p^2+6p+1}{\left(p^2+6p+25\right)\left(p^2+6p+13\right)}$;

д) $L\left[\operatorname{sh}2t\sin t\right]=\dfrac{4p}{\left(p^2-4p+5\right)\left(p^2+4p+5\right)}$;

е) $L\left[t\operatorname{ch}\dfrac{t}{2}\right]=\dfrac{p^2+\dfrac{1}{4}}{\left(p^2-\dfrac{1}{4}\right)^2}$.

§ 5. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ОРИГИНАЛА ПО ЕГО *L*-ИЗОБРАЖЕНИЮ

Одно из замечательных свойств преобразования Лапласа, широко используемое в приложениях операционного исчисления, состоит в том, что *по L-изображению* $\hat{y}(p)$ *может быть восстановлен оригинал* $y(t)$. Имеется общая формула, решающая эту задачу, называемая обратным преобразованием Лапласа [2] . Эта формула неудобна для практического применения, поэтому ее здесь не приводим. Для многих приложений достаточно приводимое ниже частное правило, основанное на теории вычетов для аналитических функций комплексного переменного [4].

Напомним, что рациональная дробь (отношение двух многочленов)

$$f(p)=\frac{b(p)}{a(p)}=\frac{b_0 p^m+b_1 p^{m-1}+\ldots+b_m}{a_0 p^n+a_1 p^{n-1}+\ldots+a_n}$$

называется *правильной*, если степень числителя $b(p)$ меньше степени знаменателя $a(p)$: $m<n$. В силу основной теоремы алгебры комплексных чисел имеет место разложение

$$a(p)=a_0(p-p_1)^{n_1}(p-p_2)^{n_2}\ldots(p-p_s)^{n_s}, \tag{4}$$

$n_1+\ldots+n_s=n$. Числа $p_1,\ldots,p_s$ являются корнями многочлена $a(p)$ кратности соответственно $n_1,\ldots,n_s$.

Теорема 1. *Пусть L-изображение* $\hat{y}(p)$ *оригинала* $y(t)$ *– правильная рациональная дробь со знаменателем (4). Тогда для вычисления оригинала* $y(t)$ *имеет место формула*

$$y(t)=\sum_{k=1}^{s}\frac{1}{(n_k-1)!}\left[e^{pt}(p-p_k)^{n_k}\,\hat{y}(p)\right]_{p=p_k}^{(n_k-1)}, \tag{5}$$

называемая формулой обращения.

Следует помнить, что здесь производная порядка $n_k - 1$ вычисляется (после сокращения в квадратных скобках на $(p - p_k)^{n_k}$) по *комплексному переменному* p при фиксированном t. В частном случае, когда p_k – простой корень $\left(n_k = 1, \quad (n_k - 1)! = 0! = 1\right)$, под производной порядка 0 понимается сама функция.

Примеры. Найти оригиналы по данным L-изображениям.

1) $\hat{y}(p) = \dfrac{p}{(p-1)(p-2)(p-3)}$.

Решение. Здесь $n_1 = n_2 = n_3 = 1$. По формуле обращения (5)

$$y(t) = \left[e^{pt}(p-1)\hat{y}(p)\right]_{p=1} + \left[e^{pt}(p-2)\hat{y}(p)\right]_{p=2} + \left[e^{pt}(p-3)\hat{y}(p)\right]_{p=3} =$$

$$= \left.\frac{pe^{pt}}{(p-2)(p-3)}\right|_{p=1} + \left.\frac{pe^{pt}}{(p-1)(p-3)}\right|_{p=2} + \left.\frac{pe^{pt}}{(p-1)(p-2)}\right|_{p=3} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{t} - 4e^{2t} + 3e^{3t}\right).$$

2) $\hat{y}(p) = \dfrac{1}{(p-1)^2(p-2)}$.

Решение. По формуле (5)

$$y(t) = \frac{1}{(2-1)!}\left[e^{pt}(p-1)^2\,\hat{y}(p)\right]_{p=1}^{(2-1)} + \left[e^{pt}(p-2)\hat{y}(p)\right]_{p=2} =$$

$$= \left.\left(\frac{e^{pt}}{p-2}\right)'\right|_{p=1} + \left.\frac{e^{pt}}{(p-1)^2}\right|_{p=2} = \left.\frac{te^{pt}(p-2) - e^{pt}}{(p-2)^2}\right|_{p=1} + e^{2t} =$$

$$= -te^{t} - e^{t} + e^{2t} = e^{2t} - (t+1)e^{t}.$$

3) $\hat{y}(p)=\dfrac{1}{(p-4)^3}$.

Решение. По формуле (5)

$$y(t)=\frac{1}{2!}\Big[e^{pt}(p-4)^3\hat{y}(p)\Big]''_{p=4}=\frac{1}{2!}\Big(e^{pt}\Big)''\Big|_{p=4}=\frac{1}{2}t^2e^{pt}\Big|_{p=4}=\frac{t^2e^{4t}}{2}.$$

4) $\hat{y}(p)=\dfrac{1}{p\left(p^2+1\right)}$.

Решение. Разложим знаменатель на множители и применим формулу (5).

$$\hat{y}(p)=\frac{1}{p(p-i)(p+i)},$$

$$y(t)=\left[e^{pt}p\hat{y}(p)\right]_{p=0}+\left[e^{pt}(p-i)\hat{y}(p)\right]_{p=i}+\left[e^{pt}(p+i)\hat{y}(p)\right]_{p=-i}=$$

$$=\frac{e^{pt}}{(p-i)(p+i)}\bigg|_{p=0}+\frac{e^{pt}}{p(p+i)}\bigg|_{p=i}+\frac{e^{pt}}{p(p-i)}\bigg|_{p=-i}=$$

$$=\frac{1}{-i^2}+\frac{e^{it}}{2i^2}+\frac{e^{-it}}{2i^2}=1-\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}=1-\cos t.$$

Замечание. Для вычисления оригиналов может быть использовано правило разложения правильной рациональной дроби в сумму простейших дробей. В рассмотренном выше примере 1) разложение имеет вид

$$\frac{p}{(p-1)(p-2)(p-3)}=\frac{A}{p-1}+\frac{B}{p-2}+\frac{C}{p-3}.$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов A, B, C в правой части равенства приведем дроби к общему знаменателю и уравняем числители:

$$\frac{p}{(p-1)(p-2)(p-3)}=\frac{A(p-2)(p-3)+B(p-1)(p-3)+C(p-1)(p-2)}{(p-1)(p-2)(p-3)},$$

$$p=A(p-2)(p-3)+B(p-1)(p-3)+C(p-1)(p-2).$$

Придавая конкретные значения аргументу p, получим значения коэффициентов:

$$p=1:\quad 1=2A,\quad A=\frac{1}{2},$$
$$p=2:\quad 2=-B,\quad B=-2,$$
$$p=3:\quad 3=2C,\quad C=\frac{3}{2},$$

$$\frac{p}{(p-1)(p-2)(p-3)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-1}-\frac{2}{p-2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{p-3}.$$

Применяя к слагаемым формулу 2 из таблицы изображений и затем теорему линейности (справа налево), получим результат

$$y(t)=\frac{1}{2}e^{t}-2e^{2t}+\frac{3}{2}e^{3t},$$

совпадающий с полученным выше по формуле обращения. В примере 2) разложение имеет вид

$$\frac{1}{(p-1)^2(p-2)}=\frac{A}{p-1}+\frac{B}{(p-1)^2}+\frac{C}{p-2}.$$

Отсюда следует

$$\frac{1}{(p-1)^2(p-2)}=\frac{A(p-1)(p-2)+B(p-2)+C(p-1)^2}{(p-1)^2(p-2)},$$

$$1=A(p-1)(p-2)+B(p-2)+C(p-1)^2,$$

$$p=1:\quad 1=-B,\quad B=-1,$$
$$p=2:\quad 1=C,\quad C=1,$$
$$p=3:\quad 1=2A+B+4C,\quad A=\frac{1}{2}(1+1-4),\quad A=-1,$$

$$\frac{1}{(p-1)^2(p-2)}=-\frac{1}{p-1}-\frac{1}{(p-1)^2}+\frac{1}{p-2}.$$

Применение теоремы линейности и формул 2, 8 из таблицы изображений дает формулу для $y(t)$, полученную выше по формуле обращения. В примере 4) разложение имеет вид

$$\frac{1}{p\left(p^2+1\right)}=\frac{A}{p}+\frac{Bp+C}{p^2+1},$$

т. е.
$$\frac{A}{p}+\frac{Bp+C}{p^2+1}=\frac{A\left(p^2+1\right)+p\left(Bp+C\right)}{p\left(p^2+1\right)}.$$

Отсюда следует

$$1=Ap^2+A+Bp^2+Cp,$$

т. е.
$$1=\left(A+B\right)p^2+Cp+A.$$

Приравнивая коэффициенты при p^2, p^1, p^0, получим

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1. \\ C=0 \end{cases}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{p\left(p^2+1\right)}=\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+1}.$$

Применение теоремы линейности и формул 1, 5 из таблицы изображений дает формулу для $y(t)$, полученную выше по формуле обращения.

Задания для самостоятельной работы.

Восстановить оригиналы по данным L-изображениям:

а) $\hat{y}(p)=\dfrac{1}{(p-1)\left(p^2-4\right)}$;

б) $\hat{y}(p)=\dfrac{p-3}{p^2+4}$;

в) $\hat{y}(p)=\dfrac{1}{p^3(p-1)}$;

г) $\hat{y}(p)=\dfrac{p}{p^2+p-2}$;

д) $\hat{y}(p)=\dfrac{1}{\left(p^2+1\right)^2}$.

Ответы:

а) $y(t)=-\dfrac{1}{3}e^t+\dfrac{1}{4}e^{2t}+\dfrac{1}{12}e^{-2t}$;

б) $y(t)=\cos 2t-\dfrac{3}{2}\sin 2t$;

в) $y(t)=-1-t-\dfrac{t^2}{2}+e^t$;

г) $y(t)=\dfrac{1}{3}e^t+\dfrac{2}{3}e^{-2t}$;

д) $y(t)=-\dfrac{t}{2}\cos t+\dfrac{1}{2}\sin t$.

§ 6. ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К РЕШЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим задачу Коши для линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(t), \\ y(0) = c_0, \quad y'(0) = c_1, \ \ldots, \ y^{(n-1)}(0) = c_{n-1}. \end{cases} \tag{6}$$

Здесь c_k – заданные числа (k = 0, 1, …, n–1). Будем предполагать, что правая часть $f(t)$ удовлетворяет требованиям 1^0–3^0 в определении оригинала. Из теории линейных дифференциальных уравнений следует: в этом случае решение $y(t)$ и его производные всех порядков также удовлетворяют 1^0–3^0.

Применяя к обеим частям уравнения (6) операцию L, после вычислений с учетом теоремы линейности, формул для L-изображения производных (свойство 5^0 преобразования Лапласа) и начальных условий (6) получим соотношение вида

$$\left(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n\right)\hat{y}(p) - c(p) = \hat{f}(p), \tag{7}$$

где $c(p)$ – многочлен с коэффициентами, которые находятся по числам c_k, откуда следует:

$$\hat{y}(p) = \frac{\hat{f}(p) + c(p)}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n}.$$

Применение правила восстановления оригинала по его L-изображению дает искомое решение $y(t)$ задачи Коши (6).

Обратим внимание, что в изложенной процедуре наглядно просматривается основной замысел операционного исчисления: дифференциальное уравнение (6) для оригинала $y(t)$ заменено *эквивалентным существенно более простым алгебраическим уравнением* (7) *для изображения* $\hat{y}(p)$.

Примеры. Решить операционным методом следующие задачи Коши.

1) $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = e^t, \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$

Решение. По теореме линейности имеем

$$L[y''] - 3L[y'] + 2L[y] = L\left[e^t\right].$$

Формулы 5^0 § 3 для L-изображений производных с учетом начальных условий дают:

$$L[y'(t)] = p\hat{y}(p) - y(0) = p\hat{y}(p),$$

$$L[y''(t)] = p^2\hat{y}(p) - py(0) - y'(0) = p^2\hat{y}(p).$$

Подставляя с учетом равенства $L\left[e^t\right] = \dfrac{1}{p-1}$, получим

$$\left(p^2 - 3p + 2\right)\hat{y}(p) = \frac{1}{p-1},$$

откуда

$$\hat{y}(p) = \frac{1}{(p-1)\left(p^2 - 3p + 2\right)} = \frac{1}{(p-1)^2(p-2)}.$$

По формуле обращения (5) найдем (см. пример 2 в § 5)

$$y(t) = e^{2t} - (t+1)e^t.$$

2) $\begin{cases} y'' + y = \cos t, \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$

Решение. С учетом формулы $L[\cos t] = \dfrac{p}{p^2+1}$ аналогично предыдущему примеру получим

$$\left(p^2 + 1\right)\hat{y}(p) = \frac{p}{p^2+1},$$

откуда

$$\hat{y}(p)=\frac{p}{\left(p^2+1\right)^2}=\frac{p}{(p-i)^2(p+i)^2}.$$

По формуле обращения (5)

$$y(t)=\left[e^{pt}(p-i)^2\,\hat{y}(p)\right]'_{p=i}+\left[e^{pt}(p+i)^2\,\hat{y}(p)\right]'_{p=-i}=$$

$$=\left(\frac{pe^{pt}}{(p+i)^2}\right)'\Bigg|_{p=i}+\left(\frac{pe^{pt}}{(p-i)^2}\right)'\Bigg|_{p=-i}=$$

$$=\frac{\left(e^{pt}+pte^{pt}\right)(p+i)^2-2(p+i)pe^{pt}}{(p+i)^4}\Bigg|_{p=i}+\frac{\left(e^{pt}+pte^{pt}\right)(p-i)^2-2(p-i)pe^{pt}}{(p-i)^4}\Bigg|_{p=-i}=$$

$$=\frac{\left(e^{pt}+pte^{pt}\right)(p+i)-2pe^{pt}}{(p+i)^3}\Bigg|_{p=i}+\frac{\left(e^{pt}+pte^{pt}\right)(p-i)-2pe^{pt}}{(p-i)^3}\Bigg|_{p=-i}=$$

$$=\frac{2ie^{it}-2te^{it}-2ie^{it}}{8i^3}+\frac{-2ie^{-it}-2te^{-it}+2ie^{-it}}{-8i^3}=$$

$$=\frac{te^{it}}{4i}-\frac{te^{-it}}{4i}=\frac{t}{2}\cdot\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}=\frac{t\sin t}{2}.$$

§ 7. ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К РЕШЕНИЮ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим задачу Коши для системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + f_1(t), \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + f_2(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_n + \ldots + a_{nn}x_n + f_n(t), \end{cases}$$
$$x_1(0) = c_1,\ x_2(0) = c_2, \ldots, x_n(0) = c_n.$$

Здесь $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ – неизвестные функции; $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n$ – их производные по времени t. Обозначим

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \ldots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \qquad f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \ldots \\ f_n(t) \end{bmatrix}, \qquad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \ldots \\ c_n \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ & . \ . \ . & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

тогда задача Коши примет вид

$$\dot{x} = Ax + f(t), \quad x(0) = c \tag{8}$$

(производная столбца – столбец производных). Будем, как и в § 6, предполагать, что правая часть $f(t)$ удовлетворяет (поэлементно) требованиям 1^0–3^0 в определении оригинала, тогда, в силу теории линейных систем, решение $x(t)$ задачи Коши и его производная $\dot{x}(t)$ удовлетворяют 1^0–3^0.

Применяя к обеим частям уравнения (8) операцию L и вынося постоянный матричный множитель за знак L-изображения, получим

$$p\,\hat{x}(p) - x(0) = A\hat{x}(p) + \hat{f}(p)$$

(L-изображение столбца – столбец L-изображений) или, что то же самое,

$$(pI - A)\hat{x}(p) = \hat{f}(p) + c\,.$$

Здесь I – единичная матрица порядка n, учтено $x(0)=c$. Умножим обе части равенства слева на матрицу, обратную к $pI-A$:

$$\hat{x}(p)=(pI-A)^{-1}\left[\hat{f}(p)+c\right]. \tag{9}$$

Вычисляя по этой формуле по правилам линейной алгебры столбец $\hat{x}(p)$ и затем применяя поэлементно правило восстановления оригинала по его L-изображению, получим искомое решение $x(t)$ задачи Коши (8).

Примеры. Решить операционным методом следующие задачи Коши.

1) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 + e^t, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2, \end{cases}$
$x_1(0)=x_2(0)=0.$

Решение. Вводя обозначения $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $f=\begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}$, $c=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, приведем задачу Коши к виду (8). По формуле (9)

$$\hat{x}(p)=(pI-A)^{-1}\hat{f}(p).$$

Здесь

$$pI-A=\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p-2 & -1 \\ -1 & p-2 \end{bmatrix},\ \hat{f}(p)=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{p-1} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

По формуле для обращения матрицы второго порядка

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix},\ \Delta=ad-bc\neq 0,$$

получим

$$(pI-A)^{-1}=\frac{1}{(p-2)^2-1}\begin{bmatrix} p-2 & 1 \\ 1 & p-2 \end{bmatrix}=\frac{1}{p^2-4p+3}\begin{bmatrix} p-2 & 1 \\ 1 & p-2 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, с учетом $p^2-4p+3=(p-1)(p-3)$,

$$\hat{x}(p)=\begin{bmatrix}\hat{x}_1(p)\\ \hat{x}_2(p)\end{bmatrix}=\frac{1}{(p-1)(p-3)}\begin{bmatrix}p-2 & 1\\ 1 & p-2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\dfrac{1}{p-1}\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{p-2}{(p-1)^2(p-3)}\\ \dfrac{1}{(p-1)^2(p-3)}\end{bmatrix}.$$

Пусть $\hat{x}_1(p)=\dfrac{p-2}{(p-1)^2(p-3)}$. По формуле обращения (5) получим

$$x_1(t)=\frac{1}{(2-1)!}\left[e^{pt}(p-1)^2\,\hat{y}(p)\right]_{p=1}^{(2-1)}+\left[e^{pt}(p-3)\hat{y}(p)\right]_{p=3}=$$

$$=\left(\frac{e^{pt}(p-2)}{p-3}\right)'\Bigg|_{p=1}+\frac{e^{pt}(p-2)}{(p-1)^2}\Bigg|_{p=3}=$$

$$=\frac{\left(e^{pt}+(p-2)te^{pt}\right)(p-3)-e^{pt}(p-2)}{(p-3)^2}\Bigg|_{p=1}+\frac{e^{3t}}{4}=\frac{-2e^t+2te^t+e^t}{4}+\frac{e^{3t}}{4},$$

$$x_1(t)=\frac{(2t-1)e^t+e^{3t}}{4}.$$

Аналогично, $\hat{x}_2(p)=\dfrac{1}{(p-1)^2(p-3)}$. По формуле (5) получим

$$x_1(t)=\frac{1}{(2-1)!}\left[e^{pt}(p-1)^2\,\hat{y}(p)\right]_{p=1}^{(2-1)}+\left[e^{pt}(p-3)\hat{y}(p)\right]_{p=3}=$$

$$=\left(\frac{e^{pt}}{p-3}\right)'\Bigg|_{p=1}+\frac{e^{pt}}{(p-1)^2}\Bigg|_{p=3}==\frac{te^{pt}(p-3)-e^{pt}}{(p-3)^2}\Bigg|_{p=1}+\frac{e^{3t}}{4}=\frac{-2te^t-e^t}{4}+\frac{e^{3t}}{4},$$

$$x_2(t)=-\frac{(2t+1)e^t+e^{3t}}{4}.$$

2) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_2 + 4x_3, \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_3, \end{cases}$

$x_1(0) = 13,\ x_2(0) = 12, ...,\ x_3(0) = 2.$

Решение. Введем обозначения:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 13 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

тогда задача Коши примет вид

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = c.$$

Применяя к обеим частям уравнения операцию L и вынося постоянный матричный множитель за знак L-изображения, получим

$$p\hat{x}(p) - x(0) = A\hat{x}(p), \Rightarrow \quad \begin{cases} p\hat{x}_1 - 13 = 2\hat{x}_1 + \hat{x}_2, \\ p\hat{x}_2 - 12 = 2\hat{x}_2 + 4\hat{x}_3, \\ p\hat{x}_3 - 2 = \hat{x}_1 - \hat{x}_3, \end{cases}$$

или, что то же,

$$(pI - A)\hat{x}(p) = c, \Rightarrow \quad \begin{cases} (p-2)\hat{x}_1 - \hat{x}_2 = 13, \\ (p-2)\hat{x}_2 - 4\hat{x}_3 = 12, \\ -\hat{x}_1 + (p+1)\hat{x}_3 = 2. \end{cases}$$

Полученную систему решим по формулам Крамера:

$$\hat{x}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \hat{x}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \hat{x}_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} p-2 & -1 & 0 \\ 0 & p-2 & -4 \\ -1 & 0 & p+1 \end{vmatrix} = p^3 - 4p^2 + 4p + p^2 - 4p + 4 - 4 - 0 = p^3 - 3p^2 = p^2(p-3),$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 13 & -1 & 0 \\ 12 & p-2 & -4 \\ 2 & 0 & p+1 \end{vmatrix} = 13p^2 - 13p - 26 + 8 - (-12p - 12) = 13p^2 - p - 6,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} p-2 & 13 & 0 \\ 0 & 12 & -4 \\ -1 & 2 & p+1 \end{vmatrix} = 12p^2 - 12p - 24 + 52 - (-8p + 16) = 12p^2 - 4p + 12,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} p-2 & -1 & 13 \\ 0 & p-2 & 12 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2p^2 - 8p + 8 + 12 - (-13p + 26) = 2p^2 + 5p - 6.$$

Подставляя полученные значения определителей в формулы, получим

$$\hat{x}_1(p) = \frac{13p^2 - p - 6}{p^2(p-3)},$$

$$\hat{x}_2(p) = \frac{12p^2 - 4p + 12}{p^2(p-3)},$$

$$\hat{x}_3(p) = \frac{2p^2 + 5p - 6}{p^2(p-3)}.$$

Для вычисления оригиналов разложим правильные рациональные дроби в сумму простейших дробей:

$$\frac{\Delta_k}{p^2(p-3)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p-3} \quad (k = 1, 2, 3).$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов A, B, C в правой части равенства приведем дроби к общему знаменателю и уравняем числители:

$$\Delta_k = Ap(p-3) + B(p-3) + Cp^2 \quad (k = 1, 2, 3),$$

т. е. $$13p^2 - p - 6 = Ap(p-3) + B(p-3) + Cp^2.$$

Придавая конкретные значения аргументу p, получим значения коэффициентов:

$$p=0:\quad -6=-3B,\quad B=2,$$
$$p=3:\quad 108=9C,\quad C=12,$$
$$p=2:\quad 44=-2A-B+4C,\quad A=1,$$

$$\frac{13p^2-p-6}{p^2(p-3)}=\frac{1}{p}+\frac{2}{p^2}+\frac{12}{p-3}.$$

Применяя к слагаемым формулы 2, 3 из таблицы изображений и затем теорему линейности (справа налево), получим результат:

$$\underline{x_1(t)=1+2t+12e^{3t}}.$$

Аналогично,

$$12p^2-4p+12=Ap(p-3)+B(p-3)+Cp^2,$$

$$p=0:\quad 12=-3B,\quad B=-4,$$
$$p=3:\quad 108=9C,\quad C=12,$$
$$p=2:\quad 52=-2A-B+4C,\quad A=0,$$

$$\frac{12p^2-4p+12}{p^2(p-3)}=-\frac{4}{p^2}+\frac{12}{p-3},$$

$$\underline{x_2(t)=-4t+12e^{3t}}.$$

$$2p^2+5p-6=Ap(p-3)+B(p-3)+Cp^2,$$

$$p=0:\quad -6=-3B,\quad B=2,$$
$$p=3:\quad 27=9C,\quad C=3,$$
$$p=2:\quad 12=-2A-B+4C,\quad A=-1,$$

$$\frac{2p^2+5p-6}{p^2(p-3)}=-\frac{1}{p}+\frac{2}{p^2}+\frac{3}{p-3},$$

$$\underline{x_3(t)=-1+2t+3e^{3t}}.$$

Задания для самостоятельной работы.

Решить операционным методом задачу Коши:

а) $\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = e^t, \\ y(0) = y'(0) = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y'' - y' = t e^t, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y'' + y = \sin t, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + x_2 + e^{-t}, \end{cases}$
$x_1(0) = x_2(0) = 0;$

д) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 - 2x_2 + e^{2t}, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2, \end{cases}$
$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0;$

е) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \cos t, \end{cases}$
$x_1(0) = x_2(0) = 0;$

ж) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 + x_3, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - x_3, \\ \dot{x}_3 = -x_2 + 2x_3, \end{cases}$
$x_1(0) = 4,\ x_2(0) = -3,\ x_3(0) = 2.$

Ответы:

а) $y(t) = \dfrac{1}{4}e^{3t} - \dfrac{2t+1}{4}e^t;$

б) $y(t) = \left(\dfrac{t^2}{2} - t + 1\right)e^t;$

в) $y(t) = -\dfrac{t}{2}\cos t + \dfrac{3}{2}\sin t;$

г) $x_1(t) = \dfrac{1}{8}e^{3t} - \dfrac{1+4t}{8}e^{-t},\ x_2(t) = \dfrac{1}{8}e^{3t} + \dfrac{-1+4t}{8}e^{-t};$

д) $x_1(t) = e^{2t}(2\sin t + 1),\ x_2(t) = e^{2t}(\sin t - \cos t + 1);$

е) $x_1(t) = \dfrac{t}{2}\sin t,\ x_2(t) = \dfrac{t}{2}\cos t + \dfrac{1}{2}\sin t;$

ж) $x_1(t) = (1+2t)e^t + 3e^{2t},\ x_2(t) = (-3+2t)e^t,\ x_3(t) = (-1+2t)e^t + 3e^{2t}.$

§ 8. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ ЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ЦЕПИ

В теории автоматического управления широко применяется описание функционирования автоматических устройств на языке «вход – выход» (рис. 8).

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\quad A \quad} \longrightarrow y(t)$$

Рис. 8

Здесь $x(t)$ – входной сигнал (входное воздействие),

$y(t)$ – выходной сигнал (реакция на входное воздействие),

A – правило работы системы:

$$y(t) = A\,x(t).$$

Определение 2. Автоматическое устройство называется *линейной цепью*, если выполняется *принцип суперпозиции*:

$$A(x_1 + ... + x_s) = Ax_1 + ... + Ax_s,$$

т. е. если реакция устройства на суперпозицию (результат наложения) нескольких входных воздействий равна сумме реакций на отдельные воздействия.

Определение 3. Автоматическое устройство называется *стационарной цепью*, если форма выходного сигнала полностью определяется формой входного сигнала:

$$A\,x(t - t_0) = y(t - t_0) \text{ при всех } t_0 \geq 0.$$

В ряде случаев входной и выходной сигналы линейной стационарной цепи связаны соотношением вида

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = b_0 x^{(m)} + b_1 x^{(m-1)} + \ldots + b_m x\,, \tag{10}$$

где a_k, b_k– постоянные; в этой ситуации свойства линейности и стационарности следуют из теории линейных дифференциальных уравнений. Применяя при нулевых начальных условиях

$$x(0) = x'(0) = \ldots = x^{(m-1)}(0) = y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0$$

к обеим частям равенства (10) операцию L, получим

$$\left(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n\right)\hat{y}(p) = \left(b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m\right)\hat{x}(p)\,,$$

откуда

$$\hat{y}(p) = W(p)\hat{x}(p), \tag{11}$$

где

$$W(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n}. \tag{12}$$

Определение 4. Рациональная дробь (12) называется *передаточной функцией* линейной стационарной цепи (10).

Формула (11) задает правило работы цепи на языке L-изображений: на этом языке реакция цепи на входное воздействие сводится к умножению на «передаточный коэффициент» $W(p)$. В теории автоматического управления, радиотехнике, электротехнике широко применяется задание линейных стационарных цепей с помощью передаточной функции (рис. 9).

$$\hat{x}(p) \longrightarrow \boxed{\;W(p)\;} \longrightarrow \hat{y}(p)$$

Рис. 9

Пример. Входным сигналом радиоприемника является падение напряжения $U(t)$ на зажимах антенны, выходным сигналом (с точностью до трансформации электрической энергии в звуковую) – контурный ток $I(t)$, возбуждаемый в колебательном контуре (рис. 10).

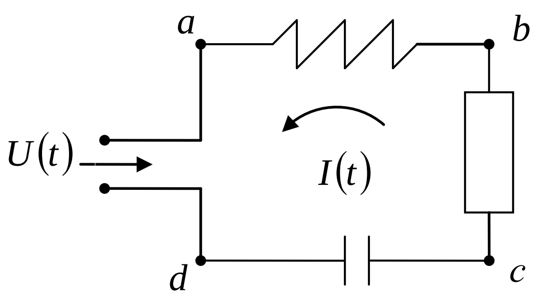

Рис. 10

По второму закону Кирхгофа (закону напряжений) сумма падений напряжения на двуполюсниках ab, bc и cd равна падению напряжения на двуполюснике ad:

$$U_{ab} + U_{bc} + U_{cd} = U(t). \tag{13}$$

По правилам электротехники

$$U_{ab} = L\dot{I}\,,\ U_{bc} = RI\,,\ U_{cd} = \frac{1}{C}\int I\,dt\,,$$

где L, R, C – положительные постоянные. Подставляя эти выражения в (13) и дифференцируя обе части равенства по t (чтобы избавиться от интеграла), получим соотношение вида (10):

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = \dot{U}(t).$$

Применяя к обеим частям при нулевых начальных условиях операцию *L*, получим

$$\left(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}\right)\hat{I}(p) = p\hat{U}(p),$$

откуда $\hat{I}(p) = W(p)\hat{U}(p)$, где

$$W(p) = \frac{p}{L\,p^2 + R\,p + \dfrac{1}{C}}. \tag{14}$$

Таким образом, радиоприемник – линейная стационарная цепь с передаточной функцией (14).

Замечание 1. Фундаментальное свойство линейной стационарной цепи, которое может быть принято за определение, состоит в том, что она *переводит одночастотный сигнал* (гармонику) *в сигнал той же частоты*:

$$x(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \quad \Rightarrow \quad y(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Отношение

$$K(\omega) = \frac{A_2}{A_1}$$

называется *коэффициентом усиления* на частоте ω или *частотной характеристикой* линейной стационарной цепи. Справедлива формула

$$K(\omega) = |W(i\omega)| \tag{15}$$

(частотная характеристика равна модулю передаточной функции при $p = i\omega$).

Вычислим по формулам (14), (15) частотную характеристику радиоприемника:

$$W(i\omega) = \frac{i\omega}{L(i\omega)^2 + Ri\omega + \dfrac{1}{C}} = \frac{i\omega}{\dfrac{1}{C} - L\omega^2 + Ri\omega} = \frac{i\omega\left(\dfrac{1}{C} - L\omega^2 - Ri\omega\right)}{\left(\dfrac{1}{C} - L\omega^2 + Ri\omega\right)\left(\dfrac{1}{C} - L\omega^2 - Ri\omega\right)} =$$

$$= \frac{R\omega^2 + \omega\left(\dfrac{1}{C} - L\omega^2\right)i}{\left(\dfrac{1}{C} - L\omega^2\right)^2 + R^2\omega^2} = \frac{R + \left(\dfrac{1}{C\omega} - L\omega\right)i}{\left(\dfrac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2 + R^2},$$

то есть

$$\operatorname{Re}W(i\omega)=\frac{R}{\left(\frac{1}{C\omega}-L\omega\right)^2+R^2},\quad \operatorname{Im}W(i\omega)=\frac{\frac{1}{C\omega}-L\omega}{\left(\frac{1}{C\omega}-L\omega\right)^2+R^2}.$$

Тогда

$$\left|W(i\omega)\right|=\sqrt{(\operatorname{Re}W)^2+(\operatorname{Im}W)^2}=\sqrt{\frac{R^2+\left(\frac{1}{C\omega}-L\omega\right)^2}{\left(\left(\frac{1}{C\omega}-L\omega\right)^2+R^2\right)^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{C\omega}-L\omega\right)^2+R^2}}=\frac{1}{\sqrt{R^2+\frac{L^2}{\omega^2}\left(\omega^2-\frac{1}{CL}\right)^2}}.$$

Следовательно,

$$K(\omega)=\frac{1}{\sqrt{R^2+\frac{L^2}{\omega^2}\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2}},$$

где $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ – собственная частота радиоприемника. Эта формула объясняет принцип работы радиоприемника: чтобы услышать сигнал частоты ω, нужно настроить собственную частоту на входную: $\omega_0=\omega$, тогда $K=\max$ и входной сигнал малой амплитуды становится слышимым.

Замечание 2. Приведем пример линейной стационарной цепи с *векторным* выходным сигналом (под вектором понимается столбец, рис. 11).

Линейная стационарная система автоматического управления [3] моделируется векторным дифференциальным уравнением вида

$$\dot{y}=Ay+bx(t). \tag{16}$$

Здесь $x(t)$ – *управляющий сигнал*; b – вектор размера n, называемый *вектором управляемости*; A – матрица управляемого объекта; вектор $y(t)$ задает *состояние управляемого объекта* в момент t.

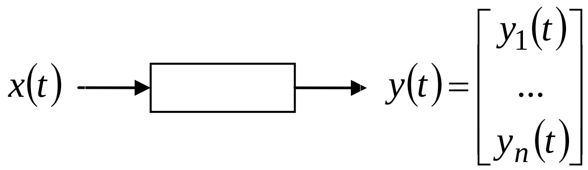

Рис. 11

Применяя при нулевых начальных условиях к обеим частям равенства (16) операцию L, получим

$$p\,\hat{y}(p) = A\hat{y}(p) + b\,\hat{x}(p).$$

Как и в § 7, L-изображение вектора вычисляется поэлементно. Найдем отсюда $\hat{y}(p)$:

$$(pI - A)\hat{y}(p) = b\,\hat{x}(p),$$

откуда

$$\hat{y}(p) = W(p)\hat{x}(p), \text{ где } W(p) = (pI - A)^{-1}b. \tag{17}$$

Очевидно, при каждом p $W(p)$ – вектор-столбец. Таким образом, система управления (16) – линейная стационарная цепь с передаточной вектор-функцией (17).

§ 9. СВЕРТКА ДВУХ ФУНКЦИЙ. ТЕОРЕМА О СВЕРТКЕ

Определение 5. Пусть функции $f(t)$, $g(t)$ удовлетворяют требованиям 1^0–3^0 в определении оригинала. *Сверткой* функций $f(t)$, $g(t)$ называется третья функция, вычисляемая по формуле

$$f * g = \int_0^t f(s)g(t-s)\,ds\,. \tag{18}$$

Например,

$$t^3 * t^2 = \int_0^t s^3(t-s)^2\,ds = \int_0^t \left(t^2 s^3 - 2t s^4 + s^5\right)ds = \left[\frac{t^2 s^4}{4} - \frac{2t s^5}{5} + \frac{s^6}{6}\right]\Bigg|_0^t = \frac{t^6}{60}.$$

Нетрудно убедиться, что функция (18) также удовлетворяет требованиям 1^0–3^0.

Лемма 2. *Имеет место равенство*

$$f * g = g * f\,.$$

Доказательство. Выполним в (18) замену переменной интегрирования. Положим $s = t - \sigma$, тогда $ds = -d\sigma$. Если $s = 0 \Rightarrow \sigma = t$, если $s = t \Rightarrow \sigma = 0$. Поэтому

$$f * g = \int_t^0 f(t-\sigma)\,g(\sigma)(-d\sigma) = \int_0^t g(\sigma)\,f(t-\sigma)\,d\sigma = g * f\,.$$

В приложениях операционного исчисления важную роль играет следующая теорема.

Теорема 2. *L-изображение свертки двух оригиналов равно произведению их L-изображений*:

$$L[f * g] = L[f]\cdot L[g]. \tag{19}$$

Доказательство. Обозначим $y(t) = f * g$. Далее равенство (19) доказывается при p в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq \max\{v_1, v_2\}$, где v_k – показатели роста функций f, g, тогда рассматриваемые несобственные интегралы сходятся (лемма 1) и проводимые преобразования корректны; затем оно может быть аналитически продолжено в p-плоскость. По определению (1) преобразования Лапласа имеем

$$L[f * g] = L[y(t)] = \int_0^\infty e^{-pt} y(t)dt = \int_0^\infty e^{-pt}\, dt \int_0^t f(s)g(t-s)ds.$$

Обозначим $\mathcal{D}$ область на (s,t)-плоскости, изображенную на рис. 12 (для наглядности ∞ изображена точкой на числовой оси).

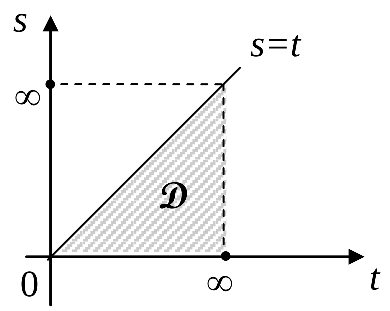

Рис. 12

По правилу преобразования двойного интеграла в повторный, примененному справа налево, получим

$$L[f * g] = \iint\limits_{\mathcal{D}} e^{-pt} f(s)g(t-s)ds\,dt.$$

Подставим $e^{-pt} = e^{-ps}e^{-p(t-s)}$ и перейдем к повторному интегралу в *другом порядке*:

$$L[f * g] = \int_0^\infty e^{-ps} f(s)ds \int_s^\infty e^{-p(t-s)} g(t-s)dt.$$

Выполним во втором интеграле замену переменной интегрирования. Пусть $t-s=\sigma$ или $t=s+\sigma$, тогда $dt=d\sigma$. Если $t=s\Rightarrow\sigma=0$, если $t=\infty\Rightarrow\sigma=\infty$. Получим

$$L\left[f*g\right]=\int_0^\infty e^{-ps}f(s)ds\cdot\int_0^\infty e^{-p\sigma}g(\sigma)d\sigma=L\left[f\right]\cdot L\left[g\right].$$

Теорема доказана.

Задания для самостоятельной работы.

Вычислить свертку следующих функций:

а) $e^{3t}*e^t$; б) $\cos t*\cos 3t$; в) $e^t*\sin t$;

г) $e^{2t}\cos t*e^t$; д) $t^2*\sin 2t$; е) $\operatorname{arctg} t*t$.

Ответы:

а) $\dfrac{e^{3t}-e^t}{2}$; б) $\dfrac{3\sin 3t-\sin t}{8}$;

в) $\dfrac{1}{2}e^t-\dfrac{\cos t+\sin t}{2}$; г) $\dfrac{e^{2t}(\cos t+\sin t)-e^t}{2}$;

д) $\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{1}{4}\cos 2t-\dfrac{1}{4}$; е) $\dfrac{t^2-1}{2}arctgt+\dfrac{t}{2}\left(1-\ln\left(1+t^2\right)\right)$.

§ 10. ФОРМУЛА ДЮАМЕЛЯ

В § 8 было установлено удобное правило описания линейных стационарных цепей на языке L-изображений с помощью передаточной функции – формулы (11), (12). Укажем часто применяемый способ описания цепей этого класса на языке оригиналов с использованием понятия «свертка». Для большей наглядности и упрощения записей рассмотрим частный случай цепи (10):

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = x(t). \tag{20}$$

Выходной сигнал $y(t)$ вычисляется по входному сигналу $x(t)$ как решение задачи Коши для дифференциального уравнения (20) при нулевых начальных условиях:

$$y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0.$$

Полученное далее правило *остается верным* для цепей общего вида (10).

Обозначим $w(t)$ реакцию цепи (20) на сигнал $1(t)$ (рис. 13).

$$1(t) \longrightarrow \boxed{\qquad\qquad} \longrightarrow w(t)$$

Рис. 13

Это означает, что $w(t)$ – решение задачи Коши

$$\begin{cases} a_0 w^{(n)} + a_1 w^{(n-1)} + \ldots + a_n w = 1(t), \\ w(0) = w'(0) = \ldots = w^{(n-1)}(0) = 0. \end{cases} \tag{21}$$

Теорема 3. *Реакция $y(t)$ линейной стационарной цепи (20) на входное воздействие $x(t)$ дается формулой*

$$y(t) = w'(t) * x(t), \tag{22}$$

где $w(t)$ – функция (21).

Доказательство. Достаточно проверить справедливость для функции (22) равенства $\hat{y}(p)=W(p)\hat{x}(p)$, где $W(p)$ – передаточная функция цепи (20). Из определения функции $w(t)$ следует:

$$\hat{w}(p)=W(p)\,\hat{1}(p)=\frac{1}{p}W(p).$$

Применяя к обеим частям равенства (22) операцию L, с учетом теоремы о свертке (19), формулы для L-изображения производной и требования $w(0)=0$ получим

$$\hat{y}(p)=L\left[w'(t)\right]\cdot L\left[x(t)\right]=p\,\hat{w}(p)\,\hat{x}(p)=W(p)\hat{x}(p).$$

Теорема доказана.

Формула (22) называется *формулой Дюамеля*. Функция $w(t)$ называется *переходной функцией* линейной стационарной цепи (20).

Пример. Найти переходную функцию линейной стационарной цепи

$$y''+3y'+2y=x(t).$$

Пользуясь формулой Дюамеля, найти реакцию цепи на гармонику $x(t)=\cos t$.

Решение. Переходная функция $w(t)$ есть решение задачи Коши вида (21):

$$\begin{cases} w''+3w'+2w=1(t), \\ w(0)=w'(0)=0. \end{cases}$$

Применим к обеим частям уравнения операцию L и вычислим затем с учетом формулы $\hat{1}(t)=\dfrac{1}{p}$ L-изображение $w(t)$:

$$p^2\hat{w}(p)+3p\hat{w}(p)+2\hat{w}(p)=\frac{1}{p},$$

$$\hat{w}(p)=\frac{1}{p\left(p^2+3p+2\right)}=\frac{1}{p(p+1)(p+2)}.$$

Разлагая полученную рациональную дробь в сумму элементарных дробей, получим

$$\frac{1}{p(p+1)(p+2)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p+1}+\frac{C}{p+2}=\frac{A(p+1)(p+2)+Bp(p+2)+Cp(p+1)}{p(p+1)(p+2)},$$

$$1=A(p+1)(p+2)+Bp(p+2)+Cp(p+1),$$

$$p=0:\quad 1=2A,\quad A=\frac{1}{2},$$
$$p=-1:\quad 1=-B,\quad B=-1,$$
$$p=-2:\quad 1=2C,\quad C=\frac{1}{2}.$$

$$\hat{w}(p)==\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{2}{p+1}+\frac{1}{p+2}\right).$$

Откуда по правилу восстановления оригинала по L-изображению

$$w(t)=\frac{1}{2}\left(1-2e^{-t}+e^{-2t}\right).$$

В силу теоремы 3 для вычисления реакции цепи на входной сигнал $x(t)=\cos t$ нужно «свернуть» его с производной $w'(t)=e^{-t}-e^{-2t}$ по формулам (22), (18):

$$y(t)=\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)*\cos t=\int_0^t\left(e^{-s}-e^{-2s}\right)\cos(t-s)\,ds,$$

т. е. $$\int_0^t\left(e^{-s}-e^{-2s}\right)\cos(t-s)\,ds=\int_0^t e^{-s}\cos(t-s)\,ds-\int_0^t e^{-2s}\cos(t-s)\,ds.$$

Вычислим эти интегралы с использованием формулы интегрирования по частям и приема «возвратного» интегрирования:

$$\int_0^t e^{-s}\cos(t-s)\,ds=\begin{vmatrix} u=e^{-s} & du=-e^{-s}ds \\ d\upsilon=\cos(t-s)\,ds & \upsilon=-\sin(t-s) \end{vmatrix}=$$

$$=-e^{-s}\sin(t-s)\Big|_0^t-\int_0^t e^{-s}\sin(t-s)\,ds=\sin t-\int_0^t e^{-s}\sin(t-s)\,ds=$$

$$=\begin{vmatrix} u=e^{-s} & du=-e^{-s}ds \\ d\upsilon=\sin(t-s)\,ds & \upsilon=\cos(t-s) \end{vmatrix}=\sin t-e^{-s}\cos(t-s)\Big|_0^t-\int_0^t e^{-s}\cos(t-s)\,ds.$$

$$2\int_0^t e^{-s}\cos(t-s)\,ds=\sin t-e^{-t}+\cos t,$$

$$\int_0^t e^{-s}\cos(t-s)\,ds=\frac{1}{2}\left(\sin t+\cos t-e^{-t}\right).$$

Аналогично, получим

$$\int_0^t e^{-2s}\cos(t-s)\,ds=\frac{1}{5}\left(\sin t+2\cos t-2e^{-2t}\right).$$

Разность полученных интегралов дает искомый результат:

$$y(t)=\frac{1}{10}\left(\cos t+3\sin t-5e^{-t}+4e^{-2t}\right).$$

Задания для самостоятельной работы.

Найти переходные функции линейных стационарных цепей:

а) $y''+4y'+3y=x(t)$; б) $y''+4y'+4y=x(t)$;

в) $y''+4y'+5y=x(t)$.

Пользуясь формулой Дюамеля, найти реакции этих цепей на сигналы $x_1(t)=\sin t$, $x_2(t)=e^{-t}$.

Ответы:

а) $w(t)=\dfrac{e^{-3t}-3e^{-t}}{6}+\dfrac{1}{3}$, $y_1(t)=\dfrac{-e^{-3t}+5e^{-t}}{20}+\dfrac{1}{10}(\sin t-2\cos t)$,

$y_2(t)=\dfrac{e^{-3t}-e^{-t}}{4}+\dfrac{1}{2}te^{-t}$;

б) $w(t)=-\dfrac{e^{-2t}}{4}(1+2t)+\dfrac{1}{4}$, $y_1(t)=\dfrac{e^{-2t}}{25}(4+5t)+\dfrac{1}{25}(3\sin t-4\cos t)$,

$y_2(t)=-e^{-2t}(1+t)+e^{-t}$;

в) $w(t)=-\dfrac{e^{-2t}}{5}(2\sin t+\cos t)+\dfrac{1}{5}$, $y_1(t)=\dfrac{e^{-2t}}{8}(\sin t+\cos t)+\dfrac{1}{8}(\sin t-\cos t)$,

$y_2(t)=-\dfrac{e^{-2t}}{2}(\sin t+\cos t)+\dfrac{e^{-t}}{2}$.

§ 11. ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЯ. ФИЛЬТРУЮЩЕЕ СВОЙСТВО ДЕЛЬТА-ФУНКЦИИ

В заключение изложим кратко широко применяемый в расчетах прием, предложенный в начале прошлого века английским физиком Дираком.

Определение 6. Дельта-функцией называется производная функции Хевисайда:

$$\delta(t) = 1'(t). \tag{23}$$

Из определения следует:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t \neq 0, \\ \infty & \text{при} \quad t = 0. \end{cases}$$

(при $t = 0$ «касательная» к графику функции $1(t)$ (см. рис. 3) направлена вертикально, поэтому ее угловой коэффициент $1'(0) = \infty$). Очевидно, $\delta(t)$ не является функцией в обычном смысле; в современной терминологии определяется как *обобщенная функциия* или *распределение* [6]. В основе приложений дельта-функции лежит правило, называемое ее *фильтрующим свойством*. Мы приведем это правило с кратким пояснением и укажем приложение к теории автоматического управления.

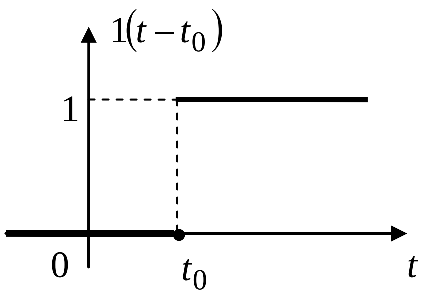

Рис. 14

Из (23) следует (рис. 14): при любом t_0

$$\delta(t - t_0) = 1'(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t \neq t_0, \\ \infty & \text{при} \quad t = t_0. \end{cases} \tag{24}$$

Точка $t = t_0$ называется *носителем* функции $\delta(t - t_0)$.

Теорема 4. *Для любой непрерывной на оси функции* $f(t)$ *и любой* $t_0 \in \mathbb{R}$ *верно равенство*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0). \tag{25}$$

Таким образом, дельта-функция с носителем t_0 «отбирает» из всех значений функции значение в точке t_0 – фильтрует множество значений.

Приведем нестрогое пояснение. Формальные вычисления по формуле (24) дают

$$\text{при } t \neq t_0 \quad f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0) = 0,$$

$$\text{при } t = t_0 \quad f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0).$$

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt =$$

$$= f(t_0)\int_{-\infty}^{\infty} 1'(t-t_0)\,dt = f(t_0)1(t-t_0)\Big|_{-\infty}^{\infty} = f(t_0)(1-0) = f(t_0).$$

Следствие. L-изображение функции $\delta(t)$ равно 1:

$$\hat{\delta}(p) = 1. \tag{26}$$

В самом деле, из определения (1) преобразования Лапласа с учетом $\delta(t) = 0$ при $t < 0$ и фильтрующего свойства (25) получаем

$$\hat{\delta}(p) = \int_{0}^{\infty} e^{-pt}\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt}\delta(t)dt = e^{-pt}\Big|_{t=0} = 1.$$

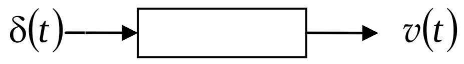

Рис. 15

Рассмотрим линейную стационарную цепь с передаточной функцией $W(p)$. Обозначим $v(t)$ реакцию цепи на входной сигнал $\delta(t)$ (рис. 15). Функция $v(t)$ называется *весовой функцией* линейной стационарной цепи.

Лемма 3. *Передаточная и весовая функции линейной стационарной цепи связаны соотношением*

$$W(p) = \hat{v}(p). \tag{27}$$

Доказательство. По формулам (11), (26) имеем

$$\hat{v}(p) = W(p)\hat{\delta}(p) = W(p).$$

Теорема 5. *Реакция $y(t)$ линейной стационарной цепи (10) с весовой функцией $v(t)$ на входное воздействие $x(t)$ дается формулой*

$$y(t) = v(t) * x(t). \tag{28}$$

Доказательство. По формулам (19), (27) получаем

$$\hat{y}(p) = \hat{v}(p)\hat{x}(p) = W(p)\hat{x}(p),$$

что и требовалось доказать.

Пример. Решить пример из § 10, пользуясь понятием весовой функции и теоремой 5.

Решение. Весовая функция $v(t)$ есть решение задачи Коши

$$\begin{cases} v'' + 3v' + 2v = \delta(t), \\ v(0) = v'(0) = 0. \end{cases}$$

Применяя к обеим частям уравнения операцию L и используя формулу (26) для L-изображения дельта-функции: $\hat{\delta}(p)=1$, найдем

$$\hat{v}(t)=\frac{1}{(p+1)(p+2)}=\frac{A}{p+1}+\frac{B}{p+2},$$

где

$$\frac{A}{p+1}+\frac{B}{p+2}=\frac{A(p+2)+B(p+1)}{(p+1)(p+2)},$$

$$\begin{aligned}&p=-1:\quad 1=A,\\ &p=-2:\quad 1=-B,\quad B=-1,\end{aligned}$$

откуда

$$\hat{v}(t)=\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p+2},$$

$$v(t)=e^{-t}-e^{-2t}.$$

По формуле (28) получаем, как и в § 10:

$$y(t)=\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)*\cos t=\frac{1}{10}\left(\cos t+3\sin t-5e^{-t}+4e^{-2t}\right).$$

Задание для самостоятельной работы.

Решить примеры а), б), в), указанные в конце § 10, пользуясь понятием весовой функции и теоремой 5.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

Задача 1. Решить операционным методом задачу Коши

1. $\begin{cases} y''+y=4e^{-t}, \\ y(0)=2,\ y'(0)=0. \end{cases}$	2. $\begin{cases} y''-y'=5t^2, \\ y(0)=0,\ y'(0)=1. \end{cases}$
3. $\begin{cases} y''+y'=t^2+3t, \\ y(0)=0,\ y'(0)=-3. \end{cases}$	4. $\begin{cases} y''-y=\cos 4t, \\ y(0)=1,\ y'(0)=1; \end{cases}$
5. $\begin{cases} y''-2y'=e^t(t-3), \\ y(0)=2,\ y'(0)=2. \end{cases}$	6. $\begin{cases} y''+y'-2y=-4(t+1), \\ y(0)=1,\ y'(0)=1. \end{cases}$
7. $\begin{cases} y''-9y=2(\sin t-\cos t), \\ y(0)=-3,\ y'(0)=2. \end{cases}$	8. $\begin{cases} y''+2y'=3+e^{2t}, \\ y(0)=1,\ y'(0)=2. \end{cases}$
9. $\begin{cases} 2y''-y'=\sin 3t, \\ y(0)=2,\ y'(0)=1. \end{cases}$	10. $\begin{cases} y''+2y'=\sin\dfrac{t}{2}, \\ y(0)=-2,\ y'(0)=4. \end{cases}$
11. $\begin{cases} y''+y=2sht, \\ y(0)=2,\ y'(0)=1. \end{cases}$	12. $\begin{cases} y''+4y'+29y=e^{-3t}, \\ y(0)=0,\ y'(0)=1. \end{cases}$
13. $\begin{cases} y''-3y'+2y=8e^t, \\ y(0)=1,\ y'(0)=0. \end{cases}$	14. $\begin{cases} 2y''+3y'+y=5e^t, \\ y(0)=0,\ y'(0)=1. \end{cases}$
15. $\begin{cases} y''-2y'-3y=6t, \\ y(0)=1,\ y'(0)=1. \end{cases}$	16. $\begin{cases} y''+4y=\sin 4t, \\ y(0)=0,\ y'(0)=1. \end{cases}$
17. $\begin{cases} 2y''+5y'=6\cos t, \\ y(0)=-1,\ y'(0)=0. \end{cases}$	18. $\begin{cases} y''+y'+y=2t^2+t, \\ y(0)=1,\ y'(0)=-3. \end{cases}$
19. $\begin{cases} y''-3y'+2y=3e^{4t}, \\ y(0)=2,\ y'(0)=6. \end{cases}$	20. $\begin{cases} y''-y'-6y=4, \\ y(0)=1,\ y'(0)=0. \end{cases}$
21. $\begin{cases} y''+y'-2y=10e^{-t}, \\ y(0)=-1,\ y'(0)=0. \end{cases}$	22. $\begin{cases} y''+y=4\cos t, \\ y(0)=0,\ y'(0)=1. \end{cases}$
23. $\begin{cases} y''+2y'+y=t^2, \\ y(0)=1,\ y'(0)=0; \end{cases}$	24. $\begin{cases} y''-2y'+5y=1-t, \\ y(0)=0,\ y'(0)=1. \end{cases}$
25. $\begin{cases} y''+2y'+10y=3e^{-t}\cos 2t, \\ y(0)=5,\ y'(0)=1. \end{cases}$	

Задача 2. Решить операционным методом систему дифференциальных уравнений

1. $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y + 2, \\ \dot{y} = x - y + 1, \end{cases}$ $x(0) = -1,\ y(0) = 2.$	2. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y + 1, \\ \dot{y} = x + y, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 2.$
3. $\begin{cases} \dot{x} = x + 4y, \\ \dot{y} = 2x - y + 9, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 0.$	4. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 1, \\ \dot{y} = 4x - y, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1.$
5. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 5y, \\ \dot{y} = x - 2y + 2, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 1.$	6. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 5y + 1, \\ \dot{y} = x + 2y + 1, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 2.$
7. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y, \\ \dot{y} = -5x - 3y + 2, \end{cases}$ $x(0) = 2,\ y(0) = 0.$	8. $\begin{cases} \dot{x} = -3x - 4y + 1, \\ \dot{y} = 2x + 3y, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 2.$
9. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 6y + 1, \\ \dot{y} = 2x + 2, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1.$	10. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y + 1, \\ \dot{y} = 4x - 2y, \end{cases}$ $x(0) = -1,\ y(0) = 0.$
11. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = 2x + y + 1, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 5.$	12. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y + 2, \\ \dot{y} = x + y + 1, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1.$
13. $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y + 3, \\ \dot{y} = x - y + 1, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1.$	14. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 5y + 2, \\ \dot{y} = 3x + y + 1, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 2.$
15. $\begin{cases} \dot{x} = y + 3, \\ \dot{y} = x + 2, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 0.$	16. $\begin{cases} \dot{x} = 2y + 1, \\ \dot{y} = 2x + 3, \end{cases}$ $x(0) = -1,\ y(0) = 0.$
17. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8y + 1, \\ \dot{y} = 3x + 4y, \end{cases}$ $x(0) = 2,\ y(0) = 1.$	18. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y + 2, \\ \dot{y} = 4y + 1, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1.$
19. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 4x + y + 1, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 0.$	20. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y + 1, \\ \dot{y} = -3x, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

21. $\begin{cases} \dot{x} = 3y + 2, \\ \dot{y} = x + 2y, \end{cases}$ $x(0) = -1,\ y(0) = 1.$	22. $\begin{cases} \dot{x} = x + 4y + 1, \\ \dot{y} = 2x + 3y, \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1.$
23. $\begin{cases} \dot{x} = 2y, \\ \dot{y} = 2x + 3y + 1, \end{cases}$ $x(0) = 2,\ y(0) = 1.$	24. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + y + 2, \\ \dot{y} = 3x, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 0.$
25. $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 3, \\ \dot{y} = x + 2y, \end{cases}$ $x(0) = -1,\ y(0) = 0.$	

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Краснов, М. Л. Операционное исчисление. Теория устойчивости / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. – М. : Либроком, 2013. – 176 с.

2. Мышкис, А. Д. Математика для технических ВУЗов. Специальные курсы / А. Д. Мышкис. – СПб. : Лань, 2009. – 640 с.

3. Первозванский, А. А. Курс теории автоматического управления / А. А. Первозванский. – СПб. : Лань, 2015. – 615 с.

4. Шабат, Б. В. Введение в комплексный анализ. В 2-х ч. Ч. 1: Функции одного переменного / Б. В. Шабат. – М. : Ленанд, 2015. – 336 с.

5. Михлин, С. Г. Курс математической физики / С. Г. Михлин. – М. : Наука, 2006. – 576 с.

6. Соболев, С. Л. Уравнения математической физики / С. Л. Соболев. – М.: Машиностроение, 2012. – 444 с.

7. Чудесенко, В. Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики / В. Ф. Чудесенко. – М. : Высш. шк., 1983. – 112 с.

8. Романовский, Р. К. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление: учеб. пособие / Р. К. Романовский, О. Г. Жукова. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2010. – 90 с.