Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

«Омский государственный технический университет»

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания и типовой расчет
для студентов гуманитарных специальностей

Омск – 2005

Составитель Ананко Алла Александровна

Печатается по решению редакционно-издательского совета Омского государственного технического университета.

Тема 1. Введение в математическую логику

Составные высказывания

Высказывание является одним из важнейших объектов математической логики. В алгебре логики высказывания соединяются логическими связками, в результате этих операций получаются новые **составные** высказывания, в то время как те, из которых они образованы, называют **простыми компонентами.** Простые компоненты (а иногда и составные высказывания) обозначают строчными буквами латинского алфавита p; q; r; s; t и т. д. Основными логическими связками будут:

отрицание ⊔, $\neg$ читается «не».

конъюнкция $\wedge$ читается «и».

дизъюнкция $\vee$ читается «или».

импликация $\rightarrow$ читается «если …., то».

двойная импликация $\leftrightarrow$ читается « тогда и только тогда».

Пример 1. Из простых высказываний «Эту книгу написал Толстой», «Эту книгу написал Достоевский», «Эту книгу написал Чехов» можно составить составное высказывание: «Эту книгу написал Толстой или Достоевский, но не Чехов», которое на языке математической логики выглядит как "$p \vee q \wedge$ □ r", где "p", "q", "r" соответствует первому, второму и третьему простым высказываниям.

Пример 2. Из простых высказываний «Я успешно сдал сессию», «Я получаю стипендию», обозначив первое «p », а второе «q », можно получить составные высказывания: $p \wedge q$ – читается «Я успешно сдал сессию и получаю стипендию»,

□ $q \rightarrow$ □ p – читается «Если я не получаю стипендию, то я плохо сдал сессию».

Таблицы истинности простейших связок

При рассмотрении той или иной логической связки интересно знать, каким образом истинность составного высказывания, порожденного этой связкой, зависит от истинности его компонент.

Очень удобно изображать эту зависимость с помощью **таблиц истинности:** конъюнкция "p" и "q", $p \wedge q$, имеет таблицу истинности, изображенную на рисунке 1.

p	q	$p \wedge q$
и	и	и
и	л	л
л	и	л
л	л	л

Рисунок 1

Из этой таблицы видно, что конъюнкция истинна только тогда, когда обе её переменные принимают значение "u".

Дизъюнкция "p" и "q", $p \vee q$, таблица истинности представлена на рисунке 2.

p	q	$p \vee q$
и	и	и
и	л	и
л	и	и
л	л	л

Рисунок 2

Дизъюнкцию рассматривают в не исключающем виде (одно или другое или оба), поэтому она «ложна» только, когда обе её переменные принимают значение «л».

Отрицание: не "p", □ p, $\neg p$. Таблица истинности – на рисунке 3.

p	□ p
u	л
л	и

Рисунок 3

Импликация: если "p", то "q", $p \to q$. Таблица истинности – на рисунке 4.

p	q	$p \to q$
и	и	и
и	л	л
л	и	и
л	л	и

Рисунок 4

Считается, что импликация истинна всякий раз, когда p «ложно», независимо от значения истинности q. Из «лжи» всегда следует «истина», но из «истины» «ложь» не может следовать!

Таблицы истинности Куайна для сложных составных высказываний

Если логическая формула сложная, включает более двух переменных, то её истинное значение удобно вычислять с помощью метода, называемого таблицей Куайна. Последовательность действий по заполнению таблицы Куайна следующая: под каждой из переменных записываем столбиком «и», «л» так, чтобы по всем переменным в совокупности были выписаны все неповторяющиеся комбинации. Если n – число переменных в формуле, то длина каждого столбика будет равна 2^n. Затем выписываем последовательно столбики, соответствующие выполняемым действиям. В последнем столбике – результат, истинностная оценка формулы.

Пример. Составить таблицу истинности для логической формулы: $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

p	q	$p \wedge q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\vee$
и	и	и	л	л	л	и
и	л	л	л	и	л	л
л	и	л	и	л	и	л
л	л	л	и	и	и	и

Две переменные, длина столбцов $2^2 = 4$.

Пример. Составить таблицу истинности для логической формулы: $p \vee q \wedge \neg r$.

p	q	r	$p \vee q$	$\neg r$	$\wedge$
и	и	и	и	л	л
и	и	л	и	и	и
и	л	и	и	и	и
л	и	и	и	л	л
л	л	л	и	и	и
л	л	и	л	и	и
л	л	л	л	и	и

Три переменные, длина столбцов $2^3 = 8$.

Исчисление предикатов

Предикатом $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, заданным на множестве M, называется функция, отображающая M на множество $\{u, л\}$. Множество M называется предметной областью; $X_1, X_2, \dots, X_n \in M$ называются предметными переменными или **термами.** Предикат представляет собой логическую функцию, принимающую значение «истина» или «ложь», когда её предметные переменные принимают определенные значения.

Рассмотрим примеры. Одноместный предикат D: (1 переменная) $x^2 - 5x + 6 = 0$ задан на множестве действительных чисел. Если $x = 2$ или $x = 3$ – "u", а при $x = 7$ – "л".

Если в n – местный предикат на место одного из термов подставить определенный элемент из соответствующего множества, то предикат станет $(n-1)$ – местным. Заменив все термы на конкретные значения из предметной области предиката, получим 0 – местный предикат, т. е. высказывание.

Например: X – брат Y – двуместный предикат;
X – брат Маши – одноместный предикат;
Саша брат Маши – высказывание.

С помощью логических операций отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации из исходных предикатов могут быть построены новые предикаты.

Отрицание предиката. Предикат $R(X_1, X_2, \dots, X_n)$ называется отрицанием предиката $P(X_1, X_2, \dots, X_n)$ тогда и только тогда, когда при одних и тех значениях переменных $\left(\overset{0}{X_1}, \overset{0}{X_2}, \dots, \overset{0}{X_n}\right)$ $P\left(\overset{0}{X_1}, \overset{0}{X_2}, \dots, \overset{0}{X_n}\right)$ истинно, когда $R\left(\overset{0}{X_1}, \overset{0}{X_2}, \dots, \overset{0}{X_n}\right)$ – ложно и наоборот. Обозначение:

$$R(X_1, X_2, \dots, X_n) \equiv \neg P(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

Аналогично в соответствии с определениями соответствующих логических связок определяются конъюнкция, дизъюнкция и импликация предикатов. Наряду с логическими операциями важную роль играют операции называемые кванторами. Квантор всеобщности есть операция, которая превращает предикат $P(x)$ в высказывание: «Все X из M обладают свойством $P(x)$». Знак квантора «$\forall$». Он заменяет фразы языка: «для всех», «каждый», «любой» и т. п.

$\forall x : P(x)$, где $P(x) = x > 0$ – истинно для натуральных чисел множества $X \in N$ и ложно для множества действительных чисел $X \in R$.

Квантор существования есть операция, которая предикат $P(x)$ превращает в высказывание: «существует хотя бы один X из M, обладающих свойством $P(x)$». Он заменяет фразы языка «существует», «найдется», «хотя бы один».

Например: $P(x): X$ – студент. M – множество жителей Омска. $\exists x: P(x)$ – истинно. $\forall x: P(x)$ – ложно.

Переход от $P(x)$ к $\forall x: P(x)$ или $\exists x: P(x)$ называют квантификацией или связыванием переменной X. Связанная переменная фактически не является переменной, т. е. навешивание квантора на многоместный предикат уменьшает в нем число свободных переменных.

Рассмотрим пример: На множестве целых чисел задач 2-местный предикат $P(X_1, X_2)$ = «Число X_1 делится на число X_2». Связывая одну переменную можно получить одноместные предикаты:

$\forall x_1 : P(x_1, x_2) =$ "$\forall$ число делится на x_2"– ложь.

$\exists x_1 : P(x_1, x_2) =$ "$\exists$ число, делящееся на x_2"– истина.

$\forall x_2 : P(x_1, x_2) =$ "число X_1 делится на любое – ложь.

$\exists x_2 : P(x_1, x_2) =$ "$\exists$ число, на которое делится X_1", – истина.

Связывая обе переменные, получим высказывания (0 – местные предикаты).

$\forall x_1 \forall x_2 : P(x_1, x_2)$ "$\forall$ число делится на $\forall$ число "– ложь.

$\forall x_1 \exists x_2 : P(x_1, x_2)$ "$\exists$ число, на которое делится $\forall$ число "– истина (это «1»)

$\exists x_1 \forall x_2 : P(x_1, x_2)$ "$\exists$ число, которое делится на $\forall$ число "– ложь.

$\exists x_1 \exists x_2 : P(x_1, x_2)$ "$\exists$ число, которое делится на какое-нибудь "– истина.

Варианты типовых заданий по теме «Математическая логика»

Вариант 1

1. Запишите в виде формул алгебры логики высказывания:
   а) картину написал Репин или Шишкин, но не Серов;
   б) если завтра не будет дождя и будет тепло, то можно поехать за город.
2. Составьте таблицу истинности для следующих формул:
   а) $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$;

   б) $(p - q) \wedge p$.

3. Запишите словами следующие логические выражения и определите их истинность.

Предикат D означает «x_1 есть квадрат числа x_2», задачи на множестве целых чисел:

а) $\forall x_1 : D(x_1,\ x_2)$;

б) $\exists x_1 : D(x_1,\ x_2)$.

Вариант 2

1. Запишите в виде формул алгебры логики высказывания:
   а) оперу написал Чайковский или Мусоргский, но не Рахманинов;
   б) если я сдам экзамены вовремя и будет хорошая погода, то поеду на каникулы на море.
2. Составьте таблицу истинности для следующих формул:

   а) $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$;

   б) $(\neg p \to q) \vee \neg q$.

3. Запишите словами следующие логические выражения и определите их истинность.

Предикат D означает «x_1 делится на x_2 без остатка», задан на множестве целых чисел:

а) $\forall x_1 : D(x_1,\ x_2)$;

б) $\exists x_1 \forall x_2 : D(x_1,\ x_2)$.

Вариант 3

1. Запишите в виде формул алгебры логики высказывания:
   а) сегодня будет снег или дождь, но не ясная погода;
   б) если будет свободен мой друг и у меня будет время, то пойдем вечером на дискотеку.
2. Составьте таблицу истинности для следующих формул:

   а) $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$;

   б) $(\neg p \to \neg q) \vee q$.

3. Запишите словами следующие логические выражения и определите их истинность.

Предикат D означает «x_1 есть куб числа x_2», задан на множестве целых чисел:

а) $\exists x_1 : D(x_1,\ x_2)$;

б) $\forall x_1 \exists x_2 : D(x_1,\ x_2)$.

Вариант 4

1. Запишите в виде формул алгебры логики высказывания:

   а) эту книгу написала Маринина или Донцова, но не Акунин.

   б) если я сдам сессию на «хорошо» и «отлично» и родители помогут с деньгами, то поеду на каникулы за границу.

2. Составьте таблицу истинности для следующих формул:

   а) $(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge q)$;

   б) $(p \to \neg q) \wedge \neg q$.

3. Запишите словами следующие логические выражения и определите их истинность.

Предикат D означает «x_1 есть квадрат числа x_2», задан на множестве целых чисел:

а) $\exists x_1 : D(x_1,\ \ x_2)$;

б) $\exists x_1 \forall x_2 : D(x_1,\ \ x_2)$.

Вариант 5

1. Запишите в виде формул алгебры логики высказывания:

   а) на встрече выпускников присутствовали Иванов и Петров, но не Сидоров;

   б) если не будет очень холодно и не пойдет сильный снег, то поеду кататься на лыжах в выходной.

2. Составьте таблицу истинности для следующих формул:

   а) $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$;

   б) $(p \to \neg q) \wedge \neg p$.

3. Запишите словами следующие логические выражения и определите их истинность.

Предикат D означает «x_1 не делится на x_2 без остатка», задан на множестве целых чисел:

а) $\forall x_1 : D(x_1,\ \ x_2)$;

б) $\exists x_1 \exists x_2 : D(x_1,\ \ x_2)$.

Вариант 6

1. Запишите в виде формул алгебры логики высказывания:

   а) на день рождения ко мне придет Михайлов и Петров, но не мои родители;

   б) если в выходные будет хорошая погода и я буду свободен, то поеду на дачу.

2. Составьте таблицу истинности для следующих формул:

   а) $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q)$;

   б) $(p \to \neg q) \vee \neg p$.

3. Запишите словами следующие логические выражения и определите их истинность.

Предикат D означает «x_1 – квадрат числа x_2 », задан на множестве целых чисел:

а) $\exists x_1 : D(x_1, \quad x_2)$;

б) $\forall x_1 \exists x_2 : D(x_1, \quad x_2)$.

Вариант 7

1. Пусть p означает высказывание « У моего друга есть собака», q – «У меня нет собаки». Записать в виде словесных высказываний следующие формулы:

а) $p \vee \neg q$;

б) $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$.

2. Составьте таблицу истинности для формул

а) $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$;

б) $(p \to q) \wedge \neg q$.

3. Запишите словами следующие логические выражения и определите их истинность.

Предикат D означает «x_1 не делится на x_2 без остатка», задан на множестве целых чисел:

а) $\forall x_1 : D(x_1, \quad x_2)$;

б) $\exists x_1 \forall x_2 : D(x_1, \quad x_2)$.

Вариант 8

1. Пусть p означает высказывание « Я люблю кино», q - «Мой друг любит спорт». Записать в виде словесных высказываний следующие формулы:

а) $p \wedge \neg q$;

б) $(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge q)$.

2. Составьте таблицу истинности для следующих формул:

а) $(p \vee \neg q) \vee (\neg p \vee q)$;

б) $(\neg p \to q) \vee \neg q$.

3. Запишите словами следующие логические выражения и определите их истинность.

Предикат D означает «x_1 – квадрат числа x_2 », задан на множестве целых чисел:

а) $\exists x_2 : D(x_1, \quad x_2)$;

б) $\forall x_1, x_2 : D(x_1, \quad x_2)$.

Вариант 9

1. Запишите в виде формул алгебры логики высказывания:

а) эту картину написал или Пикассо, или Дали, но не Малевич;

б) если мой друг и я будем свободны в выходной, то сможем пойти в бассейн.

2. Составьте таблицу истинности для следующих формул:

а) $(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$;

б) $(p \to q) \vee \neg p$.

3. Запишите словами следующие логические выражения и определите их истинность.

Предикат D означает «x_1 есть квадратный корень x_2», задан на множестве действительных чисел:

а) $\forall x_1 : D(x_1, \quad x_2)$;

б) $\forall x_1 \exists x_2 : D(x_1, \quad x_2)$.

Вариант 10

1. Пусть p означает высказывание «На улице жарко», q - «Погода хорошая». Записать в виде словесных высказываний следующие формулы:

а) $\neg p \wedge q$;

б) $p \vee \neg q$.

2. Составьте таблицу истинности для следующих формул:

а) $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$;

б) $(p \to q) \wedge \neg q$.

3. Запишите словами следующие логические выражения и определите их истинность.

Предикат D означает «x_1 есть куб числа x_2», задан на множестве целых чисел:

а) $\exists x_2 : D(x_1, \quad x_2)$;

б) $\exists x_1 \forall x_2 : D(x_1, \quad x_2)$.

Вариант 11

1. Запишите в виде формул алгебры логики высказывания:

а) я сдам этот экзамен только в том случае, если буду выполнять домашние задания;

б) неверно, что идет дождь или нет ветра.

2. Составьте таблицу истинности для следующих формул:

а) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \vee q)$;

б) $(p \vee \neg q) \to \neg p$.

3. Запишите словами следующие логические выражения и определите их истинность.

Предикат D означает «x_1 есть квадратный корень x_2 », задан на множестве действительных чисел:

а) $\forall x_1 \exists x_2 : D(x_1, \quad x_2)$;

б) $\exists x_1 : D(x_1, \quad x_2)$.

Вариант 12

1. Запишите в виде формул алгебры логики высказывания:

а) для того чтобы перейти на следующий курс, достаточно сдать математику по крайней мере на «удовлетворительно»;

б) если я плохо учусь, то не могу успешно заниматься спортом.

2. Составьте таблицу истинности для следующих формул:

а) $\neg p \wedge (\neg q \vee \neg r)$;

б) $p \to (\neg p \to q)$.

3. Запишите словами следующие логические выражения и определите их истинность.

Предикат D означает «x_1 принадлежит $[-2, \quad 2]$, x_2 принадлежит отрезку $[0, \quad 2]$ ». Задан на множестве действительных чисел:

а) $\forall x_2 : D[x_1, \quad x_2]$;

б) $\exists x_1 \exists x_2 : D[x_1, \quad x_2]$.

Вариант 13

1. Запишите в виде формул алгебры логики высказывания:

а) я сдам экзамен по математике только в том случае, если разберусь в доказательстве теоремы;

б) отец хвалит меня тогда, когда я хорошо учусь.

2. Составьте таблицу истинности для следующих формул:

а) $p \vee (\neg q \wedge q)$;

б) $p \to (-p \leftrightarrow q)$.

3. Запишите словами следующие логические выражения и определите их истинность.

Предикат D означает «x_1 есть $2x_2$ ». Задан на множестве целых чисел:

а) $\forall x_2 : D[x_1, \quad x_2]$;

б) $\exists x_1 \forall x_2 : D[x_1, \quad x_2]$.

Вариант 14

1. Запишите в виде формул алгебры логики высказывания:

а) если я буду заниматься спортом, то выиграю этот матч;

б) либо я буду заниматься спортом, либо мне повезет, если я выиграю этот матч.

2. Составьте таблицу истинности для следующих формул:

а) $p \vee (\neg q \wedge \neg r)$;

б) $p \wedge (\neg q \to p)$.

3. Запишите словами следующие логические выражения и определите их истинность.

Предикат D означает «x_1 и x_2 оба четные числа». Задан на множестве целых чисел:

а) $\exists x_1 : D[x_1, \quad x_2]$;

б) $\forall x_1 \forall x_2 : D[x_1, \quad x_2]$.

Вариант 15

1. Запишите в виде формул алгебры логики высказывания:

а) если этот курс хорош, то он полезен;

б) если этот курс бесполезен или экзаменатор не снисходителен, то я не выдержу экзамен по курсу.

2. Составьте таблицу истинности для следующих формул:

а) $p \wedge (\neg p \to \neg q)$;

б) $p \vee (\neg p \vee \neg r)$.

3. Запишите словами следующие логические выражения и определите их истинность.

Предикат D означает «x_1 и x_2 – оба нечетные числа». Задан на множестве целых чисел:

а) $\exists x_2 : D[x_1, \quad x_2]$;

б) $\forall x_1 \exists x_2 : D[x_1, \quad x_2]$.

Вариант 16

1. Запишите в виде формул алгебры логики высказывания:

а) если он пойдет в гости, то должен выглядеть элегантно;

б) или я успешно занимаюсь спортом, или не могу быть доволен собой.

2. Составьте таблицу истинности для следующих формул:

а) $p \vee (\neg p \leftrightarrow q)$;

б) $p \vee (\neg q \wedge r)$.

3. Запишите словами следующие логические выражения и определите их истинность.

Предикат D означает «$x_1 > 3, \quad x_2 < 5$». Задан на множестве действительных чисел:

а) $\exists x_2 : D[x_1, \quad x_2]$;

б) $\forall x_1 \forall x_2 : D[x_1, \quad x_2]$.

Вариант 17

1. Запишите в виде формул алгебры логики высказывания:
   а) я решил первым задачи и получу хорошую оценку за контрольную работу;
   б) если не будет дождя и ветра, я пойду на пляж.
2. Составьте таблицу истинности для следующих формул:

   а) $p \vee (\neg q \wedge p)$;

   б) $p \wedge (\neg q \to \neg r)$.

3.Запишите словами следующие логические выражения и определите их истинность.

Предикат D означает «x_1 есть куб числа x_2». Задан на множестве целых чисел:

а) $\exists x_2 : D[x_1, \quad x_2]$;

б) $\forall x_1 \forall x_2 : D[x_1, \quad x_2]$.

Вариант 18

1. Запишите в виде формул алгебры логики высказывания:
   а) если Шекспир – великий драматург, то его произведения ставятся в театрах;
   б) если экзаменатор будет снисходителен или я хорошо подготовлюсь, то сдам этот экзамен.
2. Составьте таблицу истинности для следующих формул:

   а) $p \vee (q \wedge \neg p)$;

   б) $\neg(p \wedge (q \to \neg r))$.

3. Запишите словами следующие логические выражения и определите их истинность.

Предикат D означает «$x_1 > 2, \quad x_2 < 10$». Задан на множестве целых чисел:

а) $\exists x_2 : D[x_1, \quad x_2]$;

б) $\forall x_1 \forall x_2 : D[x_1, \quad x_2]$.

Вариант 19

1. Запишите в виде формул алгебры логики высказывания:

а) если он хочет достигнуть цели, то он должен много знать и быть удачливым;

б) для того чтобы элегантно выглядеть, необходимо быть опрятным.

2. Составьте таблицу истинности для следующих формул:

а) $p \wedge (\neg p \vee \neg q)$;

б) $\neg(p \vee (\neg q \to r))$.

3. Запишите словами следующие логические выражения и определите их истинность.

Предикат D означает « $x_1 > 5, \quad x_2 < 10$ ». Задан на множестве действительных чисел:

а) $\exists x_2 : D[x_1, \quad x_2]$;

б) $\forall x_1 \exists x_2 : D[x_1, \quad x_2]$.

Вариант 20

1. Запишите в виде формул алгебры логики высказывания:

а) я сдам этот экзамен в том случае, если буду регулярно выполнять домашние задания;

б) я приеду вовремя, если поезд не опоздает и я успею купить билет.

2. Составьте таблицу истинности для следующих формул:

а) $p \vee \neg(p \wedge \neg q)$;

б) $\neg(p \to (\neg p \vee q))$.

3. Запишите словами следующие логические выражения и определите их истинность.

Предикат D означает « x_1 есть квадрат числа x_2 ». Задан на множестве целых чисел:

а) $\forall x_1 : D[x_1, \quad x_2]$;

б) $\forall x_1 \exists x_2 : D[x_1, \quad x_2]$.

Вариант 21

1. Запишите в виде формул алгебры логики высказывания:

а) этот роман написал Толстой или Тургенев, но не Достоевский;

б) если я сдам сессию успешно, то перейду на следующий курс.

2. Составьте таблицу истинности для следующих формул:

а) $(p \wedge q) \wedge (\neg p \vee r)$;

б) $\neg(p \to q) \vee (\neg p \to \neg q)$.

3.Запишите словами следующие логические выражения и определите их истинность.

Предикат D означает «$x_1 > 0, \quad x_2 < 4$». Задан на множестве действительных чисел:

а) $\forall x_1 \exists x_2 : D[x_1, \quad x_2]$;

б) $\exists x_1 \forall x_2 : D[x_1, \quad x_2]$.

Вариант 22

1. Запишите в виде формул алгебры логики высказывания:

а) сегодня не будет снега или дождя, но и не хорошая погода;

б) если я буду свободен и мой друг выберет время, то пойдем вечером в кино.

2. Составьте таблицу истинности для следующих формул:

а) $(p \wedge q) \vee \neg(q \vee \neg p)$;

б) $\neg(p \vee q) \to (q \wedge \neg p)$.

3. Запишите словами следующие логические выражения и определите их истинность.

Предикат D означает «x_1 есть квадрат числа x_2». Задан на множестве целых чисел:

а) $\exists x_2 : D[x_1, \quad x_2]$;

б) $\forall x_1 \forall x_2 : D[x_1, \quad x_2]$.

Вариант 23.

1. Запишите в виде формул алгебры логики высказывания:

а) этот фильм поставил Михалков или Кончаловский, но не Шахназаров;

б) если я получу отличную оценку по английскому языку, то смогу поехать в международную языковую школу.

2. Составьте таблицу истинности для следующих формул:

а) $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$;

б) $\neg(\neg p \to q) \vee \neg q$.

3. Запишите словами следующие логические выражения и определите их истинность.

Предикат D означает «$x_1 > 5, \quad x_2 < 7$». Задан на множестве действительных чисел:

а) $\exists x_1 : D[x_1, \quad x_2]$;

б) $\forall x_1 \forall x_2 : D[x_1, \quad x_2]$.

Вариант 24

1. Запишите в виде формул алгебры логики высказывания:

а) я могу хорошо сдать психологию или культурологию, но не математику;

б) если соберемся я и моя подруга вместе, то на выходные поедем за город.

2. Составьте таблицу истинности для следующих формул:

а) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$;

б) $\neg(p \leftrightarrow q) \vee \neg q$.

3. Запишите словами следующие логические выражения и определите их истинность.

Предикат D означает «x_1 есть квадрат числа x_2». Задан на множестве целых чисел:

а) $\forall x_1 : D[x_1, \quad x_2]$;

б) $\exists x_1 \forall x_2 : D[x_1, \quad x_2]$.

Вариант 25

1. Запишите в виде формул алгебры логики высказывания:

пусть p означает высказывание «Я сдал экзамены», q – «Я поеду на каникулы в Москву». Записать в виде словесных высказываний следующие формулы:

а) $\neg p \rightarrow q$;

б) $\neg(p \vee \neg q)$.

2. Составьте таблицу истинности для следующих формул:

а) $(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$;

б) $\neg(p \rightarrow -q) \vee \neg r$.

3. Запишите словами следующие логические выражения и определите их истинность.

Предикат D означает «$x_1 > 3, \quad x_2 < 10$». Задан на множестве действительных чисел:

а) $\exists x_2 \forall x_1 : D[x_1, \quad x_2]$;

б) $\forall x_1 \forall x_2 : D[x_1, \quad x_2]$.

Тема 2. Элементы теории множеств

Понятие множества

Множество вполне определяется своими элементами. Под множеством понимают любое собрание определенных и различных между собой объектов, мыслимое как единое целое.

Примеры множеств:

а) множество всех целых чисел;

б) множество букв латинского алфавита;

в) множество студентов ОмГТУ.

Объекты, входящие в множество, называют элементами. Их обозначают строчными буквами, а сами множества прописными буквами латинского алфавита.

$x \in X$ (читается как «x есть элемент множества X».

Множество, состоящее из конечного числа элементов, называется конечным. В противном случае множество называют бесконечным.

Множества могут быть заданы либо перечислением входящих в него элементов (для конечных множеств), либо при помощи правила, позволяющего чётко определить, является ли данный объект элементом этого множества или нет.

Примеры:

1) $A = \{1, 3, 5, 7\}$; $B = \{b_2, b_3, b_4\}$ – 1-й способ (перечисление).

2) $C = \{x : x^2 - 5x + 6 = 0\}$ – 2-й способ (правило, определяющее принадлежность элементов данному множеству). Определив, что множеству C принадлежат числа 2 и 3 и только они, можно задать его первым способом:

$C = \{2, 3\}$ – это то же самое множество. A, B и C – конечные множества.

3) $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1\}$ – круг с радиусом 1, это бесконечное множество.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым множеством и обозначается $\varnothing$.

Подмножества

Множество B называется подмножеством множества A, если каждый элемент B является и элементом A. Обозначается $B \subset A$.

Примеры

1) $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{3, 5\}$, $B \subset A$.

2) N – множество натуральных чисел, Z – множество целых чисел, $N \subset Z$.

Если A – некоторое множество, то A и $\varnothing$ называются несобственными подмножествами A. Все остальные подмножества A называют собственными.

Для множества A из примера 1) составим $\varnothing$, $A=\{1, 3, 5, 7, \}$ – несобственные подмножества, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, $\{7\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 5\}$, $\{3, 5, 7\}$ – собственные подмножества.

Если множество конечно и состоит из n элементов, то оно имеет 2^n подмножеств (включая и несобственные).

Зафиксированное множество всех мыслимых при данном рассмотрении объектов называют **универсумом и обозначают** u.

Операции над множествами

Множества A и B называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов. Обозначают $A=B$.

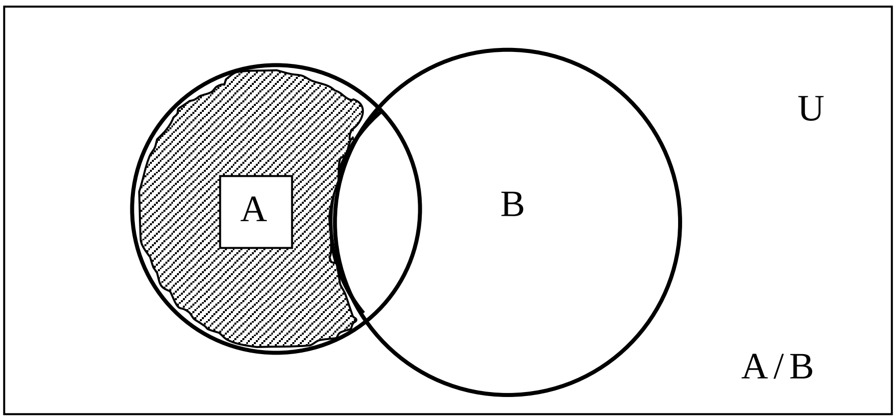
Пример. $A=\{0, 2, 3\}$, $B=\left\{x : x^3-5x^2+6x=0\right\}$, $A=B$.

Разность множеств. Разностью двух множеств A и B называют множество G, содержащее те элементы A, которые не принадлежат множеству B. Обозначение A/B.

Примеры: 1) $A/B=\{2, 4\}$.

2) $A=\{x : x>0\}$; $B=\{x : x<5\}$; $A/B=\{x : x\geq 5\}$.

3)



На диаграмме Эйлера-Венна заштриховано множество A/B.

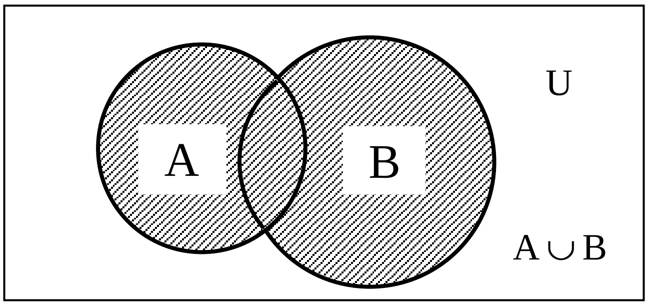
Объединение множеств. Объединением множеств A и B называется такое множество C, каждый элемент которого является элементом A или B. Обозначается $A\cup B$.

Примеры

1) $A=\{1, 2, 3, 4\}$; $B=\{1, 3, 5, 10\}$; $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 10\}$.

2) $A=\{x : x\geq 0\}$ $B=\{x : -1\leq x<0\}$; $A\cup B=\{x : x\geq -1\}$.

3)



На диаграмме Эйлера-Венна заштриховано множество $A \cup B$.

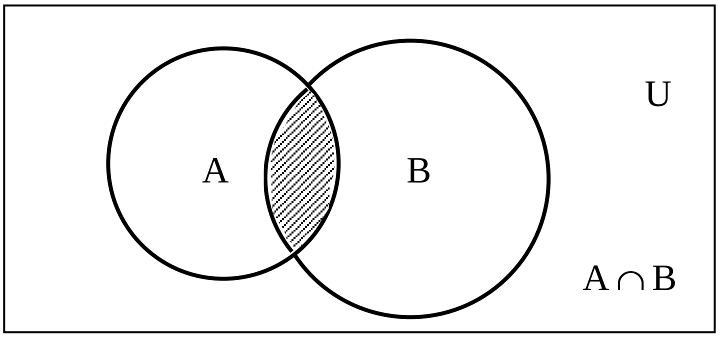
Пересечение множеств. Пересечением множеств A и B называется множество D, состоящее из элементов, которые принадлежат A и B одновременно. Обозначение $D = A \cap B$.

Примеры

1) $A \cap B = \{1,\ 3\}$.

2) $A = \{x : x \geq 0\}$ $B = \{x : x \in [-1, 1]\}$; $A \cap B = \{x : x \in [0, 1]\}$.

3)



На диаграмме Эйлера-Венна заштриховано множество $A \cap B$.

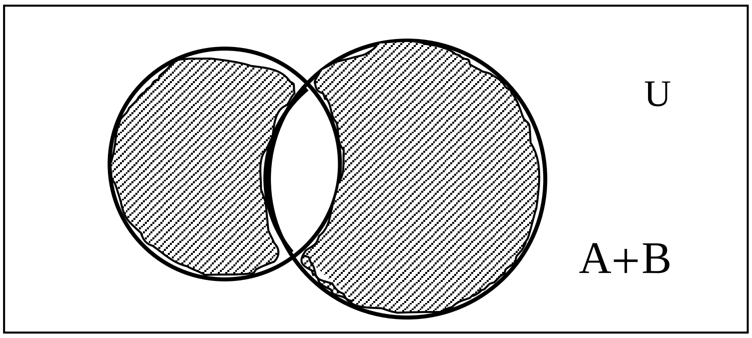
Сумма множества. Суммой множеств A и B называют множеств F, состоящее из элементов, принадлежащих A или B, но не обоим одновременно (исключающее «или»). Обозначение: $F = A + B$.

Примеры

1) $A + B = \{2, 4, 5, 10\}$.

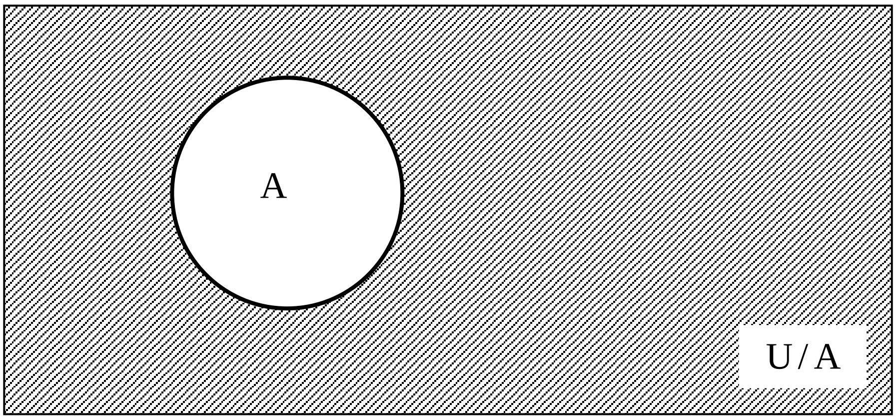
2) $A = \{x : x \geq 0\}$, $B = \{x : x < 5\}$, $A + B = \{x : (-\infty, 0) \cup [5, +\infty)\}$.

3)



Заштриховано $A + B$.

Дополнение множества: Пусть $U -$ универсум, тогда $A' = U/A$.



Свойства операций над множествами

1. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
2. $A \cup B = B \cup A$
3. $A \cup \varnothing = A$
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup A \cap C$
5. $(A \cup B) \cap B = B$
6. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
7. $A \cap B = B \cap A$
8. $\omega \cap A = A$
9. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
10. $\omega(A \cap B) \cup B = B$

Законы де Моргана

1. $(A \cup B)' = A' \cap B'$
2. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Задания по теме 2 «Элементы теории множеств»

При выполнении типовых заданий студент подставляет вместо резервированных буквенных параметров индивидуальные анкетные характеристики:
p_1 – число букв в полном имени студента, p_2 – число букв в полном имени отца (но не отчества), p_3 – число букв в фамилии студента.

Для задач 1-3 определить результаты действий $A \cup B$, $A \cap B$, A / B, B / A, $A + B$.

1. $A = \{x | \le p_1\}$; $B = \{x \mid x > p_2\}$;

2. $A = \{x | -p_3 < x \le p_1\}$; $B = \{x \mid 0 \le x \le p_2\}$;

3. $A = \{x \mid x \ge p_1\}$; $B = \{x \mid p_2 < x \le 3\ p_2\}$.

4. С помощью диаграмм Эйлера-Венна изобразить $A / (B \cup C)$, $A \cap B \cap C$, $A \cup (B \cap C)$.

Множества A, B, C произвольно расположенные относительно друг друга круг, треугольник и квадрат соответственно.

5. Пусть $A = \{x \mid x < p_1\}$, $x \in N$ – множество натуральных чисел. Задать A перечислением его элементов и составить все собственные подмножества для A.

Тема 3. Графы

Определение графа и основные виды графов

Графом G называется пара множеств (X, E), где X – непустое множество вершин $(X_1,\ X_2,\ \ldots\ ,\ X_n)$, а E множество пар $E\{(x_i,\ x_j)$ называемых ребрами. Например,

$$G = (\{X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\},\ \{(X_1,\ X_1),\ (X_1,\ X_2),\ (X_1,\ X_3),\ (X_2,\ X_4),\ (X_2,\ X_4)\}).$$

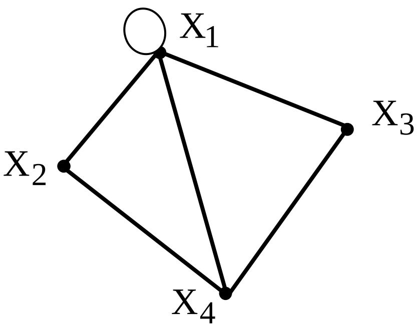


Рисунок 5

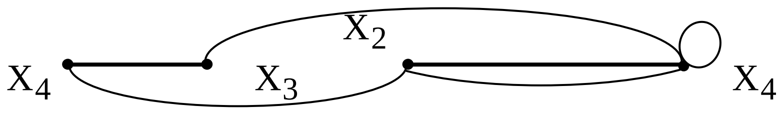


Рисунок 6

Несложные графы удобно изображать в виде графических схем, где вершины точки, а ребра – соединяющие их линии. В этих схемах расположение вершины, длина линий не имеют значения. На рисунках 5 и 6 изображен один и тот же граф G из предыдущего примера.

Таким образом, граф – свободная конструкция, для которой имеет значение факт наличия связей между двумя вершинами и в некоторых случаях характер этих связей.

Если вершины x_i и x_j принадлежит некоторому ребру (x_i, x_j), то говорят, что это ребро **инцидентно** вершинам x_i и x_j, которые в свою очередь называются **смежными.** Если ребро инцидентно одной и той же вершине, то оно называется **петлей.** Вершина, не инцидентная никакому ребру, называется **изолированной.** Если в графе есть вершины, соединенные с двумя и более вершинами, то такой граф называют **мультиграфом.** На рисунке 7 изображен мультиграф.

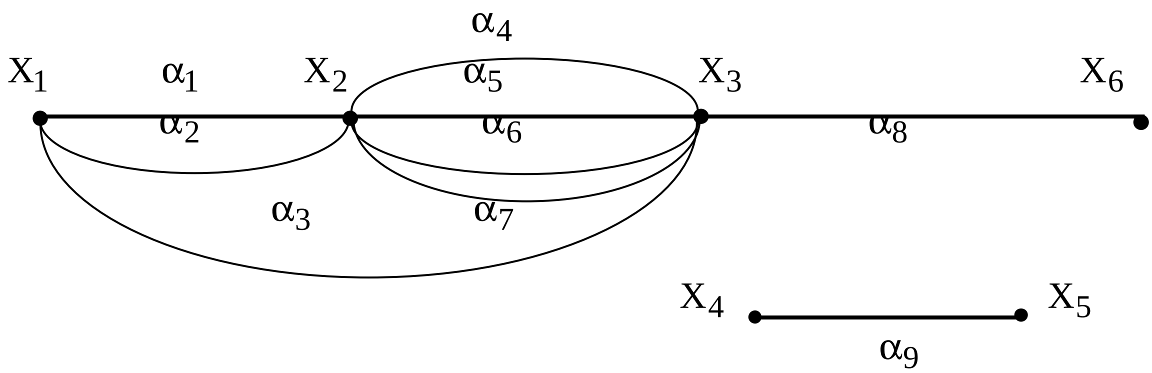


Рисунок 7

Число ребер, инцидентных данной вершине, называется **степенью** (кратностью) данной вершины.

В графе, изображенном на рисунке 7, вершина X_2 имеет степень 6, т. к. ей инцидентны ребра α_1, α_2, α_4, α_5, α_6, α_7, а вершина X_1 имеет степень $3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Вершина X_4 имеет степень 1 (α_9). Изолированная вершина имеет степень 0.

Граф без петель и кратных ребер называется **простым или обыкновенным.** Граф может быть задан в виде квадратной матрицы – **матрицы смежности графа.**

Номера строк и столбцов этой матрицы совпадают с номерами вершин графа, а её элемент c_{ij} есть число ребер, соединяющих вершины x_i и x_j. Для графа, изображенного на рисунке 7, матрица смежности имеет вид

$$C = \left\| \begin{matrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Нумеровать вершины графа можно произвольным образом. Существенным же для графов является лишь число вершин и рёбер, а также отношения инцидентности вершин и ребер. Следовательно, графы, отличающиеся только нумерацией вершин и сохраняющие отношения их инцидентности, могут отличаться лишь начертанием. Такие графы называются **изоморфными.** Решения задач на изоморфных графах совпадают.

Граф называется **планарным** (плоским), если существует изоморфный ему граф, который может быть изображен на плоскости без пересечения рёбер. На рисунке 8 представлена пара изоморфных графов G_1 и G_2 **.**

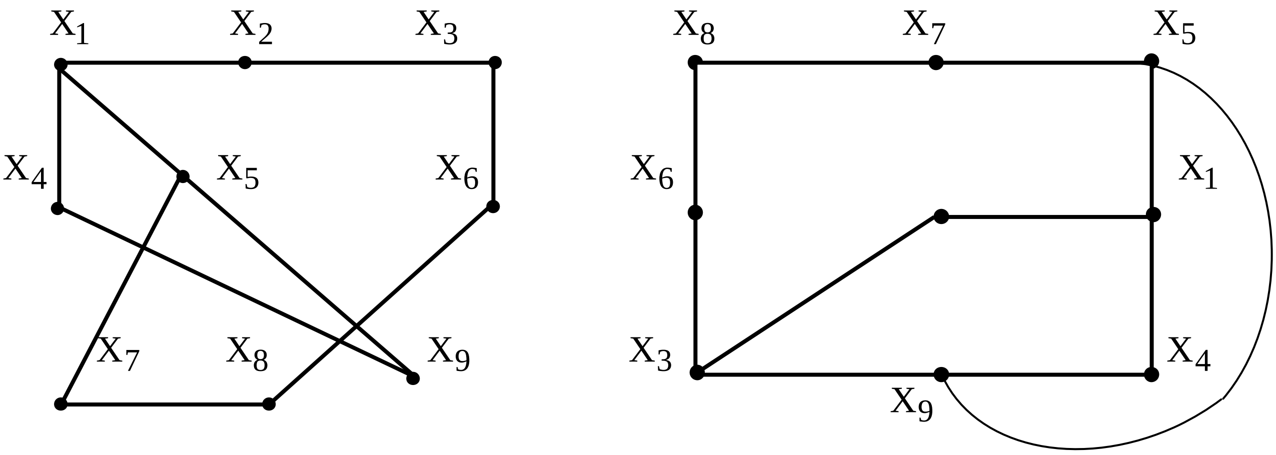


Рисунок 8

Ориентированным (или орграфом) D называется пара $D = (X, A)$, где X – произвольное множество вершин, и A – множество упорядоченных пар (x_i, x_j). В паре первая вершина x_i называется началом дуги, а вторая x_j – концом дуги. На рисунках в орграфах дуги изображаются стрелками (рис. 9).

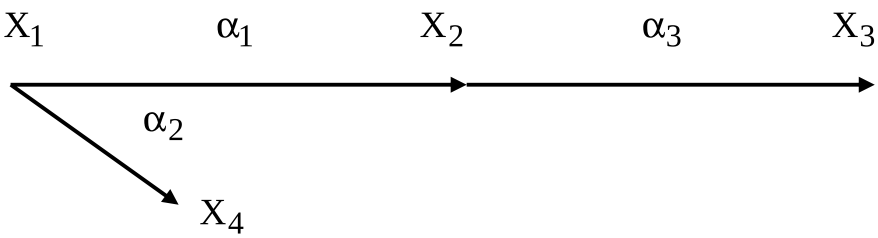


Рисунок 9

Чтобы лучше понять отличие ориентированного графа от неориентированного, можно привести следующую аналогию. Если ориентированный граф описывает систему улиц с односторонним движением, то неориентированный граф – с двусторонним. Ориентированные графы удобно задавать в виде **матриц инциденций.**

Номера строк матрицы инциденций равны номерам вершин, а номера столбцов – номерам дуг. Если дуга выходит из вершины x_i, то соответствующий элемент матрицы инциденций равен минус единице. Если же дуга входит в вершину x_k, то элемент c_{kj} равен плюс единице. Все другие элементы столбца j равны нулю. Для ориентированного графа, изображенного на рисунке 10, матрица инциденций имеет вид

$$C = \left\| \begin{matrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & +1 & 0 & +1 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

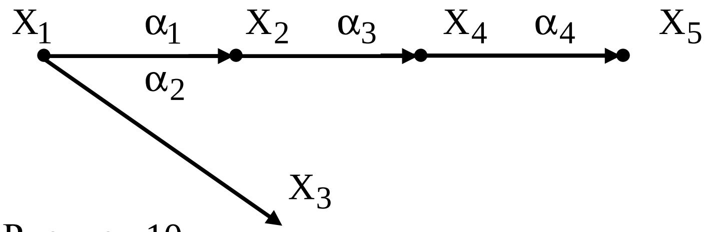


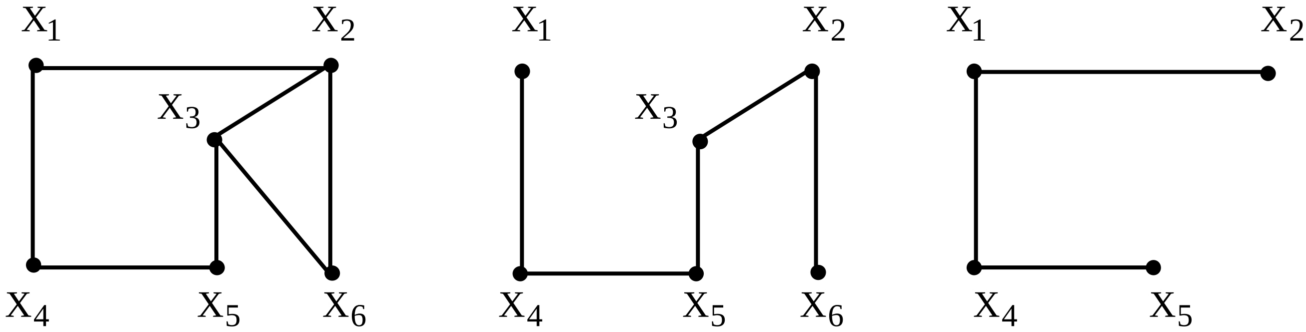
Рисунок 10

Матрицы часто используются для задания графов в памяти компьютеров.

Граф $G_в(X_в,\ E_в)$ называется частичным графом **(суграфом)** графа $G(X, E)$, если он содержит все вершины исходного графа и лишь часть рёбер исходного

графа, т. е. $X_в = X,\ E_в < E.$

Подграфом $G_а(X_а,\ E_а)$ графа $G(X, E)$ называется граф, в который входят подмножество вершин исходного графа $(X_а < X)$ и все ребра, соединяющие вершины X_a этого графа $(E_a < E)$. На рисунке 11 представлены подграф G_a и частичный граф $G_в$ для данного исходного графа $G(X,\ E)$.



$G(X, E)$ $\qquad$ $G_a(X, E)$ $\qquad$ $G_в(X,E)$

Рисунок 11

Маршруты на графах

Пусть дан неориентированный граф $G(X,\ E)$. Маршрутом длины m называется некоторая последовательность m рёбер $G(X,\ E)$, такая, что вершины двух соседних рёбер последовательности совпадают. Примерами маршрутов на графе (рис.7) могут служить следующие последовательности рёбер $(\alpha_1,\ \alpha_6,\ \alpha_5,\ \alpha_1,\ \alpha_3)$ и $(\alpha_2,\ \alpha_1,\ \alpha_4,\ \alpha_6,\ )$. Первый из этих маршрутов соединяет X_1 с X_3. Второй образует замкнутый маршрут, проходя через $X_2,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_2$, приводит в ту же вершину, из которой начался.

Две вершины графа называются связанными, если существует маршрут, соединяющий эти вершины. Граф, любая пара вершин которого связана, называется **связным графом.** Граф (рис. 7) не является связным, отсутствуют маршруты из X_1 в X_4, из X_4 в X_6 и т. д. Граф $G(X,\ E)$ (рис. 11) является связанным, а его суграф и подграф не являются связанными. Маршрут, все рёбра которого различны, называются **цепью.** Цепь, проходящая через различные вершины, называется простой (элементарной) цепью. Замкнутая цепь называется **циклом,** а цикл проходящий через различные вершины – **простым циклом.** Так в графе (рис. 7) маршрут $(\alpha_1,\ \alpha_5,\ \alpha_8)$ является простой цепью, маршрут $(\alpha_2,\ \alpha_5,\ \alpha_6,\ \alpha_1)$ – циклом.

На практике большое значение имеют задачи о нахождении различного рода маршрутов. Наиболее известные из них эйлеров и гамильтонов циклы.

Цикл, содержащий все рёбра графа, называется **эйлеровым,** а граф, имеющий эйлеров цикл, называется **эйлеровым графом.** Если эйлеров граф плоский, то его можно изобразить одним росчерком пера (не отрывая пера от бумаги), причем начальная и конечная вершины совпадают. На рисунке 12 изображен граф обход всех рёбер которого ровно один раз возможен по маршруту: $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5,\ \alpha_6,\ \alpha_4)$.

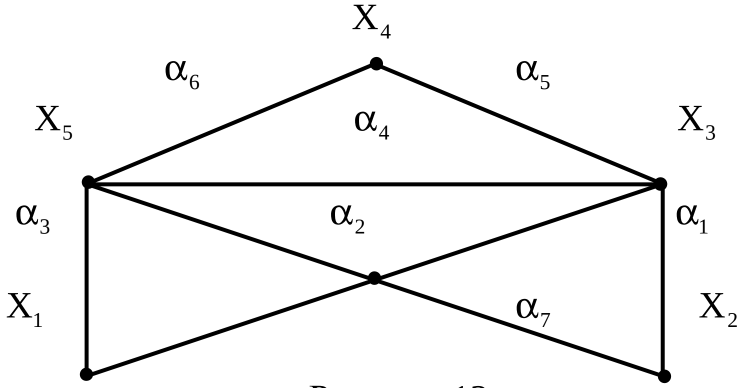


Рисунок 12

Вопрос о существовании эйлерова графа разрешается следующей теоремой:

Теорема. Конечный, неориентированный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда он связный и степени всех его вершин четны. Граф (рис. 12) эйлеров, т. к. он связан, степени X_1 X_2, X_4, равны двум, а степени X_3, X_5 – четырём.

Простой цикл, который проходит через все вершины графа, называется **гамильтоновым.** Условий, гарантирующих существование в графе гамильтонова цикла, математиками пока не установлено.

Пример задачи на нахождение гамильтонова цикла. Задача коммивояжера

Пусть имеется несколько связанных между собой пунктов (городов). Выходя из фиксированного пункта, коммивояжер должен вернуться в него, посетив все пункты ровно один раз. Обычно задача усложняется введением дополнительного ограничения: например, пройти маршрут за самое короткое время или с минимальными затратами на транспорт. Отсутствие условий существования гамильтонова цикла приводит к тому, что, приступая к решению задачи неизвестно, имеет ли она вообще решение или нет. На рисунках 13 и 14 представлены соответственно граф, имеющий гамильтонов цикл, и не имеющий такового.

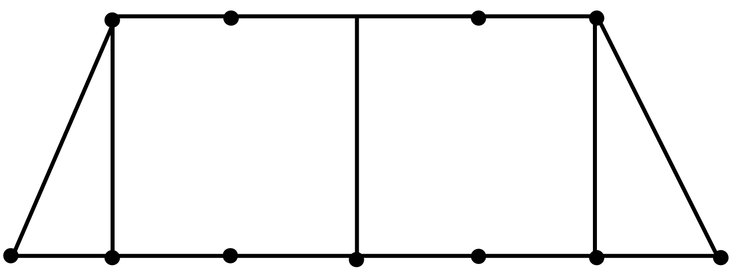


Рис. 13

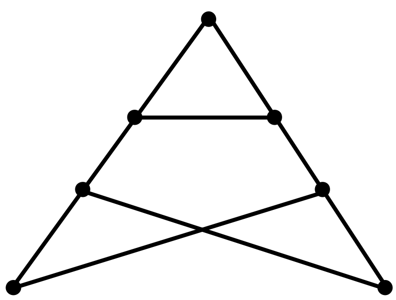
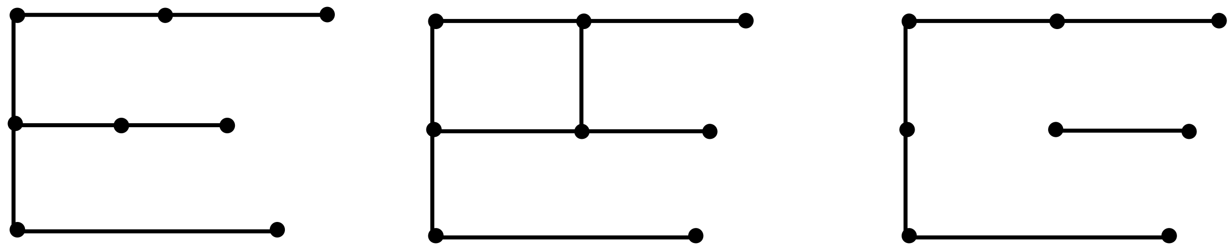


Рис. 14

В ориентированном графе маршруты называются ориентированными: начальная вершина каждой последующей дуги маршрута должна совпадать с конечной вершиной предыдущей дуги. Если рассматривать изображение ориентированного графа, то движение по маршрутам на нём должно осуществляться только в направлениях, указанных стрелками. Маршрут, не содержащий повторяющихся дуг, называется **путем.** Путь, не содержащий повторяющихся вершин, называется **простым путем.** Замкнутый путь называется **контуром. Простой контур –** контур, не имеющий повторяющихся вершин. Если в графе содержится хотя бы один контур, то это контурный граф.

Деревья

Связный граф, не имеющий циклов, называется **деревом,** а ребра дерева называются **ветвями.** У дерева с n вершинами есть ровно $(n-1)$ ветка (ребро). Действительно, если добавить хотя бы одно ребро, то в графе появится цикл. Если же убрать хотя бы одно ребро, то граф станет несвязным.

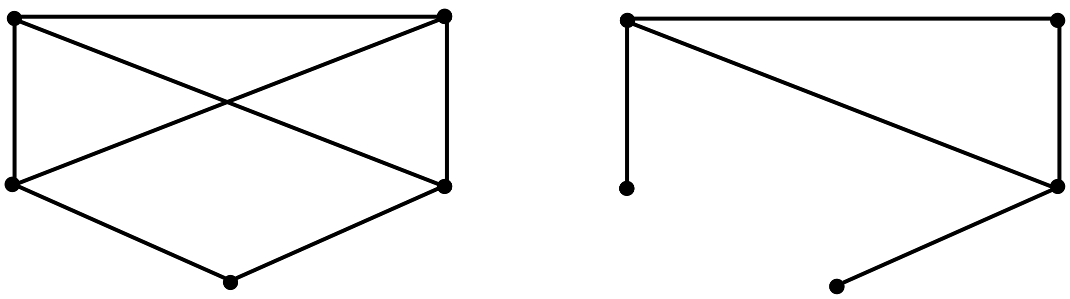


а) б) в)

Рисунок 15

Задачи о покрывающих деревьях. Пусть задан неориентированный граф $G=(X,\ E)$. Дерево $D(Y,\ I)$ называется покрывающих деревом графа $G=(X,\ E)$, если $X=Y,\ \ I<E$. Таким образом, покрывающее дерево связывает все вершины данного графа, но не обязательно при этом включает все его рёбра.

Пример 1.



$G(X,\ E)$ Покрывающее его дерево $D(Y,\ I)$

Пример 2. Для заданного графа построить покрывающее дерево минимального веса. К этой задаче могут быть сведены многие практические проблемы, например: «В строящемся микрорайоне необходимо разработать схему подводки газа к домам, причем затраты на строительство должны быть минимальными». Для решения этой задачи удобной моделью является граф, вершины которого соответствуют домам, рёбра – возможным газовым коммуникациям между ними, веса рёбер – стоимости прокладки газопровода между соответствующими домами.

Задание по теме 3 «Графы»

1. Построить граф возрастных отношений в вашей семье (от третьего поколения).

2. Построить ориентированный граф движения общественного транспорта в вашем микрорайоне. Найдите кратчайшие пути между двумя выделенными пунктами.

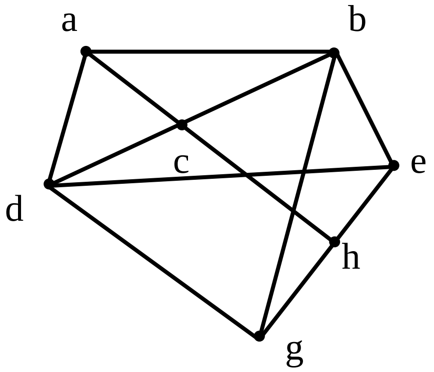
Замечание. Рекомендуется выделить пункты с разветвленным движением.

3. Задан граф в пункте 3 (см. варианты):
   а) построить матрицу смежностей;
   б) построить различные маршруты из a в h.

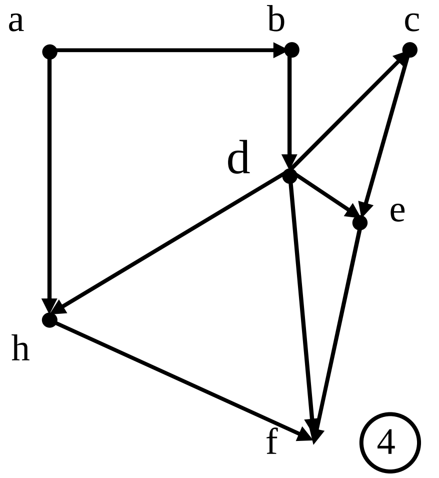
4. Задан ориентированный граф, изображенный в пункте 4 (см. варианты):
   а) построить матрицу инциденций;
   б) построить маршруты из a в f .

5. Для графа из задания 3 построить различные подграфы, в том числе покрывающие деревья.

Вариант 1

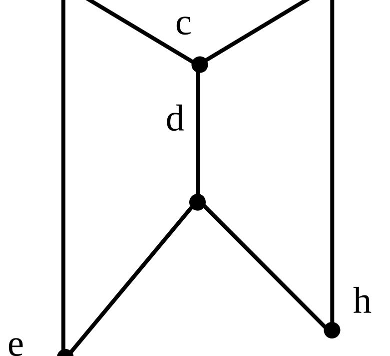


3

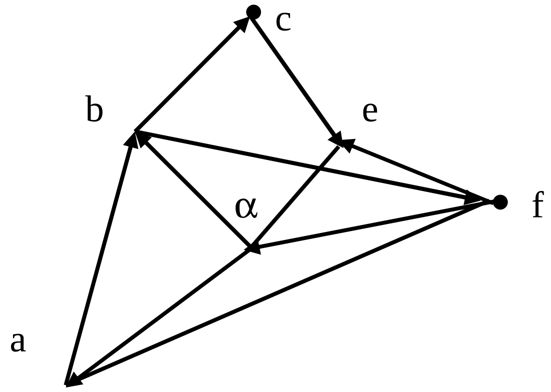


4

Вариант 2

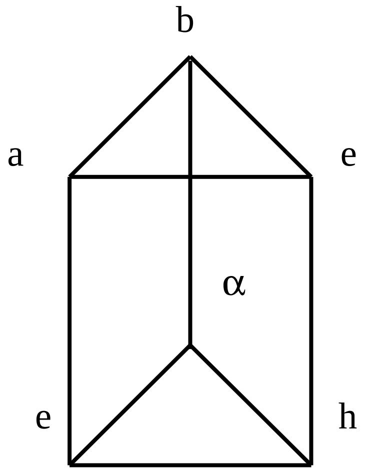


3

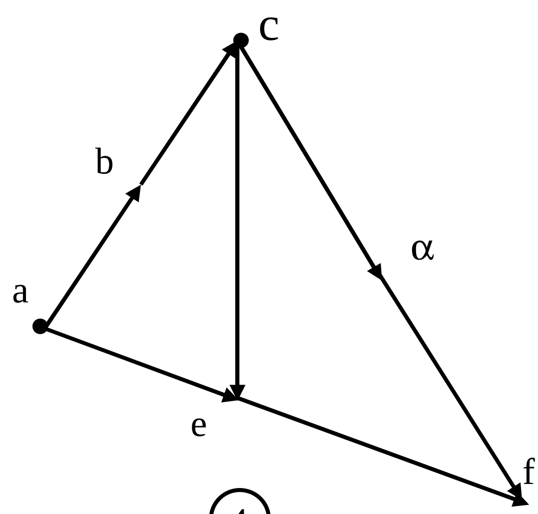


4

Вариант 3

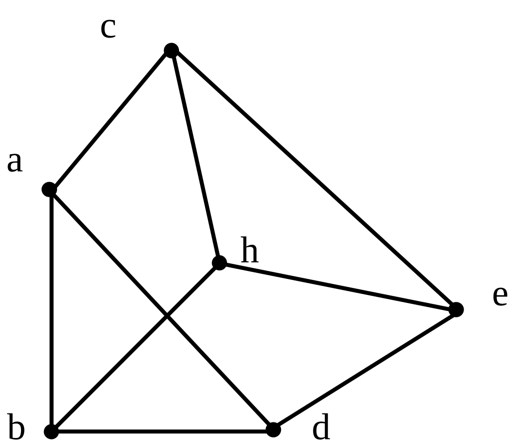


3

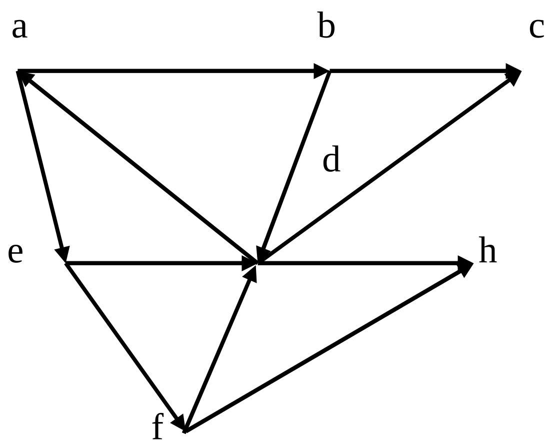


4

Вариант 4

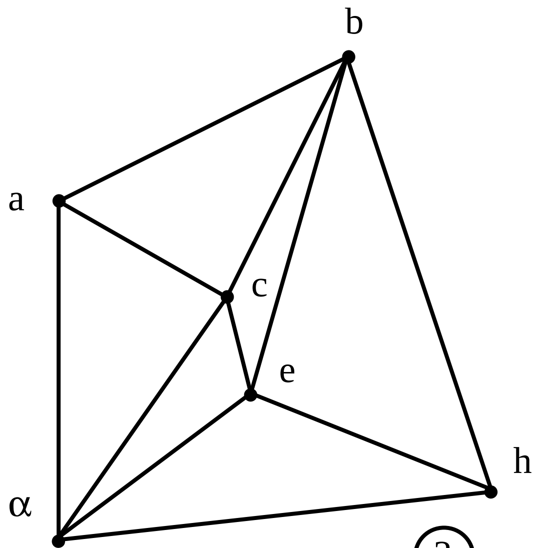


3

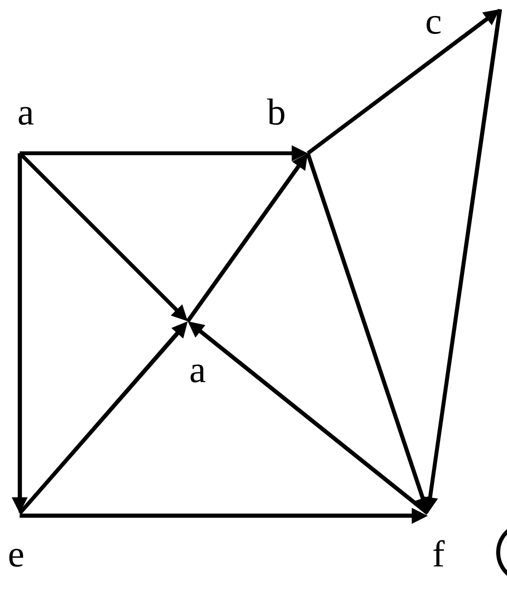


4

Вариант 5

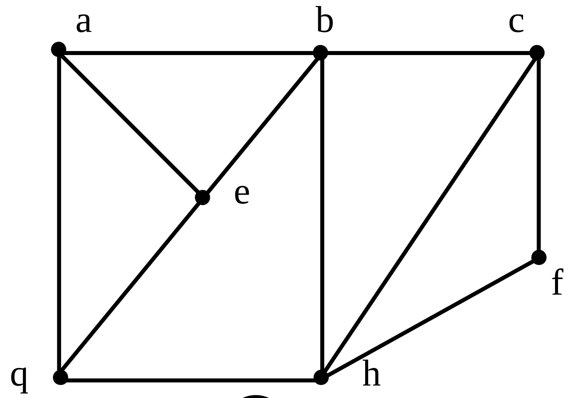


3

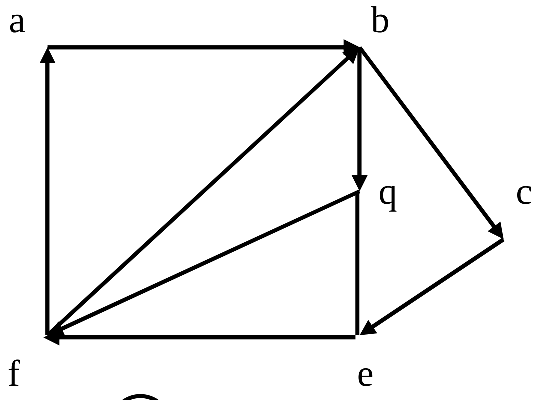


4

Вариант 6

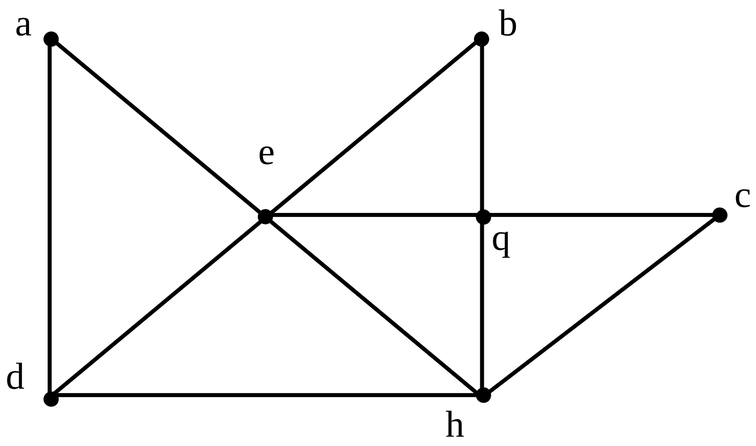


3

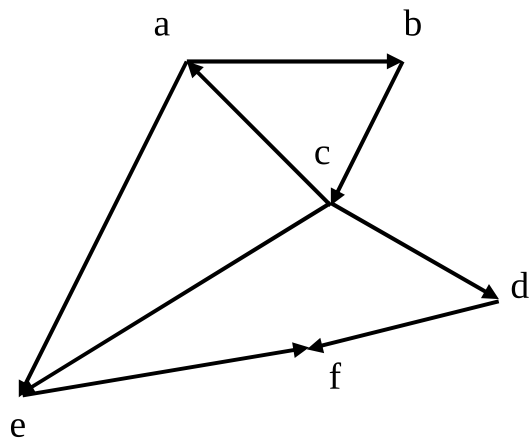


4

Вариант 7

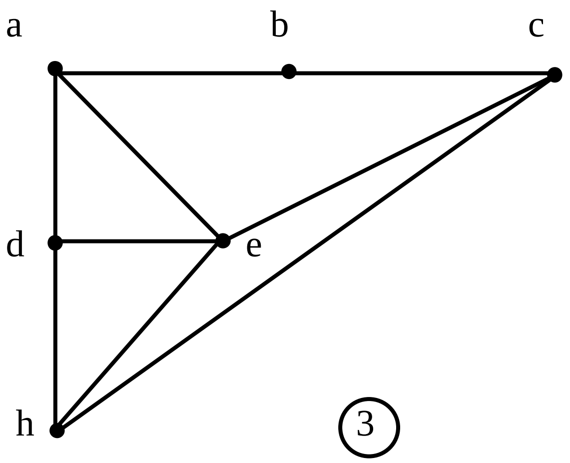


3

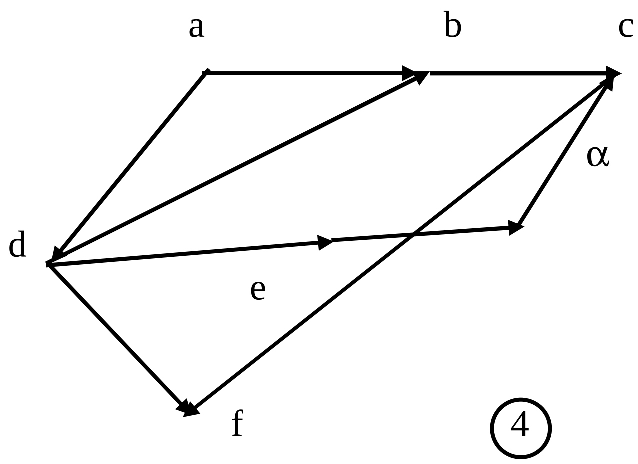


4

Вариант 8

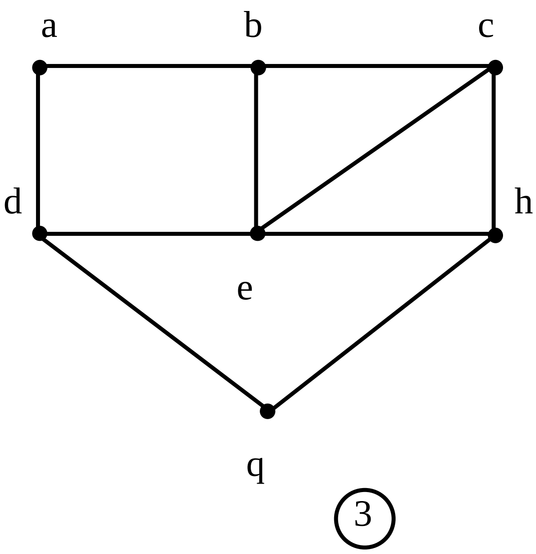


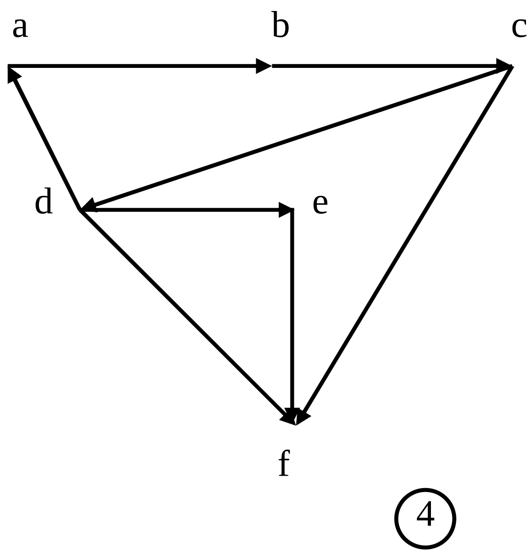
3



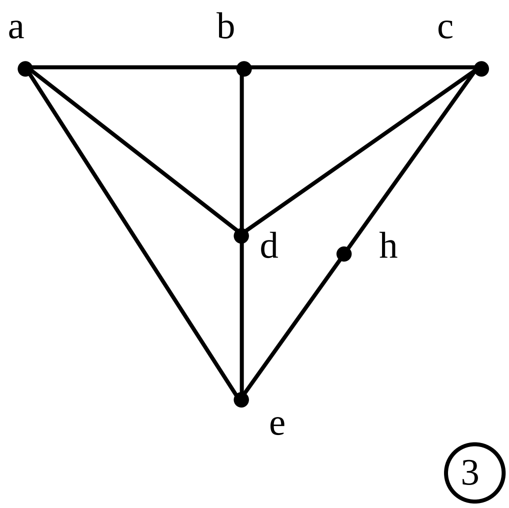
4

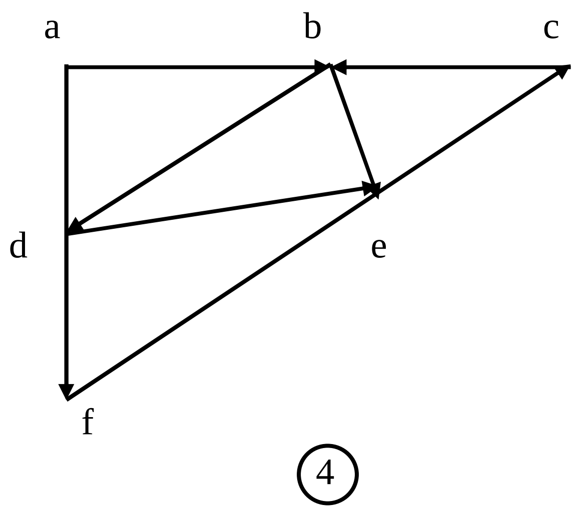
Вариант 9



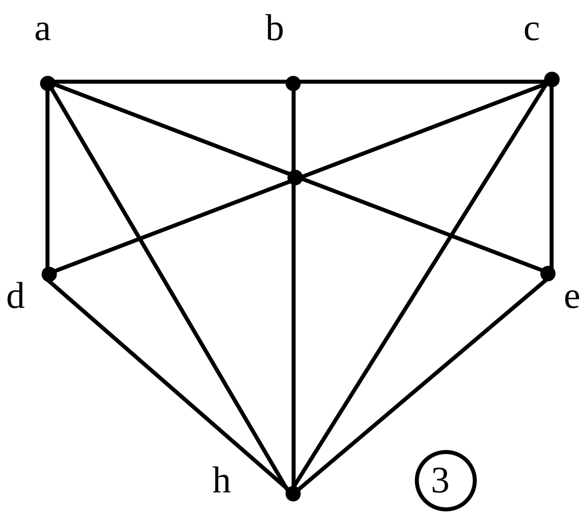


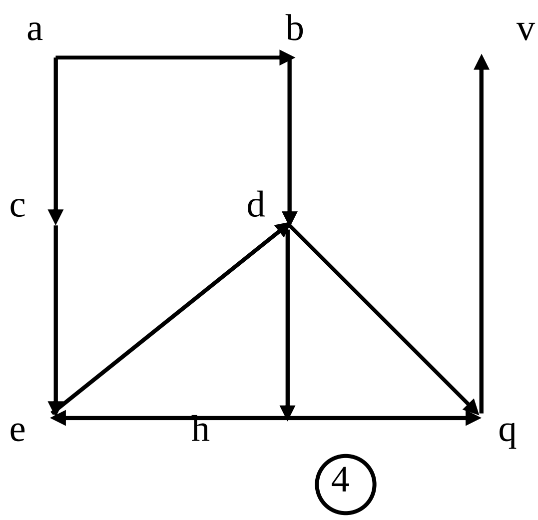
Вариант 10



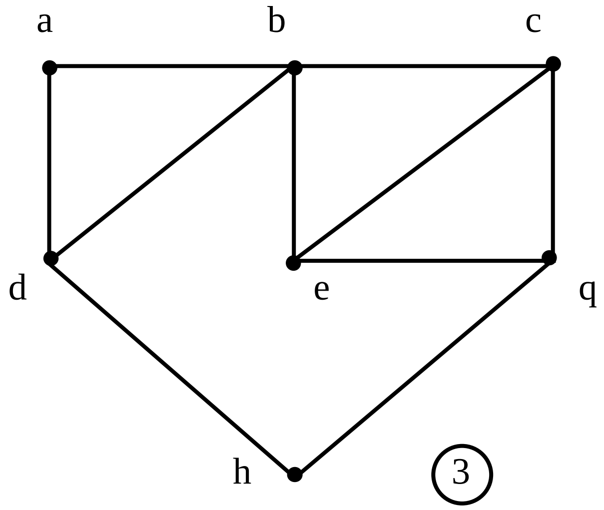


Вариант 11

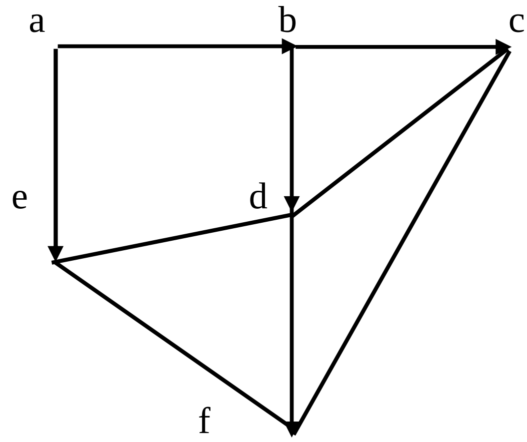




Вариант 12

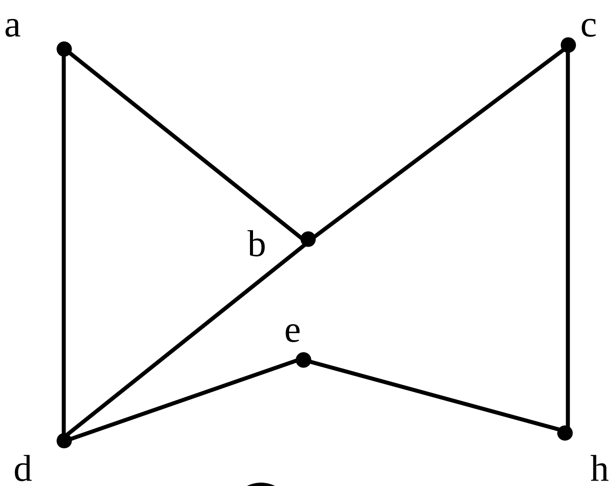


3

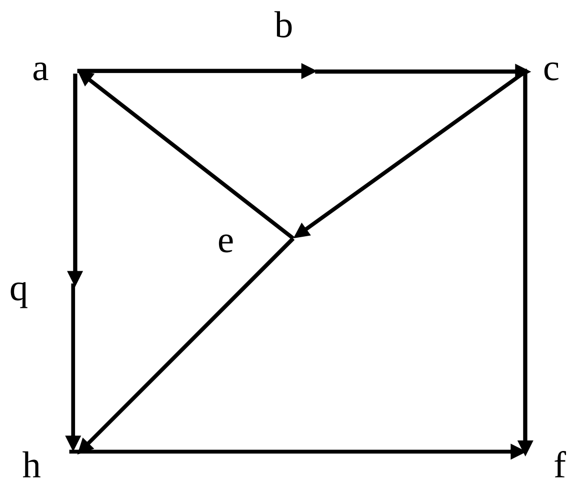


4

Вариант 13

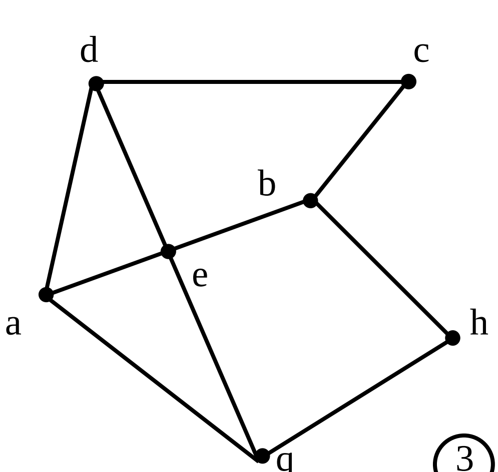


3

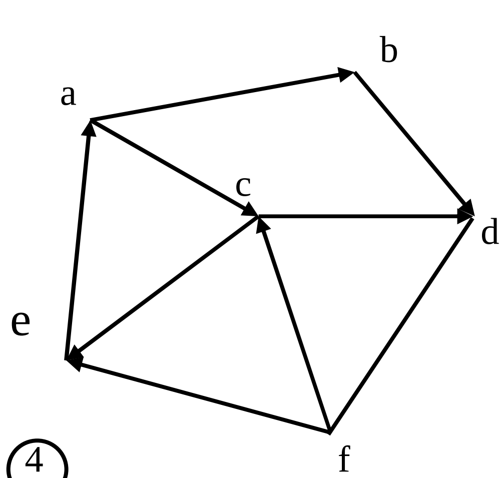


4

Вариант 14

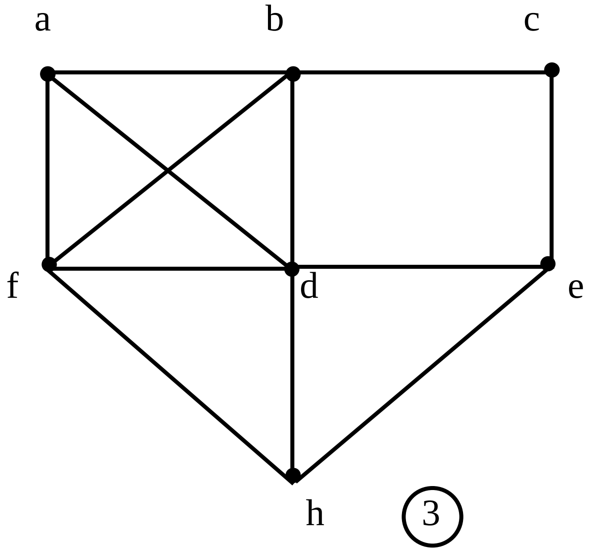


3

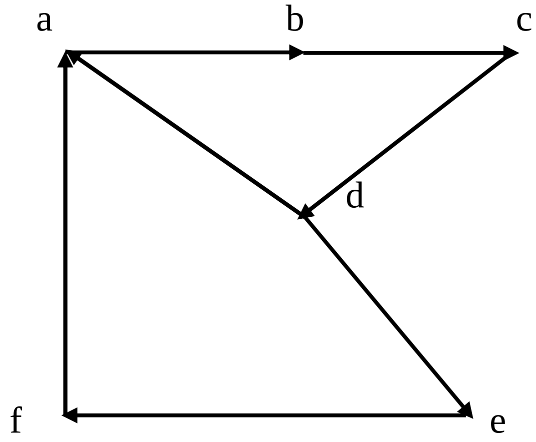


4

Вариант 15

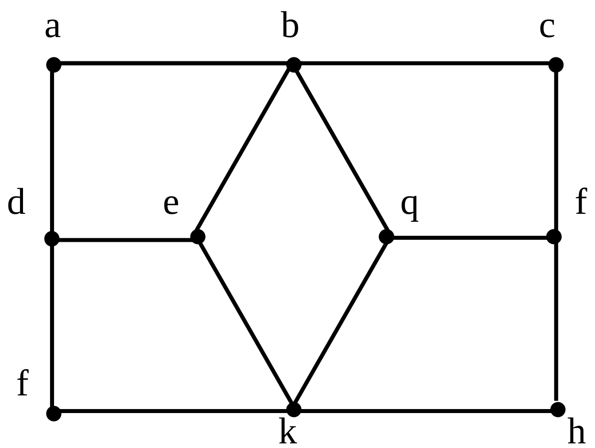


3

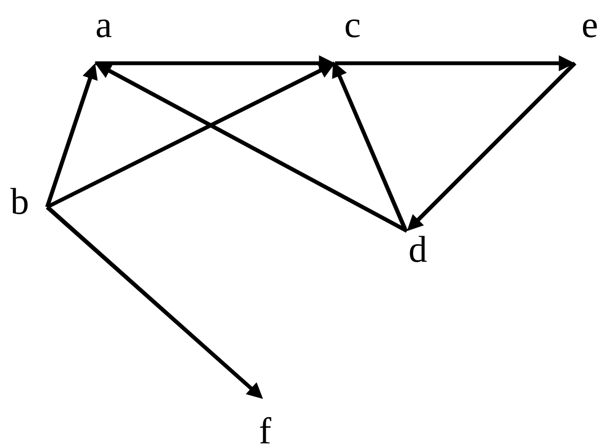


4

Вариант 16

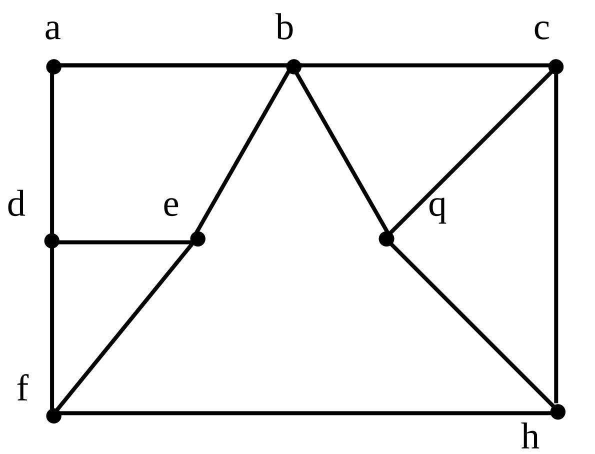


3

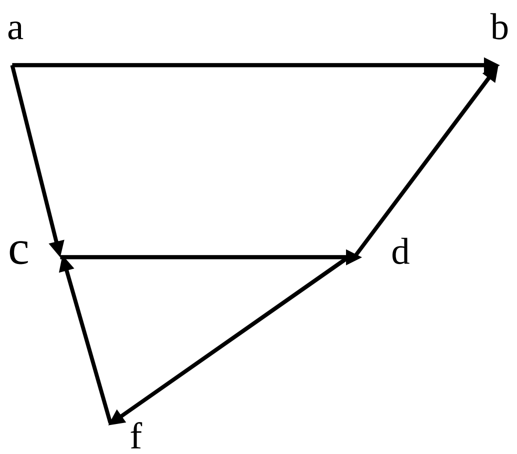


4

Вариант 17

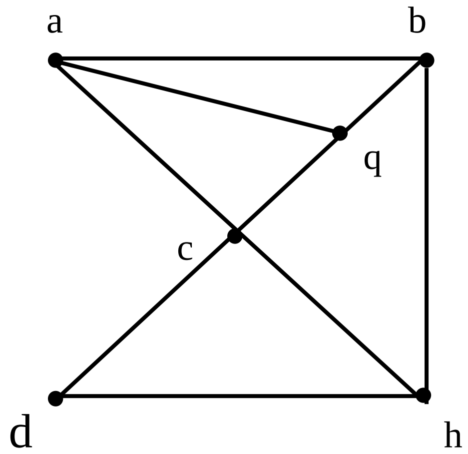


3

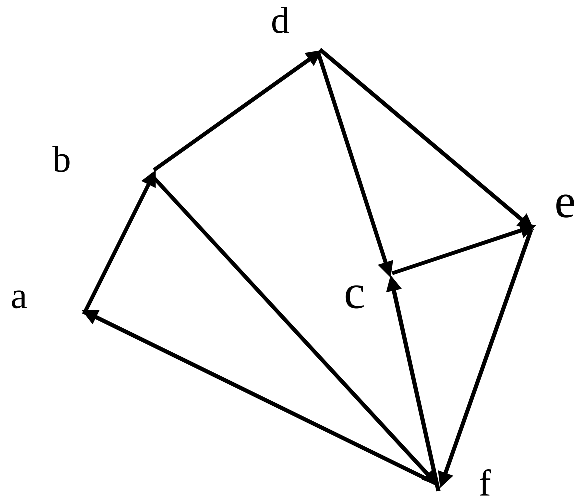


4

Вариант 18

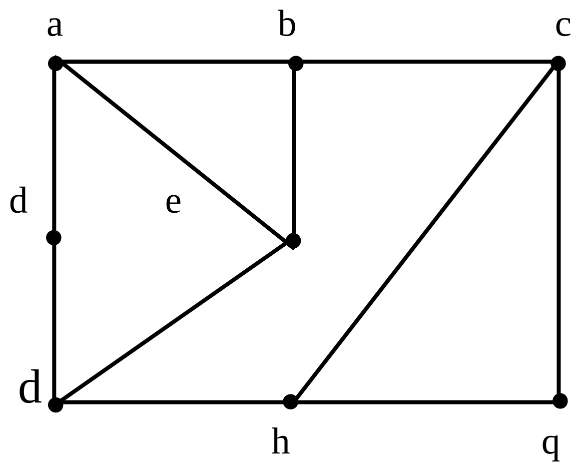


3

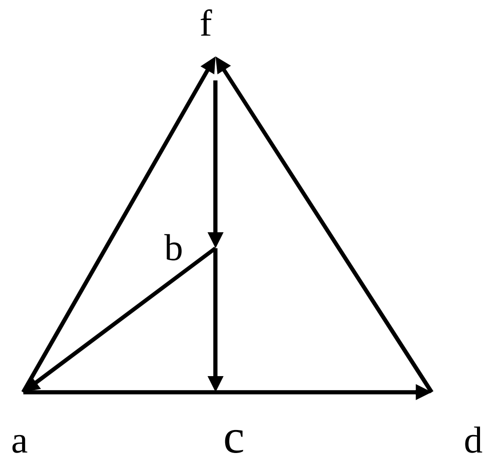


4

Вариант 19

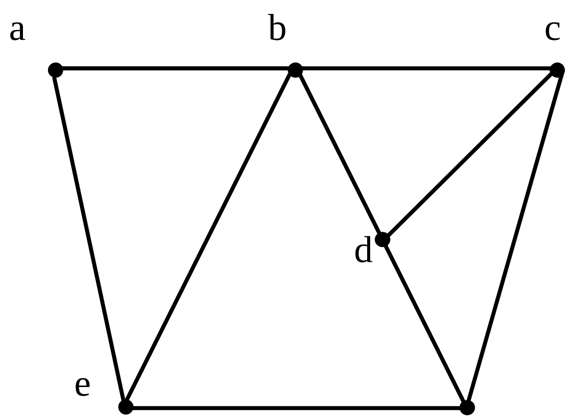


3

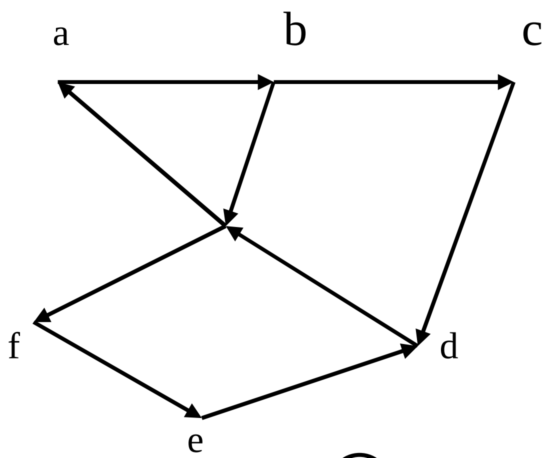


4

Вариант 20

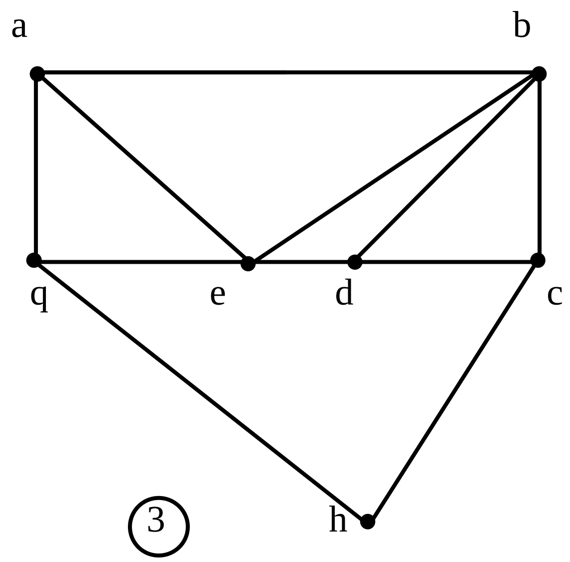


3

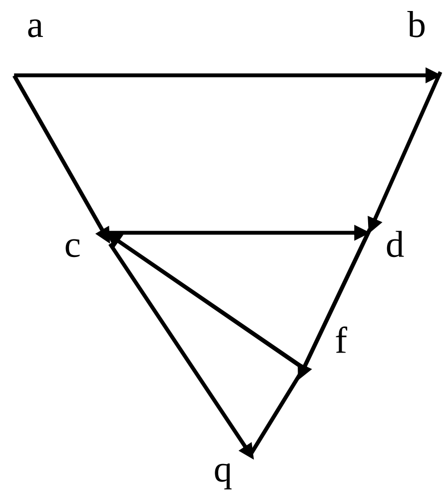


4

Вариант 21

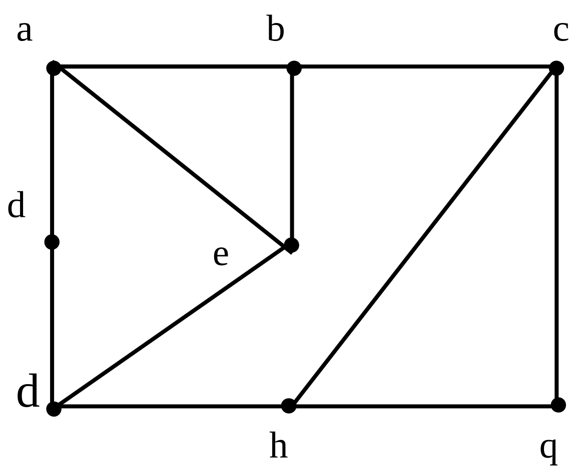


3

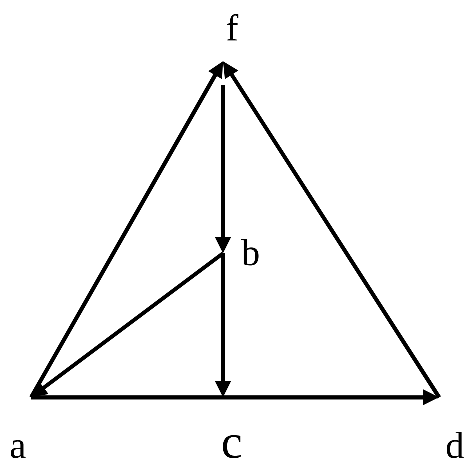


4

Вариант 22

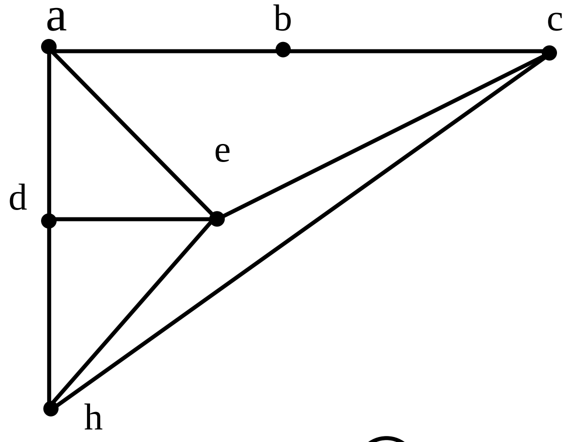


3

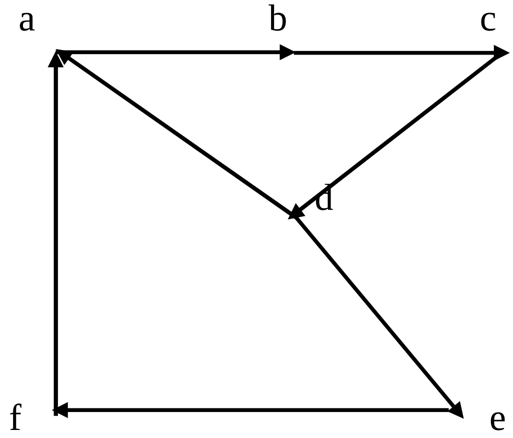


4

Вариант 23

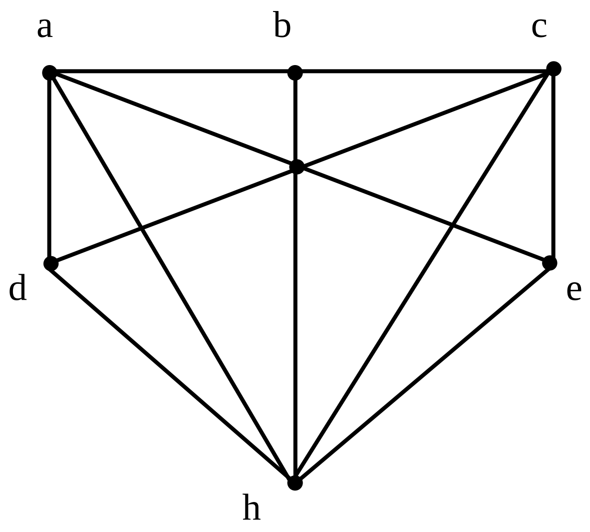


3

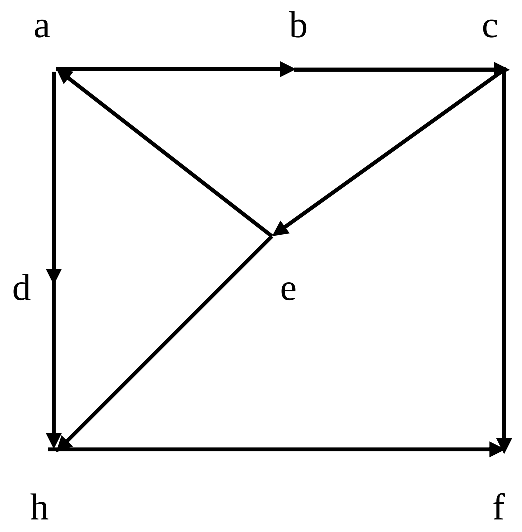


4

Вариант 24

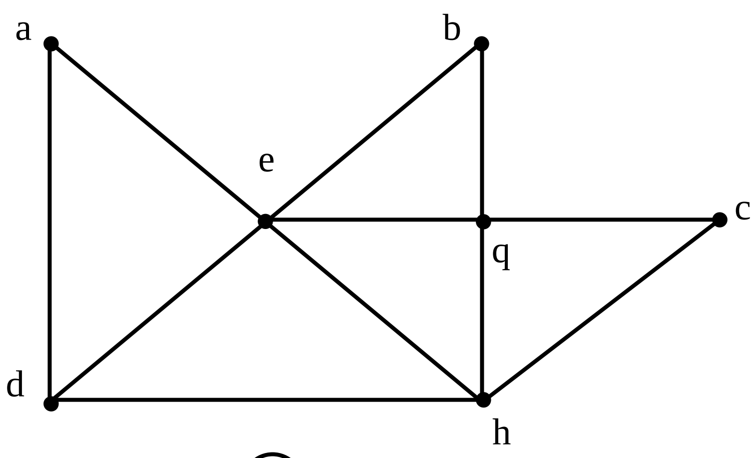


3

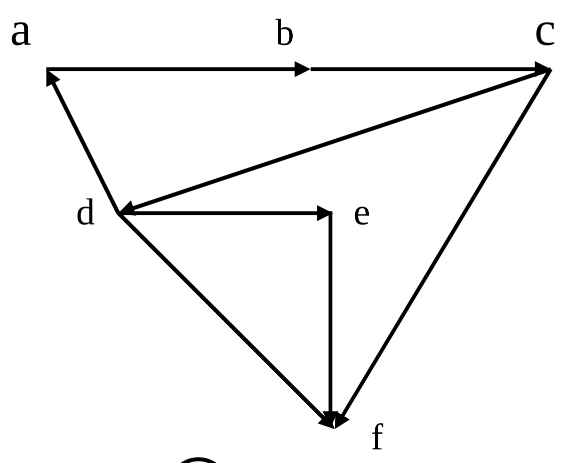


4

Вариант 25



3



4

Библиографический список

1. Воронов М. В., Мещерякова Г. П. Математика для студентов гуманитарных факультетов. – Ростов н/Дону: Феникс, 2002.

2. Бурбаки Н. Теория множеств. М.: Мир, 1965.

3. Жолков С. Ю. Математика и информатика для гуманитариев. М.: Гардарини, 2002.

4. Кемени Д., Снелл Д., Томисон Д. Введение в конечную математику. М.: Изд-во ин. лит., 1963.

5. Оре О. Теория графов. М.: Изд-во ин. лит., 1968.

Редактор Г. М. Кляут
ИД 06039 от 12.10.01
Подписано в печать 24.02.05. Бумага офсетная. Формат 60х84 1/16.
Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ. л. 2,375. Уч.-изд. л. 2,375.
Тираж 100 экз. Заказ .

Издательство ОмГТУ. 644050, г. Омск, пр-т Мира, 11
Типография ОмГТУ