МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Омский государственный технический университет

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И МЕХАНИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

Типовой расчет и методические указания
для студентов первого курса дневного и вечернего отделений

Омск – 2002

Составители: Воронцова Нина Александровна,
Стрельникова Татьяна Борисовна,
Беркович Кай Артуровна.

Типовой расчет (ТР) «Геометрические и механические приложения производной» выполняется студентами первого курса дневного и вечернего отделений для проверки знаний по следующим вопросам.

1. Определение и геометрический смысл производной функции.

2. Вычисление пределов с помощью производной.

3. Нахождение кривизны кривой, заданной аналитически.

4. Использование производной для отыскания характерных точек кривой (экстремумов, перегиба), а также асимптот кривой.

5. Построение графика функции, ее первой и второй производных по результатам произведенных исследований.

6. Отыскание наибольших и наименьших значений функции; оптимальных значений переменной величины исходя из условия задачи (решение «текстовых задач»).

Таково содержание ТР. Выполнение ТР следует начать с изучения теоретических вопросов. Ответы на эти вопросы можно найти в лекциях или учебных пособиях. Эти вопросы предлагаются студентам при защите ТР. Изучение теоретической части ТР следует проводить постепенно, по мере выполнения задания. Например, для выполнения задания 2 «Правило Лопиталя» достаточно знать ответы на вопросы 6-8.

Структура ТР. Каждый студент выполняет один из вариантов в соответствии с указанием преподавателя. Решение всех задач необходимо выполнить в отдельной тетради. В помощь студентам после каждого задания приведены образцы решений типовых задач, с которыми необходимо ознакомиться прежде, чем выполнять свое задание. Форму защиты ТР определяет преподаватель, ведущий практические занятия.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

1. Дать определение производной функции $y=f(x)$ в заданной точке x_0, сформулировать определение произвольной функции $y=f(x)$ в точке x_0 слева и справа.

2. Каков геометрический и механический смысл производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 ?

3. Что называется касательной к кривой L: $y=f(x)$ в точке $A(x_0,y_0)$ этой кривой ? Что называется нормалью к кривой в этой точке ?

4. Какая кривая называется гладкой в промежутке (a,b); кусочно-гладкой ?

5. Вывести уравнения касательной и нормали к кривой $y=f(x)$ в заданной точке $A(x_0,y_0)$ этой кривой.

6. Что называется «математической неопределенностью»? Укажите виды математических неопределенностей.

7. Сформулировать правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0};\frac{\infty}{\infty}$. Как раскрываются неопределенности вида $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$?

8. Как раскрываются неопределенности вида 1^{∞}, ∞^{0}, 0^{0} ?

9. Дать определение функции $y = f(x)$, монотонно возрастающей (убывающей) в заданном промежутке $(a;b)$.

10. Сформулировать необходимые и достаточные признаки монотонности функции $y = f(x)$ в промежутке $(a;b)$.

11. Дать определение максимума (минимума) функции $y = f(x)$ в точке x_0.

12. Сформулировать необходимое условие существования экстремума функции $y = f(x)$ в точке x_0.

13. Сформулировать достаточные признаки существования экстремума функции $y = f(x)$ в точке x_0.

14. Как находятся экстремумы функции $y = f(x)$?

15. Дать определение кривой L: $y = f(x)$, выпуклой (вогнутой) в промежутке $(a;b)$.

16. Сформулировать достаточное условие выпуклости (вогнутости) кривой L: $y = f(x)$ в промежутке $(a;b)$.

17. Как находятся точки перегиба кривой L: $y = f(x)$?

18. Дать определение асимптот кривой L: $y = f(x)$. Примеры.

19. Как находятся вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты кривой L: $y = f(x)$?

20. Схема полного исследования функции.

21. Как определяется кривизна кривой L: $y = f(x)$ в точке x_0 ?

22. Как вычисляется кривизна пространственной и плоской кривой в заданной точке ?

23. Что называется радиусом, центром и кругом кривизны кривой L ?

24. Что называется эволютой и эвольвентой кривой L ?

25. Дать определение вектор-функции скалярного аргумента. Указать три способа задания кривой L в трехмерном пространстве. Привести примеры.

26. Геометрический смысл производной вектор-функции.

ЗАДАНИЕ 1. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

Составить уравнение касательной и нормали к заданной кривой L в указанной точке.

1. $L: y = \dfrac{x+1}{x-1}$; $A(2;3)$.
2. $L: y = x^3 + 4x^2 - 1$ при $x_0 = -1$.
3. $L: y = x^2 - 4x + 4$ при $y_0 = 1$.
4. $L: y = \dfrac{x-4}{2x+1}$ при $x_0 = 0$.
5. $L: y = x^3$ при $x_0 = -2$.

6. $L: y = \operatorname{tg} x$ при $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

7. $L: \begin{cases} x = t^{2-1}, \\ y = t^2 + t - 3; \end{cases}$ $M_0(3;\ 1)$.

8. $L: \begin{cases} x = t^2 - 3t + 3, \\ y = t^2 - 4t + 3; \end{cases}$ $M_0(1; -1)$.

9. $L: \begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 4\sin t; \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

10. $L: \begin{cases} x = 2t, \\ y = 4t^2 - 1 \end{cases}$ при $t_0 = 0$.

11. $L: \begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = 2t + 5 \end{cases}$ при $t_0 = 1$.

12. $L: \begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2 \end{cases}$ при $t_0 = 2$.

13. $L: \begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3 \end{cases}$ при $t_0 = -1$.

14. $L: \begin{cases} x = t_2 + 7, \\ y = t - 1 \end{cases}$ при $t_0 = 1$.

15. $L: \begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = 2t^3 - 3t - 1 \end{cases}$ при $t_0 = 1$.

16. $L: \begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = \sin 2t \end{cases}$ при $t_0 = -\dfrac{\pi}{2}$.

17. $L: \begin{cases} x = e^t, \\ y = e^{-t} \end{cases}$ при $t_0 = 0$.

18. $L: y = (3x + 1)(2x - 3)$ при $y_0 = 0$.

19. $L: xy = 4$ при $x_0 = 2$.

20. $L: y = \cos x$ при $x_0 = \pi / 2$

21. $L: y = x \cdot e^x$ в точках пересечения с осями координат.

22. $L: y = x^2 - 2x + 2$ в точках пересечения с прямой $y = x$.

23. $L: y = x^2 + 4x + 3$ в точках пересечения с осями координат.

24. $L: y = x^4$ в точках пересечения с прямой $y = x$.

25. $L: y = \ln x$ в точках, где касательная параллельна прямой $y = x$.

26. $L: y = 2x^2 - 4x + 5$ в точках, где касательная параллельна оси абсцисс.

27. $L: y = x^3 - 3x^2$ в точках, где касательная параллельна оси абсцисс.

28. $L: y = x^4 - 2x^2 + 3x - 1$ в точках, где касательная параллельна прямой $3x - y = -1$.

29. $L: y^2 + x^2 = 32$ в точках, где касательная перпендикулярна прямой $x + y + 4 = 0$.

30. $L: y = \sin 2x$ в начале координат.

31. $L: y = \dfrac{1}{1+x^2}$ при $x_0 = 1$.

32 . $L: y = \left(\sqrt{2x} - 1\right)^3$ при $x_0 = 2$.

33. $L: y = -x^2 + 2x - 3$ в точке, где касательная находится под углом в 45^0 к оси OX.

34. $L: y = x^2 + 4x$ в точке, где касательная параллельно оси OX.

35. $L: y = \operatorname{arctg} x$ при $x_0 = 1$.

36. $L: y = \dfrac{x}{1+x^2}$ при $x_0 = 2$

37. $L: y = x^2$ в точке, где касательная образует с прямой $3x - y + 1$ угол в 45^0.

38. $L: y = x^4 - 3$, если касательная проходит через точку (1, -2).

39. $L: y = x^2 + 2x - 1$ в точке ее пересечения с параболой $y = 2x^2$.

40. $L: y = \ln x$ в точке, где касательная параллельна прямой $y = x - 1$.

41. $L: y = \ln x$ в точке, где касательная перпендикулярна прямой $2x + 3y + 1 = 0$.

42. $L: y = x^2 + 4x + 1$ в точке, где касательная параллельна прямой, соединяющей начало координат с вершиной параболы.

43. $L: \begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ при $t_0 = \dfrac{\pi}{3}$.

44. $L: \begin{cases} x = t^2 + 1, \\ 2t^3 - t^2 \end{cases}$ в точке, где касательная параллельна прямой $y = 2x$.

45. $L: x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3$ в точках, где касательная пересекает ось OX.

46. $L: \begin{cases} x = t - 1, \\ y = t^3 - 12t + 1 \end{cases}$ в точке, где касательная параллельна оси OX.

47. $L: \begin{cases} x = t - 1, \\ y = t^3 - 12t + 1 \end{cases}$ в точке, где касательная параллельна прямой $9x + y + 3 = 0$.

48. $L: \begin{cases} x = 2\sqrt{3}\cos t, \\ y = 2\sin t \end{cases}$ при $t_0 = \dfrac{\pi}{6}$.

49. $L: y^2 - 2x^2 = 1$ при $x_0 = 2$.

50. $L: \begin{cases} a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ при $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЯ 1

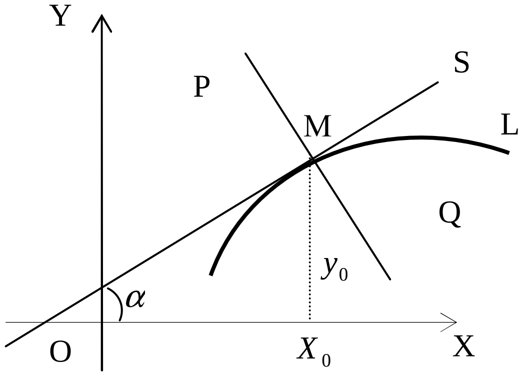

Рис 1.

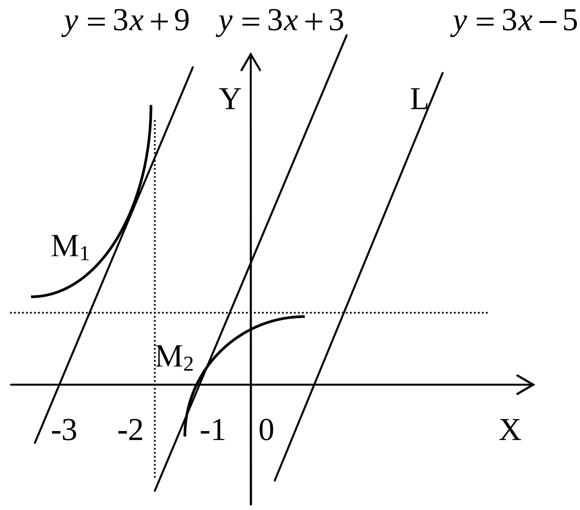

Рис. 2

Если кривая $L: y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет касательную MS (рис.1) , то ее уравнением будет $y - y_0 = k_{кас}(x - x_0)$, причем угловой коэффициент $k_{кас} = \mathrm{tg}\alpha = f'(x_0)$.

Здесь α - угол между MS и положительным направлением оси OX.

Уравнение касательной: $y - y_0 = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$ или $y - y_0 = y'(x_0)\cdot(x - x_0)$.

Уравнение нормали : $y - y_0 = -\dfrac{1}{f(x_0)}\cdot(x - x_0)$ или $y - y_0 = -\dfrac{1}{y'(x_0)}\cdot(x - x_0)$.

Все задачи решаются по единому плану: надо найти координаты $(x_0; y_0)$ точки касания M; найти производную функции $y' = f'(x)$; ее значение в точке касания $y'(x_0) = f'(x_0)$; записать уравнения касательной и нормали. Уравнения полученных прямых записать в общем виде : $Ax + By + C = 0$.

Пример 1. Написать уравнения касательной и нормали к гиперболе $y = \dfrac{3x+3}{2x+3}$ в точке $M_0(x_0; y_0)$, в которой касательная параллельна прямой $L: y = 3x - 5$ (рис.2).

Решение. Так как касательная $MS \parallel L$, то $k_{кас} = k_e = 3$, но $k_{кас} = f'(x_0) = 3$. Из этого условия найдем координаты $(x_0; y_0)$ точки касания M. $y' = \dfrac{3}{(2x+3)^2}$.

Решив уравнение $\dfrac{3}{(2x+3)^2}=3$, найдем $x_1=-2,\ x_2=-1$. Тогда из уравнения кривой находим: $y_1=3,\ y_2=0$. Таким образом, получаем две точки касания: $M_1(-2;\ 3)$ и $M_2(-1;0)$. Уравнение касательной в точке $M_1: y-3=3(x+2)$ или $3x-y+9=0$. Уравнение нормали в точке $M_1: y-3=-\dfrac{1}{3}(x+2)$ или $x+3y-7=0$. Уравнение касательной в точке $M_2: y-0=3(x+1)$ или $3x-y+3=0$. Уравнение нормали в точке $M_2: y-0=-\dfrac{1}{3}(x+1)$ или $x+3y+1=0$.

Замечание. Кривая $L: y=\dfrac{3x+3}{2x+3}$ гипербола, состоящая из двух ветвей. На каждой из ее ветвей лежит по одной точке касания, поэтому задача имеет два решения (рис.2).

Пример 2. Написать уравнение касательной и нормали к кривой $L: \begin{cases} x=t^2-4t+3, \\ y=t^2+3t+3 \end{cases}$ в точке $M_0(-1;\ 1)$.

Решение. Координаты точки касания здесь известны: $x_0=-1,\ y_0=+1$. Поэтому надо найти $k_{кас}$. Найдем производную y'_x по формуле $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$. Итак, $y'_x=\dfrac{2t-3}{2t-4}$. Найдем значение параметра t, соответствующее точке касания M_0. Для этого решим систему уравнений $\begin{cases} x=t^2-4t+3, \\ y=t^2-3t+3 \end{cases}$ относительно t при $x=-1,\ y=1$.

$$\begin{cases} -1=t^2-4t+3, \\ 1=t^2-3t+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^2-4t+4=0 \ \Rightarrow \ t_1=2;\ t_2=2, \\ t^2-3t+2=0 \ \Rightarrow \ t_1=1;\ t_2=2. \end{cases}$$

Таким образом, точке касания $M_0(-1;1)$ соответствует значение параметра $t=2$. Отсюда $k_{кас}=y'_x(2)=\dfrac{2\cdot 2-3}{2\cdot 2-4}=\infty$. Так как $k_{кас}=\infty$, то это значит, что касательная перпендикулярна к оси OX и ее уравнение $x=1$. Нормаль имеет уравнение $y=1$.

ЗАДАНИЕ 2. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

Указать вид неопределенностей и вычислить пределы, пользуясь правилом Лопиталя.

1. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{2x\cdot\sin x}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0+0} x\cdot\ln x$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{x^2}\right)$,

г) $\lim\limits_{x\to 0=0}(1+x)^{\ln x}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin x}{2\operatorname{tg}\frac{x}{4}}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg}x\cdot\ln x^2$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$,

г) $\lim\limits_{x\to 0=0}(1+\sin x)^{\ln x}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\sin 3x}{x^2-\sin x}$,

б) $\lim\limits_{\varphi\to\pi}(\varphi-\pi)\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}$,

в) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{x}-\sec\dfrac{\pi}{x}\right)$,

г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+\cos x-1}{\operatorname{tg}^2 4x}$,

б) $\lim\limits_{x\to 2+0}\sqrt{x^2-4}\cdot\sec\dfrac{\pi x}{4}$,

в) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\ln x)$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln x)^{1/x}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\sin x}{32x^2}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\operatorname{ctg}2x$,

в) $\lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}\varphi-\sec\varphi)$,

г) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{m}{x^2-1}}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x-x^2}{\ln(x+1)}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0+0}\sqrt[3]{x}\cdot\ln x$,

в) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{x-1}\right)$,

г) $\lim\limits_{x\to 0+0}x^{\frac{6}{1+2\ln x}}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to -2+0}\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{2x+4}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cdot e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+e^x)^{\frac{1}{x}}$.

8. а) $\lim\limits_{y\to 0+0}\dfrac{y-\sqrt{y}}{y+\sqrt{y}}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{x}{3}-\operatorname{cosec}\dfrac{x}{3}\right)$,

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot\operatorname{tg}5x$,

г) $\lim\limits_{x\to 1+0}(x-1)^{a/\ln 2(x-1)}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln y^2}{y-1}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg}x\cdot\ln(x+e^x)$,

в) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{5}{x^5-1}-\dfrac{7}{x^7-1}\right)$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{m}{x}\right)^x$.

10.а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln(1+x)}$,

б) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\sin(2x-1)\cdot\operatorname{tg}\pi x$,

в) $\lim\limits_{\varphi\to 0}\left(\operatorname{ctg}\varphi-\frac{1}{\varphi}\right)$,

г) $\lim\limits_{x\to 0+0}(\operatorname{ctg}2x)^{1/\ln x}$.

11.а) $\lim\limits_{u\to 0}\frac{1-2^u}{1-3^u}$,

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3+1\right)\cdot e^{1-x^2}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{\sin 2x}\right)$,

г) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

12.а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x-x}{2x-\operatorname{arctg}x}$,

б) $\lim\limits_{x\to 2+0}\sqrt{x-2}\cdot\ln(x-2)$,

в) $\lim\limits_{x\to\pi}(\operatorname{cosec}x+\operatorname{ctg}x)$,

г) $\lim\limits_{\alpha\to 0}(\cos k\alpha)^{1/\alpha^2}$.

13.а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2-\sin 2x)}{\operatorname{tg}^3 x}$,

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot e^{-0,01x}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\operatorname{ctg}x\right)$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{tg}x)^{\arcsin x}$.

14.а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-2\cos 2x+2}{3x^2}$,

б) $\lim\limits_{x\to -a}\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{a}$,

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg}x-\frac{1}{1-\sin x}\right)$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x)^{\operatorname{tg}x}$.

15.а) $\lim\limits_{y\to 0}\frac{2^{y^2}-1}{\ln(1+\operatorname{tg}y)}$,

б) $\lim\limits_{x\to a}\arcsin\frac{x-a}{a}\cdot\operatorname{ctg}(x-a)$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$,

г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$.

16.а) $\lim\limits_{y\to 0}\frac{y-1+e^{\sin y}}{\sqrt{1+\sin 2y}-1}$,

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\pi-2\operatorname{arctg}x)\ln x$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x(1+x)}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}\right)$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\arcsin x)^{1/2x}$.

17.а) $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\ln\cos u}{\operatorname{tg}u}$,

б) $\lim\limits_{y\to\pi}(\pi-y)\cdot\operatorname{tg}\frac{y}{2}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\operatorname{ctg}x}{x}\right)$,

г) $\lim\limits_{x\to 0+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}$.

18. а) $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\ln\sqrt{1+u^2}}{\arcsin u}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0}\arcsin x\cdot\ln x^4$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\pi x-1}{2x^2}+\dfrac{\pi}{x\left(e^{2\pi x}-1\right)}\right)$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos ax)^{\sin^{-2}bx}$.

19. а) $\lim\limits_{u\to 1}\dfrac{\ln\left(2^u-1\right)}{\sin(u-1)}$,

б) $\lim\limits_{y\to 0+0}x^{10}\cdot\ln x$,

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\mathrm{ctg}x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$,

г) $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2a}}$.

20 а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\cos x-\sec x)}{\mathrm{arctg}x}$,

б) $\lim\limits_{z\to\frac{\pi}{2}}\left(z-\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot\mathrm{tg}z$,

в) $\lim\limits_{z\to 0}\left(\dfrac{\pi}{4x}-\dfrac{\pi}{2x\left(e^{\pi x}+1\right)}\right)$,

г) $\lim\limits_{z\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\mathrm{tg}3x}$.

21. а) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\ln\left(3^{\sin x}-2\right)}{2x+\mathrm{arctg}3x}$,

б) $\lim\limits_{z\to\infty}z^2\cdot e^{-2z}$,

в) $\lim\limits_{z\to\frac{\pi}{2}}(\sec z-\mathrm{tg}z)$,

г) $\lim\limits_{x\to 0+0}x^{\frac{1}{\ln\left(e^x-1\right)}}$.

22.а) $\lim\limits_{u\to 0+0}\dfrac{\sqrt{u}+\mathrm{arctg}2u}{u^2-\sin 2u}$,

б) $\lim\limits_{z\to 1+0}\ln x\cdot\ln(x-1)$,

в) $\lim\limits_{u\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln u}-\dfrac{1}{u-1}\right)$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos\alpha x)^{1/x^3}$.

23.а) $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{2u-\cos u}{\ln\sec u}$,

б) $\lim\limits_{z\to 0}(1-\cos z)\cdot\mathrm{ctg}z$,

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^x-x^2\right)$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\sin x)^{\mathrm{ctg}x}$.

24.а) $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\ln(1-\arcsin y)}{\cos^2 y-1}$,

б) $\lim\limits_{z\to 1}(1-z)\cdot\mathrm{tg}\dfrac{\pi z}{2}$,

в) $\lim\limits_{z\to+\infty}\left(\ln x-\sqrt{x}\right)$,

г) $\lim\limits_{y\to 1}(1-y)^{\ln y}$.

25.а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x - a^x}{\ln\left(1-x^2\right)}$,

б) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\sin\dfrac{a}{x}$,

в) $\lim\limits_{u\to 0}\left(\dfrac{1}{e^u-1}-\dfrac{1}{u^2}\right)$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{tg}3x)^{\sin 5x}$.

26. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}2x - x^2}{3\cos 2x - 3^{x+1}}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0}\arcsin x\cdot\mathrm{ctg}x$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^3 x}-\dfrac{1}{x^3}\right)$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\right)^{\sin 2x}$.

27.а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0} x^n\cdot e^{-x},\ n>0$,

в) $\lim\limits_{y\to 0}\left(\dfrac{1}{\mathrm{tg}^2 y}-\dfrac{1}{y^2}\right)$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

28.а) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+\sec x}{1+\mathrm{tg}x}$,

б) $\lim\limits_{x\to\infty} x^n\cdot\sin\dfrac{a}{x},\ n>0$,

в) $\lim\limits_{z\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^4 z}-\dfrac{1}{z^4}\right)$,

г) $\lim\limits_{u\to 0}(1+4u-\sin u)^{\mathrm{ctg}u}$.

29.а) $\lim\limits_{y\to +\infty}\dfrac{e^y}{\ln y}$,

б) $\lim\limits_{u\to 0}(2-u)\cdot\mathrm{tg}\dfrac{\pi u}{4}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$,

г) $\lim\limits_{u\to 2}\left(u^2-4\right)^{\mathrm{tg}(2u-4)}$.

30.а) $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\ln x}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos(\sin x)-\cos x)\cdot\dfrac{1}{2x}$,

в) $\lim\limits_{y\to 1}\left(\dfrac{y}{y-1}-\dfrac{1}{\ln y}\right)$,

г) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

31.а) $\lim\limits_{x\to -\frac{2}{3}+0}\dfrac{\ln(2+3y)}{\mathrm{tg}\frac{3\pi y}{4}}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0+0}\ln z\cdot\ln(z+1)$,

в) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$,

г) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

32. а) $\lim\limits_{u\to\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{tg}u}{5^{\mathrm{tg}u}}$,

б) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\left(e^{1/x}-1\right)$,

в) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{2\left(1-\sqrt{x}\right)}-\frac{1}{3\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}\right)$,

г) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)^{\frac{1}{x-1}}$

33. а) $\lim\limits_{y\to\infty}\frac{3^y}{5y^2}$,

б) $\lim\limits_{\varphi\to a}\left(a^2-\varphi^2\right)\mathrm{tg}\frac{\pi\varphi}{2a}$,

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{\mathrm{ctg}x}-\frac{\pi}{2\cos x}\right)$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{2x}+\sin x\right)^{1/x}$.

34. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+4x-1}{2^x+x}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x-1\right)\cdot\mathrm{cosec}x$,

в) $\lim\limits_{x\to\infty}(\pi-2\mathrm{arctg}x)\cdot\ln x$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\sin 2x)^{4/x}$.

35. а) $\lim\limits_{u\to\infty}\frac{\ln(1+u)}{2^u}$,

б) $\lim\limits_{z\to 0}\left(\frac{1}{\mathrm{tg}^3 z}-\frac{1}{z^3}\right)$,

в) $\lim\limits_{y\to 0} y^n\cdot e^{-y}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{tg}2x+x^3\right)^{x^2}$.

36. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{cosec}\ 3x}{\frac{1}{2^x-1}}$,

б) $\lim\limits_{y\to\infty} y^n\cdot\mathrm{tg}\frac{b}{y}, n>0$,

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x}-\ln x\right)$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{\sin x}+x\right)^{\mathrm{ctg}x}$.

37. а) $\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{\ln\left(1-x^2\right)}{\mathrm{cosec}\ \pi x}$,

б) $\lim\limits_{y\to\infty} y^2\cdot\sin\frac{a}{y}$,

в) $\lim\limits_{z\to 0}\left(\mathrm{ctg}\ z-\frac{1}{z^2}\right)$,

г) $\lim\limits_{x\to 0+0}(\mathrm{ctg}\ x)^{1/\ln x}$.

38. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+e^x}{e^x}$,

б) $\lim\limits_{y\to 0+0} y^3\cdot\ln y$,

в) $\lim\limits_{z\to 0}\left(\frac{1}{z^3}-\mathrm{ctg}z\right)$,

г) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\sin\frac{\pi x}{4}\right)^{\frac{3}{2-x}}$.

39 .а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-5}{2^x\cdot x^2}$,

б) $\lim\limits_{z\to 0}\left(\dfrac{1}{z^3}-\dfrac{1}{\mathrm{tg}x}\right)$,

в) $\lim\limits_{z\to 0}\sin x\cdot\ln x^3$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin 2x)^{x^2}$.

40. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+4}{x^3-x^2}$,

б) $\lim\limits_{y\to 0}y^2\cdot\mathrm{ctg}\,4y$,

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3-\ln x\right)$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\arcsin 3x)^{1/x}$.

41.а) $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\ln\sin x}{e^x-1-\dfrac{1}{x^2}}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0}z^3\cdot e^{\frac{1}{\sqrt{z}}}$,

в) $\lim\limits_{y\to 0}\left(\dfrac{1}{\arcsin y}-\dfrac{1}{y}\right)$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 2x+x^2\right)^{\mathrm{cosec}^2 x}$.

42. а) $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\ln\mathrm{tg}\,x}{1-\dfrac{1}{x}}$,

б) $\lim\limits_{y\to\infty}e^{-y}\left(y^3+3\right)$,

в) $\lim\limits_{y\to 0}\left(\mathrm{ctg}\,\dfrac{y}{4}-\mathrm{cosec}\,\dfrac{y}{4}\right)$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{4x}+x^2\right)^{1/x^2}$.

43. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^x-x}{3^x-x}$,

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}5^{-y}\cdot\ln y$,

в) $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}(\sec\alpha-\mathrm{tg}\alpha)$,

г) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\left(2e^x-\cos 2x+x\right)^{4/x}$.

44. а) $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{3^x}$,

б) $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\left(x^2-4x+7\right)\cdot e^{-x}$,

в) $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{1-\sin y}-\mathrm{tg}\,y\right)$,

г) $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\left(4+e^x\right)^{1/x^2}$.

45. а) $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\dfrac{\ln\dfrac{1}{x}}{x^2+4}$,

б) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\mathrm{arctg}\,y\cdot\ln y^6$,

в) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\left(\dfrac{\mathrm{ctg}\,y}{y}-\dfrac{1}{y^2}\right)$,

г) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\left(2-e^{3x}+x^2\right)^{-\frac{2}{x}}$.

46. а) $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{2}-0} \dfrac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\mathrm{tg}x}$,

б) $\lim\limits_{\alpha\to 0+0} \sin x \cdot \ln\sin x$,

в) $\lim\limits_{z\to 0}\left(\dfrac{1}{4z}-\dfrac{1}{\arcsin 4z}\right)$,

г) $\lim\limits_{\alpha\to 0}(\mathrm{arctg}\, x)^{\arcsin 2x}$.

47. а) $\lim\limits_{\alpha\to 1-0} \dfrac{\ln(1-x)}{4+\dfrac{1}{1-x^2}}$,

б) $\lim\limits_{\alpha\to 0-0} \sin 3x \cdot \ln(1-2^x)$,

в) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\left(\dfrac{1}{4\alpha}-\dfrac{1}{\mathrm{tg}4\alpha}\right)$,

г) $\lim\limits_{\alpha\to 0}(\arcsin 3x)^{\mathrm{tg}5x}$.

48. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x\cdot e^x}{x^2+1}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{ctg}\,3x \cdot \sin 2x$,

в) $\lim\limits_{y\to 0}\left(\dfrac{1}{y+y^2}-\dfrac{\ln(1+y)}{y^2}\right)$,

г) $\lim\limits_{x\to 0+0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$.

49. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x-1}}{\ln 2x}$,

б) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}\left(x^2+4\right)$,

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\ln z-\sqrt{z}\right)$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\,\mathrm{tg}\,x)^{\mathrm{ctg}\,2x}$.

50. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{\sqrt{2x+3}}$,

б) $\lim\limits_{x\to\infty} 2^{-x}\cdot \ln x$,

в) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\left(\dfrac{1}{\alpha^3}-\dfrac{1}{e^\alpha-1}\right)$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+4\sin x)^{\mathrm{ctg}^2 x}$.

УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЯ 2

Приведем примеры раскрытия неопределенностей по правилу Лопиталя.

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{e^x-1-x}$.

Решение. При $x\to 0$ каждая из функций $f(x)=1-\cos^3 x$ и $\varphi(x)=e^x-1-x$ стремится к нулю, поэтому имеет место неопределенность вида $0/0$. Предел находим по правилу Лопиталя:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{\varphi(x)}\left|\begin{matrix}\dfrac{0}{0} & \text{или} & \dfrac{\infty}{\infty}\end{matrix}\right| = \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{e^x-1-x}\left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{-3\cos^2 x\cdot(-\sin x)}{e^x-1} = 3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x\cdot\sin x}{e^x-1}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\cos^2 x = \cos 0 = 1 \neq 0$, то воспользуемся теоремой о пределе произведения:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{e^x-1-x} = 3\cdot\lim_{x\to 0}\cos^2 x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-1} = 3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-1}\left|\frac{0}{0}\right| = 3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{e^x} =$$

$$= 3\cdot\frac{\cos 0}{e^0} = 3.$$

Здесь дважды использовалось правило Лопиталя.

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^x-x}{2^x+x}$.

Решение. При $x\to\infty$ числитель и знаменатель дроби неограниченно возрастают, поэтому неопределенность имеет вид $\dfrac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3^x-x}{2^x+x}\left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\infty}\frac{3^x\cdot\ln 3-1}{2^x\cdot\ln 2+1}\left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\infty}\frac{3^x\cdot(\ln 3)^2}{2^x\cdot(\ln 2)^2} = \left(\frac{\ln 3}{\ln 2}\right)^2\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^x.$$

Здесь возможны два случая. Если $x\to+\infty$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3}{2}\right)^x = +\infty$, поэтому $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x-x}{2^x+x} = \left(\dfrac{\ln 3}{\ln 2}\right)^2\cdot\infty = \infty$. Если же $x\to-\infty$, то $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3}{2}\right)^x = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-x} = 0$, поэтому $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3^x-x}{2^x+x} = \left(\dfrac{\ln 3}{\ln 2}\right)^2\cdot 0 = 0$.

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}[x\cdot\ln(1-\cos x)]$.

Решение. При $x\to 0$ будет $(1-\cos x)\to 0$ и $\ln(1-\cos x)\to-\infty$, поэтому неопределенность имеет вид $0\cdot\infty$. Прежде чем применить правило Лопиталя, преобразуем ее к виду $\dfrac{\infty}{\infty}$ следующим образом: $x\cdot\ln(1-\cos x) = \dfrac{\ln(1-\cos x)}{1/x}$.

Поэтому $\lim\limits_{x\to 0}[x\cdot\ln(1-\cos x)] = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\cos x)}{1/x}\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right| = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin x}{1-\cos x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot\sin x}{1-\cos x}\left|\dfrac{0}{0}\right| =$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot\sin x + x^2\cdot\cos x}{\sin x}.$$

$\left|\frac{0}{0}\right| = -\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x + 2x\cdot\cos x + 2x\cdot\cos x - x^2\cdot\sin x}{\cos x} = -\frac{0}{1} = 0$.

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$.

Решение. При $x\to 0$ будет $1/x\to\infty$ и $1/e^e - 1 \to\infty$, поэтому имеет место неопределенность вида $(\infty - \infty)$. Преобразуем ее к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ следующим образом: $\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)}$. Поэтому $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)}\left|\frac{0}{0}\right| = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{e^x - 1 + x\cdot e^x}\left|\frac{0}{0}\right| = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x + e^x + x\cdot e^x} = \frac{1}{2}$.

Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/\sin^2 x}$.

Решение. При $x\to 0$ $\cos x\to 1$ и $\frac{1}{\sin^2 x}\to\infty$, поэтому имеет место неопределенность вида 1^∞. Обозначим искомый предел через A, т.е. $A = \lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/\sin^2 x}\ \left|1^\infty\right|$. Прологарифмируем обе части равенства по основанию e: $\ln A = \ln\left(\lim(\cos x)^{1/\sin^2 x}\right)$. Логарифмическая функция $y = \ln x$ непрерывна в области определения, поэтому знаки $\ln$ и $\lim$ можно переставить местами. Тогда получим $\ln A = \lim\limits_{x\to 0}\left(\ln(\cos x)^{1/\sin^2 x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\ln\cos x\right)\ |\infty\cdot 0| = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}\left|\frac{0}{0}\right|$.

Далее по правилу Лопиталя:

$$\ln A = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{2\sin x\cdot\cos x} = -\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x} = -\frac{1}{2}.$$

Итак, $\ln A = -\frac{1}{2}$, отсюда $A = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/\sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Пример 6. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} x^{tgx}$.

Решение. При $x\to 0$ $\operatorname{tg} x\to 0$, поэтому неопределенность имеет вид 0^0. Обозначим искомый предел A, т.е. $A = \lim\limits_{x\to 0} x^{tgx}$. Прологарифмируем обе части равенства по основанию e:

$$\ln A = \ln\left(\lim_{x\to 0} x^{tgx}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\ln x^{tgx}\right) = \lim_{x\to 0}(\operatorname{tg} x\cdot\ln x)\ |0\cdot\infty| = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}\left|\frac{\infty}{\infty}\right|.$$

Далее по правилу Лопиталя:

$$\ln A = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\operatorname{crg} x} = \lim_{x}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}\ \left|\frac{0}{0}\right| = -\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cdot\cos x}{x} = 0.$$

Итак, $\ln A = 0$, отсюда A=1.

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0} x^{\operatorname{tg}x} = 1$.

Пример 7. Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+2^x\right)^{\frac{1}{x}}$.

Решение. При $x\to+\infty$ $\left(x+2^x\right)\to\infty$ и $\frac{1}{x}\to 0$, поэтому имеет место неопределенность вида ∞^0. Применим прием, использованный в примерах 5 и 6 :

$$A = \lim_{x\to+\infty}\left(x+2^x\right)^{\frac{1}{x}}\ \left|\infty^0\right|. \qquad \ln A = \ln\left(\lim_{x\to+\infty}(x+2^x)^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(x+2^x\right)^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln\left(x+2^x\right)\ \left|0\cdot\infty\right| = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+2^x)}{x}\ \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1+2^x\ln 2}{x+2^x}}{1} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1+2^x\ln 2}{x+2^x}\ \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to+\infty}\frac{2^x\cdot\ln^2 2}{1+2^x\cdot\ln 2}\ \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\infty}\frac{2^x\ln^3 2}{2^x\ln 2} = \ln 2.$$

$\ln A = \ln 2$, отсюда A=2.

Ответ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+2^x\right)^{1/x} = 2$.

ЗАДАНИЕ 3. КРИВИЗНА КРИВОЙ

Определить кривизну, центр и радиус круга кривизны данной кривой в указанной точке.

1. $L:\ y = \frac{e^x}{x},\ x_0 = 1.$
2. $L:\ y = x^x,\ x_0 = 1.$
3. $L:\ y = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ x_0 = 0.$
4. $L:\ y = x(1+\sin x),\ x_0 = 0.$
5. $L:\ \begin{cases} x = t^2, \\ y = 2t^3, \end{cases}\ t_0 = -1.$
6. $L:\ \begin{cases} x = t+\sin t, \\ y = t+\cos t, \end{cases}\ t_0 = 0.$

7. $L:\ y=\frac{x^2}{2}-\ln x,\ x_0=1.$

8. $L:\ y=e^{-x^2},\ x_0=0.$

9. $L:\ x-y=\ln xy,\ M_0(1{,}1).$

10. $L:\ x^2+y^2=2\sin(x+y),\ O(0{,}0).$

11. $L:\ e^{x+y}=x-y+1,\ O(0{,}0).$

12. $L:\ y^2=2px$ в $\forall$ точке z.

13. $L:\ \begin{cases} x=t^2, \\ y=t^3, \end{cases}$ $\forall\ t$ и $t_0=1.$

14. $L:\ \begin{cases} x=3t, \\ y=3t^2-6, \end{cases}$ $\forall\ t$ и $t_0=1.$

15. $L:\ y=a\cdot\ln\cos\frac{x}{a},\ x=x_0.$

16. $L:\ x\cdot y=12,\ x_0=-3.$

17. $L:\ y=\frac{x^3}{3},\ M_0\left(-1;-\frac{1}{3}\right).$

18. $L:\ y=\frac{4}{1+x^2},\ x_0=0.$

19. $L:\ y=\ln x,\quad y_0=0.$

20. $L:\ xy=a^2,\ A(a;a).$

21. $L:\ \begin{cases} x=\ln t, \\ y=t+4, \end{cases}$ $t_0=1.$

22. $L:\ \begin{cases} x=t^3+2t, \\ y=1-t^2, \end{cases}$ $t_0=0.$

23. $L:\ \begin{cases} x=t^2+1, \\ y=2^t, \end{cases}$ $t_0=1.$

24. $L:\ \begin{cases} x=t\cdot\ln t, \\ y=t+\ln t, \end{cases}$ $t_0=1.$

25. $L:\ \begin{cases} x=2\cdot\cos 2t, \\ y=\sin 2t, \end{cases}$ $t_0=\frac{5}{4}.$

26. $L:\ \begin{cases} x=t^3+1, \\ y=2t-1, \end{cases}$ $t_0=1.$

27. $L:\ y=x^3-1,\ M_0(1;0).$

28. $L:\ y=\cos x,\ x_0=\frac{5}{4}.$

29. L: $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\left(t^2 + \dfrac{1}{t^2}\right), \\ y = t - 1/y, \end{cases}$ $t_0 = 2$.

30. L: $\begin{cases} x = a \cdot \cos^3 t, \\ y = a \cdot \sin^3 t, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

31. L: $\rho = \cos 2\varphi, \quad \varphi_0 = 0$.

32. L: $\rho = \sin 2\varphi, \quad \varphi_0 = 0$.

33. L: $\rho = 1 + \cos\varphi, \quad \varphi_0 = \dfrac{5}{4}$.

34. L: $\rho = 1 + \sin\varphi, \quad \varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

35. L: $\rho = a(1 + \sin\varphi), \quad \varphi_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

36. L: $\rho = a(1 + \cos\varphi), \quad \varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

37. L: $y = 1 - x^2$ в ее вершине.

38. L: $y = e^x$ в точках, где кривизна наибольшая.

39. L: $y = \sin x$ в точках экстремума.

40. L: $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ в точке, где кривизна наибольшая.

41. L: $x^2 = 2px$ в точках, где радиус кривизны наименьший.

42. L: $y = -\dfrac{x^3 + 1}{3}$ в точках ее пересечения с осью абсцисс.

43. L: $\sqrt{y} + \sqrt{x} = \sqrt{a}$ в любой точке кривой.

44. L: $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$ в любой точке кривой.

45. L: $\begin{cases} x = a \cdot \cos t, \\ y = a \cdot \sin t \end{cases}$ в любой точке кривой.

46. L: $y^2 = x^2 - 2$ в ее вершине.

47. L: $y = \ln x$ в точках, где радиус кривизны наименьший.

48. L: $y^2 = x^2 + 4$ в ее вершине.

49. L: $y = 4x - x^2$ в ее вершине.

50. L: $x^2 = 4 - 4y^2$ в ее вершине.

УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЯ 3

Пример 1. В каких точка парабола $y = x^2$ имеет наибольшую и наименьшую кривизну? Найти центр и радиус кривизны в этих точках.

Решение. Если кривая L задана явно: $y = f(x)$, то ее кривизна k в точке $M(x, y)$ определяется по формуле $k = \dfrac{|y''|}{\left[1 + (y')^2\right]^{3/2}}$. В данном примере $y' = 2x$; $y'' = 2$, поэтому $k(x) = \dfrac{2}{\left[1 + (2x)^2\right]^{3/2}} = 2\left(1 + 4x^2\right)^{-3/2}$. Найдем точки, в которых функция $k = k(x)$ имеет экстремумы.

$$k'(x) = 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(1 + 4x^2\right)^{-5/2} \cdot (8x) = -\frac{24x}{\left(1 + 4x^2\right)^{5/2}}, \quad k'(x) = 0 \text{ при } x = 0.$$

Нетрудно видеть, что в этой точке производная $k'(x)$ изменяет знак с плюса на минус, следовательно, $x = 0$ есть точка максимума, причем $k_{max} = k(0) = 2$. Итак, в точке O (0, 0) парабола $y = x^2$ имеет наибольшую кривизну $k = 2$. В этой точке радиус R кривизны равен $R = \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{2}$. Координаты (α, β) центра круга кривизны определяются по формулам: $\alpha = x \pm \dfrac{\left(1 + (y')^2\right) \cdot y'}{y''}$; $\beta = y \mp \dfrac{1 + (y')^2}{y''}$, причем верхние знаки соответствуют тем точкам кривой $L : y = f(x)$, в которых $y'' < 0$. Для параболы $y = x^2$ в точке O (0,0) $y'' = 2 > 0$, следовательно, в формулах берем нижние знаки $\alpha = 0 - \dfrac{(1 - 0) \cdot 0}{2} = 0$. $\beta = - + \dfrac{1 - 0}{2} = \dfrac{1}{2}$. Итак, $C\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$ - центр кривизны.

Пример 2. Определить кривизну, центр и радиус кривизны кривой $\rho = \cos 3\varphi$ в точке $\varphi_0 = \pi / 2$.

Решение. Если кривая L задана полярным уравнением $\rho = f(\varphi)$, то ее кривизна в точке $M(\rho, \varphi)$ определяется по формуле $k = \dfrac{\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho(\rho'')^2}{\left(\rho^2 + (\rho')^2\right)^{3/2}}$. В данном примере $\rho' = -3\sin 3\varphi$; $\rho'' = -9\cos 3\varphi$. В данной точке $\varphi_0 = \pi / 2$ находим $\rho\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos 3 \cdot \dfrac{\pi}{2} = 0$, $\rho'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -3\sin\dfrac{3}{2}\pi = 3$, $\rho''_{\varphi} = -9\cos\dfrac{3}{2}\pi = 0$. Тогда получим $k = \dfrac{0 + 2 \cdot (3)^2 - 0 \cdot 0}{\left(0 + 3^2\right)^{3/2}} = \dfrac{2}{3}$, радиус кривизны $R = \dfrac{1}{k} = \dfrac{3}{2}$. Обозначим центр круга кривизны $C(\alpha; \beta)$, координаты центра будем вычислять по формулам:

$$\alpha = \rho \cdot \cos\varphi - \frac{\left(\rho^2 + (\rho')^2\right) \cdot (\rho \cdot \cos\varphi + \rho' \cdot \sin\varphi)}{\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho \cdot \rho''},$$

$$\beta = \rho \cdot \sin\varphi - \frac{\left(\rho^2 + (\rho')^2\right) \cdot (\rho \cdot \sin\varphi - \rho' \cdot \cos\varphi)}{\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho \cdot \rho''},$$

$$\alpha = \cos 3\varphi \cdot \cos\varphi - \frac{\left(\cos^2 3\varphi + 9\sin^2 3\varphi\right) \cdot (\cos 3\varphi \cdot \cos\varphi - 3\sin 3\varphi \cdot \sin\varphi)}{\cos^2 3\varphi + 18\sin^2 3\varphi + 9\cos^2 3\varphi},$$

$$\beta = \cos 3\varphi \cdot \sin\varphi - \frac{\left(\cos^2 3\varphi + 9\sin^2 3\varphi\right) \cdot (\cos 3\varphi \cdot \sin\varphi + 3\sin 3\varphi \cdot \cos\varphi)}{\cos^2 3\varphi + 18\sin^2 3\varphi + 9\cos^2 3\varphi}$$

в точке $\varphi_0 = \pi/2,\ \alpha = -3/2,\ \beta = 0,\ C\left(-3/2;\ 0\right)$.

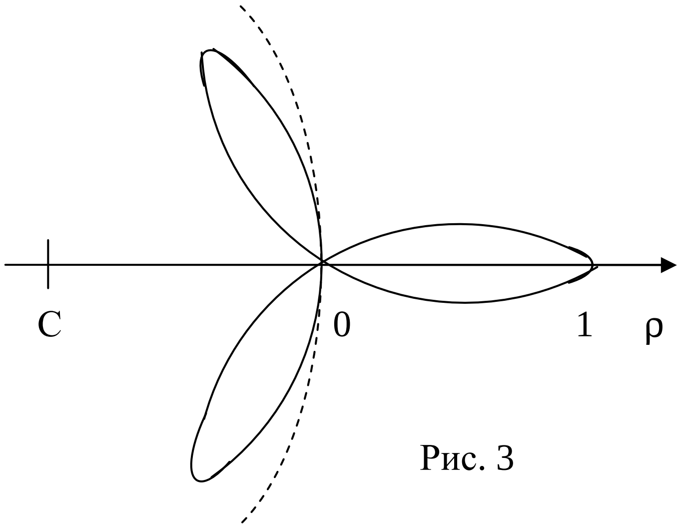

Рис. 3

ЗАДАНИЕ 4. ВЕКТОР-ФУНКЦИЯ

По заданному уравнению движения материальной точки найти скорость, ускорение и траекторию движения, а также кривизну траектории в момент времени $t = t_0$.

1. $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + \frac{3}{2}t^3\vec{k},\quad t_0 = 1.$
2. $\vec{r}(t) = e^t\vec{i} + e^{-t}\vec{j} + t\sqrt{2}\vec{k},\quad t_0 = 0.$
3. $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k},\quad t_0 = 0.$
4. $\vec{r}(t) = \left(3t - t^3\right)\vec{i} + 3t^2\vec{j} + \left(3t + t^3\right)\vec{k},\quad t_0 = 1.$
5. $\vec{r}(t) = 2t \cdot \vec{i} + \ln t \cdot \vec{j} + t^2\vec{k},\quad t_0 = 1.$
6. $\vec{r}(t) = t\vec{i} + \frac{t^2}{2}\vec{j} + \frac{t^3}{2}\vec{k},\quad t_0 = 1.$
7. $\vec{r}(t) = \frac{t^2}{2}\vec{i} + t\vec{j} + \frac{t^4}{4}\vec{k},\quad t_0 = 1.$
8. $\vec{r}(t) = \ln 2 \cdot t\vec{i} - t^2\vec{j} + t^3\vec{k},\quad t_0 = 1.$

9. $\vec{r}(t) = e^t \sin t \cdot \vec{i} + e^t \cos t\,\vec{j} + e^t\,\vec{k}, \quad t_0 = 0.$

10. $\vec{r}(t) = 4\cos t\,\vec{i} + 3\sin t\,\vec{j} + 2\vec{k}, \quad t_0 = \pi/4.$

11. $\vec{r}(t) = e^t\,\vec{i} + 2e^t\vec{j} - 2e^t\vec{k}, \quad t_0 = 0.$

12. $\vec{r}(t) = e^t\vec{i} - e^{2t}\vec{j} + e^{-2t}\vec{k}, \quad t_0 = 0.$

13. $\vec{r}(t) = 2\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + \sin 2t\,\vec{k}, \quad t_0 = 0.$

14. $\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + -\ln 3t\,\vec{j} + -t^3\vec{k}, \quad t_0 = 1.$

15. $\vec{r}(t) = 2t\vec{i} - t^2\vec{j} + \dfrac{t^4}{4}\vec{k}, \quad t_0 = 1.$

16. $\vec{r}(t) = \cos 2t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j} + \cos t\,\vec{k}, \quad t_0 = 0$

17. $\vec{r}(t) = 2\sqrt{t}\,\vec{i} - 2t\,\vec{j} + t^2\vec{k}, \quad t_0 = 1.$

18. $\vec{r}(t) = e^{-t}\,\vec{i} + 2e^t\,\vec{j} + e^{2t}\vec{k}, \quad t_0 = 0.$

19. $\vec{r}(t) = 2t\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + \left(t^2/2 - t\right)\vec{k}, \quad t_0 = 0.$

20. $\vec{r}(t) = \dfrac{t^3}{3}\vec{i} + \dfrac{1}{4}t^4\vec{j} - \dfrac{1}{2}t^2\vec{k}, \quad t_0 = 1.$

21. $\vec{r}(t) = t^2\vec{i} - 2t\vec{j} + t^3\vec{k}, \quad t_0 = 0.$

22. $\vec{r}(t) = \operatorname{tg} t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + 4\cos t\,\vec{k}, \quad t_0 = 0.$

23. $\vec{r}(t) = t^3\vec{i} - \left(2t^2 + 1\right)\vec{j} + \dfrac{t^2}{2}\vec{k}, \quad t_0 = 1.$

24. $\vec{r}(t) = (2t-1)\vec{i} - \dfrac{2}{3}t^3\vec{j} + t^2\vec{k}, \quad t_0 = 1.$

25. $\vec{r}(t) = \left(1 + 3t + 2t^2\right)\vec{i} + \left(2 - 2t + 5t^2\right)\vec{j} + \left(1 - t^2\right)\vec{k}, \quad t_0 = 1$

26. $\vec{r}(t) = \dfrac{3}{2}t^3\vec{i} + t^2\vec{j} + t\vec{k}, \quad t_0 = 1.$

27. $\vec{r}(t) = \sqrt{2}\,t\vec{i} + e^t\vec{j} + e^{-t}\vec{k}, \quad t_0 = 0.$

28. $\vec{r}(t) = t^3\vec{i} + t\vec{j} + t^2\vec{k}, \quad t_0 = 0.$

29. $\vec{r}(t) = \left(3t + t^3\right)\vec{i} + \left(3t - t^3\right)\vec{j} + 3t^2\vec{k}, \quad t_0 = 1$

30. $\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + 2t\vec{j} + \ln t\,\vec{k}, \quad t_0 = 1.$

31. $\vec{r}(t) = \dfrac{t^4}{4}\vec{i} + \dfrac{t^3}{3}\vec{j} + \dfrac{t^2}{2}\vec{k}, \quad t_0 = 1.$

32. $\vec{r}(t) = t\vec{i} + \dfrac{t^2}{2}\vec{j} + \dfrac{t^5}{5}\vec{k}, \quad t_0 = 1.$

33. $\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + 3\ln t\,\vec{j} + t^3\vec{k}, \quad t_0 = 1.$

34. $\vec{r}(t) = e^t\vec{i} + e^t \sin t\,\vec{j} + e^t \cos t\,\vec{k}, \quad t_0 = 0.$

35. $\vec{r}(t) = 2t\,\vec{i} + 3\sin t\,\vec{j} + 4\cos t\,\vec{k}, \quad t_0 = \pi/4.$

36. $\vec{r}(t) = 2e^{t}\,\vec{i} - 3e^{t}\,\vec{j} + 3e^{t}\,\vec{k}, \quad t_0 = 0$.

37. $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + 2\sin t\,\vec{j} + \sin 2t\,\vec{k}, \quad t_0 = 0$.

38. $\vec{r}(t) = e^{2t}\,\vec{i} - e^{3t}\,\vec{j} + e^{t}\,\vec{k}, \quad t_0 = 0$.

39. $\vec{r}(t) = \ln t\,\vec{i} + t^2\vec{j} - t^5\vec{k}, \quad t_0 = 0$.

40. $\vec{r}(t) = 3t\,\vec{i} - t^3\vec{j} + \dfrac{t^4}{4}\vec{k}, \quad t_0 = 0$

41. $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \cos 2t\,\vec{j} - \sin t\,\vec{k}, \quad t_0 = 0$

42. $\vec{r}(t) = 3t\,\vec{i} + 3\sqrt{t}\,\vec{j} - t^2\vec{k}, \quad t_0 = 1$.

43. $\vec{r}(t) = e^{3t}\,\vec{i} + e^{t}\vec{j} - e^{t}\,\vec{k}, \quad t_0 = 0$.

44. $\vec{r}(t) = 3t\,\vec{i} + \cos 2t\,\vec{j} + \left(t^2/2 - t\right)\vec{k}, \quad t_0 = 0$.

45. $\vec{r}(t) = \dfrac{t^5}{5}t\vec{i} - \dfrac{t^4}{4}\vec{j} + \dfrac{3t^2}{2}\vec{k}, \quad t_0 = 1$.

46. $\vec{r}(t) = 5t\,\vec{i} + 6t^2\vec{j} - 3t^5\vec{k}, \quad t_0 = 0$.

47. $\vec{r}(t) = \mathrm{ctg}\,t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + 5\cos t\,\vec{k}, \quad t_0 = \pi/2$.

48. $\vec{r}(t) = \left(2t^2 + 1\right)\vec{i} - t^3\,\vec{j} + \dfrac{t^2}{2}\vec{k}, \quad t_0 = 1$

49. $\vec{r}(t) = \left(4t - 1\right)\vec{i} + \dfrac{2t^3}{3}\vec{j} + t^5\,\vec{k}, \quad t_0 = 1$.

50. $\vec{r}(t) = \left(2 + 5t + t^2\right)\vec{i} + \left(5 - 3t - t^2\right)\vec{j} + \left(1 + t^2\right)\vec{k}, \quad t_0 = 1$.

УКАЗАНИЕ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЯ 4

Пример. Дано уравнение движения $\vec{r}(t) = 2\ln t\,\vec{i} - t\,\vec{j} + t^2\,\vec{k}$.

Найти: а) траекторию движения; б) скорость и ускорение движения в момент времени $t_0 = 1$; в) кривизну траектории при $t_0 = 1$.

Решение. а) Траекторией движения является годограф вектор-функции $\vec{r}(t) = 2\ln t\,\vec{i} - t\,\vec{j} + t^2\,\vec{k}$. Параметрическими уравнениями траектории будут $x = \ln t$, $y = -t$, $z = t^2$. В момент времени $t_0 = 1$ получим точку $M\left(0; -1; 1\right)$ траектории.

б) Скорость движения есть вектор $\vec{V} = \vec{V}(t) = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{2}{t}\vec{i} - \vec{j} + 2t\,\vec{k}$, а ускорение $\vec{a} = \vec{a}(t) = \dfrac{d^2\vec{i}}{dt} = -\dfrac{2}{t^2}\vec{i} + 2\vec{k}$. При $t_0 = 1$ $\vec{V}(1) = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\left|\vec{V}\right| = 3$, соответственно $\vec{a}(1) = -2\vec{i} + 2\vec{k}$, $\left|\vec{a}\right| = 2\sqrt{2}$.

в) Кривизна пространственной кривой L определяется по формуле $k=\dfrac{\left|\vec r\,'(t)\times\vec r\,''(t)\right|}{\left|\vec r\,'(t)\right|^3}$. Здесь $\vec r\,'(t)=\dfrac{2}{t}\vec i-\vec j+2t\,\vec k,\;\vec r\,''(t)=-\dfrac{2}{t^2}\vec i+2\vec k$. Найдем векторное произведение этих векторов

$$\vec r\,'(t)\times\vec r\,''(t)=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ \dfrac{2}{t} & -1 & 2t\\ -\dfrac{8}{t^2} & 0 & 2\end{vmatrix}=-2\vec i-\frac{8}{t}\vec i-\frac{2}{t^2}\vec k,$$

$$\left|\vec r\,'(t)\times\vec r\,''(t)\right|=\sqrt{4+\frac{64}{t^2}+\frac{4}{t^4}}=\frac{\sqrt{4t^4+64t^2+4}}{t^2},$$

$$\left|\vec r\,'(t)\right|=\sqrt{\frac{1}{t^2}+1+4t^2}=\frac{\sqrt{4+t^2+4t^4}}{t}.$$

Итак, кривизна траектории в момент времени $t>0$ определяется формулой:

$$k=\frac{\sqrt{4t^4+64t^2+4}\cdot t^3}{t^2\cdot\sqrt{\left(4+t^2+4t^4\right)^3}}=\frac{2t\cdot\sqrt{t^4+16t^2+1}}{\sqrt{\left(4t^4+t^2+4\right)^3}}.$$

При $t_0=1$ $k=\dfrac{2\sqrt{1+16+1}}{\sqrt{(4+1+4)^3}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{9}$.

ЗАДАНИЕ 5. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Провести полное исследование функции $y=f(x)$, построить ее график, а также графики ее производных: $f'(x)$ и $f''(x)$.

1. $y=\dfrac{x}{(x-1)^2}$.
2. $y=\dfrac{x^4+16}{2x^2}$.
3. $y=\dfrac{1-x}{1+x^2}$.
4. $y=\dfrac{x+2}{x^3}$.
5. $y=x^{2}\cdot e^{-x}$.
6. $y=1-\dfrac{9}{x^2}$.
7. $y=\dfrac{x^2}{x+1}$.
8. $y=2x^{5/3}-5x^{2/3}+1$.

9. $y=\frac{6(x-1)}{x^2+3}$.

10. $y=x^2\cdot e^{1/x}$.

11. $y=\ln\sqrt{1+x^2}$.

12. $y=x+2\operatorname{arctg}x$.

13. $y=\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$.

14. $y=\frac{1-x^3}{x^2}$.

15. $y=\frac{x}{1+x^2}$.

16. $y=\frac{\ln x}{x}$.

17. $y=5-\sqrt[5]{(-x-1)^2}$.

18. $y=x\cdot e^x$.

19. $y=\frac{x^3}{x^2-9}$.

20. $y=e^{-x^2}$.

21. $y=-\frac{x^3+1}{3}$.

22. $y=x-\operatorname{arctg}x$.

23. $y=\sin 2x-x$.

24. $y=(x-3)\cdot\sqrt{x}$.

25. $y=2x^4-3x^2-6$.

26. $y=x+1/x$.

27. $y=\frac{4}{\sqrt{4-x^2}}$.

28. $y=\frac{(x+1)^2}{1-x}$.

29. $y=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{(x+1)^2}$.

30. $y=\frac{3x^4+1}{x^3}$.

31. $y=(x-3)^2\cdot(x-2)$.

32. $y=\ln\frac{1-x}{1+x}$.

33. $y=x-4\sqrt{x+2}+8$.

34. $y = x \cdot e^{-x}$.

35. $y = x + \cos x$.

36. $y = x \cdot \sqrt{x+1}$.

37. $y = \dfrac{x^2}{1 - x^3}$.

38. $y = \dfrac{3x+5}{x-1}$.

39. $y = \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}$.

40. $y = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 7$.

41. $y = \dfrac{1}{5}x^2 - \dfrac{2}{3}x^3 + x + 3$.

42. $y = \dfrac{(x-1)(x-2)}{x}$.

43. $y = \dfrac{(x+1)(2-x)}{2x-3}$.

44. $y = \dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$.

45. $y = 1/2 \ \cdot x^2 - \ln x$.

46. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 8$.

47. $y = 2^{1/x}$.

48. $y = e^x - x$.

49. $y = x - \ln x$

50. $y = \sin x - \cos x, \quad x \in [0; 2\pi]$.

УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЯ 5

Все задачи решаются по одной схеме. Пусть дана функция $y = f(x)$.

1. Находим область определения $D(f)$.

2. Находим точки разрыва функции. Определим характер разрыва, уточнив поведение функции в окрестности точки разрыва $x = x_0$. Для этого найдем $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$. Если $x = x_0$ - точка разрыва второго рода, то прямая $x = x_0$ будет вертикальной асимптотой графика функции.

3. Находим точки пересечения графика с осями координат, для чего решаем системы уравнений: $\begin{cases} y = f(x), \\ x = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} y = f(x), \\ y = 0. \end{cases}$.

4. Проверяем условия четности функции: $f(-x) = f(x)$ и нечетности $f(-x) = -f(x)$. Если функция четная (или нечетная), то все последующие исследования проводим при $x \ge 0$.

5. Аналогично: если $f(x)$ - периодическая функция с периодом Т, то исследование проводим при $0 \le x \le T$.

6. Находим первую и вторую производные $f'(x)$ и $f''(x)$. Эту работу надо выполнять очень аккуратно, иначе график будет построен неверно.

7. Находим экстремумы и промежутки монотонности функции.

8. Находим точки перегиба и промежутки выпуклости и вогнутости графика функции.

9. Находим наклонные асимптоты $y = kx + b$, где $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$; $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx)$. Каждый из случаев: $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ надо рассмотреть отдельно (асимптоты могут быть различными).

10. По результатам исследования составляем сводную таблицу и строим график функции.

11. По графику функции $f(x)$ строим графики ее первой и второй производных.

Замечание 1. Построение графика функции $f(x)$ рекомендуется проводить параллельно с исследованием.

Замечание 2. Если полученной в результате исследований информации недостаточно для построения графика функции, можно построить несколько точек графика, придавая аргументу x допустимые значения.

Пример 1. Исследовать функцию $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2}$ и построить ее график (рис.4).

Решение. 1. $D(f) = \left(-\infty; -\sqrt{2}\right) \cup \left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}; +\infty\right)$.

2. Функция терпит разрыв второго рода в точках $x = \pm\sqrt{2}$, так как $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}-0} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}+0} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2} = +\infty$ и $\lim\limits_{x \to -\sqrt{2}-0} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\sqrt{2}+0} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2} = -\infty$. Следовательно, $x = -\sqrt{2}$ и $x = \sqrt{2}$ - уравнения вертикальных асимптот. Строим эти асимптоты.

3. Находим точки пересечения графика с осью OX, для чего решаем систему уравнений $\begin{cases} y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2} \\ y = 0 \end{cases}$, $\Rightarrow x^2 - 1 = 0,\ x = \pm 1$. Кривая пересекает ось OX в точках $A(1; 0)$ и $A_1(-1; 0)$.

Замечание. Если решение уравнения $y = 0$ вызывает большие затруднения, то этого можно не делать. Для построения графика нужно выбрать несколько дополнительных точек.

Аналогично $\begin{cases} y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$. Получаем точку $B(0; 1/2)$.

4. $f(-x)=\frac{(-x)^2-1}{(-x)^2-2}=\frac{x^2-1}{x^2-2}=f(x)$. Функция четная, поэтому исследуем ее поведение в области $\left(0;\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};\ \infty\right)$.

5. Функция непериодическая.

6. Находим производные функции $y'=\frac{-2x}{\left(x^2-2\right)^2}$; $y''=\frac{6x^2+4}{\left(x^2-2\right)^3}$.

7. Находим экстремумы функции. Для этого найдем сначала критические точки. Из уравнения $y'=0$ следует, что $x=0$. Так как вторая производная известна, то характер экстремума определяем по второму правилу. $y''(0)=-1/2<0$, поэтому при $x=0$ функция имеет максимум, равный $y_{max}=y(0)=1/2$. Итак, точка $B(0;1/2)$- точка максимума. y' не существует при $x=\sqrt{2}$, но $x=\sqrt{2}\notin D(f)$. На $\left(0;\sqrt{2}\right)$ функция убывает, на $\left(\sqrt{2};\infty\right)$ $y'<0\Rightarrow$ функция убывает.

8. Находим точки перегиба графика из уравнения $y''=0$, у нас $y''\neq 0$, следовательно, кривая не имеет точек перегиба. В промежутке $\left(0;\sqrt{2}\right)$ $y''<0$, следовательно, кривая выпуклая. В промежутке $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$ $y''>0$, поэтому кривая вогнута.

9. Находим уравнение $y=kx+b$ наклонной асимптоты.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x\left(x^2-2\right)}\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim\frac{2x}{3x^2-2}\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{6x}=0\ ; \qquad b=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2-2}-0\cdot x\right)=1$$. Итак, $y=1$ - горизонтальная асимптота кривой.

10. В свободную таблицу вносят точки, полученные при исследовании функции в порядке возрастания аргумента x, а также дополнительные точки, если полученных недостаточно для построения графика функции:

x	0	1	$\sqrt{2}-0$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}+0$	2	3	4
y	$1/2$	0	$-\infty$	$\nexists$	$+\infty$	$3/2$	$8/7$	$15/14$
Примечание	Точка максимума, точка пересечения с ОУ	Точка пересечения с ОХ		Точка разрыва		Дополнительные точки		

Строим график функции в промежутке $[0\ +\infty)$. Так как функция четная, то в промежутке $(-\infty,0)$ ее график строим по симметрии относительно оси ОУ (см. рис.4).

Пример 2. Исследовать функцию $y = x - 6\cdot\sqrt[3]{2x}$, построить график функции, а также графики y' и y'' (рис.5).

Решение. 1. $D(y) = R$, то есть $-\infty < x < \infty$.

2. Функция всюду непрерывна, следовательно, не имеет точек разрыва, а также вертикальных асимптот.

3. Точки пересечения с осями координат

$$\begin{cases} y = x - 6\cdot\sqrt[3]{2x} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x - 6\cdot\sqrt[3]{2x} = 0 \Rightarrow x^3 = 216\cdot 2x \Rightarrow x\left(x^2 - 432\right) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_1 = 0;\ x_{2,3} = \pm\sqrt{432} = \pm 12\sqrt{3}$.

Получаем точки $A_1\left(-12\sqrt{3};0\right)$, $O(0;\ 0)$, $A_2(12\sqrt{3};0)$.

4. $y(-x) = -x - 6\cdot\sqrt[3]{2(-x)} = -x + 6\cdot\sqrt[3]{2x} = -\left(x - 6\cdot\sqrt[3]{2x}\right) = -y(x)$.

Функция нечетная, ее график симметричен относительно $O(0;0)$. Дальнейшее исследование проводим на промежутке $[0;+\infty)$.

5. Функция непериодическая.

6. Производные функции $y' = 1 - 6\cdot\frac{1}{3}(2x)^{-2/3}\cdot 2$, $y'' = -4\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot(2x)^{-5/3}\cdot 2$.

Итак, $y' = \frac{(2x)^{2/3} - 4}{(2x)^{2/3}}$; $y'' = \frac{16}{3}\cdot\frac{1}{(2x)^{5/3}}$.

7. Находим экстремумы функции. Из уравнения $y' = 0$, $(2x)^{2/3} - 4 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x^2 = 16;\ x_1 = -4,\ x_2 = 4$. Из уравнения $y' = \infty$ следует, что $x_0 = 0$. Таким образом, получаем три критические точки: $x_1 = -4,\ x_3 = 0,\ x_2 = 4$.

а) При $x = 0$, $y''(0)$ не существует, поэтому экстремума нет.

б) При $x = 4$, $y''(4) = 1/6 > 0$, следовательно, в этой точке функция имеет минимум, равный $y_{min} = 4 - 6\cdot\sqrt[3]{8} = -8$. Получаем точку минимума $B_1(4;\ -8)$. Так как функция нечетная, то $B_2(-4;\ 8)$ будет точкой максимума.

8. Находим точки перегиба. $y'' \neq 0$, но $y'' = \infty$ при $x = 0$. В промежутке $(-\infty;\ 0)$ $y'' < 0$, здесь кривая выпукла. В промежутке $(\ 0;\ +\infty)$ $y'' > 0$, здесь кривая вогнута. Итак, $O(0;0)$ - точка перегиба.

9. Находим уравнение $y = kx + b$ наклонной асимптоты.

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{y} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x - 6\cdot\sqrt[3]{2x}}{x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(1 - 6\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{x^2}}\right) = 1. \quad b = \lim_{x\to+\infty}(y - kx) =$$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\left(x - 6\cdot\sqrt[3]{2x} - x\right) = -\infty$. Так как b не существует, то график функции асимптот не имеет.

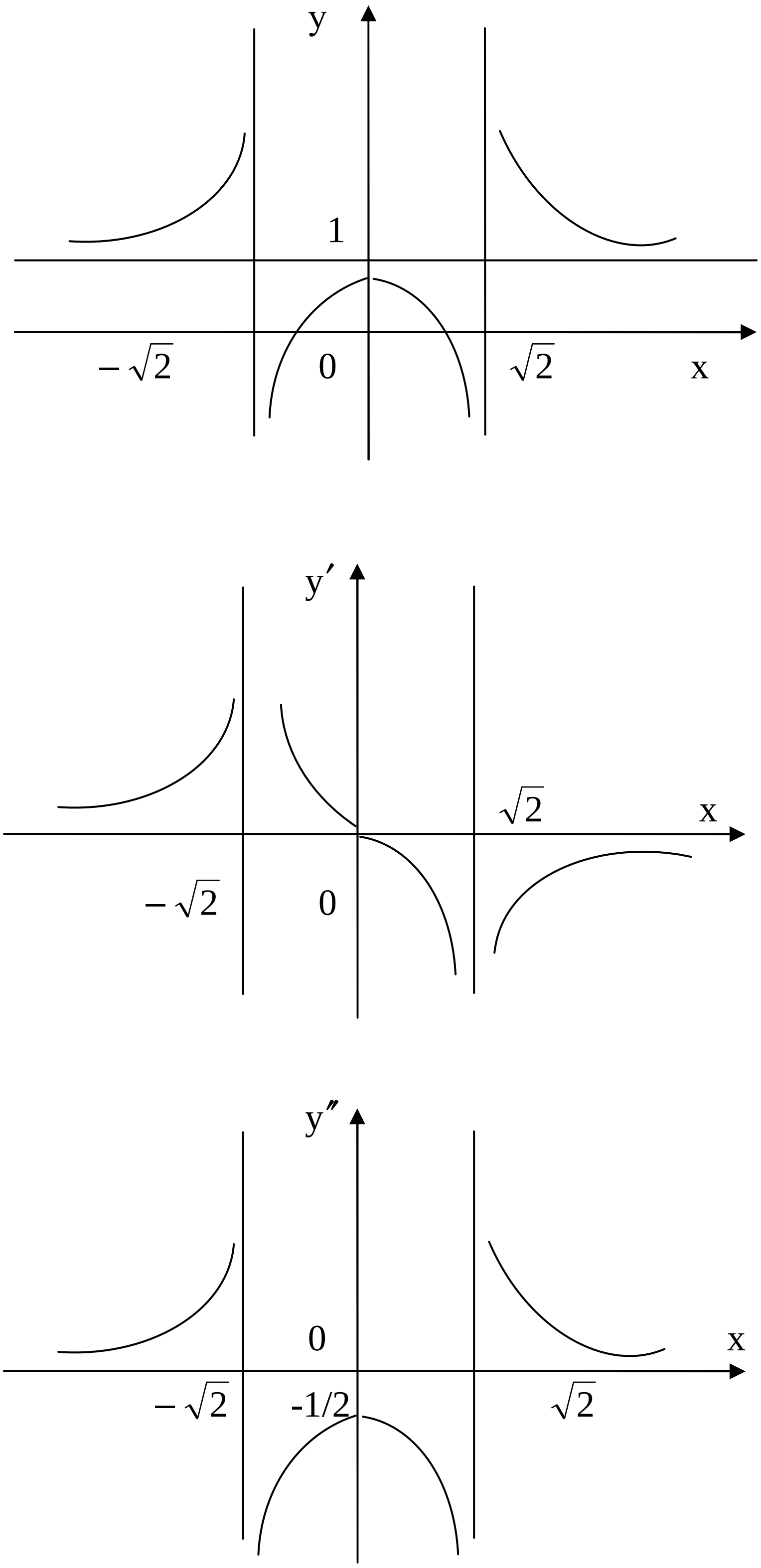

Рис. 4

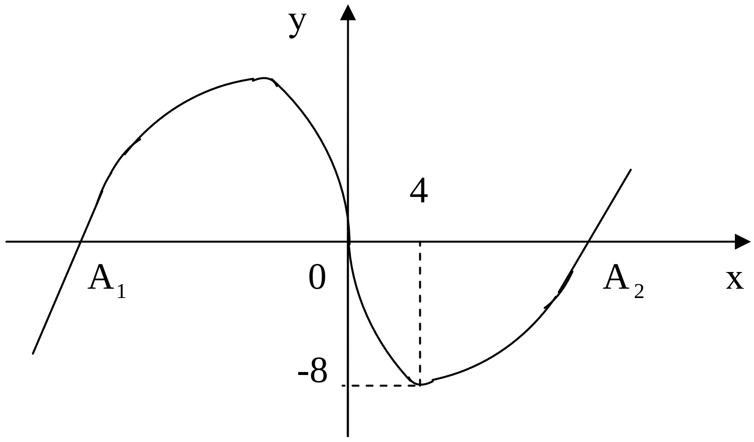

Рис. 5

10. Составим таблицу значений в промежутке $[0;\ \infty)$

x	0	1	2	3	4	8	$12\sqrt{3}$	13
y	0	$\approx -6{,}6$	$\approx -7{,}2$	$\approx -7{,}9$	-8	≈ -7	0	4,8
Примечание	Точка пересечения с осями координат	Дополнительные точки			Точка минимума	Дополнительная точка	Точка пересечения с OX	Дополнительная точка

Замечание. Ось ОУ является касательной к графику в точке О (0; 0) (почему?).

ЗАДАНИЕ 6. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ

Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных промежутках.

1. $f(x) = 1/2 \cdot x^2 - 1/3 \cdot x^3,\ \ x \in [1; 3].$
2. $f(x) = \sin 2x,\ x \in [-\pi/2; \pi/2].$
3. $f(x) = \dfrac{3x+4}{x-2};\ \ x \in [-3;\ 0].$
4. $f(x) = -x + 3\ln x,\ \ x \in [1; 2e].$
5. $f(x) = x + 3e^{-x},\ \ x \in [-1; 1].$
6. $f(x) = x - \sqrt{x},\ x \in [0;\ 4].$
7. $f(x) = x - \ln x,\ x \in [1/e;\ 2e].$
8. $f(x) = x + \sqrt{x},\ \ x \in [0; 9]$
9. $f(x) = \arccos x^2,\ \ x \in \left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right].$
10. $f(x) = \operatorname{tg} x - x,\ x \in \left[-\dfrac{\pi}{4};\ \dfrac{\pi}{4}\right].$

11. $f(x)=x^2+2/x,\ x\in[1/2;\ 2].$

12. $f(x)=6x^2-x^3,\ \ x\in[-1;\ 6].$

13. $f(x)=3^{x^2},\ \ x\in[-1;\ 1].$

14. $f(x)=\cos^2 x,\ x\in[-\pi/2;\ 2\pi].$

15. $f(x)=\dfrac{x^2}{4x+9},\ \ x\in[-1;\ 6].$

16. $f(x)=e^{\sin x+\cos x},\ x\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right].$

17. $f(x)=x\cdot\ln x,\ x\in[1;\ e].$

18. $f(x)=e^x+e^{-x},\ \ x\in[-1;\ 2].$

19. $f(x)=\sqrt{4-x^2},\ x\in[-1;\ 1].$

20. $f(x)=\cos 2x+2x,\ x\in[-\pi/2;\ \pi/2].$

21. $f(x)=(x^2-1)^3,\ x\in[-2;\ 2].$

22. $f(x)=\ln^2 x,\ x\in[1/e;\ e].$

23. $f(x)=(x^3-8)^3,\ x\in\ [-1;\ 3].$

24. $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+4},\ x\in[-3,\ 3].$

25. $f(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{8}\operatorname{ctg}x,\ x\in[-\pi,\ \pi].$

26. $f(x)=x\cdot e^x,\ x\in\ \left[\dfrac{\pi}{4};\ \dfrac{3}{4}\pi\right].$

27. $f(x)=-3x\cdot(2x+7)^3,\ x\in\ [-7;\ 1].$

28. $f(x)=x^2+16/x,\ x\in[1;\ 3].$

29. $f(x)=\ln(x^2+1),\ x\in[-1;\ 2].$

30. $f(x)=\dfrac{e^{2x-1}}{x+3};\ x\in[-2{,}5;\ 2].$

31. $f(x)=(2x+3)^2\cdot(3x-4),\ x\in[-1;\ 2].$

32. $f(x)=\sin x+\operatorname{cosec}x,\ x\in\left[-\dfrac{\pi}{6};\ \dfrac{3}{4}\pi\right].$

33. $f(x)\ =\ \sin x\ +\ \dfrac{1}{2}\sin 2x,\ x\in[-\ \pi;\pi].$

34. $f(x)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{3}-x^2-12,x\in[-3;2].$

35. $f(x)=7-2x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{2x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4},x\in[-3;2].$

36. $f(x)=\sqrt{1-x^2}+\arccos x,x\in\left[-\dfrac{1}{2};1\right].$

37. $f(x)=\dfrac{3}{(x^2-1)^2},\ x\in\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right].$

38. $f(x)=\operatorname{tg}x-x,\ x\in\left[-2\pi;\ \dfrac{3}{2}\pi\right].$

39. $f(x)=e^{\operatorname{arctg}x^2},\ x\in[-1;1].$

40. $f(x)=x\cdot e^x,\ x\in[-2;\ 0].$

41. $f(x)=\arcsin^2 x,\ x\in[-1/2;1/2].$

42. $f(x)=\dfrac{e^x}{3x+1};\ x\in[0;1].$

43. $f(x)=2\sin x-\cos 2x,\ x\in[0;\ \pi/2].$

44. $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+9};\ x\in[-4;\ 4].$

45. $f(x)=\cos x-\ln\cos x,\ x\in[-\pi/4;\pi/4].$

46. $f(x)=x+\dfrac{x}{3x-1};\ x\in[-1;2].$

47. $f(x)=x^5-x^3-2x,\ x\in[-2;\ 2].$

48. $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-2x-\dfrac{1}{3},\ x\in[-2;\ 2].$

49. $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+x^2-3x-4,\ x\in[-4,2].$

50. $f(x)=x^4-8x^2+3,\ x\in[-2;\ 2].$

УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЯ 6

При отыскании наибольшего и наименьшего значений функции на указанном промежутке поступают так.

1. Находят критические точки данной функции и выбирают те из них, которые принадлежат указанному промежутку.
2. Вычисляют значения функции в критических точках, принадлежащих данному промежутку, и на концах этого промежутка.
3. Выбирают среди полученных значений функции наибольшее и наименьшее.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^4-2x^2+5$ на отрезке $[-2;\ 2]$.

Решение. 1.Найдем $f'(x)=4x^3-4x=4x\left(x^2-1\right)$, определим критические точки $4x\left(x^2-1\right)=0,\ x_1=0,\ x_{2,3}=\pm 1$.

2. Вычислим значение функции в критических точках и на концах отрезка $f(2)=\left(2^4\right)-2\cdot\left(2^2\right)+5=13$, так как функция четная, то $f(2)=f(-2)=13$, $f(\pm 1)==4,\ f(0)=5$. Наибольшее значение функции есть 13, наименьшее – 4, т.е. $y_{\text{наиб.}}\Big|_{x=\pm 2}=13;\ y_{\text{наим.}}\Big|_{x=\pm 1}=4$.

ЗАДАНИЕ 7. РЕШЕНИЕ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ

1. Доказать, что из всех прямоугольников, вписанных в данный круг радиусом R, наибольшую площадь имеет квадрат.
2. На окружности радиусом R дана точка A , в которой проведена касательная. Провести хорду BC параллельно касательной так, чтобы площадь треугольника ABC была наибольшей.
3. На окружности $x^2+y^2=R^2$ найти такую точку M, чтобы сумма квадратов расстояний от нее до точек $A(2R;0)$ и $B(0;\ 2R)$ была бы наименьшей.
4. В декартовой системе координат дана точка $P(p;q)$ $(p>0,\ q<0)$. Составить уравнение прямой, проходящей через эту точку, чтобы она отсекала от координатного угла треугольник наименьшей площади.
5. Какой радиус должен иметь круг, чтобы площадь кругового сектора с периметром $p=20$ см была наибольшей ?
6. На оси параболы $y^2=2px$ дана точка M на расстоянии a единиц от вершины. Указать абсциссу ближайшей к ней точки параболы.
7. Какой наибольшей длины бревно можно пронести в повороте двух взаимно перпендикулярных улиц шириною в 5 м и $15\sqrt{3}$ м ?
8. Длина почтовой посылки и периметр поперечного сечения в сумме составляют 60 см. Найти наибольший объем посылки, если она имеет форму круглого цилиндра.

9. Найти наибольшее и наименьшее произведения двух чисел, если их разность равна 5.

10. Стена высотою 27 м отстоит от дома (более высокого, чем стена) на расстоянии 8 м. Найти наименьшую длину лестницы, опирающейся в промежуточной точке на стену, по которой можно было бы с земли подняться на крышу дома.

11. Проволока длиной 12 м разрезана на 6 частей, из который 2 части – одного размера, а 4 – другого. Первые 2 куска согнуты в виде квадратов, соединены оставшимися четырьмя кусками так, чтобы получился прямоугольный параллелепипед. Как надо разрезать проволоку, чтобы объем параллелепипеда был наибольшим ?

12. В данный треугольник ABC с основанием a и высотой h вписать прямоугольник так, чтобы одна из его сторон лежала на основании AB. Какова должна быть высота прямоугольника, чтобы он имел наибольшую площадь ?

13. Два самолета летят в одной плоскости и прямолинейно под углом 120^0 с одинаковой скоростью V (километр в час) . В некоторый момент первый самолет пришел в точку пересечения движения самолетов, а второй не дошел до нее «a» километров. Далее самолеты продолжают движение с той же скоростью. Через какое время расстояние между ними будет наименьшим ?

14. Каковы размеры прямоугольника наибольшей площади, вписанного в эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$?

15. Найти прямоугольный треугольник наибольшей площади, имеющий гипотенузой данный отрезок h .

16. Из пункта A в пункт B отправляется лодка со скоростью $V_1=10$км/ч, а из B в C отправляется в это же время катер со скоростью $V_2=15$км/ч. Через какое время расстояние между ними будет наименьшим, если от A до B 190 км, и $\angle ABC=60^0$?

17. Решеткой 120 м можно огородить прямоугольную площадку наибольшей площади, примыкающую к стене дома. Каковы размеры этой площадки ?

18. Найти наибольший объем конуса с данной образующей ℓ.

19. Сечение имеет вид прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр сечения $p=18$м. При каком радиусе полукруга площадь сечения наибольшая ?

20. В данный шар радиусом R вписать цилиндр с наибольшей площадью боковой поверхности.

21. В круг радиусом R вписать равнобедренный треугольник наибольшей площади.

22. В круг радиусом R вписать равнобедренный треугольник наибольшего периметра.

23. На прямой $y=x$ найти точку, сумма квадратов расстояний которой до трех точек: $D(-a;0)$, $B(a;\ 0)$, $C(0;\ b)$ была бы наименьшей.

24. Из лагеря A в город B отправился гонец в лодке. Под каким углом ему нужно пересечь реку, чтобы попасть в лагерь в кратчайший срок ? (Скорость на веслах 3 км/ч, пешком – 5 км/ч).

25. На параболе $y = x^2$ найти точку, наименее удаленную от прямой $y = 2x - 4$.

26. Из круглого бревна диаметром d вырезать брус прямоугольного сечения так, чтобы получилось наименьшее количество отходов.

27. Найти соотношение между радиусом R и высотой H цилиндра, имеющего при данном объеме наименьшую поверхность.

28. В круг радиусом R вписать прямоугольник наибольшего периметра.

29. Найти стороны прямоугольного треугольника, имеющего при данной площади S наименьший периметр.

30. Сумма двух положительных чисел равна a. Найти эти числа при наибольшей величине их произведения.

31. Разбить число 6 на два слагаемых так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

32. Произведение двух положительных чисел равна a. Чему равны эти числа, если сумма их будет наименьшей ?

33. Из всех прямоугольников данного периметра p найти тот, у которого площадь наибольшая.

34. Из всех прямоугольников периметра p найти тот, у которого диагональ наименьшая.

35. Из всех прямоугольников данной площади S найти тот, у которого периметр наименьший.

36. Найти отношение сторон прямоугольника наибольшей площади, вписанного в полукруг радиусом R.

37. Известно, что сопротивление горизонтальной балки на изгиб пропорционально произведению ширины сечения на квадрат высоты. Из кругового бревна диаметром d нужно вырезать балку прямоугольного сечения так, чтобы сопротивление на изгиб в горизонтальном положении было наибольшим.

38. Открытый желоб в сечении имеет форму равнобедренной трапеции, основание и боковые стороны которой равны a. Чему равен угол наклона α стенки желоба к его высоте, проведенной из вершин тупого угла при наибольшей пропускной способности желоба ?

39. Открытый желоб в сечении имеет прямоугольник. Периметр сечения равен a. При каком отношении ширины и высоты желоб будет в сечении иметь наибольшую площадь ?

40. Из всех треугольников, у которых сумма основания и высоты равна a, найти тот, у которого площадь наибольшая.

41. Из всех круговых секторов, имеющих данную площадь, найти сектор с наименьшим периметром.

42. Из всех прямых параллелепипедов с данной полной поверхностью S, в основании которых лежит квадрат, найти тот, у которого наибольший объем.

43. Из прямоугольного листа жести размером 80 x 50 см сделать открытый сверху ящик наибольшего объема, отрезая равные квадраты по углам, затем загибая жесть, чтобы образовались боковые стенки. Какова должна быть длина стороны у вырезаемых квадратов ?

44. Показать, что если сумма длин гипотенузы и одного из катетов прямоуголь-
ного треугольника задана, то площадь треугольника будет наибольшей, когда угол между ними равен 60^0.

45. Из бумажного круга с радиусом R вырезан сектор. Из оставшейся части круга склеена коническая воронка. Какой угол должен иметь вырезанный сектор, чтобы объем воронки был наибольшим ? Найти радиус основания и высоту воронки.

46. Из всех конусов с данной боковой поверхностью S найти тот, объем которого наибольший.

47. Из всех цилиндров, вписанных в данный конус (R и H даны), найти тот, у которого боковая поверхность наибольшая.

48. Из всех цилиндров, вписанных в шар с радиусом R , найти тот, у которого наибольшая боковая поверхность.

49. Из всех конусов, вписанных в шар с радиусом R, найти тот, у которого объем наибольший.

50. Закон движения тела, брошенного вертикально вверх, задан уравнением $S = V_0 t - \frac{1}{2} g t^2$. Найти наибольшую высоту подъема тела.

УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЯ 7

При решении задач на отыскание оптимальных значений величины рекомендуется действовать по следующей схеме.

1. Внимательно изучите условие задачи и решите вопрос о том, какую величину, фигурирующую в условии, принять за независимую переменную x, а какую считать искомой функцией y. (При этом не обязательно аргумент обозначать буквой x, а функцию – y). Зачастую этот выбор можно сделать по-разному. Приведем примеры.

В задаче № 1 задания 7 радиус круга R дан, следовательно, это известная величина. Требуется найти прямоугольник наибольшей площади, поэтому в качестве функции следует взять площадь S прямоугольника. Тогда аргументом x будет длина одной из сторон прямоугольника. Таким образом, $S = S(x)$ искомая функция.

В задаче № 3 задания 7 функцией z будет сумма квадратов расстояний от точки $M(x, y)$ до точек A и B. В качестве аргумента можно выбрать x или y.

2. Определив аргумент x и функцию y, укажите, в каких границах они могут изменяться. Это упростит исследование функции.

3. Используя условие задачи, надо аналитически записать искомую функцию $y = f(x)$ одной переменной. Это наиболее трудная часть, так как искомая

величина, как правило, зависит от двух и более переменных величин. Так, в задаче № 1 площадь S зависит от длин сторон прямоугольника x и y, то есть $S=S(x;y)$. В задаче № 3 функция z зависит от координат x и y точки M $z=z(x;y)$. Поэтому необходимо одну из переменных (x или y) исключить, используя условие задачи. Следует помнить, что исследуемая функция должна зависеть только от одной переменной.

4. Полученную функцию исследуйте на экстремум.

Пример 1. В прямоугольном треугольнике сумма длин гипотенузы и катета равна 24 см. При каком угле α между ними площадь треугольника будет наибольшей ?

Решение. По условию $a+c=24$. Можно привести два решения этой задачи.

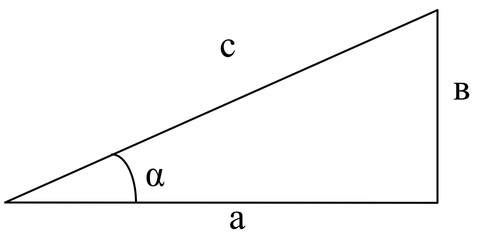

Рис.6

а) В качестве функции здесь выступает площадь S, а в качестве аргумента угол α, т. е. $S=S(\alpha)$. При этом $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ $0<S<+\infty$. Поэтому, естественно, воспользуемся формулой площади $S=\frac{1}{2}a\cdot c\cdot\sin\alpha$. Но тогда a и c надо выразить через α.

Из рис.6 $\frac{a}{c}=\cos\alpha$, но $c=24-a$, поэтому $a/24-a=\cos\alpha$. Отсюда следует, что $a=(24-a)\cdot\cos\alpha$ и $a=\frac{24\cdot\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$. Так как $c=\frac{a}{\cos\alpha}$, то получим $c=\frac{24}{1+\cos\alpha}$.

Таким образом, $S=\frac{1}{2}\cdot\frac{24\cdot\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\frac{24}{1+\cos\alpha}\cdot\sin\alpha$, $S=288\cdot\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}$.

Как видно, этот «прямой » путь оказался громоздким.

б) Найдем, при каких значениях катетов a и b площадь треугольника будет наибольшей. Воспользуемся формулой $S=1/2\cdot a\cdot b$. Из условия $a=24-c$, а по теореме Пифагора $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{c^2-(24-c)^2}=\sqrt{c^2-576+48c-c^2}=$ $=\sqrt{48c-576}$. Таким образом, $S=1/2\cdot(24-c)\cdot\sqrt{48c-576}$, т.е. $S=S(c)$. Найдем максимум этой функции.

$$\frac{dS}{dc}=\frac{1}{2}\left[-\sqrt{48c-576}+(24-c)\cdot\frac{48}{2\sqrt{48c-576}}\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{1152-72c}{\sqrt{48c-576}};$$

$$\frac{dS}{dc}=0 \Rightarrow 1152-72c=0 \text{ при } c=16.$$

Видно, что производная $\frac{dS}{dc}$ меняет знак с плюса на минус при переходе через точку $c = 16$. Это значит, что функция S имеет максимум при $c = 16$. Но тогда $a = 8$ и $\cos\alpha = a / c = 1/2$. Итак, площадь треугольника будет наибольшей при $\alpha = 60^0$.

Пример 2. Завод Д нужно соединить шоссейной дорогой о прямолинейной железной дорогой, на которой расположен город А. Стоимость перевозок по шоссе в m раз дороже стоимости перевозок по железной дороге. Как провести шоссе к железной дороге, чтобы стоимость перевозок от завода к городу была наименьшей ?

Решение. Расстояние от завода Д до железной дороги можно измерить. Пусть $ДВ = a$.

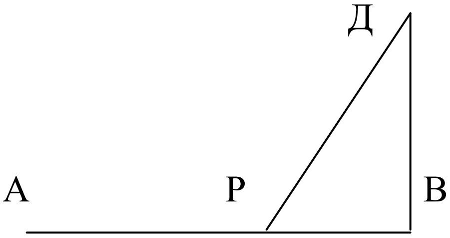

Рис. 7

Расстояние $AB = \ell$ тоже можно измерить. Положение точки Р на АВ неизвестно, обозначим расстояние АР $x \in [0;\ \ell]$, тогда $PB = \ell - x$. Стоимость перевозок по железной дороге единицы груза на единицу расстояния известна и равна k, тогда стоимость перевозки по шоссе - $k \cdot m$; $x \cdot k$ - стоимость перевозки груза по железной дороге. $\sqrt{(\ell - x)^2 + a^2} \cdot k \cdot m$ - стоимость перевозки по шоссе. Стоимость перевозки груза от Д до А $N = x \cdot k + k \cdot m\sqrt{(\ell - x)^2 + a^2}$, полученную функцию исследуем

$$N' = k + k \cdot m \cdot \frac{-2(\ell - x)}{2\sqrt{(\ell - x)^2 + a^2}} = k \cdot \frac{\sqrt{(\ell - x)^2 + a^2} - m(\ell - x)}{\sqrt{(\ell - x)^2 + a^2}},$$

$$N' = 0 \Rightarrow \sqrt{(\ell - x)^2 + a^2} - m(\ell - x) = a, \quad (\ell - x)^2 + a^2 = m^2(\ell - x)^2,$$

$$x = \ell \pm \frac{a}{\sqrt{m^2 - 1}}, \quad x = \ell - \frac{a}{\sqrt{m^2 - 1}} \in [0;\ \ell], \quad N'' = \frac{k \cdot m \cdot a^2}{\left[(\ell - x)^2 + a^2\right]^{3/2}} \geq 0$$

при $x = \ell - \frac{a}{\sqrt{m^2 - 1}}$. При указанном x стоимость перевозок будет наименьшей.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. - М.: Наука, 1964. – Т. 1. – 544 с.

2. Бохан К. А., Егорова И. А., Лащенов К. В. Курс математического анализа. - М.: Просвещение, 1965. – Т. 1. – 435 с.

3. Сборник задач по курсу высшей математики / Под рук. П.Е. Дюбюка и

Г.И. Кручковича. - М.: Высш. шк., 1965. – 591 с.
4. Задачник по курсу математического анализа / Под ред. Н.Я. Виленкина. - М.: Просвещение, 1971. – 350 с.
5. Запорожец Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу. - М.: Высш. шк., 1966. – 460 с.
6. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / Под ред. Б. П. Демидовича. - М.: ГИФМЛ, 1963. – 472 с.
7. Г.Н. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. - М.: ГИФМЛ, 1958. – 436 с.

Редактор Г.М. Кляут
ИД 06039 от 12.10.01

Подписано в печать 10.06.02. Формат 60 x 84 1/16
Бумага офсетная.
Отпечатано на дуплекаторе. Усл.печ.л. 2,5
Уч.-изд.л. 2,5
Тираж 300 экз. Заказ

Издательство ОмГТУ. 644050, Омск, пр-т Мира,11
Типография ОмГТУ