Министерство образования Российской Федерации

Омский государственный технический университет

ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

Методические указания для студентов технического вуза
ускоренной формы обучения

Омск – 2001

Составитель Беркович Кай Артуровна

В методических указаниях излагаются основные понятия по теме «Производная и дифференциал», даны задачи с решением, раскрывающие суть этих понятий и демонстрирующие приемы дифференцирования, примеры для самостоятельной работы по выработке навыка в технике дифференцирования, а также примерный вариант контрольной работы по данной теме (с решением).

Методические указания предназначены для студентов технического вуза ускоренной формы обучения.

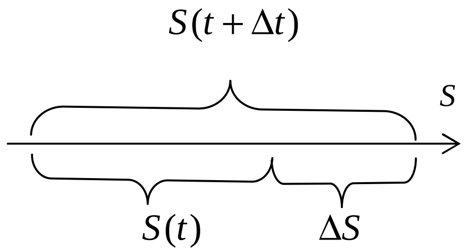
1. Задачи о скорости изменения функций

ЗАДАЧА 1. Пусть тело движется неравномерно. Известно, что одной из характеристик движения является скорость. При неравномерном движении скорость – величина переменная. Иногда же нужно знать скорость в определенный момент времени, например в момент приземления парашютиста, на закруглении пути, в момент аварии и т.д. Это приводит к следующей задаче: Тело движется неравномерно по закону $S = S(t)$. Найти скорость движения в произвольный момент времени t.

Решение.

1. Возьмем момент времени t, дадим приращение Δt и получим момент $(t + \Delta t)$.

2. Вычислим соответствующее приращение пути ΔS:



$$\Delta S = S(t+\Delta t) - S(t).$$

3. Вычислим среднюю скорость $V_{ср.}$: $V_{ср.} = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$.

4. Мгновенная скорость $V_{мгн.} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \cdot V_{ср.}$. $\quad V = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$.

ЗАДАЧА 2. Найти силу тока J, зная, что количество электричества, протекающего через поперечное сечение проводника, определяется по закону $Q = Q(t)$.

Решение.

1. Возьмем момент времени t, дадим ему приращение Δt и перейдем к моменту $(t + \Delta t)$.

2. Вычислим приращение количества электричества за время Δt: $\Delta Q = Q(t+\Delta t) - Q(t)$.

3. $J_{ср.} = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$.

4. $J = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$.

ЗАДАЧА 3. Пусть $W = W(Q)$- количество тепла, необходимого сообщить телу, чтобы нагреть его на Q градусов. Найти теплоемкость C.

Проведя аналогичные вычисления, примененные в задачах №1 и №2, получим: $C = \lim\limits_{\Delta Q \to 0} \dfrac{\Delta W}{\Delta Q}$.

2. Определение производной и ее механический смысл

Во всех задачах п.1.1, находя скорость изменения одной величины в зависимости от изменения другой, мы при решении применили аналогичные операции.

Поэтому отвлечемся от конкретного содержания этих задач и рассмотрим общее в их решении.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в промежутке X.

1. Исходя из некоторого значения $x = x_0$ независимой переменной, дадим ему приращение Δx (положительное или отрицательное), не выводящее из промежутка X, так что и $(x + x_0) \in X$.

2. Вычислим соответствующее приращение функции Δy: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

3. Вычислим отношение приращения функции к вызвавшему его приращению аргумента: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

4. Вычислим $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, который назовем производной функции.

Определение. Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy к вызвавшему его приращению аргумента Δx при условии, что приращение аргумента Δx стремится к нулю.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Замечание. Если такого предела не существует, то говорят, что данная функция в точке x_0 производной не имеет. Впрочем, если этот предел равен бесконечности определенного знака, условимся говорить, что существует бесконечная производная.

Для обозначения производных пользуются следующими символами:

y' или $f'(x_0)$ - обозначения Лагранжа ;

$\frac{dy}{dx}$ или $\frac{df(x_0)}{dx}$ - обозначения Лейбница.

Если возникнет сомнение относительно переменной, по которой взята производная, то эта переменная указывается в виде значка внизу: y'_x; $f'_x(x_0)$.

Если производная вычисляется при любом значении аргумента x, то она обозначается просто $f'(x)$ или $\frac{df(x)}{dx}$.

Учитывая введенные обозначения, результаты решенных в п.1 задач можно записать так:

1. Производная от пути по времени есть скорость: $V = S'(t) = \frac{dS}{dt}$.

С механической точки зрения производная есть скорость движения тела.

2. Производная от количества электричества по времени есть сила тока:

$$J = Q'(t) = \frac{dQ}{dt}.$$

3. Производная от количества тепла по температуре есть теплоемкость:

$$C = W'(Q) = \frac{dW}{dQ}.$$

К понятию производной впервые пришел английский математик и физик И. Ньютон в 1665 году, решая задачу о вычислении скорости.

ЗАДАЧА. Путь при свободном падении тела определяется формулой $S(t) = \frac{gt}{2}$. Найти скорость свободного падения.

Решение.

1. Дадим моменту времени t приращение Δt, получим момент $(t + \Delta t)$.

2. Вычислим ΔS :

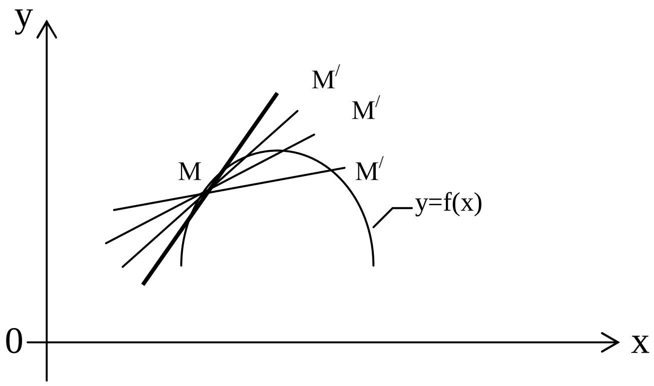
$$\Delta S = S(t+\Delta t) - S(t) = \frac{g(t+\Delta t)^2}{2} - \frac{gt^2}{2} = \frac{g}{2}(2t+\Delta t)\Delta t .$$

3. $V_{ср.} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\frac{g}{2}\left(2t+\Delta t\right)}{\Delta t} = \frac{g}{2}\left(2t+\Delta t\right).$

4. $V = S'(t) = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{g}{2}\left(2t+\Delta t\right) = gt .$ $\qquad V = gt .$

3. Геометрический смысл производной

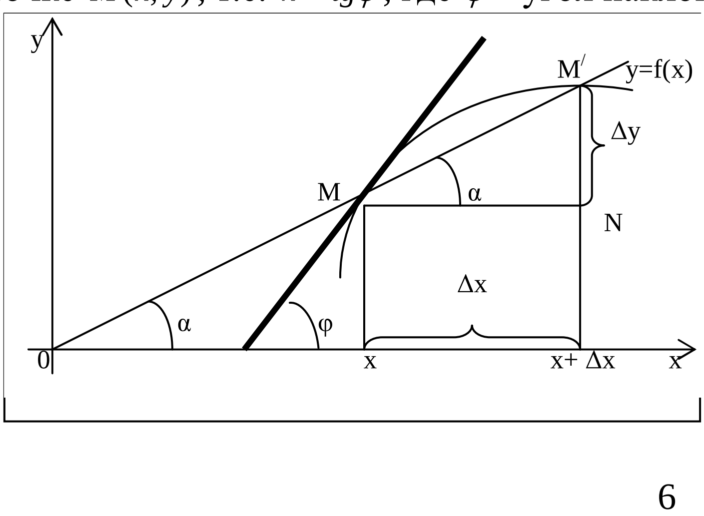
Пусть нужно провести касательную к кривой $y = f(x)$ в точке $M(x,y)$. Школьное определение касательной к окружности для касательной к произвольной кривой неприменимо.



Возьмем на кривой $y = f(x)$ вблизи точки M точку M' и проведем секущую MM'. Пусть точка M' неограниченно приближается к точке M.

Определение. Предельное положение секущей MM' при условии, что точка M' неограниченно приближается к точке M, называется касательной к кривой в точке M.

Касательная – прямая. Пусть ее уравнение будет записано в виде: $y = kx + в$. Значит, нужно определить угловой коэффициент касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M(x,y)$, т.е. $k = tg\varphi$, где φ - угол наклона касательной к оси Ox.



Секущая MM' образует с осью Ox угол α, касательная - угол φ. Так как точка M' находится вблизи точки M по определению, то M' имеет координаты ($x+\Delta x$) и ($y+\Delta y$), т.е. $M'(x+\Delta x; y+\Delta y)$.

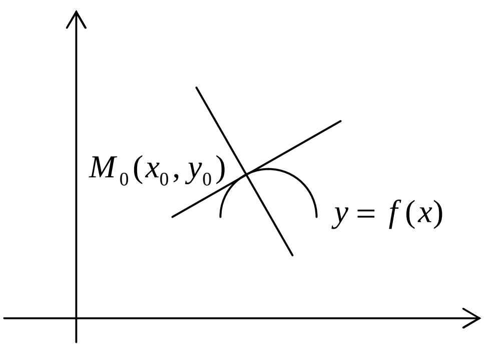
Проведем MN параллельно Ox. Из $\Delta MM'N : tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Пусть $M' \to M$. Тогда $\Delta x \to 0, \alpha \to \varphi, tg\alpha \to tg\varphi$.

$$tg\varphi = k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx},$$

$$k = \frac{dy}{dx}.$$

Вывод. С геометрической точки зрения производная есть угловой коэффициент касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M(x, y)$.

Одновременно с Ньютоном к понятию производной пришел другой математик, живший в 17 веке, Лейбниц, решая геометрическую задачу.



Напишем уравнения касательной и нормали, т.е. прямой, перпендикулярной к касательной и проходящей через точку касания, к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через данную точку в данном направлении: $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Тогда $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$ - уравнение касательной,

$y = y_0 - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ - уравнение нормали.

Действие отыскания производной функции называется <u>дифференцированием.</u> Раздел математики, который занимается исследованием функций с помощью производных, называется <u>дифференциальным исчислением.</u>

Как было указано выше, понятие производной возникло из решения различных практических задач, физических, механических и геометрических. Математик Пуанкаре говорил: «Математика – это искусство давать разным вещам одно название», что наглядно демонстрируется на понятии производной.

В математике понятие производной получило обобщенный смысл, что еще более усилило ее прикладное значение. Создание дифференциального исчисления чрезвычайно расширило возможности применения математических методов к естествознанию и технике.

Энгельс писал: «Лишь дифференциальное исчисление дает возможность естествознанию изображать математически не только состояние, но и процессы: движение».

4. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции в точке

Функция, имеющая производную в данной точке, называется <u>дифференцируемой</u> в этой точке.

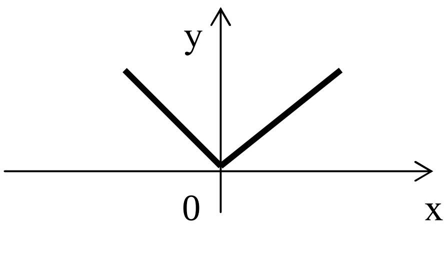
Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$:

$f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ - существует.

Так как $f'(x_0)$ - число, то Δx и Δy есть либо бесконечно малые одного порядка, либо при $f'(x_0) = 0$ Δy есть бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx. Отсюда следует, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, т.е. функция $y = f(x)$ непрерывна.

Вывод. Если функция дифференцируема в данной точке, то она непрерывна в ней.

Обратное утверждение не всегда верно. Существуют функции непрерывные, но не дифференцируемы в данной точке.



Например, функция $y = |x|$ непрерывна в точке $x = 0$, но не дифференцируема. В самом деле, $y'(0)$ не существует:

$$y'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} -1, \textit{ при } \Delta x < 0 \\ 1, \textit{ при } \Delta x > 0 \end{cases}$$

Нетрудно понять, что провести касательную к кривой $x = 0$ в точке $x = 0$ нельзя.

5. Правила дифференцирования.

1. <u>$y = c - const$.</u>

1. Возьмем x, дадим приращение Δx.

2. Вычислим $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0$.

3. Вычислим $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{0}{\Delta x} = 0$.

4. Вычислим $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} = 0$.

Вывод. Производная постоянной величины равна нулю:

$$c' = 0.$$

Замечание. В дальнейшем при выводе формул дифференцирования пояснения будем упускать.

2. $y = x$ - аргумент.

1. $x, \Delta x$.

2. $\Delta y = (x + \Delta x) - x = \Delta$.

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1$.

4. $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 1$.

Вывод. Производная аргумента равна единице:

$$x' = 1 \quad .$$

3. $y - u + v - w$, где $u = u(x), \quad v = v(x), \quad w = w(x)$ - дифференцируемые функции.

1. $x, \Delta x$.

2. $\Delta y = \left((u + \Delta u) + (v + \Delta v) - (w + \Delta w)\right) - (u + v - w) = \Delta u + \Delta v - \Delta w$.

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta u + \Delta v - \Delta w}{\Delta x} = \dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \dfrac{\Delta v}{\Delta x} - \dfrac{\Delta w}{\Delta x}$.

4. $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \dfrac{\Delta v}{\Delta x} - \dfrac{\Delta w}{\Delta x} \right) = u' + v' - w'$.

Вывод. Производная алгебраической суммы функций равна алгебраической сумме производных этих функций:

$(u + v - w)' = u' + v' - w'$.

4. $y = uv$, где $u = u(x), v = v(x)$.

1. $x, \Delta x$.

2. $\Delta y = (u+\Delta u)(v+\Delta v) - u\cdot v = \Delta u\cdot v + \Delta v\cdot u + \Delta u\cdot\Delta v$.

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta u\cdot v + \Delta v\cdot u + \Delta u\cdot\Delta v}{\Delta x} = \dfrac{\Delta u}{\Delta x}v + \dfrac{\Delta v}{\Delta x}u + \dfrac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v$.

4. $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\Delta u}{\Delta x}v + \dfrac{\Delta v}{\Delta x}u + \dfrac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v\right) = u'\cdot v + v'\cdot u + u'\cdot 0$.

Вывод. Производная произведения двух функций равна производной первой функции, умноженной на вторую функцию, плюс производная второй функции, умноженной на первую функцию:

$$(u\cdot v)' = u'\cdot v + v'\cdot u .$$

Следствие 1.

$\underline{y = c\cdot u}$, где $u = u(x), c - const,$

$(c\cdot u)' = c'\cdot u + c\cdot u' = 0\cdot u + c\cdot u'.$

Вывод. Постоянный множитель можно вынести за знак производной:

$$(c\cdot u)' = c\cdot u' .$$

Следствие 2.

$y = u\cdot v\cdot w$, где $u = u(x), v = v(x), w = w(x)$.

Воспользуемся формулой, выведенной в п. 4:

$(u\cdot v\cdot w)' = (uv)'w + w'\cdot uv = (u'v + v'u)w + w'\cdot uv = u'\cdot vw + v'\cdot uw + w'\cdot uv$.

Эту формулу можно распространить на произведение любого числа сомножителей: производная произведения «n» сомножителей равна сумме произведений производной каждой функции на произведение всех остальных функций.

5. $\underline{y = u^n}$, где $u = u(x), n$- натуральное число.

Воспользуемся результатом следствия 2 п. 4:

$$(u^n)' = \underbrace{u'\cdot u^{n-1} + u'\cdot u^{n-1} + \ldots + u'\cdot}_{n \text{ слагаемых}} u^{n-1} = n\cdot u^{n-1}\cdot u' .$$

Эта формула была получена для n- натурального числа. Можно показать, что она верна, если показатель степени μ - любое действительное число:

$$\left(u^{\mu}\right)' = \mu \cdot u^{\mu-1} \cdot u'.$$

Вывод. Производная степени равна показателю степени, умноженному на основание в степени на единицу меньше и на производную основания.

Следствие. Рассмотрим частные случаи, часто встречающиеся на практике:

1. $\left(\sqrt{u}\right)' = \left(u^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \cdot u' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$,

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'.$$

2. $\left(\frac{1}{u}\right)' = \left(u^{-1}\right)' = -1 \cdot u^{-2} \cdot u' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'.$$

Пример 1. Найти производную функции $y = \left(2x^7 + 7x\right)^6 \left(\sqrt{x} - 7\right)$.

Решение.

$$y' = \left(\left(2x^7 + 7x\right)^6\right)' \cdot \left(\sqrt{x} - 7\right) + \left(\sqrt{x} - 7\right)' \cdot \left(2x^7 + 7x\right)^6 =$$

$$= 6 \cdot \left(2x^7 + 7x\right)^5 \cdot \left(14x + 7 \cdot 1\right) \cdot \left(\sqrt{x} - 7\right) + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot 1 - 0\right) \cdot \left(2x^7 + 7x\right)^6 =$$

$$= 6\left(2x^7 + 7x\right)^5 \cdot \left(14x + 7\right) \cdot \left(\sqrt{x} - 7\right) + \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(2x^7 + 7x\right).$$

При выработке техники дифференцирования можно не упрощать полученную производную.

Пример 2. Написать уравнения касательной и нормали к параболе $y = x^2 - 1$ в точке $x_0 = \frac{1}{2}$.

Решение. Воспользуемся формулами, полученными в п. 3. При $x_0 = \frac{1}{2}$ $y_0 = -\frac{3}{4}$,

$$y' = 2x, \quad y'\left(\frac{1}{2}\right) = 1.$$

$y=-\frac{3}{4}+1\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)$ или $4x-4y-5=0$ - уравнение касательной.

$y=-\frac{3}{4}-\frac{1}{1}\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)$ или $4x+4y+1=0$ - уравнение нормали.

6. $y=\frac{u}{v}$, где $u=u(x),\quad v=v(x)$.

$y=u\cdot\frac{1}{v}$. Воспользуемся результатами п.п. 4. и 5.

$$y'=u'\cdot\frac{1}{v}+\left(\frac{1}{v}\right)'\cdot u=u'\cdot\frac{1}{v}-\frac{1}{v^2}\cdot v'\cdot u=\frac{u'v-v'u}{v^2}.$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}.$$

Вывод. Производная дроби равна дроби, знаменатель который есть квадрат знаменателя; числитель равен производной числителя, умноженной на знаменатель, минус производная знаменателя, умноженная на числитель.

Пример 3. Найти $y'(0)$ функции $y=\frac{(1+3x)^2}{\sqrt{1-x}}$.

Решение.

$$y'=\frac{\left((1+3x)^2\right)'\cdot\sqrt{1-x}-(\sqrt{1-x})'\cdot(1+3x)^2}{(\sqrt{1-x})^2}=$$

$$=\frac{2(1+3x)\cdot 3\cdot\sqrt{1-x}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\cdot(-1)(1+3x)^2}{1-x}$$

$$y'(0)=\frac{2\cdot 1\cdot 3\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 1}{1}=6\frac{1}{2}.$$

6. Производная сложной функции

Пусть дана сложная функция $y=f(\varphi(x))$, где $y=f(u)$ и $u=\varphi(x)$ - дифференцируемые функции. Найдем $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y\cdot\Delta u}{\Delta x\cdot\Delta u}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

(Так как $u=f(x)$ - дифференцируема, следовательно, она непрерывна, следовательно, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta u=0$).

Введем обозначения: y – функция, x – независимый аргумент, u – промежуточный аргумент.

Вывод. Производная функции по независимому аргументу равна производной функции по промежуточному аргументу, умноженной на производную промежуточного аргумента по независимому аргументу:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

7. Производные тригонометрических функций

1. $y=\sin u$, где $u=u(x)$.

Это сложная функция, поэтому $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$.

Поскольку функция $u=u(x)$ задана в общем виде, то $\frac{du}{dx}=u'$ вычислить нельзя.

Найдем $\frac{dy}{du}$.

Здесь y - функция, u - аргументы.

1. Аргументу u даем приращение Δu.
2. $\Delta y=\sin(u+\Delta u)-\sin u=2\cos\frac{2u+\Delta u}{2}\cdot\sin\frac{\Delta u}{2}$.
3. $\frac{\Delta y}{\Delta u}=\frac{2\cos\frac{2u+\Delta u}{2}\cdot\sin\frac{\Delta u}{2}}{\Delta u}=2\cos\frac{2u+\Delta u}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\Delta u}{2}}{\Delta u}$.
4. $\frac{dy}{du}=\lim\limits_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=\lim\limits_{\Delta u\to 0}2\cos\frac{2u+\Delta u}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\Delta u}{2}}{\Delta u}=2\cos u\cdot\frac{1}{2}=\cos u$.

$\frac{dy}{dx}=\cos u\cdot u'$.

Вывод. Производная синуса любого аргумента равна косинусу этого аргумента, умноженному на производную аргумента:

$$(\sin u') = \cos u \cdot u'.$$

В примерах №№ 1-4 найти производные функций.

Пример 1. $y = \sin^5\left(x^2+1\right)$.

Решение. Запишем функцию так: $y = \left(\sin(x^2+1)\right)^5$.

$y' = 5\left(\sin(x^2+1)\right)^4 \cdot \cos(x^2+1) \cdot 2x$.

Пример 2. $y = \sqrt{\sin 4x} \cdot (x^3+11)$.

Решение.

$y' = \left(\sqrt{\sin 4x}\right)' \cdot \left(x^3+11\right) + \sqrt{\sin 4x} \cdot \left(x^3+11\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{\sin 4x}} \cdot \cos 4x \cdot 4 \cdot \left(x^3+11\right) + \sqrt{\sin 4x} \cdot 3x^2$.

2. $\underline{y = \cos u\text{, где } u = u(x)}$.

$y = \cos u = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - u\right)$

$y' = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - u\right) \cdot (-u') = -\sin u \cdot u'$.

Вывод. Производная косинуса любого аргумента равна минус синусу этого аргумента, умноженному на производную аргумента.

Пример 3. $y = \cos\sqrt{\sin x}$.

Решение. $y' = -\sin\sqrt{\sin x} \cdot \left(\sqrt{\sin x}\right)' = -\sin\sqrt{\sin x} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x$.

3. $\underline{y = tgu\text{, где } u = u(x).}$

$y = tgu = \dfrac{\sin u}{\cos u}$.

$y' = \dfrac{\sin u \cdot u' \cdot \cos u - (-\sin u \cdot u')\sin u}{(\cos u)^2} = \dfrac{u'}{\cos^2 u} = \sec^2 u \cdot u'$.

Вывод. Производная тангенса любого аргумента равна секансу в квадрате этого аргумента, умноженному на производную аргумента:

$$(tgu)' = \sec^2 u \cdot u' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'.$$

4. $y = ctgu\,,\quad u = u(x)$.

Вывод аналогичный.

Вывод. Производная котангенса любого аргумента равна минус косекансу в квадрате этого аргумента, умноженному на производную аргумента:

$$(ctgu)' = -\cos ec^2 u \cdot u = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'.$$

Пример 4. $y = \dfrac{\sin^2 x - tg^5 2x}{ctg 4x}$.

Решение.

$$y' = \frac{\left(\sin^2 x - tg^5 2x\right)' ctg 4x - (ctg 4x)' \left(\sin^2 x - tg^5 2x\right)}{ctg^2 4x} =$$

$$= \frac{\left(2\sin x \cdot \cos x - 5tg^4 2x \cdot \sec^2 2x \cdot 2\right) ctg 4x - \left(-\cos ec^2 4x \cdot 4\right)\left(\sin^2 x - tg^2 2x\right)}{ctg^2 4x}.$$

5. $y = \sec u$, где $u = u(x)$.

$$y = \sec u = \frac{1}{\cos u}$$

$$y' = -\frac{1}{\cos^2 u} \cdot (-\sin u)u' = tgu \cdot \sec u \cdot u'$$

$$(\sec u)' = tgu \cdot \sec u \cdot u'.$$

6. $y = \cos ec u$, где $u = u(x)$.

$$y = \cos ecu = \frac{1}{\sin u}$$

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot \cos u \cdot u' = -ctgu \cdot \cos ecu \cdot u'$$

$$(\cos ecu)' = -ctgu \cdot \cos ecu \cdot u'.$$

Замечание. Формулы, рассмотренные в п.п. 5 и 6, не являются основными формулами.

8. Производные логарифмической и показательной функций.

1. $y = \ln u,\quad u = u(x)$

Это сложная функция, поэтому

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

Поскольку функция $u=u(x)$ задана в общем виде, то $\frac{du}{dx}=u'$ вычислить нельзя.

Найдем $\frac{dy}{du}$. Здесь y - функция, u - аргумент.

1. Аргументу u даем приращение Δu.
2. $\Delta y=\ln(u+\Delta u)-\ln u=\ln\frac{u+\Delta u}{u}=\ln\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right).$
3. $\frac{\Delta y}{\Delta u}=\frac{1}{\Delta u}\ln\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right)=\frac{1}{u}\cdot\frac{u}{\Delta u}\ln\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right)=\frac{1}{u}\ln\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right)^{\frac{u}{\Delta u}}.$
4. $\frac{dy}{du}=\lim\limits_{\Delta u\to 0}\frac{1}{u}\cdot\ln\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right)^{\frac{u}{\Delta u}}=\frac{1}{u}\ln e=\frac{1}{u}.$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{u}\cdot u'.$$

Вывод. Производная натурального логарифма любого аргумента равна единице, деленной на аргумент, умноженной на производную аргумента:

$$(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'.$$

2. $\underline{y=\log_a u,\text{ где } u=u(x)}$

$\log_a u=\frac{\ln u}{\ln a}$, поэтому

$$(\log_a u)'=\frac{1}{u\ln a}\cdot u'.$$

3. $\underline{y=a^u,\text{ где } u=u(x)}$

Прологарифмируем обе части равенства $y=a^u$ по основанию e:

$\ln y=u\ln a \qquad (*)$

Продифференцируем обе части равенства (*):

$\frac{1}{y}\cdot y'=u'\ln a\Rightarrow y'=y\ln a\cdot u'\Rightarrow y'=a^u\ln a\cdot u'.$

Вывод. Производная показательной функции равна самой показательной функции, умноженной на натуральный логарифм основания и на производную от показателя:

$$\left(a^u\right)'=a^u\ln a\cdot u'.$$

Частный случай: $y=e^u$, где $u=u(x)$

$$\left(a^u\right)'=e^u\cdot u'$$

В примерах № 1-3 найти производные следующих функций.

Пример 1. $y=\ln^2\sin x\cdot 5\cos x$.

Решение.

$$y' = \left(\ln^2 \sin x\right)' \cdot 5^{\cos x} + \left(5^{\cos x}\right)' \ln^2 \sin x =$$

$$= 2\ln\sin x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x \cdot 5^{\cos x} + 5^{\cos x} \ln 5 \cdot (-\sin x)\ln^2 \sin x.$$

Пример 2. $y = \dfrac{e^{\cos \ln x}}{\log_5 tgx}$

Решение.

$$y' = \frac{\left(e^{\cos\ln x}\right)' \log_5 tgx - \left(\log_5 tgx\right)' \cdot e^{\cos\ln x}}{\left(\log_5 tgx\right)^2} =$$

$$= \frac{e^{\cos\ln x}(-\sin\ln x) \cdot \dfrac{1}{x} \cdot \log_5 tgx - \dfrac{1}{tgx \cdot \ln 5} \cdot \sec^2 x \cdot e^{\cos\ln x}}{\log_5^2 tgx}.$$

Пример 3. $y = ctg^5 \ln\sec 8^{x^3}$.

Решение.

$$y' = 5ctg^4 \ln\sec 8^{x^3} \left(ctg \ln\sec 8^{x^3}\right)' =$$

$$= 5ctg^4 \ln\sec 8^{x^3} \left(-\cos ec^2 \ln\sec 8^{x^3}\right)\left(\ln\sec 8^{x^3}\right)' =$$

$$= -5ctg^4 \ln\sec 8^{x^3} \cdot \cos ec^2 \ln\sec 8^{x^3} \cdot \frac{1}{\sec 8^{x^3}} \cdot \left(\sec 8^{x^3}\right)' =$$

$$= -5ctg^4 \ln\sec 8^{x^3} \cdot \cos ec^2 \ln\sec 8^{x^3} \cdot \frac{1}{\sec 8^{x^3}} \cdot \sec 8^{x^3} \cdot tg 8^{x^3} \left(8^{x^3}\right)' =$$

$$= -5ctg^4 \ln\sec 8^{x^3} \cdot \cos ec^2 \ln\sec 8^{x^3} \cdot tg 8^{x^3} \cdot 8^{x^3} \cdot \ln 8 \left(x^3\right)' =$$

$$= -5ctg^4 \ln\sec 8^{x^3} \cdot \cos ec^2 \ln\sec 8^{x^3} \cdot tg 8^{x^3} \cdot 8^{x^3} \cdot \ln 8 \cdot 3x^2.$$

Замечание. Мы нашли производную достаточно сложной функции, но ход наших вычислений должен показать, что такая задача посильна каждому студенту: достаточно последовательно применять формулы дифференцирования.

9. Производная обратной функции

Пусть $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ - обратная для нее функция, обе дифференцируемы. Найдем производную обратной функции $\dfrac{dx}{dy} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y}$. По условию $y = f(x)$ - дифференцируема, следовательно, она непрерывна, следовательно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}; \quad \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Отсюда следует, что $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$.

Вывод. Производная обратной функции равна единице, деленной на производную данной функции.

10. Производные обратных тригонометрических функций

1. $y=\arcsin u$, где $u=u(x)$

Это сложная функция, поэтому $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$.

Поскольку функция $u=u(x)$ задана в общем виде, то $\frac{du}{dx}=u'$ вычислить нельзя.

Найдем $\frac{dy}{du}$. $y=\arcsin u$ является обратной для функции $u=\sin y$; $\frac{du}{dy}=\cos y$.

$$\frac{dy}{du}=\frac{1}{\frac{du}{dy}}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'.$$

Вывод. Производная арксинуса любого аргумента равна единице, деленной на корень квадратный из единицы минус квадрат аргумента, умноженной на производную аргумента:

$$(\arcsin u)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'.$$

2. Аналогично:

$$(\arccos u)'=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'.$$

3. $y=arctgu,$ где $u=u(x)$

Повторив рассуждения п. 1, получим: $y=arctg\,u$ является обратной для функции $u = tgy; \dfrac{du}{dy} = \sec^2 y$.

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{\frac{du}{dy}} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+u^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+u^2}u'.$$

Вывод. Производная арктангенса любого аргумента равна единице, деленной на единицу плюс квадрат аргумента, умноженной на производную аргумента.

$$(arctg\, u)' = \frac{1}{1+u^2}u'.$$

4. Аналогично: $(arcctg\, u)' = -\dfrac{1}{1+u^2}u'$.

Пример. Вычислить производную функции

$$y = \frac{arctg 3x}{\arcsin\sqrt{7-x^2}}.$$

Решение.

$$y' = \frac{(arctg 3x)' \arcsin\sqrt{7-x^2} - \left(\arcsin\sqrt{7-x^2}\right)' arctg 3x}{\arcsin^2\sqrt{7-x^2}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{1+9x^2}\cdot 3\cdot \arcsin\sqrt{7-x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-\left(7-x^2\right)}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{7-x^2}}\cdot(-2x) arctg 3x}{\arcsin^2\sqrt{7-x^2}}.$$

11. Сводка формул дифференцирования

I. Правила дифференцирования:

1. $(c)' = 0 (c - const)$
2. $(cu)' = cu'$
3. $(u+v-w)' = u'+v'-w'$
4. $(uv)' = u'v + v'u$

5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

II. Правила дифференцирования основных элементарных функций:

1. $\left(u^{\mu}\right)' = \mu\, u^{\mu-1}u'$

$1^{/}$. $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$

$1^{//}$. $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$

2. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$

3. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$

4. $(tg\ u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u' = \sec^2 u \cdot u'$

5. $(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u' = -\cos ec^2 u \cdot u'$

6. $(\sec u)' = tgu \cdot \sec u \cdot u'$

7. $(co\sec u)' = -ctgu \cdot \cos ecu \cdot u'$

8. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$

$8^{/}$. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$

9. $\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'$

$9^{/}$. $\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$

10. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

11. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

12. $(arctg\, u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

13. $\left(arcctg\,u\right)' = -\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$

Упражнения для закрепления материала п.п.1-11

В задачах 1-20, пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найти производные следующих функций:

1. $y = \ln^2 \sin\dfrac{x^3}{x+1}$

2. $u = \arcsin\sqrt[3]{1 - tg^4 x} + \cos^2 3x$

3. $u = ctg(1-bx)^2 + x^5 arcctg\, 2x$

4. $y = \cos^{2}\left(x + 3^{-x}\right)$

5. $y = \arcsin\sqrt[3]{x - ctg^2 x} + \sin\left(2^x\right)$

6. $y = \left(\ln^2 tg\dfrac{1}{x}\right)\arccos 3x$

7. $y = tg^2\dfrac{x}{1+3x^2}$

8. $y = 2^{\arcsin\left(x\sqrt{1-x}\right)}$

9. $y = \left(\sin^3 2x\right)arcctg e^{-x} + \sqrt[3]{\cos(1-x)}$

10. $y = ctg\sqrt[3]{2^{3x} - \ln x} + \sin^3 2x$

11. $y = e^{-2x}\cdot arctg^3\dfrac{1}{x}$

12. $y = \arccos^3\left(\sqrt{x} + \dfrac{x^2}{2}\right) + \dfrac{\cos 3x}{\sqrt{3x} - 1}$

13. $y = \ln\arccos\sqrt{1 - e^{-x}}$

14. $y = \cos^2\sqrt[3]{x^2 - x\sqrt{1-x}}$

15. $y = \arcsin\dfrac{2^x}{x^2} + arctg^3\dfrac{1}{x}$

16. $y = \dfrac{1}{2}\ln tg\left(\sqrt{ax} - \dfrac{x}{2}\right) + ctg\dfrac{1}{x}$

17. $y = e^{-x^2} + (1-bx)^3\sin^5 2x$

18. $y = arcctg^2\dfrac{3x+1}{\sqrt{2x-1}}$

19. $y = \cos^3 4x + \arcsin\left(x\cdot 2^x\right)$

20. $y = \cos\ln\left(2^x - \dfrac{x^2}{2}\right)$

21. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ в точке $x_0 = 1$.

22. Написать уравнение касательной к кривой $y = \left(\sqrt{2x} - 1\right)^3$ в точке $x_0 = 2$.

23. В какой точке касательная к кривой $y = -x^2 + 2x - 3$ наклонена к оси Ox под углом 45° ? Написать уравнение этой касательной.

24. В какой точке касательная к кривой $y = x^2 + 4x$ параллельна оси Ox ? Написать уравнение этой касательной.

25. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = arctgx$ в точке $x_0 = 1$.

26. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ в точке $x_0 = 2$.

Ответы:

1. $2\ln\sin\dfrac{x^3}{x+1}\cdot\dfrac{\cos\dfrac{x^3}{x+1}}{\sin\dfrac{x^3}{x+1}}\cdot\dfrac{3x^2+2x^3}{(x+1)^2}$

2. $\dfrac{-4tg^3x\cdot\sec^2x}{3\sqrt{1-\sqrt[3]{\left(1-tg^4x\right)^2}}\cdot\sqrt[3]{\left(1-tg^4x\right)^2}}-3\sin 6x$

3. $2b\cos ec^2(1-bx)^2\cdot(1-bx)+5x^4arctg2x-\dfrac{2x^5}{1+4x^2}$

4. $-2\sin 2\left(x+3^{-x}\ln 3\right)\left(1-3^{-x}\ln 3\right)$

5. $\dfrac{1+2ctg\,x\cdot\cos ec^2x}{3\sqrt{1-\sqrt[3]{\left(x-ctg^2x\right)^2}}\cdot\sqrt[3]{\left(x-ctg^2x\right)^2}}+\cos 2^x\cdot 2^x\cdot\ln 2$

6. $2\ln tg\dfrac{1}{x}\cdot\sec^2\dfrac{1}{x}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^3}\right)\cdot\arccos 3x-\dfrac{3\ln^2tg\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1-9x^2}}$

7. $2tg\,\dfrac{x}{1+3x^2}\cdot\sec^2\dfrac{1-3x^2}{\left(1+3x^2\right)^2}$

8. $2^{\arcsin\left(x\sqrt{1-x}\right)}\cdot\ln 2\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2+x^3}}\cdot\dfrac{\sqrt{1-x}+\dfrac{x}{2\sqrt{1-x}}}{x-x^3}$

9. $6\sin^2 2x\cdot\cos 2x\cdot arcctg\,e^{-x}+\dfrac{e^{-x}\sin^3 2x}{1+e^{-2x}}+\dfrac{\sin(1-x)}{3\sqrt[3]{\cos^2(1-x)}}$

10. $\dfrac{\cos ec^2\sqrt[3]{2^{3x}-\ln x}}{3\sqrt[3]{\left(2^{3x}-\ln x\right)^2}}\cdot\left(2^{3x}\cdot\ln 2\cdot 3-\dfrac{1}{x}\right)-6\sin^2 2x\cdot\cos 2x$

11. $-2e^{-2x}arctg^3\dfrac{1}{x}-\dfrac{3arctg^2\dfrac{1}{x}\cdot e^{-2x}}{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\cdot x^2}$

12. $-3\arccos^2\left(\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}\right)\cdot\frac{\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}\right)^2}}+\frac{3\sin 3x\left(1-\sqrt{3x}\right)-\frac{3\cos 3x}{2\sqrt{3x}}}{\left(\sqrt{3x}-1\right)^2}$

13. $\frac{1}{\arccos\sqrt{1-e^{-x}}}\cdot\frac{-e^{-x}}{\sqrt{e^{-x}}\cdot 2\sqrt{1-e^{-x}}}$

14. $-\sin 2\sqrt[3]{x^2-x\sqrt{1-x}}\cdot\frac{2x-\sqrt{1-x}+\frac{x}{2\sqrt{1-x}}}{3\sqrt[3]{\left(x^2-x\sqrt{1-x}\right)^2}}$

15. $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2^{2x}}{x^4}}}\cdot\frac{2^x\ln 2\cdot x^2-2x\cdot 2^x}{x^4}-3arctg^2\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdot x^2}$

16. $\frac{1}{2tg\left(\sqrt{ax}-\frac{x}{2}\right)}\sec^2\left(\sqrt{ax}-\frac{x}{2}\right)\left(\frac{a}{2\sqrt{ax}}-\frac{1}{2}\right)+\cos ec^2\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}$

17. $-2xe^{-x^2}-3b(1-bx)^2\sin^5 2x+10\sin^4 2x\cos 2x(1-bx)^3$

18. $2arcctg\frac{3x+1}{\sqrt{2x-1}}\cdot\frac{-1}{1+\frac{(3x+1)^2}{2x-1}}\cdot\frac{3\cdot\sqrt{2x-1}-\frac{3x+1}{\sqrt{2x-1}}}{2x-1}$

19. $-12\cos^2 4x\cdot\sin 4x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2\cdot 2^{2x}}}\left(2^x+x2^x\ln 2\right)$

20. $-\sin\ln\left(2^x-\frac{x^2}{2}\right)\frac{1}{2^x-\frac{x^2}{2}}\cdot\left(2^x\ln 2-x\right)$

21. $x+2y-2=0,\quad 4x-2y-3=0$

22. $3x-2y-4=0$

23. $\left(\frac{1}{2};-\frac{9}{4}\right);\quad 4x-4y-11=0$

24. $x=-2;\quad y=-4$

25. $x-2y+\frac{\pi}{2}-1=0,\quad 2x+y-\frac{\pi}{4}-2=0$

26. $3x+25y-16=0, \quad 125x-15y-244=0$

12. Дифференцирование функций, заданных параметрически

Зависимость функции y от аргумента x не всегда выражается формулой, связывающей непосредственно y и x. Если связь между ними осуществляется через посредство некоторой третьей переменной t, называемой параметром:

$$\begin{cases} x=\varphi\ (t) \\ y=\psi\ (t) \end{cases}, \quad \alpha \le t \le \beta,$$

то функция $y=y(x)$ задана параметрически. Найдем $\dfrac{dy}{dx}$.

Для этого нужно y выразить как функцию от x. Предположим, что функция $x=\varphi(t)$ имеет обратную функцию $t=F(x)$ и все три функции: $\varphi(t), \psi(t), F(x)$ - дифференцируемы.

$y=\psi(t), \quad t=F(x) \Rightarrow y=\psi(F(x))$. Следовательно, y - сложная функция

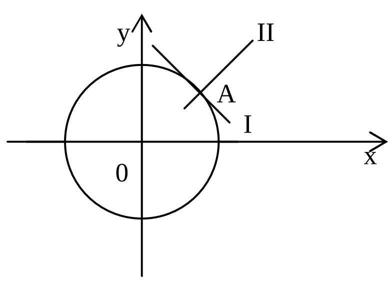
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}},$$

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}.$$

ЗАДАЧА. Составить уравнения касательной и нормали к окружности

$$\begin{cases} x=R\cos t, \\ y=R\sin t. \end{cases} \quad \text{в точке } A, \text{ где } t_0=\frac{\pi}{4}.$$

Решение.



Найдем координаты точки A:

$$x_o=R\cos\frac{\pi}{4}=\frac{R\sqrt{2}}{2}, \quad y_0=R\sin\frac{\pi}{4}=\frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

Воспользуемся уравнениями, полученными в п. 3:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{(R\sin t)'_t}{(R\cos t)'_t}=\frac{R\cos t}{-R\sin t}=-ctg\,t\ ,$$

$$y'_x(t_0)=-ctg\frac{\pi}{4}=-1\,.$$

Получим:

$y=\frac{R\sqrt{2}}{2}-1(x-\frac{R\sqrt{2}}{2})\Rightarrow x+y-R\sqrt{2}=0$ - уравнение касательной,

$y=\frac{R\sqrt{2}}{2}+1(x-\frac{R\sqrt{2}}{2})\Rightarrow x-y=0$ - уравнение нормали.

13. Дифференцирование функций, заданных неявно. Метод логарифмического дифференцирования

Пусть функция y аргумента x задана неявно уравнением $F(x,y)=0(*)$. Чтобы найти $y'=\frac{dy}{dx}$, продифференцируем обе части уравнения (*), считая x аргументом, y - функцией от x.

Проиллюстрируем это на следующих примерах.

Пример 1. $y^3+2x-e^x=y^5\ \ (*)$

$3y^2y'+2-e^x=5y^4y'$

$y'=\frac{e^x-2}{3y^2-5y^4}$

Пример 2. $y^2x+\sin xy=5\ (*)$

$2yy'x+y^2+\cos xy(y+xy')=0$,

$(2xy+x\cos xy)y'=-y^2-y\cos xy$,

$y'=\frac{-y^2-y\cos xy}{2xy+x\cos xy}$.

Пусть дана степенно-показательная функция $y=u^v$, где $u=u(x)$ и $v=v(x)$. Прологарифмируем обе части этого уравнения: $\ln y=v\ln u\ \ (*)$.

Мы получили функцию, заданную неявно. Продифференцируем ее указанным выше способом.

Покажем это на примере.

Пример 3. $y = x^{\sin x}$

$$\ln y = \sin x \cdot \ln x \quad (*)$$

$$\frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x},$$

$$y' = y\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right),$$

$$y = x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right).$$

Указанный метод называется методом логарифмического дифференцирования.

Замечание. Впрочем, существует формула для дифференцирования степенно-показательной функции. Можно воспользоваться ею для нахождения $y' = \left(u^v\right)'$.

Упражнения для закрепления материала п. п. 12 и 13.

В примерах 1-6 найти y', применив метод логарифмического дифференцирования.

1. $y = \left(1 + e^{ax}\right)^{arctg\sqrt{x}}$. 2. $y = (arcctg 2x)^{\frac{x-2}{x}}$. 3. $y = \left(\ln^3 x + 1\right)^{\arccos\sqrt{x}}$.

4. $y = (tgbx)^{1-x}$. 5. $y = (\sin 2x + 1)^{tg^3 x}$. 6. $y = (\sin 7x)^{arctg\left(x^3+1\right)}$.

В примерах 7-12 найти y' от функций, заданных неявно.

7. $\arccos^3 \frac{x}{y} - tg\left(x^2 + y^2\right) - x = 0$. 8. $arctg\frac{x}{y} - \sqrt{2xy} - y = 0$.

9. $ctg^2 y + x^2 - arctg\frac{y}{x} = 2$. 10. $\cos(y - x) + arctgxy + \frac{x}{y} = 0$.

11. $ctg(x + y) + \sqrt{xy = 1}$. 12. $ctg(xy) + arcctg(x + y) - y = 0$.

В примерах 13-18 найти $\frac{dy}{dx} = y'$ от функций, заданных параметрически.

13. $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 + t^2 + 1. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2) \\ y = \dfrac{1}{1 + t^2}. \end{cases}$ 15. $\begin{cases} x = e^{t+1}\sin t \\ y = e^{t-1}\cos t. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = t\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$ 17. $\begin{cases} x = arcctg\, t \\ y = \dfrac{1}{1+t^2}. \end{cases}$ 18. $\begin{cases} x = \arccos t \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

Ответы:

1. $(1+e^{ax})^{arctg\sqrt{x}} \cdot \left(\dfrac{\ln(1+e^{ax})}{2(1+x)\sqrt{x}} + \dfrac{ae^{ax} arctg\sqrt{x}}{1+e^{ax}} \right).$

2. $(\mathrm{arcctg} 2x)^{\frac{x-2}{x}} \cdot \left(\dfrac{2\cdot(2-x)}{x(1+4x^2)\cdot \mathrm{arcctg} 2x} + \ln \mathrm{arcctg} 2x \cdot \dfrac{2}{x^2} \right).$

3. $(\ln^3 x+1)^{\arccos\sqrt{x}} \cdot \left(\dfrac{-\ln(\ln^3 x+1)}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}} + \dfrac{3\ln^2 x \cdot \frac{1}{x} \cdot \arccos\sqrt{x}}{(\ln^3 x+1)} \right).$

4. $(\mathrm{tg}\, bx)^{1-x} \cdot \left(-\ln \mathrm{tg}\, bx + \dfrac{b\cdot(1-x)\sec^2 bx}{\mathrm{tg}\, bx} \right).$

5. $(\sin 2x+1)^{tg^3 x} \cdot \left(3tg^2 x \cdot \sec^2 x \cdot \ln(\sin 2x+1) + \dfrac{2\cos 2x}{\sin 2x+1} \cdot tg^3 x \right).$

6. $(\sin 7x)^{\mathrm{arctg}(x^3+1)} \cdot \left(\mathrm{arctg}(x^3+1)\cdot 7\mathrm{ctg} 7x + \dfrac{3x^2 \cdot \ln\sin 7x}{1+(x^3+1)^2} \right).$

7. $$\dfrac{\dfrac{cos^2(x^2+y^2)+2x}{\cos^2(x^2+y^2)} + \dfrac{3y\arccos^2\frac{x}{y}}{y^2\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}}}{\dfrac{3x\arccos^2\frac{x}{y}}{y^2\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}} - \dfrac{2y}{\cos^2(x^2+y^2)}}.$$

8. $\dfrac{y(\sqrt{2xy}-x^2-y^2)}{x\sqrt{2xy}+(x^2+y^2)(x+\sqrt{2xy})}.$

9. $\dfrac{2x(x^2+y^2)\sin^3 y + y\sin^3 y}{x\sin^3 y + 2\cos y(x^2+y^2)}.$

10. $\dfrac{-\sin(y-x) - \dfrac{y}{1+x^2y^2} - \dfrac{1}{y}}{-\sin(y-x) + \dfrac{x}{1+x^2y^2} - \dfrac{x}{y^2}}.$

11. $\dfrac{2\sqrt{xy}-y\sin^2(x+y)}{x\sin^2(x+y)-2\sqrt{xy}}$. 12. $\dfrac{-y\cos ec^2 xy-\dfrac{1}{1+(x+y)^2}}{x\cos ec^2 xy+\dfrac{1}{1+(x+y)^2}+1}$.

13. $\dfrac{3t+2}{2}$. 14. $-\dfrac{1}{1+t^2}$. 15. $\dfrac{e^{-2}(\cos t-\sin t)}{\sin t+\cos t}$. 16. $1-2t^2$.

17. $\dfrac{2t}{1+t^2}$. 18. t.

14. Производные высших порядков

Пусть дана функция $y=f(x)$, дифференцируемая в точке x. Ее производная $y'=\dfrac{dy}{dx}$ тоже есть функция. Предположим, что она дифференцируема в точке x, и продифференцируем ее. Производную от производной функции назовем производной второго порядка:

$(y')=y''$ или $(f'(x))'=f''(x)$ или $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{d^2y}{dx}$.

Очевидно, что $(y'')'=y'''$ есть производная третьего порядка.

Определение. Производная от производной $(n-1)$ порядка функции есть производная n-го порядка этой функции:

$$\left(y^{(n-1)}\right)'=y^{(n)}.$$

Учитывая, что ускорение есть скорость изменения скорости, имеем:

$$a=\vartheta'(t)=(S'(t))'=S''(t).$$

Вывод. Ускорение есть производная второго порядка от пути по времени.

Пример 1. Найти $y^{(n)}$ для функций:

а) $y=e^{4x}$; б) $y=x^n$.

Решение.

а) $y=e^{2x}$, $y'=2e^{2x}$, $y''=2^2e^{2x}$, $y'''=2^3e^{2x}$, ..., $y^{(n)}=2^ne^{2x}$;

б) $y=x^n$, $y'=nx^{n-1}$, $y''=n(n-1)x^{n-1}$, $y'''=n(n-1)(n-2)x^{n-3}$,...,
$y^n=n(n-1)(n-2)\ldots(n-(n-1))=n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1=n!$

Пример 2. Показать, что функция $y = \arcsin x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\left(1 - x^2\right)y'' = xy'$.

Решение.

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}; \quad y'' = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\right)' = -\frac{1}{1 - x^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}} \cdot (-2x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}\left(1 - x^2\right)}.$$

Подставим y' и y'' в дифференциальное уравнение:

$$\frac{\left(1 - x^2\right)x}{\sqrt{1 - x^2}\left(1 - x^2\right)} = x\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$\frac{x}{\sqrt{1 - x}} \equiv \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, \text{ что требовалось доказать.}$$

Пусть нужно найти производную второго порядка функции, заданной параметрически $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$. Как было показано выше, производная $\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'}$ есть функция от t, где t есть функция от x, $t = F(x)$. Таким образом, $\frac{dy}{dx} = \Phi(t)$,где $t = F(x)$- сложная функция. Дифференцируем $\frac{dy}{dx}$ как сложную функцию:

$$y''_{x^2} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t}{x'_t} = \frac{y''_{t^2}x'_t - x''_{t^2}y'_t}{(x'_t)^3};$$

$$\begin{cases} y''_{x^2} = \dfrac{y''_{t^2}x'_t - x''_{t^2}y'_t}{(x'_t)^3}, \\ x = \varphi(t). \end{cases}$$

Пример. Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$ функции $\begin{cases} x = \sin t \\ y = t^4. \end{cases}$

Решение. $x'_t = \cos t, \quad x''_{t^2} = -\sin t, \quad y'_t = 4t^3, \quad y''_{t^2} = 12t^2.$

$$\begin{cases} y''_{x^2} = \dfrac{12t^2\cos t + 4t^3\sin t}{\cos^3 t}, \\ x = \sin t \quad . \end{cases}$$

Упражнения для закрепления материала п.14.

В примерах 1-7 показать, что функция y удовлетворяет заданному дифференциальному уравнению.

1. $y=\sqrt{2x-x^2}$; $\quad y^3y''+1=0.$

2. $y=e^x\sin x$; $\quad y''+2y-2y'=0.$

3. $y=\sin\ln x+\cos\ln x$; $\quad xy''+xy'+y=0.$

4. $y=\dfrac{x-3}{x+4}$; $\quad 2(y')^2=(y-1)y''.$

5. $y=\cos e^x+\sin e^x$; $\quad y''-y'+ye^{2x}=0.$

6. $y=e^{4x}+2e^{-x}$; $\quad y'''-13y'+12y=0.$

7. $y=e^x+2e^{2x}$; $\quad y'''-6y''+11y'-6y=0$.

В примерах 8-14 найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ от функций, заданных параметрически.

8. $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t). \end{cases}$

9. $\begin{cases} x=at\cos t \\ y=at\sin t. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x=e^t \\ y=\arcsin t. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t \\ y=\sin t-t\cos t. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x=arctg\, t \\ y=\dfrac{1}{2}t^2. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x=e^t\cos t \\ y=t\sin t. \end{cases}$

Ответы:

8. $\dfrac{-1}{a(1-\cos t)^2}$.

9. $\dfrac{2+t^2}{a(\cos t-t\sin t)^3}$.

10. $\dfrac{t^2+t+1}{e^{2t}\left(1-t^2\right)\sqrt{1-t^2}}$.

11. $\dfrac{\sec^3 t}{t}$.

12. $\dfrac{1}{3a\cos^4 t\cdot\sin t}$.

13. $\left(1+t^2\right)\left(1+3t^2\right)$.

14. $\dfrac{-2e^{-t}}{(\cos t+\sin t)^3}$.

15. Дифференциал функции и его геометрический смысл

Мы говорим «дифференцировать», «дифференциальное исчисление», «дифференцируемая» и так далее, когда речь идет о производных функции. Такое несоответствие в терминологии объясняется тем, что первоначально в математическом анализе возникло понятие дифференциала, а понятие производной появилось и заняло главенствующее положение позже. Понятия производной и дифференциала тесно связаны между собой. Термин «дифференциал» в переводе с латинского языка означает «разность».

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некотором промежутке X, содержащем точку x_o.

Так как число $f'(x_o)$ является пределом переменной $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, то последнее можно представить в виде $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha$, где α - бесконечно малая при $\Delta x \to 0$. Умножив обе части равенства на Δx, получим

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha \cdot \Delta x.$$

Оба слагаемых в правой части есть бесконечно малые. Сравним их при условии, что $f'(x_0) \neq 0$:

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \cdot \Delta x}{f'(x_0) \cdot \Delta x} = 0$, так как $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $f'(x_0)$ - число.

Следовательно, $\alpha \cdot \Delta x$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем $f'(x_0)\Delta x$ при $\Delta x \to 0$. Таким образом, приращение функции Δy выражено в виде суммы двух слагаемых, из которых второе ничтожно мало по сравнению с первым, поэтому первое слагаемое $f'(x_0)\Delta x$ называется <u>главной линейной частью приращения функции или дифференциалом функции.</u>

Обозначение: $dy = f'(x_0)\Delta x$.

Определение. Дифференциалом функции в некоторой точке называется произведение производной в этой точке на приращение независимой переменной:

$\Delta y = dx + \alpha \cdot \Delta x$.

dy линейно зависит от Δx, в то время как Δy находится в более сложной зависимости от Δx. Вычисление dy значительно проще, чем вычисление Δy. Это обстоятельство позволяет заменять во многих случаях Δy величиной dy, что создает большое практическое удобство: $\Delta y \approx dy$.

Пусть $y = x$. Тогда $dy = dx = 1 \cdot \Delta x$.

Вывод. Дифференциал независимой переменной совпадает с ее приращением.

Подставив в формулу для dy $\Delta x = dx$, получим

$$dy = f'(x_0)dx.$$

Вывод. Дифференциал функции в точке x_0 равен производной функции в этой точке, умноженной на дифференциал аргумента.

Замечание В произвольной точке x дифференциал функции примет вид $dy = f'(x)dx$. Отсюда следует, что

$f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$, то есть производную функции можно рассматривать как отношение дифференциала функции к дифференциалу аргумента.

Задача нахождения дифференциала функции равносильна задаче нахождения производной этой функции , так как , умножив производную функции на дифференциал, мы получим дифференциал функции.

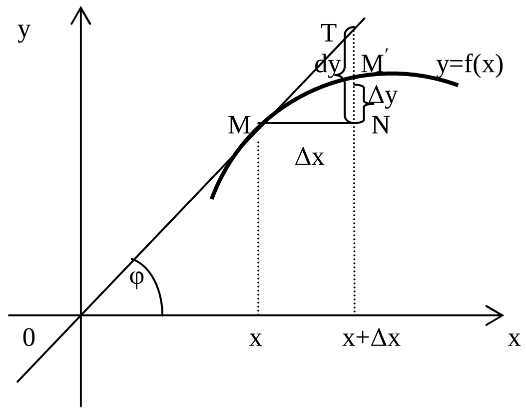
Исходя из сказанного выше, правила для отыскания дифференциалов выглядят следующим образом.

1. $d(c) = O(c - const)$.
2. $d(cu) = cdu$.
3. $d(u + v - w) = du + dv - dw$.
4. $d(uv) = vdu + udv$.
5. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$.

Докажем, например, справедливость формулы 4:

$$d(uv) = (uv)' dx = (u'v + v'u)dx = v \cdot u'dx + u \cdot v'dx = vdu + udv.$$

Рассмотрим геометрический смысл дифференциала функции $y = f(x)$.



Возьмем на кривой $y = f(x)$ точку $M(x, y)$ и проведем касательную к кривой в этой точке. Пусть она образует с осью Ox угол φ.

Дадим аргументу x приращение Δx, тогда функция получит приращение Δy.

Проведем MN параллельно Ox; $\Delta y = M'N$.

Рассмотрим ΔMTN:

$$\frac{NT}{MN} = tg\varphi \Rightarrow NT = MN \cdot tg\varphi \;; \quad MN = \Delta x = dx, \quad tg\varphi = y' \Rightarrow NT = f'(x)dx \Rightarrow dy = NT \;.$$

Вывод. С геометрической точки зрения дифференциал функции есть приращение ординаты касательной, в то время когда Δy есть приращение ординаты кривой.

Замечание. На чертеже видно, что чем меньше Δx, тем меньше dy отличается от Δy,а вблизи точки M касательная практически сливается с кривой, поэтому для приближенных вычислений принимают $\Delta y \approx dy$ и при соответствующем Δx можно достичь требуемой точности вычислений.

16. Инвариантность формы дифференциала первого порядка

а) Пусть $y = f(x)$, где x - независимая переменная

$$dy = y'_x dx, \tag{1}$$

б) Пусть $y = f(x), \quad x = \varphi(t) \Rightarrow y = f(\varphi(t))$– сложная функция, где x- промежуточный аргумент (то есть функция), t - независимый аргумент.

$dy = y'_t dt$ - по определению дифференциала функции.

На основании дифференцирования сложной функции имеем:

$$y'_t = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = y'_x \cdot x'_t \,.$$

Тогда $dy = y'_x \cdot x'_t \cdot dt$. Но $x'_t dt = dx$, поэтому

$$dy = y'_x dx \,,$$

то есть мы вернулись к прежней форме дифференциала функции формулы (1)

Это свойство дифференциала сохранять постоянную форму $dy = y'_x dx$ независимо от того, является ли x независимой переменной или функцией от независимой переменной, носит название <u>инвариантности</u> формы дифференциала, то есть неизменяемости формы дифференциала.

Пример. 1. $y = \sin x$

$dy = \cos x dx$.

2. $y = \sin\left(x^3 + e^x\right)$

$dy = \cos\left(x^3 + e^x\right)\left(3x^2 + e^x\right)dx$, но $\left(3x^2 + e^x\right)dx = d\left(x^3 + e^x\right)$, поэтому

$dy = \cos\left(x^3 + e^x\right)d\left(x^3 + e^x\right)$

3. $y = \sin\sqrt{tg \ln arcctg \cos x}$

Используя свойство инвариантности формы дифференциала, можно записать $dy = \cos\sqrt{tg \ln arcctg \cos x} \cdot d\sqrt{tg \ln arcctg \cos x}$.

В общем виде , используя обозначения для сложной функции , принятые нами ранее, имеем:

$y = \sin u,$ где $u = u(x) \Rightarrow dy = \cos u \cdot du$.

Теперь можно составить таблицу дифференциалов функций.

1. $d\left(u^{\mu}\right) = \mu\, u^{\mu^{-1}} du$.
2. $d(\sin u) = \cos u du$.
3. $d(\cos u) = -\sin u du$.
4. $d(tg\, u) = \sec^2 u du$.
5. $d(ctg\, u) = -\cos ec^2 u du$.
6. $d(\log_a u) = \dfrac{1}{u \ln a} du$.

6.′ $d(\ln u) = \dfrac{1}{u} du$.

7. $d\left(a^u\right) = a^u \ln a du$.

7.′ $d\left(e^u\right) = e^u du$.

8. $d(\arcsin u) = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$.
9. $d(\arccos u) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$.
10. $d(arctg\, u)du = \dfrac{1}{1+u^2}$.
11. $d(arcctg\, u) = -\dfrac{1}{1+u^2} du$.

Пример. Вычислить дифференциал функции $y = e^{2x+\cos x} \cdot \ln tgx$.

Решение.

$$dy = d\left(e^{2x+\cos x}\right)\ln tgx^3 + d\left(\ln tgx^3\right)e^{2x+\cos x} =$$

$$= e^{2x+\cos x}(2-\sin x)dx\ln tgx^3 + \frac{1}{tgx^3}\cdot\sec x^3\cdot 3x^2 dxe^{2x+\cos x} =$$

$$= e^{2x+\cos x}\left((2-\sin x)\ln tgx^3 + \frac{3x^2\sec^2 x^3}{tgx^3}\right)dx.$$

17. Дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x. Если dy также дифференцируем в точке x, то существует дифференциал от дифференциала, который называется дифференциалом второго порядка функции $f(x): d(dy) = d^2y$.

Аналогично определяется дифференциал $n-$ *го* порядка.

Определение. Дифференциалом $n-$*го* порядка функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала $(n-1)-$*го* порядка этой функции.

Выведем формулу для дифференциалов высших порядков:

$$d^2y = d(dy) = d(y'dx) = d(y')dx = y''dx\cdot dx = y''dx^2,$$

$$d^3y = d\left(d^2y\right) = d\left(y''dx^2\right) = d(y'')dx^2 = y'''dx\cdot dx^2 = y'''dx^3.$$

Можно показать, что

$d^n y = y^{(n)}dx^n$.

Пример. Вычислить $d^n y$ для функции $y = a^{3x}$.

Решение.

$$dy = 3a^{3x}\ln a dx$$

$$d^2y = 3^2a^{3x}\ln^2 a dx^2$$

$$d^3y = 3^3a^x\ln^3 a dx^3$$

. . . .

$$d^n y = 3^n a^x \ln^n a dx^n$$

Можно показать, что дифференциалы высших порядков не обладают инвариантностью формы дифференциала.

Упражнения для закрепления материала п. п . 15-17

В примерах 1-5 найти dy.

1. $y=\cos^3 arctg\, x$. 2. $y=\sin 3x\cdot\cos\left(5x^2+1\right)$. 3. $y=\dfrac{arctg\, x}{x^3+e^x}$.

4. $y=\sqrt{\ln x\cdot e^{3x}}$. 5. $y=\sqrt[3]{\dfrac{tgx}{\arcsin x}}$.

В примерах 6-7 найти $d^n y$.

6. $y=e^{2x+7}$. 7. $y=x^n$.

Ответы.

1. $-3\cos^2 arctg\, x\cdot\sin arctg\, x\cdot\dfrac{dx}{1+x^2}$.

4. $\dfrac{e^{3x}\left(\dfrac{1}{x}+3\ln x\right)dx}{2\sqrt{\ln x\cdot e^{3x}}}$.

2. $\left(3\cos 3x\cdot\cos\left(5x^2+1\right)-10x\sin\left(5x^2+1\right)\sin 3x\right)dx$.

5. $\dfrac{\sec^2 x\cdot\arcsin x-\dfrac{tgx}{\sqrt{1-x^2}}}{3\sqrt[3]{\left(\dfrac{tgx}{\arcsin x}\right)^2}\left(\arcsin x\right)^2}dx$

3. $\dfrac{\dfrac{x^3+e^x}{1+x^2}-arctg\, x\left(3x^2+e^x\right)}{\left(x^3+e^x\right)^2}dx$. 6. $2^n e^{2x+7}dx^n$. 7. $n!dx^n$.

Примерный вариант контрольной работы (с решением)

В примерах 1-6 найти y'.

1. $y=\arcsin\sqrt[3]{e^x x-\ln x}$.

Решение.

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt[3]{e^x\cdot x-\ln x}\right)^2}}\cdot\left(\sqrt[3]{e^x\cdot x-\ln x}\right)'=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\sqrt[3]{\left(e^x\cdot x-\ln x\right)^2}}}\cdot\frac{1}{3}\left(e^x\cdot x-\ln x\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(e^x\cdot x-\ln x\right)'=$$

$$=\frac{1}{3\sqrt{1-\sqrt[3]{\left(e^x\cdot x-\ln x\right)^2}}\cdot\sqrt[3]{\left(e^x\cdot x-\ln x\right)^2}}\cdot\left(e^x\cdot x+e^x-\frac{1}{x}\right).$$

2. $y = arctg^5\left(\sqrt{b-ax}\right) + \sin^3 4x$

Решение.

$$y' = 5arctg^4\sqrt{b-ax}\cdot\left(arctg\sqrt{b-ax}\right)' + 3\sin^2 4x\cdot(\sin 4x)' =$$
$$= 5arctg^4\sqrt{b-ax}\cdot\frac{1}{1+\left(\sqrt{b-ax}\right)^2}\cdot\left(\sqrt{b-ax}\right)' + 3\sin^2 4x\cdot\cos 4x\cdot 4 =$$
$$= 5arctg^4\sqrt{b-ax}\cdot\frac{1}{1+b-ax}\cdot\frac{1}{2\sqrt{b-ax}}\cdot(-a) + 12\sin^2 4x\cdot\cos 4x \quad .$$

3. $y = (\cos 2x)^{tg^2 x}$.

Решение.

Применим метод логарифмического дифференцирования:

$$\ln y = tg^2 x\cdot\ln\cos 2x$$
$$\frac{1}{y}y' = 2tg\,x\cdot\sec^2 x\cdot\ln\cos 2x + \frac{1}{\cos 2x}\cdot(-\sin 2x)\cdot 2tg^2 x$$
$$y' = y\left(2tg\,x\cdot\sec^2 x\cdot\ln\cos 2x - 2tg 2x\cdot tg^2 x\right)$$
$$y' = (\cos 2x)^{tg^2 x}\cdot\left(2tg\,x\cdot\sec^2 x\cdot\ln\cos 2x - 2tg 2x\cdot tg^2 x\right) \quad .$$

4. $y = 3^{ctg\frac{1}{x}} + \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ **.**

Решение.

$$y' = 3^{ctg\frac{1}{x}}\cdot\ln 3\cdot\left(ctg\frac{1}{x}\right)' + \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)' =$$
$$= 3^{ctg\frac{1}{3}}\cdot\ln 3\cdot\left(-\cos ec^2\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) - \sqrt{1+x^2}\cdot\frac{1\cdot\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x\cdot x}{1+x^2} =$$
$$= 3^{ctg\frac{1}{x}}\cdot\ln 3\cdot\frac{\cos ec^2\frac{1}{x}}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} \quad .$$

5. $y^2 - arctg(xy) + x^2 - 1 = 0$

Решение.

Функция $y = y(x)$ задана неявно.

$$2yy' - \frac{1}{1+x^2y^2}\left(y + xy'\right) + 2x = 0$$

$$y'\left(2y - \frac{x}{1+x^2y^2}\right) = \frac{y}{1+x^2y^2} - 2x$$

$$y'\left(\frac{2y+2x^2y^3-x}{1+x^2y^2}\right) = \frac{y-2x-2x^3y^2}{1+x^2y^2}$$

$$y' = \frac{y-2x-2x^3y^2}{2y+2x^2y^3-x}$$

6. $\begin{cases} x = 3e^{2t} \\ y = e^{-\frac{1}{t}} \end{cases}$

Решение.

Функция задана параметрически.

$$y'_t = e^{-\frac{1}{t}} \cdot \frac{1}{t^2} \qquad x'_t = 6e^{2t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-\frac{1}{t}} \cdot \frac{1}{t^2}}{6e^{2t}} = \frac{1}{6t^2 e^{2t+\frac{1}{t}}} \quad .$$

7. Написать уравнения касательных к кривой $y = x - x^2$ в точках ее пересечения с осью Ox.

Решение.

Найдем точки пересечения кривой с осью Ox: $x - x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1$, O(0,0); A(1,0).

$y' = 1 - 2x$

$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$ - уравнение касательной.

1. $y'(0) = 1 \qquad y = 0 + 1 \cdot x \quad \Rightarrow \quad y = x$,
2. $y'(1) = -1 \qquad y = 0 - 1(x-1) \quad \Rightarrow \quad x + y - 1 = 0$.

8. Показать, что функция $y = x + \sin 2x$ удовлетворяет уравнению $y'' + 4y = 4x$.

Решение.

$$y' = 1 + 2\cos 2x; \qquad y'' = -4\sin 2x .$$

Подставим y'' и y в уравнение:

$$-4\sin 2x + 4(x + \sin 2x) = 4x$$

$$4x \equiv 4x,$$

что и требовалось доказать.

9. $\begin{cases} x = a(\sin t - t\cos t), \\ y = a(\cos t + t\sin t). \end{cases}$ Найти $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$.

Решение.

Воспользуемся формулой

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{y''_{t^2} x'_t - x''_{t^2} y'_t}{(x'_t)^3} .$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{a(\cos t - t\sin t)at\sin t - a(\sin t + t\cos t)at\cos t}{a^3 t^3 \sin^3 t} =$$

$$= \frac{\cos t \cdot \sin t - t\sin^2 t - \sin t \cdot \cos t - t\cos^2 t}{at^2 \sin^3 t} = -\frac{1}{at\sin^3 t} .$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Фихтельгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Физматгиз, 1962. Т.1. 607с.

2. Бохан К.А., Егорова И.А., Лащенов К.В. Курс математического анализа.М.: Просвещение, 1965. Т.1 435с.

3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для ВТУЗов. М.: Наука, 1964г. Т.1. 544с.

4. Сборник задач по курсу высшей математики / Под рук. П.Е. Дюбака и Г.И. Кручковича. М.: Высш. школа, 1965. 591 с.

5.Задачник по курсу математического анализа / Под ред. Н.Я. Виленкина. М.: Просвещение, 1971. 350 с.

6. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. М.: Высш. школа, 1966. 460 с.