Министерство образования Российской Федерации
Омский государственный технический университет

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ, ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Методические указания и контрольные задания для студентов технических специальностей

Омск 2003

Составитель: Бесценная Елена Владимировна, старший преподаватель
Бесценный Игорь Павлович, доцент

Данные методические указания предназначены для студентов технических специальностей заочной формы обучения и охватывают содержание курса высшей математики, изучаемого ими во втором семестре. Рассматриваются следующие темы.

1. Дифференцирование
2. Неопределенный интеграл
3. Определенный интеграл и его приложения
4. Функции нескольких переменных.

Методические указания состоят из двух частей: практической и теоретической. В практической части приведены задачи для контрольных работ; далее идет теоретическая часть, в ней излагаются основные сведения и формулы, а также примеры их применения при решении задач по каждой из вышеуказанных тем.

Изучающим математику самостоятельно желательно сначала ознакомиться с теорией в книгах [1-3] по списку рекомендуемой литературы; затем разобрать решение примеров во второй части данных методических указаний и только после этого приступить к выполнению своего варианта контрольной работы.

Задачи для контрольных работ

Тема 1. Дифференцирование

Задача 1. Найти производную сложной функции

1. $y = 5^{\sin 2x} + \cos(\operatorname{arctg} 3x)$	2. $y = \arcsin^3\left(3e^{2x} + \sqrt{20x-1}\right)$
3. $y = 2^{x^3}\operatorname{arctg} 5x + \sqrt[5]{\cos^3\dfrac{x}{2}}$	4. $y = \operatorname{arctg}^4\dfrac{x}{4} + \dfrac{2+x}{3-2x}$
5. $y = e^{x^4}\cdot\cos 3x + \dfrac{5^x\cdot\ln 2}{\operatorname{tg} 10x}$	6. $y = \arcsin e^{\operatorname{tg} 3x} + \cos\sqrt{x}\cdot\sin\dfrac{1}{x}$
7. $y = \dfrac{10e^x}{\operatorname{tg} x^2} + e^{\operatorname{ctg} 10x}\cdot\sqrt{3}$	8. $y = 23\cos\dfrac{x}{23} + \sin 27x\cdot\operatorname{arctg} 10x$
9. $y = \dfrac{\ln x^2}{x} + \cos x^{10}\cdot\arcsin\sqrt{x}$	10. $y = \dfrac{2\sqrt{\sin 5x}}{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} 2x}} + e^{7x}\sqrt{\cos 3x}$
11. $y = \arccos^3(\lg 10x) - \dfrac{\sqrt{10x+1}}{\operatorname{arctg} 2x}$	12. $y = \log_3 2^x + \operatorname{ctg}^{10}\dfrac{2}{x} + e^{4x}$

13. $y=\ln(\operatorname{tg} 2x)+\dfrac{1}{x^2+4\operatorname{ctg} 7x}+e^{\cos x}$	14. $y=\cos\left(e^{2x}\right)+\ln^2(\arcsin(2x+3))$
15. $y=\sin^3 5x\cdot\operatorname{tg}\left(3^{2x+1}\right)+\operatorname{arctg}\sqrt{x}$	16. $y=\sin^5\left(2x^5\right)+\cos^4(\operatorname{ctg}10x)+\dfrac{\ln 3}{2x^4}$
17. $y=\sqrt{\arcsin\dfrac{1}{x^2}}+\arg\operatorname{tg}^5\left(2^{3x+1}\right)\cdot\cos\sqrt{x}$	18. $y=\dfrac{\operatorname{tg}^4 2x}{\sin^5 10x}+\ln(\cos 5x)\cdot\arg\operatorname{tg}\dfrac{1}{x}$
19. $y=e^{\operatorname{ctg}2x}+\ln\left(\sqrt{\arccos e^x}\right)\cdot\dfrac{1}{e^x+3}$	20. $y=\dfrac{\sqrt{2-3x}}{\sqrt{2-7x}}+\dfrac{\ln\left(10x^2+\sqrt{3x}\right)}{e^{10x^2}\ln 5}$
21. $y=e^{-2003x}+\operatorname{ctg}\dfrac{10x}{3+2^x}+\ln^3 3x$	22. $y=\dfrac{5\ln 3x}{3\ln 5x}+\dfrac{\arccos^4 e^{2x}}{x^3}+\cos\dfrac{2\pi}{3}$
23. $y=\dfrac{\operatorname{tg}8x}{8\sin^8 x}+\dfrac{x^4}{\log_3 2x}+\sqrt{\operatorname{tg}^5\left(1-x^2\right)}$	24. $y=3^{\operatorname{ctg}x}\cdot\arcsin 2^x+\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}\cdot\cos^{10}\dfrac{1}{2x^4}$
25. $\arccos^{40}\left(3\cos^2 x+\sqrt{\sin x-x}\right)$	26. $y=3^{\ln 5x}\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}-\ln^5\dfrac{1}{\sqrt{x}}\cdot\ln 7$
27. $y=2^{3^{x^2}}+\dfrac{\ln(\operatorname{tg}2x)}{\ln(\sin 2x)}+\operatorname{tg}^5 x\cdot\ln 2\cdot\cos\dfrac{\pi}{2}$	28. $y=\cos\dfrac{\pi x}{2}\cdot\sin\dfrac{2}{\pi x}+\ln\left(3^{1-x}\right)+\ln 10$
29. $y=\cos^2(\ln 3x)+\dfrac{2\sqrt[3]{x^2}+x^4}{\sqrt[5]{x}}+\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}$	30. $y=\sqrt[3]{1+2x^7+\cos 3x}\cdot\ln 2x-\cos\dfrac{\pi}{6}$

Задача 2. Найти производную функции, используя предварительное логарифмирование

1.	а) $y=\sqrt{x}^{\sqrt[3]{x}}$	б) $y=\dfrac{2^x\sqrt[3]{1-2x}\,(1-x)^2}{\left(5+x^3\right)^4(3-7x)}$
2.	а) $y=x^{x^2}$	б) $y=12^x\cos 5x\,(1-2x)^3\,(1-x)^4$
3.	а) $y=\left(\sqrt[3]{x}\right)^{\sin x}$	б) $y=\dfrac{(1-x)^5\,(2-3x)^4\,\left(1+x^{10}\right)}{(5-3x)^5}$

4. а) $y=(\operatorname{arctg} x)^{\sqrt[4]{x}}$	б) $y=\dfrac{x^{10}\cdot(1+x)^{20}\ (1-x)^{30}}{\sqrt{1-2x}}$
5. а) $y=(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{x}}$	б) $y=\dfrac{x^{15}(1-3x)^{10}\ (2-5x)^{5}}{\cos^{10} x}$
6. а) $y=\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{\sqrt[5]{x}}$	б) $y=\dfrac{112^{x}\cdot\cos^{3}5x\cdot(1-4x)^{20}}{\sqrt[3]{\left(1-7x^{2}\right)^{5}}}$
7. а) $y=(\cos 5x)^{\operatorname{tg} 3x}$	б) $y=\dfrac{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x+1}\ \sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{x+3}}$
8. а) $y=(\operatorname{arctg} x)^{\arcsin x}$	б) $y=\dfrac{\sqrt{x}\cdot(1-x)^{10}\ (3+2x)^{5}}{(1-7x)^{7}\ \sqrt[3]{3-x}}$
9. а) $y=\left(\sqrt[5]{x}\right)^{x^3}$	б) $y=\dfrac{\sqrt[3]{3x}\ (2+2x)^{50}\ (x-1)^{7}}{(3x+2)^{3}\ (7-3x)^{5}}$
10. а) $y=\left(x^2\right)^{\operatorname{ctg} x}$	б) $y=\dfrac{(x-1)^{10}}{(5x+7)^{7}\ (2x-1)^{8}\ (3x+2)^{9}}$
11. а) $y=(\arcsin x)^{\sin x}$	б) $y=\dfrac{\cos 5x\cdot\operatorname{tg} 2x}{(\operatorname{arctg} 3x)^{5}(\arccos x)^{7}}$
12.а) $y=(\operatorname{tg} 2x)^{2^x}$	б) $y=\dfrac{(3x-2)^{3}\ (3x+7)^{11}\ (x-2)^{12}}{(5x+1)^{5}\ (x-1)^{4}}$
13. а) $y=(\cos 3x)^{x^{13}}$	б) $y=\dfrac{\cos 7x\ (\operatorname{tg} 2x)^{3}}{\sqrt[3]{x+2}\ \sqrt[5]{(3x-1)^{4}}}$
14. а) $y=(\operatorname{arcctg} x)^{\sqrt[7]{2x+1}}$	б) $y=\dfrac{(\cos 10x)^{3}\ (\operatorname{arctg} 5x)^{10}}{\left(2^{x}+1\right)(\log_{2} x)^{11}}$

15. а) $y=\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\sqrt[3]{x^2}}$	б) $y=\frac{\left(x^2+1\right)^2\left(x^3+2\right)^3\left(x^4+3\right)^4}{\left(x^5-1\right)^5\left(x^6-2\right)^6}$
16. а) $y=\left(\sqrt{x}\right)^{\arccos x}$	б) $y=\frac{(3x+2)^7\,(2x-4)^8}{\left(3^x+2\right)^3\left(5^x-1\right)^4}$
17. а) $y=(\ln x)^{2^x}$	б) $y=\frac{\sqrt[3]{(1-2x)}\,\sqrt[4]{(1-3x)^3}}{(5x+1)^5\,(6x+2)^7}$
18. а) $y=\left(x^3\right)^{x^2}$	б) $y=\frac{\sqrt[6]{x-1}\,\sqrt[4]{2x+2}}{\left(x^4+1\right)^5\left(x^5+2\right)^{10}}$
19. а) $y=\left(\sqrt[4]{x}\right)^{\sin x}$	б) $y=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^3\left(\sqrt[3]{x}-2\right)}{(x-1)^{15}\,(x+2)^{12}}$
20. а) $y=\left(\sqrt[4]{x}\right)^{\sin x}$	б) $y=\frac{\left(5^x-1\right)^4(3x-1)^{20}}{(3x+2)^{19}\,(5+2x)^{16}}$
21. а) $y=(\mathrm{tg}\,5x)^{\mathrm{ctg}\,x}$	б) $y=\frac{\sqrt{\cos 3x}\,\sqrt[3]{\arccos x}}{\sqrt[5]{(x+3)^7}\,\sqrt[6]{(x-4)^9}}$
22. а) $y=\left(\sqrt[5]{x}\right)^{\arccos x}$	б) $y=\frac{x^2(x+1)^3\,(x-1)^4}{(x-2)^5}$
23. а) $y=\left(10^x+1\right)^{3x}$	б) $y=\frac{(7x-3)^6\,(3x-7)^8}{\left(\sqrt{x}+10\right)^{11}\left(\sqrt[4]{x}+11\right)^{13}}$
24. а) $y=\left(x^4\right)^{\sqrt{2x}}$	б) $y=\frac{(\mathrm{ctg}\,7x)^3\,(\arccos 3x)^4}{\left(e^x+1\right)^2\left(e^{-1}+2\right)^{-3}}$
25. а) $y=\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^{\mathrm{ctg}\,2x}$	б) $y=\frac{\left(7^x-1\right)^5\,(3x+2)^4}{\sqrt[10]{5x-1}\,\sqrt[3]{(x-2)^4}}$

26. а) $y=\left(\frac{1}{x}\right)^{x^{-3}}$	б) $y=\frac{\left(x^2-3\right)^4\left(x^3-1\right)^5}{\left(x^4+4\right)^6\left(x^5+5\right)^7}$
27. а) $y=(\arcsin)^{\mathrm{tg}\,5x}$	б) $y=\sin^5 x\left(\arcsin\sqrt{x}\right)^4\log_2^5 x$
28. а) $y=(\arccos x)^{x^2}$	б) $y=\frac{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[7]{x-1}\cdot\sqrt[10]{x-2}}{\sqrt[3]{2-3x}\ \sqrt[4]{5-4x}}$
29.а) $y=(\sin 3x)^{x^4}$	б) $y=\frac{\sqrt[3]{x^2}\ \sqrt[4]{x-2x^2}\ (x-4)^3}{(3x-7)^4\ (29x-29)^7}$
30. а) $y=(\arccos\ x)^{\sqrt[3]{x^2}}$	б) $y=\frac{(\cos 2x)^5\ (\mathrm{tg}\,2x)^7}{\sin^2 5x\ \ \cos^4 7x}$

Задача 3. Исследовать данные функции на экстремум методами дифференциального исчисления и построить их графики. При исследовании функции следует найти интервалы ее возрастания и убывания и точки экстремума, интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба, асимптоты графика функции.

1. $y=x^2\ln x$	2. $y=\frac{x^3}{2\,(x+1)^2}$	3. $y=\frac{x^2}{x-1}$
4. $y=2x+\mathrm{arctg}\ x$	5. $y=3\sqrt[3]{x}-x$	6. $y=\frac{3}{2}x\ln\left(e-\frac{1}{3x}\right)$
7. $y=\frac{3-2x}{(x-2)^3}$	8. $y=x\,e^{-x/2}$	9. $y=\frac{2x}{\ln x}$
10. $y=(x-1)\,e^{1-x}$	11. $y=\frac{1}{4}\left(x^3-8\right)$	12. $y=\ln\frac{x}{x-1}$
13. $y=\left(2+x^2\right)e^{-x^2}$	14. $y=x^2\ e^{-x^2}$	15. $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$
16. $y=x\sqrt{1-x}$	17. $y=\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}$	18. $y=x^2\ e^{1/x}$
19. $y=(2x-1)\,e^{2/x}$	20. $y=\frac{e^x}{x}$	21. $y=e^{3x-x^2}$

22. $y=\frac{x^2}{x^2-1}$	23. $y=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$	24. $y=x+e^{-x}$
25. $y=x\,\mathrm{arctg}\,x$	26. $y=x^2e^x$	27. $y=\frac{x^3}{x^2-4}$
28. $y=\frac{3x}{x^2+1}$	29. $y=\frac{1}{x}+x^2$	30. $y=4x^2+\frac{1}{x}$

Задача 4. Найти уравнения касательной и нормали к кривой; построить кривые и касательные с нормалями

1. $y^2=4-x$ в точках $x_1=4$ и $x_2=3$	2. $y^2=x^3$ в точках $x_1=1$ и $x_2=0$
3. $y=\frac{x^3}{3}$ в точке $x_0=1$	4. $y=\frac{4}{x}$ в точках $x_1=1,\ x_2=-4$
5. $y=x^2+2$ в точке $x=-1$	6. $2y=x^2$ в точке $x_0=-2$
7. $2y=8-x^2$ в точке $x_0=2$	8. $y=x^2-5x+4$ в точке $x_0=-1$
9. $y=x^3+2x^2-4x-3$ в точке $x_0=-2$	10. $y=\sqrt{x}$ в точке $x_0=4$
11. $y=\mathrm{tg}\,3x$ в точке $x_0=\pi$	12. $y=\ln x$ в точке $x_0=e$
13. $y=e^{1-x^2}$ в точке $x_0=-1$	14. $y^2=2x^3$ в точке $x_0=1$
15. $y=\cos 5x$ в точке $x_0=\pi/15$	16. $y=\sin 3x$ в точке $x_0=\pi/12$
17. $y=-\sqrt{x}+2$ в точке $x_0=2$	18. $y=\mathrm{tg}\,2x$ в точке $x_0=\pi/8$
19. $y=\mathrm{ctg}\,3x$ в точке $x_0=\pi/9$	20. $y=e^{2x}$ в точке $x_0=0$
21. $y=\ln(1+x)$ в точке $x=0$	22. $y=2^{x+1}$ в точке $x_0=2$
23. $y=3^x$ в точке $x_0=-1$	24. $y=\ln(x^2-1)$ в точке $x_0=\sqrt{2}$
25. $y=5^{x-2}$ в точке $x_0=3$	26. $y=\arcsin 2x$ в точке $x_0=\frac{\sqrt{3}}{4}$
27. $y=4x-x^2$ в точках пересечения с осью OX.	
28. $y=9-x^2$ в точках пересечения с осью Ox	

29. $y = x - x^2$ в точке пересечения с осью Оу и $x = 2$
30. $y = 1/x^2$ в точках $x = \pm\frac{1}{2}$

Задача 5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

1. $y = 4x^3 + 9x^2 + 6x - 1$ на отрезке $[-2;\ -0{,}75]$	2. $y = \dfrac{x^2}{x-2}$ на отрезке $[0;\ 5]$
3. $y = x^2\left(1 - x\sqrt{x}\right)$ на отрезке $[0;\ 1]$	4. $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ на отрезке $[-1; 0]$
5. $y = x - 2\ln x$ на отрезке $[1;\ 3]$	6. $y = \dfrac{x}{\ln x}$ на отрезке $[2;\ 3]$
7. $y = \dfrac{3 - x^2}{x + 2}$ на отрезке $[-4;\ -2{,}5]$	8. $y = x\ln x$ на отрезке $[1/4;\ e]$
9. $y = 2\sin x + \cos 2x$ на отрезке $[0;\ \pi]$	10. $y = x^2e^{-x}$ на отрезке $[0;\ 4]$
11. $y = x - 2\sin^2 x$ на отрезке $[\pi/6;\ \pi]$	12. $y = \sqrt[3]{x - 1}$ на отрезке $[-7;\ 2]$
13. $y = (3x + 6)\, e^{\frac{x}{3}}$ на отрезке $[-6;\ -4]$	14. $y = \dfrac{2x + 3}{3x - 5}$ на отрезке $[1;\ 4]$
15. $y = x^4 - 2x^2 + 3$ на отрезке $[-3;\ 3]$	16. $y = x + 2\sqrt{-x}$ на отрезке $[-4;\ 0]$
17. $y = x\sqrt[3]{(x - 2)}$ на отрезке $[1;\ 3]$	18. $y = 12x - x^3$ на отрезке $[-1;\ 3]$
19. $y = \left(3 - \sqrt{x}\right)x$ на отрезке $[3;\ 5]$	20. $y = x\,e^{3x}$ на отрезке $[0;\ 2e]$
21. $y = x + x\sqrt{x}$ на отрезке $[0;\ 3]$	22. $y = \sqrt{4 - x^2}$ на отрезке $[-1;\ 3]$
23. $y = (2 - x)(x + 1)^2$ на отрезке $[-1;\ 2]$	24. $y = 2\sin\dfrac{x}{2}$ на отрезке $[-\pi;\ \pi]$
25. $y = x - 2\sin x$ на отрезке $[0;\ 2\pi]$	

26. $y=\dfrac{16-x^2}{16+x^2}$ на отрезке $[-4;\ 5]$
27. $y=x^4+2x^2-3$ на отрезке $[0;\ 2]$
28. $y=x^3-3x^2-24x+72$ на отрезке $[-1;\ 5]$
29. $y=3\sqrt[3]{x^2}-6\sqrt[3]{x}+4x-8$ на отрезке $[-1;\ 8]$
30. $y=x^2-2x\sqrt{x}+x-4$ на отрезке $[0;\ 4]$

Задача 6. Вычислить приближенное значение с помощью дифференциала функции

1. $\arcsin 0{,}94$	2. $\mathrm{arctg}\ 0{,}95$	3. $\mathrm{tg}\ 44^0$	4. $\sin 29^0$
5. $\cos 59^0$	6. $(1{,}02)^5$	7. $\sqrt[4]{81{,}2}$	8. $\sqrt[3]{8{,}03}$
9. $\ln 0{,}89$	10. $\cos 31^0$	11. $\sqrt[3]{27{,}31}$	12. $\sqrt[5]{31{,}92}$
13. $\sqrt[4]{16{,}23}$	14. $\ln 1{,}01$	15. $\arccos 0{,}91$	16. $(0{,}98)^3$
17. $(1{,}03)^4$	18. $\cos 89^0$	19. $\cos 136^0$	20. $\sin 119^0$
21. $\ln 0{,}93$	22. $\mathrm{arcctg}\ 0{,}96$	23. $\sqrt{3{,}99}$	24. $(1{,}02)^{-1}$
25. $(0{,}99)^{-2}$	26. $\mathrm{ctg}\ 46^0$	27. $(3\cos 61^0)/2$	28. $(1{,}02)^5$
29. $\sqrt[3]{26{,}91}$	30. $\sqrt[5]{1{,}28}$		

Задача 7. Найти производную неявно заданной функции

1. $x^3y+\mathrm{arctg}\dfrac{x}{y}=0$	2. $\mathrm{arcctg}\dfrac{y}{x}+x^2y^2=0$
3. $\dfrac{x}{y}+\cos\dfrac{y}{x}=0$	4. $y\cdot e^x+2x^3y^2+\dfrac{1}{x}=0$

5. $x\ln y + 3x^2 - \frac{y}{\sqrt{\pi}} = 0$	6. $\frac{x^2}{\pi} + \frac{3y^2}{\sqrt{2}} = 0$
7. $a\arccos 2x + y\ln y = 0$	8. $\arcsin\frac{x}{2y} + 2\,\mathrm{tg}3x = 0$
9. $\frac{2\sqrt{3xy}}{\sqrt[4]{\pi^2}} + \sin(xy) = 0$	10. $\mathrm{arcctg}\,(3x + 2y) + \frac{\sqrt{3y}}{x^2} = 0$
11. $x^5y^{10} + 2x + y\cos x = 0$	12. $e^{-\frac{x}{y}} + \ln(xy) = 0$
13. $\frac{1}{x^3} + y\cos 3x - \frac{1}{y} = 0$	14. $\sqrt{2 - 3xy} + 3\mathrm{tg}\sqrt{y} = 0$
15. $x^5\sqrt[4]{y^3} + 2x\cos y = 0$	16. $\frac{2}{3\pi y} + \frac{3}{2x} + x^4y = 0$
17. $\frac{3e}{\ln(xy)} + \frac{x}{y^2} - 2 = 0$	18. $(\pi - x - y)^2 + \frac{3}{xy} = 0$
19. $\frac{1}{x + y} + 2\,\mathrm{ctg}(xy) = 0$	20. $\frac{3x - 2}{2y + 1} + \mathrm{arctg}\,x = 0$
21. $y\sin^2 3x + \frac{1}{\cos y} = 0$	22. $\frac{1}{\mathrm{tg}\,2x} - \frac{y}{\cos x} = 10$
23. $\mathrm{ctg}\frac{2}{y^2} + 3x\sqrt[10]{y} = 0$	24. $\cos\sqrt{xy} + \arcsin(x + y) = 0$
25. $\mathrm{tg}(2x - 3y) + \frac{\sqrt{x}}{y} = 0$	26. $\mathrm{ctg}(x^3y^2) + \frac{1}{-y + 3x} = 0$
27. $xy^2 + \sin xy^3 - \pi = 0$	28. $2(x^2 + y^2) + \frac{\sqrt{\pi y}}{3x + 2y} = 0$
29. $\sqrt[10]{x - 4y} + \frac{\sin x}{\cos y} = 0$	30. $\frac{\mathrm{tg}\,x}{\mathrm{ctg}\,y} - e^x\ln y = 0$

Задача 8. Для параметрически заданной функции найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$

1. $\begin{cases} x = 5\cos^3 t \\ y = 5\sin^3 t \end{cases}$	2. $\begin{cases} x = \ln 2t \\ y = \sin 3t \end{cases}$	3. $\begin{cases} x = \cos\frac{t}{2} \\ y = \ln 5t \end{cases}$
4. $\begin{cases} x = \sqrt{2t} \\ y = \sqrt[3]{3t} \end{cases}$	5. $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$	6. $\begin{cases} x = e^t \\ y = \arccos t \end{cases}$
7. $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = e^{3t+1} \end{cases}$	8. $\begin{cases} x = \frac{1}{t+1} \\ y = \frac{t}{t+1} \end{cases}$	9. $\begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3} \\ y = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$
10. $\begin{cases} x = \ln 2t \\ y = \frac{1}{t} \end{cases}$	11. $\begin{matrix} x = e^{5t} \\ y = e^{4t} \end{matrix}$	12. $\begin{cases} x = 3\sin^2 t \\ y = 5\cos t \end{cases}$
13. $\begin{cases} x = 5t^2 \\ y = \frac{t^3}{3} - 2t \end{cases}$	14. $\begin{cases} x = 2\cos 3t \\ y = \frac{1}{t^2} \end{cases}$	15. $\begin{cases} x = 1/\sqrt{t} \\ y = 1/\sqrt[3]{t} \end{cases}$
16. $\begin{cases} x = t^2 - 3t + 1 \\ y = 5t^3 + 7t^2 \end{cases}$	17. $\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = \arcsin 2t \end{cases}$	18. $\begin{cases} x = \arccos\frac{1}{t} \\ y = \arcsin t \end{cases}$
19. $\begin{cases} x = \frac{2t^2}{1+t^3} \\ y = \frac{t-1}{1+t^3} \end{cases}$	20. $\begin{cases} x = \cos 3t + \sin 2t \\ y = \cos 2t - \sin 3t \end{cases}$	21. $\begin{cases} x = \mathrm{arctg}\, t \\ y = t + \frac{1}{t} \end{cases}$
22. $\begin{cases} x = \arccos t \\ y = \sqrt{t} + t^3 \end{cases}$	23. $\begin{cases} x = t^4 - 2t^2 + 3 \\ y = t - 2t + 3 \end{cases}$	24. $\begin{cases} x = \cos^2 5t \\ y = \sin^3 (2-t) \end{cases}$

25. $\begin{cases} x = 1 - t^2 + t^3 \\ y = t^4 - t^2 + 1 \end{cases}$	26. $\begin{cases} x = \sqrt{t} + \sqrt[3]{t} \\ y = 2t^2 + 3t \end{cases}$	27. $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \ln t + e^t \end{cases}$
28. $\begin{cases} x = \mathrm{arctg}\ 2t \\ y = \ln \dfrac{t}{t^2+1} \end{cases}$	29. $\begin{cases} x = t^3 - 2t \\ y = e^t + t^2 \end{cases}$	30. $\begin{cases} x = \cos 5t - \sin 10t \\ y = \mathrm{tg}\ 2t + \mathrm{tg}\ t \end{cases}$

Задача 9. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя

1. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{2}\sin x}{\pi - 4x}$ б) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$	2. а) $\lim\limits_{x\to 1} (x-1)\,\mathrm{ctg}\,\pi(x-1)$ б) $\lim\limits_{x\to 0} (\arcsin x)^{\mathrm{tg}\,x}$	3. а) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\ln(1-x)}$ б) $\lim\limits_{x\to 0} (\sin)^x$
4. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{\arcsin 2x}$ б) $\lim\limits_{x\to 0} (\mathrm{tg}\,x)^{\arcsin x}$	5. а) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\pi - 2\,\mathrm{arctg}\,x}{e^{2/x}-1}$ б) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\mathrm{tg}\,x}$	6. а) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{4}}{\sqrt{x}-\sqrt{4}}$ б) $\lim\limits_{x\to 0} (\mathrm{tg}\,x)^x$
7. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-4x-1}{\sin^2 6x}$ б) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$	8. а) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{x^3-5x^2+7x-3}$ б) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$	9. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{1+4\ln\sin x}$ б) $\lim\limits_{x\to 0} (e^x+x)^{\frac{1}{x}}$
10. а) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\cos x \cdot \ln(x-2)}{\ln(e^x-e^2)}$ б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\mathrm{tg}\,x)^{2x-\pi}$	11. а) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(1-x)+\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}}{\mathrm{ctg}\,\pi x}$ б) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 2x)^{3/x^2}$	12. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x-\mathrm{tg}\,x}$ б) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$

13. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{ctg}x-1}{\sin 4x}$ б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+2^x\right)^{1/x}$	14. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}\cos x-\sqrt{2}}{4x-\pi}$ б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+2^x\right)^{1/x}$	15. а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$ б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)^{\cos x}$
16. а) $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{tg}2x)^{\sin 5x}$	17. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-2^x}{\ln\left(1-x^2\right)}$ б) $\lim\limits_{x\to 0+0}(-x+1)^{\ln x}$	18. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sqrt{1+x^2}}{\arcsin 2x}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\right)^{\sin 3x}$
19. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-3^x}{1-2^x}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{3x}\right)^{\arcsin x}$	20. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{3x}-\dfrac{1}{\sin 4x}\right)$ б) $\lim\limits_{x\to 0+0}(1+x)^{\ln x}$	21. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{3\operatorname{tg}x}$ б) $\lim\limits_{x\to 0+0}(1+\sin 2x)^{\ln x}$
22. а) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{1-\dfrac{1}{\cos x}}{1+\operatorname{tg}x}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin 3x)^{x^2}$	23. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+3^x}{x-2^x}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 2x+x^2\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$	24. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}3^{-x}\ln x$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{2x}+\sin x\right)^{\frac{1}{x}}$
25. а) $\lim\limits_{x\to 0+0}\sin 2x\cdot\ln\sin x$ б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{2}{2x-\pi}}$	26. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+2x)}{5^x}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\arcsin 2x)^{\frac{1}{x}}$	27. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}5x}{\ln\cos 2x}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin^2 x\right)^{1/2x^2}$
28. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}3x-x^2}{2\cos 2x-2^{x+1}}$ а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}3x-x^2}{2\cos 2x-2^{x+1}}$	29. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x+\sin x-1}{\operatorname{tg}x+x}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\sin 2x)^{\frac{3}{x}}$	30. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x+x^2}{\arcsin x-x^2}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty 0}4^{-x}\ln x$

Тема 2. Неопределенный интеграл

Задача 1. Вычислить неопределенные интегралы

Вари- ант	Задания	Вари- ант	Задания
1	2	3	4
1	1. $\int \frac{3x^5}{\left(1-4x^6\right)^3}\,dx$ 2. $\int \frac{\arccos^{3/2} x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 3. $\int x^3 \ln x\,dx$ 4. $\int \left(3-x^2\right)\cos 2x\,dx$ 5. $\int e^{5x}\sin 2x\,dx$ 6. $\int \frac{dx}{(x-2)(x+1)(x-3)}$ 7. $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)(x-1)}$ 8. $\int \sin 3x\cos 2x\,dx$ 9. $\int \frac{dx}{2+3\cos 2x}$ 10. $\int \frac{dx}{5\cos^2 x+3\sin^2 x}$ 11. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$ 12. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$	**2**	1. $\int \sqrt[3]{2x+1}\,dx$ 2. $\int e^{-2x^3}x^2\,dx$ 3. $\int x^2e^{-x}\,dx$ 4. $\int \arcsin\sqrt{1-4x^2}\,dx$ 5. $\int e^{2x}\sin 7x\,dx$ 6. $\int \frac{x^x-2x^2+6}{(x-1)^x\left(x^2+2x+1\right)}\,dx$ 7. $\int \frac{x^2\,dx}{(x-1)\left(x^2+2\right)}$ 8. $\int \cos 5x\cos 9x\,dx$ 9. $\int \frac{dx}{1-3\sin x}$ 10. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$ 11. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}\right)}$ 12. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+16}}$
3	1. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^3 2x}\,dx$ 2. $\int \frac{\sqrt[7]{\operatorname{arctg} x}\,dx}{1+x^2}$ 3. $\int x^x \sin x\,dx$	**4**	1. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arccos^3 x}$ 2. $\int \frac{\sin x}{5-4\cos x}\,dx$ 3. $\int x^3\cos x^2\,dx$

1	2	3	4
3	4. $\int \arccos \sqrt{1-3x^2}\, dx$ 5. $\int e^{\frac{x}{2}} \cos 4x\, dx$ 6. $\int \frac{5x^2+4x+1}{(x+1)(x-1)(x+2)}\, dx$ 7. $\int \frac{2x+1}{(x^2+3)(x-1)}\, dx$ 8. $\int \sin 2x \sin 8x\, dx$ 9. $\int \frac{dx}{3+\cos x+\sin x}$ 10. $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$ 11. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{3x+1}-1}$ 12. $\int \frac{\sqrt{16+x^2}}{x}\, dx$	**4**	4. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx$ 5. $\int \cos 3x\, e^{10x}\, dx$ 6. $\int \frac{x+3}{(x-1)(x-4)(x+1)}\, dx$ 7. $\int \frac{x^6\, dx}{x^3-1}$ 8. $\int \sin 3x \cos 4x\, dx$ 9. $\int \frac{dx}{\sin x-\cos x+3}$ 10. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\, dx$ 11. $\int \frac{\sqrt[3]{x}\, dx}{1-\sqrt{x}}$ 12. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\, dx$
5	1. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^2 x}\, dx}{1+x^2}\, dx$ 2. $\int \ln(\sin x) \operatorname{ctg} x\, dx$ 3. $\int x^2 e^{-3x}\, dx$ 4. $\int (3x+2)\cos x\, dx$ 5. $\int e^{-x} \sin 3x\, dx$ 6. $\int \frac{x+3}{(x-1)^2 (x+2)}\, dx$ 7. $\int \frac{x^4\, dx}{x^3+1}$ 8. $\int \cos 8x \sin 7x\, dx$ 9. $\int \frac{dx}{4+3\cos x}$	**6**	1. $\int e^{-3x^5} x^4\, dx$ 2. $\int \frac{\sqrt[5]{\ln x}\, dx}{x}$ 3. $\int x \cos(1-2x)\, dx$ 4. $\int x^2 e^{3x}\, dx$ 5. $\int e^{-x} \sin 5x\, dx$ 6. $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3}\, dx$ 7. $\int \frac{2x+5}{(x^2+4)(x-1)}\, dx$ 8. $\int \cos 10x \cos 3x\, dx$ 9. $\int \frac{dx}{7-3\cos x+4\sin x}$

1	2	3	4
5	10. $\int \frac{dx}{5\sin^2 x + 4\cos^2 x}$ 11. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3+x} - 4}$ 12. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 4}}$	**6**	10. $\int tg^4 x\,dx$ 11. $\int \frac{\sqrt{x+2}}{1+\sqrt[3]{x+2}}\,dx$ 12. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx$
7	1. $\int 2^{4-t^3}\ t^2\,dt$ 2. $\int \frac{ctg^4 2x + 1}{\sin^2 2x}\,dx$ 3. $\int (x-1)\sin 5x\,dx$ 4. $\int x^3\ e^{-x}\,dx$ 5. $\int e^{4x}\ \cos 7x\,dx$ 6. $\int \frac{3-4x^2}{(x-1)(x+2)^2}\,dx$ 7. $\int \frac{x^4\,dx}{(x^2+4)(x-1)}$ 8. $\int \sin 5x\ \cos 16x\,dx$ 9. $\int \frac{dx}{\cos x - 2}$ 10. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,dx$ 11. $\int \frac{\sqrt[6]{x+2} - 1}{\sqrt{x+2} - 1}\,dx$ 12. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 9}}$	**8**	1. $\int \frac{x - \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ 2. $\int 3x\,\sqrt[3]{1-4x^2}\,dx$ 3. $\int x^2\,arctg\,3x\,dx$ 4. $\int x \cdot 2^{1-3x}\,dx$ 5. $\int e^{5x}\ \cos 4x\,dx$ 6. $\int \frac{2x^2 + x - 1}{(x+3)(x-1)(x+1)}\,dx$ 7. $\int \frac{x^5\,dx}{(x^2+1)(x+3)}$ 8. $\int \sin x\ \cos 7x\,dx$ 9. $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x + 4}$ 10. $\int \frac{dx}{\cos^8 x}$ 11. $\int \frac{\sqrt{1-3x} + 1}{x}\,dx$ 12. $\int \frac{dx}{x\sqrt{9+x^2}}$
9	1. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{(1-4x^4)^5}}$ 2. $\int \frac{x + \arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$ 3. $\int x\ \arcsin 3x\,dx$ 4. $\int \left(\frac{1}{3}\right)^{-x} (2x-1)\,dx$	**10**	1. $\int \frac{\cos x}{\sqrt[5]{\sin^3 x}}\,dx$ 2. $\int \ln(\cos x)\,tg\,x\,dx$ 3. $\int x^4\ \ln x\,dx$ 4. $\int (1-x)^2\ \cos x\,dx$

1	2	3	4
9	5. $\int e^{7x}\sin 4x\,dx$ 6. $\int \frac{3x^2-4x+5}{(x-1)(x+2)(x+1)}\,dx$ 7. $\int \frac{x^4\,dx}{(x^2+4x+10)(x+1)}$ 8. $\int \cos x\sin\frac{x}{4}\,dx$ 9. $\int \frac{dx}{4\sin x+\cos x+3}$ 10. $\int \frac{dx}{\sin^2 2x\cos^2 2x}$ 11. $\int \frac{\sqrt{x-1}}{2+\sqrt[3]{x-1}}\,dx$ 12. $\int \sqrt{5-x^2}\,dx$	**10**	5. $\int e^{5x}\sin 8x\,dx$ 6. $\int \frac{x^2+4x+1}{(x-1)(x+3)(x-2)}\,dx$ 7. $\int \frac{dx}{(x^2+4)(1-x^2)}$ 8. $\int \sin 3x\sin 17x\,dx$ 9. $\int \frac{dx}{1-6\sin 2x+\cos 2x}$ 10. $\int \cos^5 2x\,dx$ 11. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$ 12. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+64}}$
11	1. $\int \frac{\arcsin^2 x-4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ 2. $\int 3^{4-x^6}x^5\,dx$ 3. $\int x^3\sin x\,dx$ 4. $\int \mathrm{arctg}\,(1-2x)\,dx$ 5. $\int e^{8x}\cos x\,dx$ 6. $\int \frac{2x^3-3}{(x-1)^3}\,dx$ 7. $\int \frac{x^2+3x+1}{x^4-16}\,dx$ 8. $\int \cos 3x\cos 21x\,dx$ 9. $\int \frac{dx}{4-2\sin x+3\cos x}$ 10. $\int \sin^4 x\cos^2 x\,dx$	**12**	1. $\int \sqrt[4]{(1+3x^2)^3}\,x\,dx$ 2. $\int \frac{\sin 5x}{\sqrt[3]{\cos^{11} 5x}}\,dx$ 3. $\int \mathrm{arctg}\sqrt{1-4x}\,dx$ 4. $\int (x+1)^2\sin x\,dx$ 5. $\int e^{4x}\cos 3x\,dx$ 6. $\int \frac{3x^2+1}{(x-2)(x+2)(x+4)}\,dx$ 7. $\int \frac{4-x^2}{(9-x^2)(1+x)}\,dx$ 8. $\int \cos 3x\sin 15x\,dx$ 9. $\int \frac{dx}{3+4\cos x-\sin x}$ 10. $\int \sin^5 x\,dx$

1	2	3	4
11	11. $\int \frac{1-\sqrt[3]{x}}{\left(\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}\right)\sqrt[3]{x}}\,dx$ 12. $\int \frac{\sqrt{2-x^2}}{x^2}\,dx$	**12**	11. $\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^5}+\sqrt[6]{x^4}}\,dx$ 12. $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}\,dx$
13	1. $\int \frac{dx}{\cos^2 2x\left(3\mathrm{tg}^2 2x+1\right)}$ 2. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}+10}{x}\,dx$ 3. $\int x^3 \sin 3x\,dx$ 4. $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^3}}\,dx$ 5. $\int e^{3x}\cos 7x\,dx$ 6. $\int \frac{x^2+1}{(x-4)^3}\,dx$ 7. $\int \frac{x^3+2x+1}{\left(x^2+2\right)\left(x^2-4\right)}\,dx$ 8. $\int \sin 2x\,\cos 12x\,dx$ 9. $\int \frac{dx}{15-\sin x}$ 10. $\int \frac{dx}{\cos^3 x\,\sin x}$ 11. $\int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x+2}+\sqrt[3]{x+2}}$ 12. $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x}\,dx$	**14**	1. $\int e^{5-x^4}\,x^3\,dx$ 2. $\int \frac{dx}{3+2x}$ 3. $\int \left(x^2+1\right)\cos x\,dx$ 4. $\int \mathrm{arctg}(3x+2)\,dx$ 5. $\int e^{7x}\sin 3x\,dx$ 6. $\int \frac{x^3+1}{\left(x^2-9\right)(x+1)}\,dx$ 7. $\int \frac{x^2+3x-7}{\left(x^4-81\right)}\,dx$ 8. $\int \sin 5x\,\cos 25x\,dx$ 9. $\int \frac{dx}{3+\cos 4x}$ 10. $\int \cos^2 x\,\sin^6 x\,dx$ 11. $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{1+\sqrt[3]{2x+1}}$ 12. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}$
15	1. $\int 2^{7-x^{10}}\,x^9\,dx$ 2. $\int \frac{dx}{x^2+3x+10}$ 3. $\int (x-3)^2\,\sin x\,dx$	**16**	1. $\int \frac{\ln(\arcsin x)}{\arcsin x\,\sqrt{1-x^2}}\,dx$ 2. $\int 4^{1-x^{12}}\,x^{11}\,dx$ 3. $\int (x-3)^2 \sin x\,dx$

1	2	3	4
15	4. $\int \arccos(1+3x)\,dx$ 5. $\int e^{2x}\cos 14x\,dx$ 6. $\int \frac{x^3-1}{(x^2-16)(x+3)}\,dx$ 7. $\int \frac{2x^2-4}{(x^2+2)(x-1)^2}\,dx$ 8. $\int \cos 9x\,\sin 13x\,dx$ 9. $\int \frac{dx}{5+\sin 2x}$ 10. $\int ctg^4\,4x\,dx$ 11. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+4)^2}-\sqrt{x+4}}$ 12. $\int \frac{\sqrt{81+x^2}}{x^2}\,dx$	**16**	4. $\int \arccos(2-4x)\,dx$ 5. $\int e^{7x}\cos 4x\,dx$ 6. $\int \frac{2x^3+4}{(x^2-36)(x+1)}\,dx$ 7. 77 7. $\int \frac{x^3+x^2-1}{x^4-16}\,dx$ 8. $\int \cos 3x\,\sin 12x\,dx$ 9. $\int \frac{dx}{1+\cos x-4\sin x}$ 10. $\int \cos^4 x\,\sin^3 x\,dx$ 11. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{2\sqrt[3]{x}+4\sqrt{x}}\,dx$ 12. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{4+x^2}}$
17	1. $\int \frac{\ln(\arccos x)}{\arccos x\cdot\sqrt{1-x^2}}\,dx$ 2. $\int \left(\frac{1}{2}\right)^{3-2x^5} x^4\,dx$ 3. $\int (2-x)^2\cos x\,dx$ 4. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx$ 5. $\int e^{4x}\sin 10x\,dx$ 6. $\int \frac{x^4}{(x^2-9)(x-2)}\,dx$ 7. $\int \frac{x^3+3x^2+2}{(x^2-1)(x^2+1)}\,dx$ 8. $\int \sin 3x\,\cos 4x\,dx$ 9. $\int \frac{dx}{5+3\sin x-\cos x}$ 10. $\int \sin^4 x\,\cos^3 x\,dx$ 11. $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x}+2}\,dx$	**18**	1. $\int \frac{\sqrt[3]{3+\ln x}\,dx}{x}$ 2. $\int \frac{e^{2x}\,dx}{e^{4x}+9}$ 3. $\int (4-7x)\sin 3x dx$ 4. $\int x\ln x\,dx$ 5. $\int e^{5x}\sin 6x\,dx$ 6. $\int \frac{x+2}{(x^2-1)(x-3)}\,dx$ 7. $\int \frac{3x+4}{(x^4-1)(x+4)}\,dx$ 8. $\int \sin 3x\,\sin 15x\,dx$ 9. $\int \frac{dx}{5+\cos 4x}$ 10. $\int \sin^2 2x\,\cos^2 2x\,dx$ 11. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+5\sqrt{x}}\,dx$

1	2	3	4
17	12. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{25-x^2}}$	**18**	12. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}$
19	1. $\int \frac{dx}{\arcsin^2 x \cdot \sqrt{1-x^2}}$ 2. $\int (9)^{4-7x^5}\, x^4\, dx$ 3. $\int (5+2x)\cos 4x\, dx$ 4. $\int x^2 \operatorname{arcctg} x\, dx$ 5. $\int 3^x \cos 3x\, dx$ 6. $\int \frac{2x^2+1}{(x^2-25)(x+1)}\,dx$ 7. $\int \frac{3x+7}{(x^4-16)(x+1)}\,dx$ 8. $\int \cos 8x \cos 10x\, dx$ 9. $\int \frac{dx}{4-3\sin 3x}$ 10. $\int \sin^6 x\, dx$ 11. $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}+3\sqrt{x}}\,dx$ 12. $\int \frac{\sqrt{25+x^2}\,dx}{x^2}$	**20**	1. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[8]{\sin^3 x}}$ 2. $\int \frac{dx}{\arccos^3 x\sqrt{1-x^2}}$ 3. $\int (3-7x)\sin 5x\, dx$ 4. $\int x^2 \ln(1+x^3)\,dx$ 5. $\int 4^x \sin 2x\, dx$ 6. $\int \frac{3x-4}{(x-1)(x+2)(x-3)}\,dx$ 7. $\int \frac{2x+1}{x^3-27}\,dx$ 8. $\int \cos 4x \cos 16x\, dx$ 9. $\int \frac{dx}{3+2\cos 3x}$ 10. $\int \cos^6 x\, dx$ 11. $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{5\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\,dx$ 12. $\int \sqrt{5-x^2}\,dx$
21	1. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^5 x}}{3\cos^2 x}\,dx$ 2. $\int 5^{4-7x^3}\, x^2\, dx$ 3. $\int (3+2x)\cos 7x\, dx$ 4. $\int x^3 \ln(3-x^4)\,dx$ 5. $\int 3^x \cos 2x\, dx$ 6. $\int \frac{3x+4}{(x-2)(x^2-4)}\,dx$	**22**	1. $\int \frac{\operatorname{arcctg}^3 x\,dx}{1+x^2}$ 2. $\int 5^{1-x^{10}}\, x^9\, dx$ 3. $\int (3+2x)\sin 8x\, dx$ 4. $\int x \ln(1-x^2)\,dx$ 5. $\int 2^x \sin 5x\, dx$ 6. $\int \frac{4x+1}{(4-x^2)(3+x)}\,dx$

1	2	3	4
21	7. $\int \frac{5x^2+8}{\left(x^3-125\right)}\,dx$ 8. $\int \sin 2x \sin 4x\,dx$ 9. $\int \frac{dx}{4+3\sin 8x}$ 10. $\int \sin^4 2x\,dx$ 11. $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{3\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}}\,dx$ 12. $\int \sin x\sqrt{4-\cos^2 x}\,dx$	**22**	7. $\int \frac{3x^2+4}{\left(x^2+2\right)\left(x-1\right)}\,dx$ 8. $\int \cos 10x \sin 6x\,dx$ 9. $\int \frac{dx}{3+3\sin 3x}$ 10. $\int \cos^4 2x\,dx$ 11. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x+5}}$ 12. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+3}}$
23	1. $\int e^{3x^5-4x+2}\left(15x^4-4\right)dx$ 2. $\int \frac{\mathrm{ctg}^{10}\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$ 3. $\int (5-2x)\cos 3x\,dx$ 4. $\int x\,\mathrm{arctg}\left(2x^2+1\right)dx$ 5. $\int 3^x \cos 4x\,dx$ 6. $\int \frac{2x^2+3}{(x+1)\left(x^2-1\right)}\,dx$ 7. $\int \frac{3x^3+2}{\left(x^4-16\right)}\,dx$ 8. $\int \sin 3x \cos 2x\,dx$ 9. $\int \frac{dx}{4+\cos 5x}$ 10. $\int \sin^4 3x\,dx$ 11. $\int \frac{dx}{3\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}$ 12. $\int \cos x\sqrt{4-\sin^2 x}\,dx$	**24**	1. $\int \frac{\ln^{15}\left(x^2+1\right)x\,dx}{x^2+1}$ 2. $\int e^{4x^3-3}x^2\,dx$ 3. $\int (5-7x)\cos 3x\,dx$ 4. $\int x^2\,\mathrm{arctg}\left(1-x^3\right)dx$ 5. $\int 5^x \cos 3x\,dx$ 6. $\int \frac{2x^2+5}{(x-1)\left(x^2-4\right)}\,dx$ 7. $\int \frac{3x^3+4x+2}{\left(x^2+3\right)\left(x^2-9\right)}\,dx$ 8. $\int \sin 7x \sin 37x\,dx$ 9. $\int \frac{dx}{4-\cos 8x}$ 10. $\int \sin^2\frac{x}{2}\cos^4\frac{x}{2}\,dx$ 11. $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}}$ 12. $\int \frac{\ln x\sqrt{1-\ln^2 x}}{x}\,dx$

1	2	3	4
25	1. $\int \frac{\sqrt[7]{\arccos^3 x^2}\ x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$ 2. $\int \frac{\ln^5 x\,dx}{x}$ 3. $\int (5+7x)\sin 4x\,dx$ 4. $\int x^3 \ln(1+2x^4)\,dx$ 5. $\int e^{7x}\cos 2x\,dx$ 6. $\int \frac{7x+2}{(x+3)(x+2)^2}\,dx$ 7. $\int \frac{3x+4}{(x^2+4)(x+3)}\,dx$ 8. $\int \cos 2x\ \cos 9x\ dx$ 9. $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$ 10. $\int \frac{dx}{1+4\sin^2 x}$ 11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+3\sqrt[4]{x}}$ 12. $\int \frac{\sqrt{4+\ln^2 x}\,dx}{x}$	**26**	1. $\int \frac{tg^2 3x^2 \cdot x\,dx}{\cos^2 3x^2}$ 2. $\int \frac{\sin x\,dx}{3\sqrt{\cos^{12} x}}$ 3. $\int (3+4x)\cos 5x\,dx$ 4. $\int x^2 \arcsin x^3\,dx$ 5. $\int 7^x \cos 2x\,dx$ 6. $\int \frac{5x^2+3}{(x-1)(x+5)^2}\,dx$ 7. $\int \frac{2x^3+4}{(x^2+1)(x-1)^2}\,dx$ 8. $\int \cos 3x\ \cos 4x\,dx$ 9. $\int \frac{dx}{1+2\sin x-3\cos x}$ 10. $\int \frac{dx}{5\cos^2 x+3\sin^2 x}$ 11. $\int \frac{dx}{4\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}$ 12. $\int \frac{\sqrt{1-arctg^2 x}\ dx}{1+x^2}$
27	1. $\int \frac{\log_3^3 x\,dx}{x}$ 2. $\int e^{3x^4+5x-10}(12x^3+5)\,dx$ 3. $\int (27x+1)\sin x\,dx$ 4. $\int x^2\, arcctg\ x^3\,dx$ 5. $\int 7^x \cos 2x\,dx$ 6. $\int \frac{dx}{(x-2)(x+3)^2}$	**28**	1. $\int \frac{\log_2^2 x\,dx}{x}$ 2. $\int 3^{4-x^4} x^3\,dx$ 3. $\int (5x-4)\cos 7x\,dx$ 4. $\int x^3 \arccos x^4\,dx$ 5. $\int 2^x \sin 5x\,dx$ 6. $\int \frac{3x-4}{(x-1)^3}\,dx$

1	2	3	4
27	7. $\int \frac{x^3\,dx}{x^3-1}$ 8. $\int \sin 2x \sin 3x\,dx$ 9. $\int \frac{dx}{3\cos x+7}$ 10. $\int \frac{dx}{\cos^3 x \sin x}$ 11. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}}$ 12. $\int \frac{\sqrt{4-\operatorname{arcctg}^2 x}\,dx}{1+x^2}$	**28**	7. $\int \frac{2x^2+3}{(x^2+3)(x-1)}\,dx$ 8. $\int \cos 3x \cos\frac{x}{3}\,dx$ 9. $\int \frac{dx}{\cos 2x-\sin 2x}$ 10. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}$ 11. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-4}}$ 12. $\int \sqrt{\frac{1-\arccos^2 x}{1-x^2}}\,dx$
29	1. $\int \sin^3 x \cos x\,dx$ 2. $\int 2^{5+x^2}\,x\,dx$ 3. $\int (3+x)\sin 2x\,dx$ 4. $\int x^4 \arcsin x^5\,dx$ 5. $\int 4^x \cos 3x\,dx$ 6. $\int \frac{x^2\,dx}{(x-3)^3}$ 7. $\int \frac{x^2-2x+1}{(x^2+1)(x-1)}\,dx$ 8. $\int \sin\frac{x}{4}\sin\frac{x}{2}\,dx$ 9. $\int \frac{dx}{2\cos(x/2)+3\sin(x/2)}$ 10. $\int \frac{dx}{\sin^5 3x}$ 11. $\int \frac{dx}{(x+3)\sqrt{x-4}}$ 12. $\int \sqrt{\frac{4+\arcsin^2 x}{1-x^2}}\,dx$	**30**	1. $\int \cos^{12} x \sin x\,dx$ 2. $\int \frac{\operatorname{tg}^2 3x\,dx}{\cos^2 3x}$ 3. $\int (2+7x)\sin 15x\,dx$ 4. $\int x^4 \arcsin x^5\,dx$ 5. $\int e^{2x}\cos 4x\,dx$ 6. $\int \frac{dx}{(x-4)^3}$ 7. $\int \frac{5x^2+3}{(x^2+4)(x-2)}\,dx$ 8. $\int \sin 5x \cos 7x\,dx$ 9. $\int \frac{dx}{\cos(x/3)-4\sin(x/3)}$ 10. $\int \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}+4\sin^2\frac{x}{2}}$ 11. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x}-3\sqrt[3]{x}}$ 12. $\int \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}\,dx}{\cos^2 x}$

Тема 3. Определенный интеграл

Задача 1. Вычислить интегралы

1. а) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x\,dx$ б) $\int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$	2. а) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+\cos 2x}$ б) $\int\limits_0^1 x e^x\,dx$	3. а) $\int\limits_1^4 \frac{x\,dx}{\sqrt{2+4x}}$ б) $\int\limits_0^{\pi} x^3 \sin x\,dx$
4. а) $\int\limits_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx$ б) $\int\limits_0^{\pi} x \sin x\,dx$	5. а) $\int\limits_{3/4}^{4/3} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$ б) $\int\limits_1^e \ln x\,dx$	6. а) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{6-5\sin x+\sin^2 x}$ б) $\int\limits_0^1 x e^{-x}\,dx$
7. а) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 dx$ б) $\int\limits_1^2 x \log_2 x\,dx$	8. а) $\int\limits_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{\sqrt{1-(\ln x)^2}\cdot x}$ б) $\int\limits_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x\,dx$	9. а) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ б) $\int\limits_1^e \ln^3 x\,dx$
10. а) $\int\limits_1^e \frac{1+\ln x}{x}\,dx$ б) $\int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{(1+x^3)^3}$	11. а) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$ б) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$	12. а) $\int\limits_{-1}^1 \frac{x^5\,dx}{x+2}$ б) $\int\limits_0^3 x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$
13. а) $\int\limits_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2}$ б) $\int\limits_1^e (1+\ln x)^2\,dx$	14. а) $\int\limits_0^1 \frac{2x^3}{x^8+1}\,dx$ б) $\int\limits_0^1 \arcsin x\,dx$	15. а) $\int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^3+4}}$ б) $\int\limits_1^2 x \ln x\,dx$

16. а) $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$ б) $\int\limits_0^1 x^3 \operatorname{arctg} x\, dx$	17. а) $\int\limits_1^e \frac{\sin(\ln x)\,dx}{x}$ б) $\int\limits_1^2 (3x+2)\ln x\, dx$	18. а) $\int\limits_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx$ б) $\int\limits_1^e (1-\ln x)^2\, dx$
19. а) $\int\limits_0^5 x\sqrt{x+4}\, dx$ б) $\int\limits_0^1 x\ln(1+x^2)\, dx$	20. а) $\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x^5}\, dx$ б) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$	21. а) $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\, dx$ б) $\int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$
22. а) $\int\limits_{-1}^1 \frac{x\,dx}{x^2+x+1}$ б) $\int\limits_0^1 (\arcsin x)^2\, dx$	23. а) $\int\limits_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$ б) $\int\limits_0^{\pi/2} x\cos x\, dx$	24. а) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ б) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\ln(\sin x)\,dx}{\cos x}$
25. а) $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\, dx$ б) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos^2 x\, dx$	26. а) $\int\limits_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}\, dx$ б) $\int\limits_0^1 x(2-x^2)^6\, dx$	27. а) $\int\limits_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\, dx$ б) $\int\limits_0^9 x\sqrt[3]{1-x}\, dx$
28. а) $\int\limits_1^e \ln^3 x\, dx$ б) $\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x-\cos^3 x}\, dx$	29. а) $\int\limits_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}\, dx$ б) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2 2x}$	30. а) $\int\limits_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\, dx$ б) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$

Задача 2. Исследовать на сходимость несобственные интегралы

1. а) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^4}$ б) $\int\limits_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\,dx$	2. а) $\int\limits_1^\infty x\ \cos x\,dx$ б) $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$	3. а) $\int\limits_1^\infty e^{-x}\,x\,dx$ б) $\int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$
4. а) $\int\limits_0^\infty \frac{x\ln x\,dx}{(1+x^2)^2}$ б) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^3}$	5. а) $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}$ б) $\int\limits_0^1 \ln x\,dx$	6. а) $\int\limits_1^\infty x^2\ e^{-x}\,dx$ б) $\int\limits_0^2 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{16-x^4}}$
7. а) $\int\limits_0^\infty \cos\ x\,dx$ б) $\int\limits_0^3 \frac{x\,dx}{\sqrt{9-x^2}}$	8. а) $\int\limits_0^\infty \frac{e^x\,dx}{(1+e^x)^2}$ б) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x\sin x}$	9. а) $\int\limits_2^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+1}}$ б) $\int\limits_2^3 \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^2-4}}$
10. а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x\,dx}{1+x^2}$ б) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x-\cos x}$	11. а) $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx$ б) $\int\limits_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,dx$	12. а) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^3\,dx}{(x^4+1)^3}$ б) $\int\limits_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$
13. а) $\int\limits_0^\infty e^{-x}\ \sin\ x\,dx$ б) $\int\limits_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx$	14. а) $\int\limits_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(x^3+3)^2}$ б) $\int\limits_1^2 \frac{(x-2)\,dx}{\sqrt{x-1}}$	15. а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^4\,dx}{(x^5+5)^4}$ б) $\int\limits_{-1}^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$

16. а) $\int_0^{\infty} \sin x\,dx$ б) $\int_0^{2} \frac{dx}{x^3}$	17. а) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ б) $\int_0^{2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$	18. а) $\int_1^{\infty} \frac{x^3+1}{x^4}\,dx$ б) $\int_0^{1} \frac{2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$
19. а) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{x^2+1}$ б) $\int_{-1}^{1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}}\,dx$	20. а) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{(x^2-1)^2}$ б) $\int_0^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$	21. а) $\int_2^{\infty} \frac{\ln x\,dx}{x}$ б) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x\ln^2 x}$
22. а) $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$ б) $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x}$	23. а) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$ б) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^4}$	24. а) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ б) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x\ln x}$
25. а) $\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x\,dx}{1+x^2}$ б) $\int_3^{6} \frac{dx}{x^2-7x+10}$	26. а) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$ б) $\int_{1/2}^{1} \frac{x\,dx}{x\sqrt{1-x^2}}$	27. а) $\int_0^{\infty} x\sin x\,dx$ б) $\int_0^{3} \frac{dx}{(x-1)^2}$
28. а) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$ б) $\int_0^{\pi/4} \operatorname{ctg} x\,dx$	29. а) $\int_0^{\infty} x e^{-x^2/2}\,dx$ б) $\int_0^{1} \frac{e^{2x}\,dx}{\sqrt{e^{4x}-1}}$	30. а) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x+x^3}$ б) $\int_0^{1} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$

Задача 3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

1. $y = x, \quad y = x + \sin^2 x \quad \left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$	2. $y = (x+1)^2, \; x = \sin \pi y, \; y = 0 \quad (0 \le y \le 1)$
3. $y = 2^x, \; y = 2, \; x = 0$	4. $y = e^{2x}, \; y = e^{-2x}, \; x = 1$
5. $y = \ln x, \; y = \ln^2 x$	6. $y = x^2, \; y = \frac{x^3}{3}$
7. $y = 4x - x^2, \; y = 0$	8. $y = \ln x, \; y = 0, \; x = e$
9. $y = \frac{1}{1+x^2}, \; y = \frac{x^2}{2}$	10. $y^3 = x, \; y = 1, \; x = 8$
11. $y = \operatorname{tg} x, \; y = 0, \; x = \frac{\pi}{3}$	12. $y = x^2, \; y = \sqrt{x}$
13. $y^2 = 2x + 1, \; x - y - 1 = 0$	14. $y = x^2 + 1, \; y = x + 1$
15. $y^2 = 4x, \; x^2 = 4y$	16. $y = x^3, y = 8, \; x = 0$
17. $y = 2x - x^2, \; y = -x$	18. $y = 3 - 2x, \; y = x^2$
19. $y = x^2, \; y = 2x, \; y = \frac{x^2}{2}$	20. $y = \frac{x^2}{3}, \; y = 4 - \frac{2}{3}x^2$
21. $y = \frac{1}{1+x^2}, \; y = \frac{x}{2}, \; x = 0$	22. $y = x, \; y = 2 - x^2$
23. $y = 4 - x^2, \; y = 0$	24. $y = \sin^3 x, \; y = \cos^3 x, \; x = 0 \; \left(0 \le x \le \frac{\pi}{4}\right)$
25. $y = 2 - x^2, \; y^2 = x^3, \; y = 0, \; (y \ge 0)$	26. $y^2 = 2x + 1, \; x - y - 1 = 0$
27. $y = (x+1)^2, \; y = 2x + 5, \; y = 0$	28. $y = x^2 + 1, \; x + y = 3$
29. $xy = 4, \; x = 1, \; x = 4, \; y = 0$	30. $y^2 = 2x + 4, \; x = 0$

Задача 4. Найти длину дуги кривой

1. $y^2=\frac{4}{9}(2-x)^3 \quad (-1\le x\le 2)$	2. $x=\ln\sec y \quad \left(0\le y\le \frac{\pi}{3}\right)$
3. $x=\ln\cos y \quad \left(0\le y\le \frac{\pi}{3}\right)$	4. $y=\ln\operatorname{cosec} x \quad \left(-\frac{\pi}{3}\le x\le \frac{2\pi}{3}\right)$
5. $9y^2=x(x-3)^2 \quad (0\le x\le 3)$	6. $x=e^t\sin t,\ y=e^t\cos t,\ \left(0\le t\le \frac{\pi}{4}\right)$
7. $y=2\left(e^{x/4}+e^{-x/4}\right) \quad (0\le x\le 4)$	8. $y=\ln\sin x \quad \left(\frac{\pi}{3}\le x\le \frac{2\pi}{3}\right)$
9. $x=\cos^4 t,\ \ y=\sin^4 t \quad \left(0\le t\le \frac{\pi}{2}\right)$	10. $y=e^x \quad (0\le x\le 1)$
11. $y=\ln x \quad \left(\sqrt{3}\le x\le \sqrt{8}\right)$	12. $y=\arcsin e^x \quad (0\le x\le 1)$
13. $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y \quad (1\le y\le e)$	14. $y^2=2x,\ 0\le x\le 2$
15. $x=t^2,\ y=t-\frac{1}{2}t^2 \quad \left(0\le t\le \sqrt{3}\right)$	16. $y^2=x^3,\ \ 0\le x\le \frac{4}{3}$
17. $y=2\ln\frac{4}{4-x^2} \quad (0\le x\le 1)$	18. $y=\ln\left(1-x^2\right) \quad \left(-\frac{1}{2}\le x\le \frac{1}{2}\right)$
19. $y^2=x^3,\ \ 0\le x\le 4$	20. $y=2\sqrt{x} \quad (0\le x\le 1)$
21. $y^3=x^2,\ \ 0\le y\le \frac{4}{3}$	22. $y^2=(x+1)^3,\ \ 0\le x\le 4$
23. $3y^2=x^3,\ 0\le x\le 15$	24. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=3^{2/3}$
25. $x=4\cos^3 t,\quad y=4\sin^3 t$	26. $x=\left(t^2-2\right)\sin t+2t\cos t,$ $y=\left(2-t^2\right)\cos t+2t\sin t \quad (0\le t\le \pi)$

27. $y = e^{2x}, \quad 0 \le x \le 1$	28. $y^2 = 4x, \; 0 \le x \le 2, \;\; y > 0$
29. $r = 3(1 + \cos\varphi), \;\; 0 \le \varphi \le 2\pi$	30. $r = 3\sin^3\dfrac{\varphi}{3}, \;\; 0 \le \varphi \le 3\pi$

Тема 4. Функции нескольких переменных

Задача 1. Найти частные производные 1 и 2 порядков

1. $u = \dfrac{x^2}{4y - 2z}$	2. $u = 3x\, e^{yz}$	3. $u = x^2 \sin\sqrt{2y + 3z}$
4. $u = 2\ln\left(x^2 + 3y - 2z\right)$	5. $u = \dfrac{y^2 - 2x}{3z}$	6. $u = 3x\, y\, e^{4z}$
7. $u = x\, z\; \mathrm{tg}\sqrt{y}$	8. $u = x^{yz}$	9. $u = \dfrac{2x^2 + y}{3z - x}$
10. $u = y\, z\; e^{x^2}$	11. $u = x\; y\cos\sqrt{z}$	12. $u = x\ln(2y + 3z)$
13. $u = \dfrac{y^2}{x - 3z}$	14. $u = x^2 z e^y$	15. $u = x\,\mathrm{arctg}\, y z$
16. $u = y^{z x^2}$	17. $u = \dfrac{3x}{y^2 - 4z}$	18. $u = y^2 x e^z$
19. $u = z\cos x \sin y$	20. $u = \dfrac{x + 2y}{\ln(z - x)}$	21. $u = \dfrac{x^2 + 2z}{3y^2}$
22. $u = z e^{x^2 y}$	23. $u = \dfrac{x}{\sin\sqrt{yz}}$	24. $u = x y^z$
25. $u = \dfrac{x^2 - 2y}{4z^2}$	26. $u = z y e^x$	27. $u = x y\,\mathrm{ctg}\sqrt{z}$
28. $u = x y \ln(y - z)$	29. $u = \dfrac{3x^2 y}{y^2 - z}$	30. $u = y e^{x - 4z}$

Задача 2. Вычислить приближенно

1. $1{,}04^{2{,}03}$	2. $0{,}93^{2{,}04}$
3. $\sqrt{4{,}03^2+2{,}92^2}$	4. $\operatorname{arctg}\left(\frac{1{,}95}{1{,}04}-1\right)$
5. $0{,}98^{3{,}02}$	6. $\arcsin\frac{0{,}04}{2{,}99}$
7. $\sqrt{6{,}01^2+8{,}02^2}$	8. $\sin 89^0\ \cos 91^0$
9. $\ln\left(1+\sqrt{1{,}03}-\sqrt{0{,}91}\right)$	10. $2{,}05^{3{,}03}$
11. $\sqrt{5{,}93^2+7{,}97^2}$	12. $\sqrt[3]{(0{,}02)^5-26{,}91}$
13. $\sqrt[4]{0{,}04^2+15{,}94}$	14. $\ln\left(1-\sqrt[3]{1{,}02}+\sqrt{0{,}92}\right)$
15. $e^{0{,}02+(0{,}05)^2}$	16. $e^{0{,}08^2+0{,}01^3}$
17. $(3{,}02)^2\cdot(4{,}08)^3$	18. $(1{,}03)^6\cdot(2{,}04)^3$
19. $\arcsin\frac{0{,}09}{2{,}98}$	20. $\ln\left(0{,}02+0{,}99^4\right)$
21. $\ln\left(0{,}98^2-0{,}01\right)$	22. $3\left(0{,}02^5+0{,}98^2\right)$
23. $4\left(0{,}03^3+0{,}99^3\right)$	24. $e^{2\cdot 0{,}03+0{,}01^3}$
25. $\operatorname{tg}3{,}12\cdot\sin 1{,}58$	26. $\operatorname{ctg}1{,}57\cdot\cos 3{,}13$
27. $\sqrt[3]{0{,}02^4+1{,}03^5}$	28. $2{,}99^{\,0{,}04}$
29. $0{,}98^{\,1{,}02}$	30. $(1{,}08)^5\cdot(4{,}03)^{\,2}$

Задача 3. Найти уравнения касательной плоскости к нормали и поверхности F в точке $M(x_0,\ y_0,\ z_0)$

1. $F:\quad x^2+y^2-z=0 \quad M(1,-3,\ 10)$	2. $F:\quad x^2+y^2+z^2=4 \quad M(\sqrt{3},\ 1,\ 0)$
3. $F:\quad \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{8}=0 \quad M(3,\ 4,\ 4)$	4. $F:\quad x^2+2y^2-4z^2=5 \quad M(1,\ 2,\ 1)$
5. $F:\ z=x^2-y^2 \quad M(1,\ 1,\ 0)$	6. $F:\ z^2=x^2+y^2 \quad M(0,\ -1,\ 1)$
7. $F:\ y^2+4y+x^2=0 \quad M(2,\ -2,\ 0)$	8. $F:\quad z=x^2-2xy+y^2 \quad M(1,\ 1,\ 0)$
9. $F:\ 2x^2+3y^2+z^2=1 \quad M(0,\ 0,\ 1)$	10. $F:\ 4x\ +x^2+y^2-z^2=0 \quad M(1,\ 2,\ 3)$
11. $F:\ z=xy^2+2yx^2-5 \quad M(1,\ 2,\ 3)$	12. $F:\ z^2+6x^2-3y^2=4 \quad M(-1,\ 1,\ -1)$
13. $F:\quad \ln x=2+3z+y \quad M(1,\ 1,\ -1)$	14. $F:\ x^2+3y^2+4z^2=8 \quad M(-1,\ 1,\ -1)$
15. $F:\quad x^2+3y^2-2z^2=2 \quad M(1,\ 1,\ 1)$	16. $F:\quad z=y^2-3x^2+z^2 \quad M(1,\ 1,\ 2)$
17. $F:\ z=x^2+3xy+4y^2 \quad M(1,\ 0,\ 1)$	18. $F:\ 4xy^2-3yx^2-z^2+6=0 \quad M(3,\ 2,\ 4)$
19. $F:\quad 3z=x^2+y^2+z^2 \quad M(1,\ 1,\ -1)$	20. $F:\ 2xy^3+4y^2-3z^2=5 \quad M(2,\ 1,\ 1)$
21. $F:\quad xy+yz+xz=3 \quad M(1,\ 1,\ 1)$	22. $F:\ 3x^3+4y^3+z^2=0 \quad M(1,\ -1,\ -1)$
23. $F:\ 4xy^2-5y^3+z^3=4 \quad M(2,\ 1,\ 1)$	24. $F:\ 2xy^2+4y^2z^2-x^3=9 \quad M(-1,\ 2,\ 1)$
25. $F:\ 3x^2y^2+4z^3-x^3=6 \quad M(1,-1,\ 1)$	26. $F:\ x^2+y^2+5y-3z^2=12 \quad M(-1,\ 2,\ 1)$
27. $F:\quad x^2+y^2-z^2-2z=0 \quad M(0,\ 0,-2)$	
28. $F:\quad x^2+y^2+z^2-4z+2=0 \quad M(1,\ 1,\ 0)$	
29. $F:\quad xyz+x^2-4z^2+y^2=0 \quad M(2,\ 0,\ 1)$	
30. $F:\quad y^2x^2-3x^2+4z^2-y=27 \quad M(2,\ 1,\ 3)$	

Задача 4. Найти экстремумы функции двух переменных

1. $z = 2x^3 + 6x\ y^2 - 30x - 24y$	2. $z = x^3 - y^3$
3. $z = 6x^2 y + 2y^3 - 24x - 30y$	4. $z = e^{-\frac{x}{2}}\left(x^2 + y^2\right)$
5. $z = e^{-2x^2}\left(x\ - y^2\right)$	6. $z = e^{-\frac{y}{2}}\left(x^2 - y\right)$
7. $z = x^3 - 8y^3 - 6x\ y + 1$	8. $z = x^3 - x\ y^2 + 3x^2 + y^2 - 1$
9. $z = x^2 y - \frac{1}{3}y^3 + 2x^2 + 3y^2 - 1$	10. $z = x^3 + 6x\ y + 3y^2 - 18x - 18y$
11. $z = x^2 y - y^3 - x^2 - 3y^2 + 3$	12. $z = 3x^2 - 6x\ y - y^3 - 12x + 12y$
13. $z = 2x^3 - x\ y^2 + 5x + y^2$	14. $z = x^2 y - 2y^3 - x^2 - 5y^2$
15. $z = 2x^3 + y^2 + 6x\ y + 12x$	16. $z = 8x^3 - y^3 - 12x\ y - 1$
17. $z = 2x^3 - 12x^2 y + 16y^3 - 9x^2$	18. $z = -8x^3 + 6x\ y^2 + y^3 + 9y^2$
19. $z = e^{-2y^2}\left(x^2 + y\right)$	20. $z = -\frac{1}{2}x^2 + 8xy - y^3 - 13x - 12y$
21. $z = 2y\sqrt{x} - y^2 - 3x + 8y$	22. $z = x^2 - 4x\sqrt{y} - 2x + 5y$
23. $z = e^{x/4}\left(5x^2 - y^2\right)$	24. $z = 2x^2 + 3x\ y + 2y^3 + 5x$
25. $z = x^3 - 5y\ x + 5y^2 + 7x - 15y$	26. $z = 2x^2 - 5x\ y + 2y^3 - 3x + 4y$
27. $z = 3x^2 + 10x\ y + 6y^3 + 2x + 2y - 1$	28. $z = 3x^3 + 7x\ y - \frac{7}{2}y^2 - 60x + 2$
29. $z = 3x^2 - 2\sqrt{x}\ \ y + \frac{1}{2}y^2 - 56x$	30. $z = -2x^3 + 3x\sqrt{y} + 18x - 1{,}5y$

Задача 5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ в замкнутой области D

1. $z = x^3 - 3yx + y^3$,	$D:\ 0 \le x \le 1;\quad -1 \le y \le 1$
2. $z = x - 2y + 4$,	$D:\ x \ge 0,\quad y \ge 0,\quad x + y \le 1$
3. $z = x - 5y + 3$,	$D:\ x \le 0,\quad y \ge 0,\quad y - x \le 1$
4. $z = x^2 + y^2 - xy - x - y$,	$D:\ x \ge 0,\quad y \ge 0,\quad x + y \le 3$
5. $z = x\ \ y$,	$D:\ x^2 + y^2 \le 1$
6. $z = x\ y^2$,	$D:\ x^2 + y^2 \le 1$
7. $z = y,\ x^2$,	$D:\ x^2 + y^2 \le 1$
8. $z = \frac{3}{2}x^2 + 2x\ \ y - \frac{1}{2}y^2 - 5x - y + 2$;	$D:\ 0 \le x \le 2,\quad 0 \le y \le 2$
9. $z = x^2 - x\ y + y^2 - 6y + 9x + 20$;	$D:\ 0 \le x \le 1,\quad 0 \le y \le 1$
10. $z = x\ y^2 - x\ y - xy^3$;	$D:\ 1 \le x \le 2,\quad 1 \le y \le 2$
11. $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$;	$D:\ 0 \le x \le 1,\quad -1 \le y \le 0$
12. $z = e^{\frac{x}{2}}\left(x + y^2\right)$;	$D:\ -2 \le x \le 0,\quad 0 \le y \le 1$
13. $z = \left(x^2 + y\right)e^{y/2}$;	$D:\ 0 \le x \le 1,\quad -2 \le y \le 0$
14. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$,	$D:\ x \ge 0,\quad y \ge 0,\quad x + y \le 3$
15. $z = x + 2y$,	$D:\ x^2 + y^2 \le 1$
16. $z = 2x + y$,	$D:\ x^2 + y^2 \le 1$
17. $z = xy^2$,	$D:\ x \ge 0,\quad y \ge 0,\quad x + 2y \le 1$

18. $z = x^2 + y^2 + 16x - 12y + 20;$	$D: 0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 1$
19. $z = 3xy,$	$D: \ x^2 + y^2 \le 1$
20. $z = x^2 - xy + y^2;$	$D: -1 \le x \le 1, \quad -1 \le y \le 1$
21. $z = 9y^2 + 4y + 4x + 6xy;$	$D: 0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 1$
22. $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y,$	$D: \ x^2 + y^2 \le 4$
23. $z = x^3 + y^3 + 6xy;$	$D: -2 \le x \le 0, \quad 0 \le y \le 2$
24. $z = -3x^2 + y^2;$	$D: -2 \le x \le 2, \quad -1 \le y \le 1$
25. $z = \sqrt{x^2 + y^2},$	$D: \ x^2 + y^2 \le 16$
26. $z = 8x^3 + y^3 - 6xy;$	$D: -1 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 2$
27. $z = x^3 + y^3 - 3xy;$	$D: -1 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 3$
28. $z = 2x^2 - xy + 2y^2 - 2x - 3y;$	$D: x \ge 0, \quad y \ge 0, x + y \le 2$
29. $z = -x^2 + xy + y^2 + 4y + 1;$	$D: \ y - x \le 1, \ x \ge 0, \quad y \ge 0,$
30. $z = 4xy,$	$D: \ x^2 + y^2 \le 16, \ x \ge 0, \quad y \ge 0$

ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Тема 1. Дифференцирование.

Задача 1. Найти производную сложной функции:

$$y = \arccos e^{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1+x^2}{3-\cos^3 x} + 2^{x-1} \cdot \log_3\left(x^3 + 1\right)$$

Решение. Функция состоит из 3-х слагаемых:
первое – сложная функция из четырех звеньев;
второе – частное двух функций;
третье – произведение двух функций.

Используя соответствующие формулы:

$$\left[[u(v(x))]' = u'(u(x))\cdot u'(x), \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{u^2}, \qquad (uv)' = u'v + v'u \right],$$

находим $$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(e^{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}}\cdot e^{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)+$$

$$+\frac{\left(1+x^2\right)'\cdot\left(3-\cos^3 x\right)-\left(3-\cos^3 x\right)'\cdot\left(1+x^2\right)}{\left(3-\cos^3 x\right)^2}+\left(2^{x-1}\right)'\log_3\left(x^3+1\right)+2^{x-1}\left(\log_3\left(x^3+1\right)\right)=$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{1-e^{2\sqrt{1-x^2}}}}\cdot e^{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{2x\left(3-\cos^3 x\right)-\left(-3\cos^2 x\cdot(-\sin x)\right)\left(1+x^2\right)}{\left(3-\cos^3 x\right)^2}+$$

$$+2^{x-1}\ln 2\cdot\log_3\left(x^3+1\right)+2^{x-1}\cdot\frac{1}{\left(x^3+1\right)\ln 3}\,3x^2=\frac{xe^{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-e^{2\sqrt{1-x^2}}}\cdot\sqrt{1-x^2}}+$$

$$+\frac{2x\left(3-\cos^3 x\right)-3\cos^2 x\sin x\left(1+x^2\right)}{\left(3-\cos^3 x\right)^2}+2^{x-1}\left(\ln 2\log_3\left(x^3+1\right)+\frac{3x^2}{\left(x^3+1\right)\ln 3}\right).$$

Ответ: $$y'=\frac{xe^{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-e^{2\sqrt{1-x^2}}}\cdot\sqrt{1-x^2}}+\frac{2x\left(3-\cos^3 x\right)-3\cos^2 x\sin x\left(1+x^2\right)}{\left(3-\cos^3 x\right)^2}+$$

$$+2^{x-1}\left(\ln 2\log_3\left(x^3+1\right)+\frac{3x^2}{\left(x^3+1\right)\ln 3}\right).$$

Задача 2. Найти производную функции, используя логарифмирование:

а) $y=(\cos x)^{x^4}$. Прологарифмируем обе части равенства:

$$\ln y=\ln(\cos x)^{x^4}; \qquad \ln y = x^4\cdot\ln\cos\ x.$$

Продифференцируем обе части этого равенства, считая y функцией x:

$$(\ln y)' = \left(x^4 \cdot \ln\cos x\right)',$$
$$\frac{1}{y} \cdot y' = 4x^3 \cdot \ln\ \cos x + x^4 \cdot \frac{1}{\cos\ x} \cdot (-\sin\ x).$$

Умножим обе части равенства на y:
$$y' = y \cdot \left(4x^3 \ln\cos\ x - x^4 \cdot \operatorname{tg}\ x\right).$$
Подставим $y = (\cos x)^{x^4}$, получим ответ: $y' = (\cos x)^{x^4}$

б) $y = \dfrac{\sin^5 x \cdot x^{10} \cdot \left(1 - x^2\right)^{3/4}}{\sqrt{2 - x^{10}}\ \sqrt[3]{2 + 5x}}.$

Используя свойства логарифма частного и произведения
$$\left[\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b; \quad \ln(ab) = \ln a + \ln b\right],$$
прологарифмируем обе части выражения:
$$\ln y = \ln\left(\sin^5 x\right) + \ln x^{10} + \ln\left(1 - x^2\right)^{3/4} - \ln\left(2 - x^{10}\right)^{1/2} - \ln(2 + 5x)^{1/3}.$$
По свойству логарифма $\log_a x^p = p\log_a x$
$$\ln y = 5\ln\ \sin x + 10\ln\ x + \frac{3}{4}\ln\ \left(1 - x^2\right) - \frac{1}{2}\ \ln\ \left(2 - x^{10}\right) - \frac{1}{3}\ln\ (2 + 5x).$$
Продифференцируем это равенство, полагая, что y есть функция x:
$$\frac{1}{y} \cdot y' = 5 \cdot \frac{1}{\sin\ x} \cdot \cos\ x + \frac{10}{x} + \frac{3}{4}\frac{1}{1 - x^2} \cdot (-2x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 - x^{10}} \cdot \left(-10x^9\right) - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2 + 5x}.$$
Сделаем очевидные упрощения и умножим обе части выражения на y:
$$y' = y\left(5\operatorname{ctg}x + \frac{10}{x} - \frac{3x}{2 - 2x^2} + \frac{5x^9}{2 - x^{10}} - \frac{1}{6 + 10x}\right).$$
Подставив **y** из условия задачи, в ответе получим

$$y = \frac{\sin^5 x \cdot x^{10} \cdot \left(1 - x^2\right)^{3/4}}{\sqrt{2 - x^{10}}\ \sqrt[3]{2 + 5x}}\left(5\operatorname{ctg}\ x + \frac{10}{x} - \frac{3x}{2 - 2x^2} + \frac{5x^9}{2 - x^{10}} - \frac{1}{6 + 10x}\right).$$

Задача 3. Исследовать функцию и построить ее график, используя первую и вторую производные: $y = \dfrac{x^3}{2(x + 1)^2}$.

Решение

1. Найдем область допустимых значений функции: $x + 1 \neq 0$; $x \neq -1$. Так как при $x = -1$ значение функции равно бесконечности, $x = -1$ – вертикальная асимптота функции. Точка $x = -1$ – точка разрыва второго рода функции. Найдем односторонние пределы функции:

$$\lim_{x\to -1-0}\frac{x^3}{2(x+1)^2}=\frac{-1}{2\cdot 0}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to -1+0}\frac{x^3}{2(x+1)^2}=\frac{-1}{2\cdot 0}=-\infty.$$

2. Исследуем функцию на четность и нечетность. Четная функция удовлетворяет условию $y(-x)=y(x)$, а ее график симметричен относительно оси OY. Нечетная функция [при условии $y(-x)=-y(x)$] имеет график, симметричный относительно точки O(0,0) – начала координат.

$$y(-x)=\frac{(-x)^3}{2(-x+1)^2}=-\frac{x^3}{2(1-x)^2}\neq \pm y(x).$$

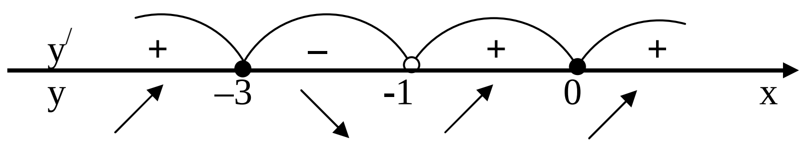
Видим, что функция – функция общего вида, она не является ни четной, ни нечетной

3. Найдем точки экстремума и интервалы монотонности функции:

$$y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x^3\right)'\cdot(x+1)^2-\left((x+1)^2\right)'\cdot x^3}{(x+1)^4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3x^2(x+1)^2-2(x+1)\cdot x^3}{(x+1)^4}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{3x^2(x+1)-2x^3}{(x+1)^3}=\frac{1}{2}\frac{3x^3+3x^2-2x^3}{(x+1)^3}=\frac{1}{2}\frac{x^3+3x^2}{(x+1)^3}=\frac{1}{2}\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}.$$

$$y'=0 \quad \text{при} \quad x=0 \quad \text{и} \quad x=-3.$$



Точка $x=-3$ является точкой максимума, т. к. в ней y' меняет знак с плюса на минус. Точка $x=0$ не является точкой экстремума, т. к. в ней первая производная не меняет знак.

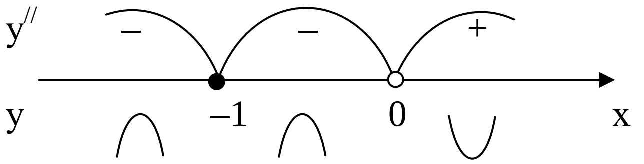
Точка $x=-1$ – точка разрыва 2-го рода.

4. Находим точки перегиба функции и исследуем функцию на выпуклость с помощью y''.

$$y''=\frac{1}{2}\left(\frac{x^3+3x^2}{(x+1)^3}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(3x^2+6x\right)(x+1)^3-3(x+1)^2\left(x^3+3x^2\right)}{(x+1)^6}=$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(3x^2 + 6x\right) \cdot (x+1) - 3\left(x^3 + 3x^2\right)}{(x+1)^6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3x^3 + 3x^2 + 6x^2 + 6x - 3x^3 - 9x^2}{(x+1)^6} = \frac{3x}{(x+1)^6}.$$

$$y'' = 0 \quad \text{при} \quad x = 0.$$



$x = 0 -$ точка перегиба функции, т. к. в ней вторая производная меняет знак с минуса на плюс и $y''(0) = 0$.

5. Найдем наклонные асимптоты функции $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{2x(x+1)^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 + 2x + 1} = \frac{1}{2} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{x}{2} \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{2} \frac{x^3 - x\left(x^2 + 2x + 1\right)}{(x+1)^2} =$$

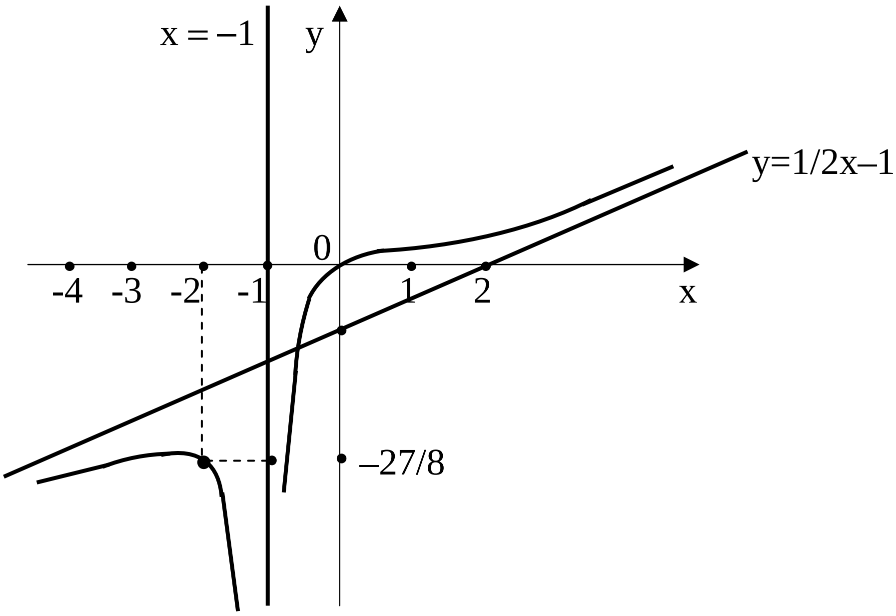
$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-2x^2 - x}{x^2 + 2x + 1} = \frac{1}{2} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2} \cdot (-2) = -1.$$

Следовательно, $\quad y = \frac{1}{2}x - 1 -$ уравнение наклонной асимптоты.

Заметим, что k и b найдены как при $x \to -\infty$, так и при $x \to +\infty$. В некоторых задачах пределы не совпадают при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$; в этом случае находим две асимптоты.

6. Записываем в таблицу некоторые точки графика функции и, учитывая предыдущие пункты, строим сам график

x	0	–3	2	–2	– 4	4	– 1/2	1
y	0	-27/8	4/9	–4	–32/9	32/25	–1/4	1/8



Задача 4. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^3 + 4x$ в точке $M(1, 5)$.

Решение. Уравнение касательной к данной кривой $y = f(x)$, проходящей через точку $M(x_0,\ y_0)$, имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \qquad (1)$$

Из условия $x_0 = 1$, $y_0 = 5$ находим $f'(x_0)$.

$$f'(x) = 3x^2 + 4;$$
$$f'(x) = 3 \cdot 1^2 + 4 = 3 + 4 = 7.$$

Подставляя эти значения в (1), получаем уравнение касательной:

$$y - 5 = 7(x - 1); \qquad y - 5 = 7x - 7; \qquad 7x - y - 2 = 0.$$

Уравнение нормали записывается так:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \qquad (2)$$

Подставляем x_0, y_0, $f'(x_0)$ в (2), получаем уравнение нормали:

$$y-5=-\frac{1}{7}(x-1); \qquad 7y-35=-x+1; \qquad x+7y-36=0.$$

Ответ: Касательная $7x-y-2=0$;

Нормаль $x+7y-36=0$.

Задача 5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=\dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$ на отрезке [0; 1].

Решение. Функция достигает своих наибольшего и наименьшего значений или на границе отрезка $x_0=0$; $x_1=4$; или в точках экстремума, находящихся на этом отрезке.

$$y(0)=\frac{1-0+0}{1+0-0}=1, \qquad y(1)=\frac{1-1+1}{1+1-1}=1.$$

Найдем точки экстремума:

$$y'=\left(\frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}\right)'=\frac{(1-x+x^2)'(1+x-x^2)-(1+x-x^2)'(1-x+x^2)}{(1+x-x^2)^2}=$$

$$=\frac{(-1+2x)(1+x-x^2)-(1-2x)(1-x+x^2)}{(1+x-x^2)}=$$

$$=\frac{-1+2x\cancel{-x}\cancel{+2x^2}\cancel{+x^2}\cancel{-2x^3}-1\cancel{+x}\cancel{-x^2}+2x\cancel{-2x^2}\cancel{+2x^3}}{(1+x-x^2)^2}=\frac{-2+4x}{(1+x-x^2)^2}.$$

$$y'=0 \qquad \text{при} \qquad x=\frac{1}{2}\in[0;\ 1]$$

$$y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}}=\frac{3}{5}.$$

Таким образом, наибольшее значение функции на отрезке $[0;\ 1]$ равно $M=y(0)=y(1)=1$; наименьшее значение $m=y\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{5}$.

Ответ: $M=1$; $m=3/5$.

Задача 6. Вычислить приближенно с помощью дифференциала $\sqrt{8{,}88}$.

Решение. Для вычисления приближенного значения первым делом определяем функцию $y=\sqrt{x}$. Формула, по которой находим приближенное значение:

$\Delta y\approx dy$, где $\Delta y-$ приращение функции, $dy=f'(x)dx$ – дифференциал.

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0);$$

$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)dx$; т. к. $dx=\Delta x,\Rightarrow f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f''(x_0)\Delta x$.

Находим $x_0=9$; $\Delta x=-0{,}12$; $y_0=\sqrt{9}=3$; $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$; $f'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{9}}=\frac{1}{6}$.

Значит, $f(x_0+\Delta x)=\sqrt{9-0{,}12}=\sqrt{8{,}88}$; $\sqrt{8{,}88}\approx 3+\frac{1}{6}\cdot(-0{,}12)$.

Окончательно $\sqrt{8{,}88}\approx 3+(-0{,}02)$; $\sqrt{8{,}88}\approx 2{,}98$.

Ответ: $\approx 2{,}98$.

Задача 7. Вычислить производную неявно заданной функции:

$$y^2\sin x-\cos x+y\arcsin(xy)=0.$$

Решение. Для нахождения производной неявной функции применяем следующий алгоритм.

1. Дифференцируем выражение, считая, что y является функцией x;
2. Оставляем слагаемые, содержащие y', в левой части равенства, остальные переносим в правую часть;
3. Выражаем производную y'.

Применим этот алгоритм к данной неявной функции:

1) $2y\cdot y'\cdot\sin x+y^2\cdot\cos x-(-\sin x)+y'\cdot\arcsin(xy)+\frac{1}{\sqrt{1-(xy)^2}}\cdot(y+xy')\cdot y=0;$

$$2y\cdot y'\cdot\sin x+y^2\cos x+\sin x+y'\arcsin(xy)+\frac{y^2}{\sqrt{1-x^2y^2}}+\frac{y'xy}{\sqrt{1-x^2y^2}}=0;$$

2) $y'\left(2y\cdot\sin x+\arcsin(xy)+\frac{xy}{\sqrt{1-x^2y^2}}\right)=-\left(y^2\cos x+\sin x+\frac{y^2}{\sqrt{1-x^2y^2}}\right).$

3) $y'=-\dfrac{y^2\cos x+\sin x+\frac{y^2}{\sqrt{1-x^2y^2}}}{2y\cdot\sin x+\arcsin(xy)+\frac{xy}{\sqrt{1-x^2y^2}}}.$

Ответом является выражение, записанное в п. 3.

Задача 8. Для параметрически заданной функции $\begin{cases}x=2\ln t\\ y=t^4\end{cases}$ найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Решение. Дифференцируем $\dfrac{dy}{dx}=y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{4t^3}{\frac{2}{t}}=2t^4.$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{8t^3}{\frac{2}{t}}=4t^4.$$

Заметим, что если функция задана параметрически $x=\varphi(t),\ \ y=\psi(t),$ то $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ можно вычислить по другой формуле:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\psi''(t)\cdot\varphi'(t)-\varphi''(t)\cdot\psi'(t)}{(\varphi'(t))^3}.$$

Задача 9. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}4x}{e^{7x}-1}.$

Решение. Сначала нужно определить тип неопределенности. Если в задаче неопределенность $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$, то нужно сразу применить правило Лопиталя: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. В некоторых задачах п. а) встречается неопределенность $(\infty-\infty)$ или $(0\cdot\infty)$. В этом случае нужно тождественными преобразованиями сначала получить неопределенности $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$, а затем применить правило Лопиталя. В данном примере

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}4x}{e^{7x}-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+16x^2}\cdot 4}{7e^{7x}}=\frac{\frac{4}{1+0}}{7\cdot e^0}=\frac{4}{7}.$$

В некоторых случаях раскрытие неопределенностей $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ может потребовать неоднократного применения правила Лопиталя, например:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x-1}{4x^2+2x+5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+3}{8x+2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

б) В пункте б) задачи 9 встречаются неопределенности 0^0, ∞^0, 1^∞. Поступаем следующим образом: логарифмируя предварительно выражение, стоящее под знаком предела: $y=\left(f(x)\right)^{g(x)}$, определяем $\ln y = g(x)\ln f(x)$, затем предел $\ln y$, после чего находится и предел y.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{5x}$.

Решение. Здесь имеет место неопределенность 1^∞. Введем обозначение

$$y=\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{5x}.$$

Тогда $\ln y = 5x\cdot\ln\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)=5\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)}{\dfrac{1}{x}}$, т.е.имеет место неопределенность $\dfrac{0}{0}$.

По правилу Лопиталя находим предел

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=5\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)}{\dfrac{1}{x}}=5\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3x}}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}{-\dfrac{1}{x^2}}=\frac{5}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\dfrac{1}{3x}}=\frac{5}{3}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to\infty} y = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\ln y}=e^{5/3}$.

Ответ: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{5x}=e^{5/3}$.

Тема 2. Неопределенный интеграл

По этой теме необходимо решить 12 примеров. Задачи под пп. 1) и 2) контрольной работы – на формулу замены переменных, 3) и 4) – интегрирование по частям, 5) – циклический интеграл, 6) и 7) – интегралы от рациональной дроби,
8) – на преобразование произведения двух тригонометрических функций в сумму, 9) – на применение универсальной тригонометрической подстановки, 10) – сводится с интегралам от тангенсов и котангенсов, 11) – интеграл от иррациональной функции, 12 – интеграл на применение тригонометрической подстановки $x=a\cos t$, $x=a\sec t$ или $x=a\,\mathrm{tg}\,t$. Рассмотрим решения задач, подобных вышеперечисленным.

Вычислить интегралы:

1) $\displaystyle\int \frac{x^9\ dx}{\sqrt[3]{3x^{10}+2}}.$

Видим, что в числителе стоит x^9. Это производная от x^{10}, значит, выражение, содержащее x^{10}, заменяем на другую переменную:

$$t = 3x^{10}+2, \quad dt = 30x^9\ dx, \quad \frac{dt}{30} = x^9\ dx.$$

$$\int \frac{\frac{dt}{30}}{\sqrt[3]{t}} = \frac{1}{30}\int t^{-1/3}\ dt = \frac{1}{30}\cdot\frac{t^{-1/3+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{1}{30}\cdot\frac{t^{2/3}}{2/3} + C =$$

$$= \frac{t^{2/3}}{20} + c = \frac{\left(3x^{10}+2\right)^{2/3}}{20} + C.$$

2) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[5]{\left(2\arcsin x+4\right)^3}}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

Если под интегралом есть обратная тригонометрическая функция ($\arcsin x$, $\arccos\ x$, $\mathrm{arctg}\ x$, $\mathrm{arcctg}\ x$), то нужно посмотреть, содержит ли интеграл производную этой функции. Если производной нет, то решаем по частям, если есть – делаем замену переменных. В данном случае под интегралом есть $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ – производная от арксинуса, поэтому выражение, содержащее $\arcsin$ x, заменяем на другую переменную: $t = 2\arcsin x + 4$, $dt = \dfrac{2\cdot dx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \dfrac{dt}{2} = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\int \frac{\sqrt[5]{\left(2\arcsin x+4\right)^3}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \sqrt[5]{t^3}\,\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{3/5}\,dt = \frac{1}{2}\ \frac{t^{3/5+1}}{3/5+1} + C = \frac{1}{2}\,\frac{t^{8/5}}{8/5} + C =$$

$$= \frac{5}{16}t^{8/5} = \frac{5}{16}\left(2\arcsin x+4\right)^{8/5} + C = \frac{5}{16}\left(2\arcsin x+4\right)^{8/5} + C.$$

3), 4) Если интеграл содержит логарифм или обратную тригонометрическую функцию, но не содержат их производных, то такой интеграл нужно вычислять по частям, причем через u нужно обозначить логарифм или обратную тригонометрическую функцию, а через v – все остальное.

Формула интегрирования по частям: $\int u\ dv = u\,v - \int v\,du$.

Вычислить интегралы:

а) $\int x^3 \ln x\,dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x & dv = x^3 dx \\ du = \frac{1}{x}\,dx & v = \frac{x^4}{4} \end{matrix} \right| =$

$$= \ln x \cdot \frac{x^4}{4} - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4} + C = \frac{x}{4} \ln x - \frac{1}{16} x^4 + C.$$

б) $\int \operatorname{arctg} 4x\,dx = \left| \begin{matrix} u = \operatorname{arctg} 4x & dv = dx \\ du = \frac{1}{1+(4x)^2} \cdot 4dx & v = x \end{matrix} \right| =$

$$= x \cdot \operatorname{arctg} 4x - \int \frac{x \cdot 4}{1+16x^2} dx = x \operatorname{arctg} 4x - \int \frac{1}{8} \cdot \frac{32x\,dx}{1+16x^2} = x \operatorname{arctg} 4x - \frac{1}{8} \int \frac{d(1+16x^2)}{1+19x^2} =$$

$$= x \operatorname{arctg} 4x - \frac{1}{8} \ln\left|1+16x^2\right| + C.$$

Если под интегралом есть многочлен n–й степени, умноженный на тригонометрическую или показательную функцию, то такой интеграл нужно решать n раз по частям, причем через u обозначаем многочлен.

в) $\int x^3 \cos 2x\,dx = \left| \begin{matrix} u = x^3 & dv = \cos 2x\,dx \\ du = 3x^2\,dx & v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{matrix} \right| = \frac{1}{2} x^3 \sin 2x - \frac{3}{2} \int x^2 \sin 2x\,dx =$

$$= \left| \begin{matrix} u = x^2 & dv = \sin 2x\,dx \\ du = 2x\,dx & v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{matrix} \right| = \frac{1}{2} x^3 \sin 2x - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2} x^2 + \cos 2x + \frac{2}{2} \int x \operatorname{cox} 2x\,dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2} x^3 \sin 2x + \frac{3}{4} x^2 \cos 2x - \frac{3}{2} \int x \cos 2x\,dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x & dv = \cos 2x\,dx \\ du = dx & v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{matrix} \right| = \frac{1}{2} x^3 \sin 2x + \frac{3}{4} x^2 \cos 2x - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x\,dx \right) =$$

$$=\frac{1}{2}x^3\sin 2x+\frac{3}{4}x^2\cos 2x-\frac{3}{4}x\sin 2x+\frac{3}{4}\int\sin 2x\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}x^3\sin 2x+\frac{3}{4}x^2\cos 2x-\frac{3}{4}x\sin 2x-\frac{3}{8}\cos 2x+C.$$

5) Самыми распространенными из циклических интегралов являются интегралы от произведения показательной и тригонометрической функций. Их вычисляют по частям, при этом нужно буквой u два раза обозначить или тригонометрическую, или показательную функцию. Например, вычислим интеграл

$$J=\int e^{5x}\cos 3x\,dx=\left|\begin{matrix} u=e^{5x} & dv=\cos 3x\,dx \\ du=5e^{5x}\,dx & v=\frac{1}{3}\sin 3x\end{matrix}\right|=\frac{1}{3}e^{5x}\sin 3x-\frac{5}{3}\int e^{5x}\sin 3x\,dx=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=e^{5x} & dv=\sin 3x\,dx \\ du=5e^{5x}\,dx & v=-\frac{1}{3}\cos 3x\end{matrix}\right|=\frac{1}{3}e^{5x}\sin 3x-\frac{5}{3}\left(-\frac{1}{3}e^{5x}\cos 3x+\frac{5}{3}\int e^{5x}\cos 3x\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{3}e^{5x}\sin 3x+\frac{5}{9}e^{5x}\cos 3x-\frac{25}{9}\int e^{5x}\cos 3x\,dx+C.$$

Видим, что $J=\frac{1}{3}e^{5x}\sin 3x+\frac{5}{9}e^{5x}\cos 3x-\frac{25}{9}J+C \quad\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{34}{9}J=\frac{1}{3}e^{5x}\sin 3x+\frac{5}{9}e^{5x}\cos 3x+C\Rightarrow J=\frac{9}{34}\left(\frac{1}{3}e^{5x}\sin 3x+\frac{5}{9}e^{5x}\cos 3x\right)+C;$$

Окончательно получаем ответ: $J=\frac{3}{34}e^{5x}\sin 3x+\frac{5}{34}e^{5x}\cos 3x+C.$

6) Чтобы найти интеграл от правильной рациональной дроби, нужно разложить ее на сумму простейших дробей и взять интеграл от этой суммы. Рациональная дробь называется правильной, если у нее степень числителя меньше степени знаменателя. Если дана неправильная рациональная дробь, то сначала нужно столбиком поделить числитель на знаменатель и представить неправильную рациональную дробь в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

Пример. Вычислить $J=\int\frac{x^3-3x^2-12}{(x+2)(x-2)\,(x-1)}dx.$

Решение. Подынтегральная дробь неправильная, т. к. степени числителя и знаменателя равны трем. Так как $(x+2)(x-2)(x-1)=\left(x^2-4\right)(x-1)=$ $=x^3-x^2-4x+4,$ поделим

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{l} x^3-3x^2-12 \\ \underline{x^3-x^2-4x+4} \end{array} & \underline{x^3-x^2-4x+4} \\
-2x^2+4x-16 & 1
\end{array}
$$

тогда $\underbrace{x^3-3x^2-12}_{\text{делимое}}=\underbrace{1}_{\text{частное}}\cdot\underbrace{\left(x^3-x^2-4x+4\right)}_{\text{делитель}}+\underbrace{\left(-2x^2+4x+16\right)}_{\text{остаток}}.$

Подставим это выражение в интеграл

$$\int\frac{x^3-3x^2-12}{(x+2)(x-2)(x-1)}dx=\int\frac{1\cdot\left(x^3-x^2-4x+4\right)-2x^2+4x-16}{(x+2)(x-2)(x-1)}dx=$$

$$=\int\left(1+\frac{-2x^2+4x-16}{(x+2)(x-2)(x-1)}\right)dx=\int 1\cdot dx+\int\frac{-2x^2+4x-16}{(x+2)(x-2)(x-1)}dx=x+J_1.$$

Разложим в J_1 подынтегральную дробь методом неопределенных коэффициентов на сумму простейших дробей:

$$\frac{-2x^2+4x-16}{(x+2)\,(x-2)\,(x-1)}=\frac{A^{\backslash(x-2)(x-1)}}{x+2}+\frac{B^{\backslash(x+2)(x-1)}}{x-2}+\frac{C^{\backslash(x+2)(x-2)}}{x-1}=$$

$$=\frac{A\left(x^2-3x+2\right)+B\left(x^2+x-2\right)+C\,\left(x^2-4\right)}{(x+2)(x-2)(x-1)}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{-2x^2+4x-16}{(x+2)(x-2)(x-1)}=\frac{x^2(A+B+C)+x(-3A+B)+(2A-2B-4C)}{(x+2)(x-2)(x-1)}.$$

Так как у этих дробей знаменатели равны, то нужно найти коэффициенты A, B, C, чтобы числители дробей также были равны. Выпишем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$
\begin{array}{l|l}
x^2 & -2 = A + B + C \\
x^1 & 4 = -3A + B \\
x^0 & -16 = 2A - 2B - 4C
\end{array}
\quad \Rightarrow \begin{cases} A + B + C = -2 \\ -3A + B = 4 \\ A - B - 2C = -8 \end{cases}
$$

Решим эту систему из трех уравнений с тремя неизвестными методом Гаусса:

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -8 \end{array}\right)(\times 3)(\times -1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & -6 \end{array}\right)(\times 2) \sim
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & -14 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} A + B + C = -2 \\ 2B + 3C = 6 \\ \quad 3C = 14 \end{cases} \Rightarrow \underline{C = \frac{14}{3};}
$$

$$
2B - 6 - 3C = 6 - 3 \cdot \frac{14}{3} = 6 - 14 = -8 \ \Rightarrow \underline{B = -4;}
$$

$$
A = -2 - B - C = -2 + 4 - \frac{14}{3} = 2 - \frac{14}{3} \ \Rightarrow \underline{A = -\frac{8}{3}}.
$$

Значит, $\dfrac{-2x^2 + 4x - 16}{(x+2)(x-2)(x-1)} = \dfrac{-\frac{8}{3}}{x+2} + \dfrac{-4}{x-2} + \dfrac{\frac{14}{3}}{x-1} \quad \Rightarrow$

$$
\Rightarrow J_1 = \int \left(\frac{-\frac{8}{3}}{x+2} + \frac{-4}{x-2} + \frac{\frac{14}{3}}{x-1} \right) dx = -\frac{8}{3}\int \frac{dx}{x+2} - 4\int \frac{dx}{x-2} + \frac{14}{3}\int \frac{dx}{x-1} =
$$

$$
= -\frac{8}{3}\ln|x+2| - 4\ln|x-2| + \frac{14}{3}\ln|x-1| + C.
$$

Ответ: $J = x - \dfrac{8}{3}\ln|x+2| - 4\ln|x-2| + \dfrac{14}{3}|x-1| + C.$

7) Вычислить: $J = \displaystyle\int \frac{2x^2 - 3}{(x^2+2)(x-1)} dx.$

Разложим правильную подынтегральную дробь на сумму простейших дробей:

$$\frac{2x^2-3}{\left(x^2+2\right)(x-1)}=\frac{Ax+B^{\diagdown x-1}}{x^2+2}+\frac{C^{\diagdown x^2+2}}{x-1}=\frac{Ax\,(x-1)+B\,(x-1)+C\left(x^2+2\right)}{\left(x^2+2\right)(x-1)}=$$

$$=\frac{Ax^2-Ax+Bx-B+Cx+2C}{\left(x^2+2\right)(x-1)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{2x^2-3}{\left(x^2+2\right)(x-1)}=\frac{x^2(A+C)+x\,(-A+B)+(-B+2C)}{\left(x^2+2\right)(x-1)}$$

Методом неопределенных коэффициентов находим A, B, C:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & \\ x^1 & \\ x^0 & \end{array}\begin{cases} 2=A+C \\ 0=-A+B \\ -3=-B+2C \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} C=2-A \\ B=A \\ 2C=B-3 \end{cases}$$

Подставим в третье уравнение C и B. Получим

$$4-2A=A-3;\quad 3A=7;\quad A=\frac{7}{3};\quad B=\frac{7}{3};\quad C=2-\frac{7}{3}=-\frac{1}{3};\quad C=-\frac{1}{3}\ .$$

Значит, $\displaystyle\frac{2x^2-3}{\left(x^2+2\right)(x-1)}=\frac{\frac{7}{3}x+\frac{7}{3}}{x^2+2}+\frac{-\frac{1}{3}}{x-1};$

$$J=\int\left(\frac{\frac{7}{3}(x+1)}{x^2+2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1}\right)dx=\frac{7}{6}\int\frac{2x+2}{x^2+2}\,dx-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}=$$

$$=\frac{7}{6}\int\frac{2x\,dx}{x^2+2}+\frac{7}{3}\int\frac{dx}{x^2+2}-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}=$$

$$=\frac{7}{6}\ln\left|x^2+2\right|+\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{1}{3}\ln\ |x-1|+C.$$

Ответ: $J=\dfrac{7}{6}\ln\left|x^2+2\right|+\dfrac{7}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ \text{arctg}\,\dfrac{x}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{3}\ln|x-1|+C.$

8) Для интегрирования произведений синусов и косинусов различных аргументов применяются тригонометрические формулы:

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right)$$

Пример. Найти $\int\cos 15x\ \cos 20x\,dx=\int\frac{1}{2}\left(\cos 5x+\cos 35x\right)dx=$

$$=\frac{1}{2}\int\cos 5x\,dx+\frac{1}{2}\int\cos 35x\,dx=\frac{1}{10}\sin 5x+\frac{1}{70}\sin 35+C.$$

9) Интегралы вида $\int R(\sin x,\ \cos x)dx$, где $R(\sin x,\ \cos x)$ – рациональная функция двух переменных $(\sin x$ и $\cos x)$; приводятся к интегралам от рациональной функции нового аргумента t универсальной тригонометрической подстановкой $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, при этом используются формулы:

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2};\qquad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2};\qquad dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Пример. Найти $\int\frac{dx}{5+3\cos 2x+2\sin 2x}$.

Решение.

$$\int\frac{dx}{5+3\cos 2x+2\sin 2x}=\frac{1}{2}\int\frac{d(2x)}{5+3\cos 2x+2\sin 2x}=$$

$$=\left|\begin{array}{l} z=2x\\ dz=d(2x)\end{array}\right|==\frac{1}{2}\int\frac{dz}{5+3\cos z+2\sin z}=\left|\begin{array}{ll} t=\operatorname{tg}\frac{z}{2}; & \sin z=\frac{2t}{1+t^2}\\ dz=\frac{2dt}{1+t^2}; & \cos z=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{5(1+t^2)}{1+t^2}+\frac{3(1-t^2)}{1+t^2}+\frac{4t}{1+t^2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2\,dt}{5+5t^2+3-3t^2+4t}=\frac{1}{2}\int\frac{2\,dt}{2t^2+4t+8}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+2t+4}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{(t+1)^2+3}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ \mathrm{arctg}\,\frac{t+1}{\sqrt{3}}+C=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ \mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{tg}\,x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

10). Интегралы вида 1^0: $\int\sin^m x\ \cos^n x\ dx$.

а) Если хотя бы одно из чисел m, или n, – нечетное положительное число, то, отделяя от нечетной степени один сомножитель и выражая с помощью формулы $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ оставшуюся четную степень через дополнительную функцию, приходим к табличному интегралу.

Пример. Найти $\int\cos^3 x\ \ \sin^4 x\ dx$.

Решение. $\int\cos^3 x\ \ \sin^4 x\ dx=\int\cos^2 x\ \ \sin^4 x\cos x\ dx=\left|\begin{array}{l} t=\sin x\\ dt=\cos x\ dx\end{array}\right|=$

$$=\int\left(1-t^2\right)t^4\ dt=\int\left(t^4-t^6\right)dt=\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+C=\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{1}{7}\sin^7 x+C.$$

б) Если m и n – четные неотрицательные числа, то понижаем степени с помощью формул

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2},\qquad \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\qquad \sin 2x=2\sin x\cos x.$$

Пример. Найти $\int\sin^2 x\cos^2 x\ dx$.

Решение. $\int\sin^2 x\ \cos^2 x\ dx=\int\frac{1-\cos 2x}{2}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}\ dx=$

$$=\frac{1}{4}\int\left(1-\cos^2 2x\right)dx=\frac{1}{4}\int\sin^2\ 2x\ dx=\frac{1}{4}\int\frac{1-\cos 4x}{2}\ dx=$$

$$=\frac{1}{8}\left(\int dx-\int\cos 4x\ dx\right)=\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\sin 4x+C.$$

в) Если сумма $(m + n)$ является целым четным отрицательным числом, то целесообразно использовать подстановку $\operatorname{tg} x = t$ или $\operatorname{ctg} x = t$.

При этом применяем также формулы:

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x; \qquad \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{ctg}^2 x.$$

Пример: Найти $\int \cos^{1/3} x \ \sin^{-13/3} x \, dx$.

Решение: $m = \frac{-13}{3}$, $n = \frac{1}{3}$, $m + n = -\frac{12}{3} = -4$. Вычисление сводится к интегрированию степеней котангенса:

$$\int \frac{\cos^{1/3} x \, dx}{\sin^{13/3} x} = \int \operatorname{ctg}^{1/3} x \cdot \frac{dx}{\sin^4 x} = -\int \operatorname{ctg}^{1/3} x \cdot \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{-dx}{\sin^2 x} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{ctg} x \\ dt = \dfrac{-dx}{\sin^2 x} \\ \dfrac{1}{\sin^2 x} = 1 + t^2 \end{array} \right| = -\int t^{1/3}\left(1 + t^2\right) dt = -\int \left(t^{1/3} + t^{7/3}\right) dt = -\frac{t^{1/3+1}}{1/3+1} - \frac{t^{7/3+1}}{7/3+1} + C =$$

$$= -\frac{3}{4} t^{4/3} - \frac{3}{10} t^{10/3} + C = -\frac{3}{4} \operatorname{ctg}^{4/3} x - \frac{3}{10} \operatorname{ctg}^{10/3} x + C.$$

Интегралы 2^0, содержащие квадраты синусов и косинусов в знаменателе, также можно свести к интегралам от тангенсов или котангенсов.

Пример. Найти $\int \frac{dx}{5\cos^2 x + 3\sin^2 x}$.

Решение:

$$\int \frac{dx}{5\cos^2 x + 3\sin^2 x} = \int \frac{\dfrac{dx}{\cos^2 x}}{\dfrac{5\cos^2 x}{\cos^2 x} + \dfrac{3\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \int \frac{d \operatorname{tg} x}{5 + 3\operatorname{tg}^2 x} = \left| \begin{array}{l} z = \operatorname{tg} x \\ dz = d \operatorname{tg} x \end{array} \right| = \int \frac{dz}{5 + 3z^2} =$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{dz}{5/3 + z^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{5/3}} \ \operatorname{arctg} \ \frac{z}{\sqrt{5/3}} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{15}} \cdot \operatorname{arctg} \ \frac{\sqrt{3} z}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{\sqrt{15}} \ \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} x}{\sqrt{5}} \right) + C$$

11) Для того чтобы вычислить интеграл от иррациональной функции нужно подобрать подходящую замену переменных, которая избавит нас от иррациональности. Например, если интеграл содержит $x^{2/5}$ и $x^{3/7}$, то подстановка $t = x^{1/35}$ избавит нас от обоих иррациональностей. Подробнее с теорией можно ознакомиться в книгах [1] и [2].

Пример. Вычислить интеграл

$$\int \frac{\sqrt[3]{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+\sqrt[6]{x+1}}\,dx = \left| \begin{array}{l} \text{пусть } t=\sqrt[6]{x+1}, \text{ тогда} \\ t^6 = x+1 \\ 6t^5\,dt = dx \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{t^2+2}{t^3+t}\cdot 6t^5\,dt = 6\int \frac{t^6+2t^4}{t^2+1}\,dt = J.$$

Под знаком интеграла получили неправильную дробь. Поделим столбиком числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{r|l} t^6+2t^4 & t^2+1 \\ \cline{2-2} \underline{t^6+t^4} & t^4+t^2+1 \\ t^4 & \\ \underline{t^4+t^2} & \\ t^2 & \\ \underline{t^2+1} & \\ -1 & \end{array}$$

Получим $t^6+t^4 = \left(t^2+1\right)\left(t^4+t^2+1\right)-1$. Подставим это выражение в подынтегральную дробь.

Тогда $$J = 6\int \frac{\left(t^2+1\right)\left(t^4+t^2+1\right)-1}{t^2+1}\,dt = 6\int\left(t^4+t^2+1\right)dt - 6\int\frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{6t^5}{5}+\frac{6t^3}{3}+6t-6\operatorname{arctg} t + C = \frac{6\sqrt[6]{(x+1)^5}}{5}+2\sqrt{x+1}+6\sqrt[6]{x+1}-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x+1}+C.$$

12) Интегралы, содержащие $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$, $\sqrt{x^2+a^2}$, решаем соответственно следующими заменами переменных: $x = a\cos t$, $x = \dfrac{a}{\cos t}$, $x = a\,\operatorname{tg}\,t$.

Заметим, что при вычислении подобных интегралов нужно придерживаться следующего плана.

1. Подобрать подходящую замену переменных.
2. Выразить из нее тригонометрическую функцию в виде дроби, при этом? если у вас нет дроби, то делим на единицу. Например:

$$x = 2\cos t \Rightarrow \cos t = \frac{x}{2};$$

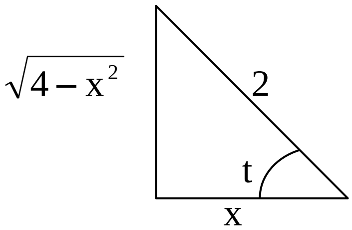
$$x = \operatorname{tg} t \Rightarrow \operatorname{tg} t = \frac{x}{1}.$$

3. Построить прямоугольный треугольник с острым углом t и выразить в нем катеты и гипотенузу. Из школьного курса геометрии известно

$$\cos\ t = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}}; \qquad \sin\ t = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}};$$

$$\operatorname{tg}\ t = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{прилежащий катет}};$$

Если, например, $\cos t = \frac{x}{2}$, то треугольник выглядит так:



Наличие этого треугольника в дальнейшем существенно облегчит возвращение к старой переменной x.

4. Выразить dx и один из корней $\sqrt{x^2 - a^2}$, $\sqrt{x^2 + a^2}$, $\sqrt{a^2 - x^2}$ через t.
5. Вычислить интеграл от переменной t.
6. Вернуться назад по треугольнику к исходной переменной x.

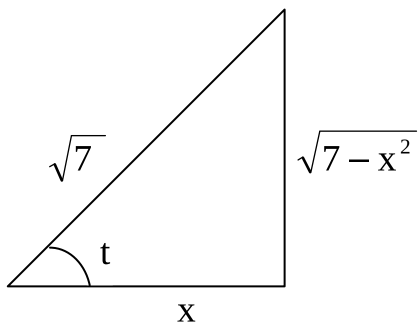
Примеры

а) $\int \sqrt{7 - x^2}\ dx.$

Здесь $a^2 = 7$, $\sqrt{a^2 - x^2}$, значит введем новую переменную t следующим образом:

$$x = \sqrt{7}\ \cos\ t\ \Rightarrow\ \cos t = \frac{x}{\sqrt{7}};\quad dx = -\sqrt{7}\ \sin\ t$$

$$\sqrt{7 - x^2} = \sqrt{7 - 7\cos^2 t} = \sqrt{7}\sin\ t$$



$$\int \sqrt{7}\ \sin\ t\left(-\sqrt{7}\ \sin t\right)dt = -7\int \sin^2 t\ dt = -7\int \frac{1 - \cos\ 2t}{2}\ dt =$$

$$= -\frac{7}{2}\int dt + \frac{7}{2}\int \cos\ 2t\ dt = -\frac{7}{2}t + \frac{7}{4}\sin\ 2t + C = J.$$

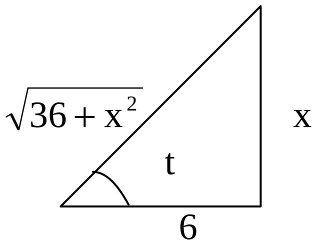
Для возвращения к переменной x, нужно чтобы тригонометрические функции были только от угла t, поэтому заменим

$$\sin\ 2t = 2\sin t\ \cos\ t = 2\cdot\frac{\sqrt{7-x^2}}{\sqrt{7}}\cdot\frac{x}{\sqrt{7}} = -\frac{7}{2}\arccos\frac{x}{\sqrt{7}} + \frac{1}{2}\sqrt{7-x^2}\cdot x + C.$$

$$J = -\frac{7}{2}\arccos\frac{x}{\sqrt{7}} + \frac{7}{4}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{7-x^2}\cdot x}{7} + C = -\frac{7}{2}\arccos\frac{x}{\sqrt{7}} + \frac{1}{2}\sqrt{7-x^2}\cdot x + C$$

б) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2\sqrt{36+x^2}} = J.$

Здесь $\sqrt{36+x^2} \Rightarrow x = 6\,tg\ t \quad \Rightarrow\ tg\ t = \dfrac{x}{6};$



$$dx = \frac{6}{\cos^2 t}dt;\ \sqrt{36+x^2} = \sqrt{36+36\,tg^2\,t} = 6\sqrt{1+tg^2\,t} = \frac{6}{\cos t}.$$

Подставим эти выражения в J:

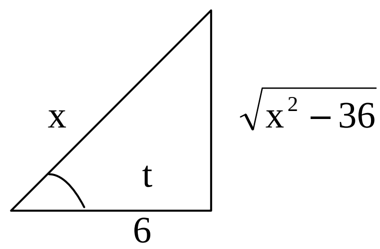
$$\int\frac{\dfrac{6}{\cos^2 t}dt}{36\,tg^2\,t\cdot\dfrac{6}{\cos t}} = \int\frac{\dfrac{dt}{\cos t}}{36\dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} = \frac{1}{36}\int\frac{\cos t\ dt}{\sin^2 t} = \frac{1}{36}\int\frac{d\sin t}{\sin^2 t} = \frac{1}{36}\int(\sin\ t)^{-2}d(\sin\ t) =$$

$$= \frac{1}{36}\frac{(\sin\ t)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{36\sin\ t} + C = -\frac{1}{36\cdot\dfrac{x}{\sqrt{36+x^2}}} + C = -\frac{\sqrt{36+x^2}}{36x} + C.$$

в) $\displaystyle\int x\ \sqrt{x^2-36}\ d = J.$

Решение. В интеграле есть $\sqrt{x^2-36},$ значит, $a^2 = 36,\ a = 6;\quad x = \dfrac{6}{\cos\ t}.$

$$x = \frac{6}{\cos\ t};\quad \cos t = \frac{6}{x}.$$



$$dx = \frac{-6}{\cos^2 t}\cdot(-\sin t)\,dt = \frac{6\sin t\ dt}{\cos^2 t}$$

$$\sqrt{x^2-36} = \sqrt{\frac{36}{\cos^2 t}-36} = 6\,tg\ t$$

$$J = \int\frac{6}{\cos t}\cdot\frac{6\ \sin\ t}{\cos\ t}\cdot\frac{6\ \sin\ t\ dt}{\cos^2\ t} = 216\int tg^2\,t\,d\ tg\ t = 216\,\frac{tg^3\,t}{3} + C = 72\,tg^3\,t + C =$$

$$= 72\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-36}}{6}\right)^3 + C = \frac{72}{216}\left(\sqrt{x^2-36}\right)^3 + C = \frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2-36}\right)^3 + C.$$

Тема 3. Определенный интеграл

Результатом вычисления определенного интеграла является число. При его нахождении нужно использовать формулу Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, которую находим, вычисляя неопределенный интеграл $\int f(x)\,dx$. Если при этом используется формула замены переменных $x = \varphi(t)$, то нужно сразу заменить и пределы интегрирования: новый нижний и верхний пределы находим из тождеств $\varphi(t_1) = a$, $\varphi(t_2) = b$.

Если считаем определенный интеграл по частям, то используем формулу

$$\int\limits_a^b u\,dv = u\,v\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du.$$

Примеры. Вычислить интегралы:

а) $$\int\limits_0^{\pi/3} \cos^3 x\,dx = \int\limits_0^{\pi/3} \cos^2 x \cos x\,dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x\,dx \\ x_1 = 0 \Rightarrow t_1 = 0 \\ x_2 = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow t_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right| = \int\limits_0^{\sqrt{3}/2} \left(1 - t^2\right) dt =$$

$$= t\Big|_0^{\sqrt{3}/2} - \frac{t^3}{3}\Big|_0^{\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - 0 - \frac{1}{3}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 0\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{4\sqrt{3} - \sqrt{3}}{8} = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Ответ: $J = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

б) $$J = \int\limits_1^3 x^2 \ln x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & dv = x^2\,dx \\ du = \dfrac{1}{3}dx & v = \dfrac{x^3}{3} \end{array} \right| = \frac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^3 - \int\limits_1^3 \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left(3^3 \ln 3 - 1^3 \ln 1\right) - \frac{1}{3}\int\limits_1^3 x^2\,dx = \frac{1}{3}\cdot 3^3 \ln 3 - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = 27\ln 3 - \frac{1}{9}\cdot 3^3 = 27\ln 3 - 3.$$

Ответ: $J = 27\ln 3 - 3$.

2. Примеры: Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

а) $J=\int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{x^5}$. Верхний предел интегрирования $b=\infty$. Это несобственный интеграл 1–го рода.

$$J=\lim_{в\to\infty}\int\limits_2^{в}\frac{dx}{x^5}=\lim_{в\to\infty}\left(\frac{x^{-4}}{-4}\bigg|_2^{в}\right)=-\frac{1}{4}\lim_{в\to\infty}\left(в^{-4}-2^{-4}\right)=-\frac{1}{4}\lim_{в\to\infty}\left(\frac{1}{в^4}-\frac{1}{16}\right)=-\frac{1}{4}\left(0-\frac{1}{16}\right)=\frac{1}{64}.$$

Следовательно, интеграл сходится.

б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos x\,dx=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ в\to+\infty}}\int\limits_a^{в}\cos x\,dx=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ в\to+\infty}}(\sin в-\sin a)$ – интеграл расходится, т.к. данный предел не существует.

Ответ: интеграл расходится.

в) $J=\int\limits_0^2\frac{dx}{x^2-4}$.

Подынтегральная функция $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$ при $x=2$ равна бесконечности. Это несобственный интеграл 2-го рода.

$$J=\lim_{в\to 2-0}\int\limits_0^{в}\frac{dx}{x^2-4}=\lim_{в\to 2-0}\left(\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\bigg|_0^{в}\right)=\frac{1}{4}\lim_{в\to 2-0}\left(\ln\left|\frac{в-2}{в+2}\right|-\ln\left|\frac{0-2}{0+2}\right|\right)=$$

$$=\frac{1}{4}(-\infty-\ln 1)-\text{интеграл расходится}.$$

Ответ: интеграл расходится .

г) $J=\int\limits_0^2\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

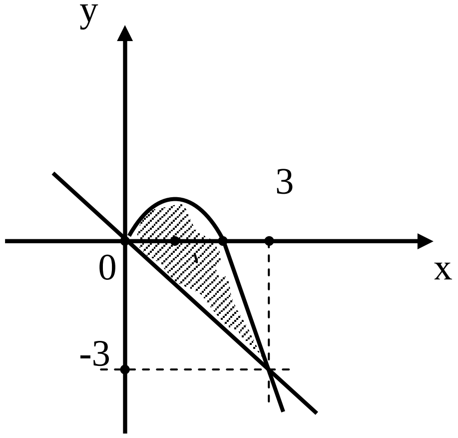
Подынтегральная функция $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ терпит бесконечный разрыв при $x=0$.

$$J=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^{2}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(2\sqrt{x}\Big|_{\varepsilon}^{2}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(2\sqrt{2}-2\sqrt{\varepsilon}\right)=2\sqrt{2}.$$

Ответ: интеграл сходится.

3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=-x$, $y=2x-x^2$.

Решение. Построим данные прямую и параболу и найдем точки их пересечения:



$$-x=2x-x^2$$
$$x^2-3x=0$$
$$x(x-3)-0$$
$$x_1=0, \quad x_2=3$$

По формуле $S=\int\limits_a^в (f_2(x)-f_1(x))dx$ находим искомую площадь:

$$S=\int\limits_0^3 \left(2x-x^2-(-x)\right)dx=\int\limits_0^3 \left(3x-x^2\right)dx=\left.\frac{3x^2}{2}\right|_0^3-\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^3=$$

$$=\frac{3}{2}\left(3^2-0^2\right)-\frac{1}{3}\left(3^3-0\right)=\frac{27}{2}-9=\frac{9}{2}.$$

Ответ: $\frac{9}{2}$.

Для нахождения длины дуги кривой используются следующие формулы:

(1) $\ell=\int\limits_a^в \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$, если кривая задана уравнением $y=f(x)$;

(2) $\ell=\int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x'_t\right)^2+\left(y'_t\right)^2}\,dt$,– если кривая задана параметрически: $x=x(t), y=y(t)$.

(3) $\ell=\int\limits_\alpha^\beta \sqrt{r^2+\left(r'_\varphi\right)^2}\,d\varphi$, – если кривая задана уравнением в полярных координатах $r=r(\varphi)$.

Примеры: Вычислить длину дуги кривой:

а) $y=\sqrt{x^3}$ $\qquad (-0 \le x \le 1)$.

Решение: Находим $f'(x)=\left(x^{3/2}\right)'=\frac{3}{2}x^{1/2}$ и подставляем в формулу (1):

$$\ell=\int_0^1\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{4}{9}\int_0^1\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\ d\left(\frac{9}{4}x+1\right)=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{8}{27}\left(\left(\frac{13}{4}\right)^{3/2}-1^{3/2}\right)=\frac{8}{27}\left(\frac{13\sqrt{13}}{4\sqrt{4}}-1\right)=\frac{8}{27}\ \frac{13\sqrt{3}-8}{8}=\frac{13\sqrt{3}-8}{27}.$$

б) $x=3\cos t$, $\qquad y=3\sin t$, $\qquad 0\le t\le\frac{\pi}{2}$.

Решение. Подставляем в формулу (2) $x'_t=-3\sin t$ и $y'_t=3\cos t$:

$$\ell=\int_0^{\pi/2}\sqrt{9\sin^2 t+9\cos^2 t}\ dt=\int_0^{\pi/2}3\,dt=3\,t\Big|_0^{\pi/2}=\frac{3\pi}{2}.$$

в) $r=2e^{\varphi}$, $\qquad 0\le\varphi\le 5$.

Решение: Находим $r'_{\varphi}=2e^{\varphi}$ и подставляем ее в формулу (3):

$$\ell=\int_0^5\sqrt{4\,e^{2\varphi}+4e^{2\varphi}}\ d\varphi=2\int_0^5 e^{\varphi}\,d\varphi=2e^{\varphi}\Big|_0^5=2\cdot\left(e^5-e^0\right)=2\left(e^5-1\right).$$

Тема 4. Функции нескольких переменных

Задача 1. Найти частные производные первого и второго порядков.

$$u=x^4\cos\sqrt[3]{3y-4z}.$$

Решение. Функция u зависит от трех переменных: x, y и z. Для нахождения частных производных 1-го порядка по любой из этой переменной считаем остальные переменные константами:

$$u'_x=\cos\sqrt[3]{3y-4z}\cdot 4x^3.$$

$$u'_y = x^4 \cdot \left(-\sin\sqrt[3]{3y-4z}\right) \cdot \frac{1}{3}(3y-4z)^{-2/3} \cdot 3 = -\frac{x^4 \sin\sqrt[3]{3y-4z}}{(3y-4z)^{2/3}}.$$

$$u'_z = x^4 \cdot \left(-\sin -\sqrt[3]{3y-4z}\right) \cdot \frac{1}{3}(3y-4z)^{-2/3} \cdot (-4) = \frac{4x^4 \sin\sqrt[3]{3y-4z}}{3(3y-4z)^{2/3}}.$$

Частные производные 1-го порядка, в свою очередь, также являются функциями от переменных x, y и z и их можно снова дифференцировать. Получаем частные производные второго порядка:

$$u''_{xx} = 4\cos\left(\sqrt[3]{3y-4z}\right) \cdot 3x^2 = 12x^2 \cos\sqrt[3]{3y-4z} \cdot$$

$$u''_{xy} = 4x^3 \cdot (-\sin)\sqrt[3]{3y-4z} \cdot \frac{1}{3}(3y-4z)^{-2/3} \cdot 3 = \frac{-4x^3 \cdot \sin\sqrt[3]{3y-4z}}{(3y-4z)^{2/3}}.$$

$$u''_{yy} = -x^4 \cdot \left(\frac{\cos\sqrt[3]{3y-4z} \cdot \frac{1}{\cancel{3}}\cancel{(3y-4z)^{-2/3}} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{(3y-4z)^{2/3}}}{(3y-4z)^{4/3}} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sin\sqrt[3]{3y-4z} \cdot \frac{2}{3}(3y-4z)^{-1/3} \cdot 3}{(3y-4z)^{4/3}} \right) =$$

$$= -x^4 \cdot \frac{\cos\sqrt[3]{3y-4z} - 2\sin\sqrt[3]{3y-4z} \cdot (3y-4z)^{-1/3}}{(3y-4z)^{4/3}}.$$

$$u''_{yx} = -\frac{\sin\sqrt[3]{3y-4z}}{(3y-4z)^{2/3}} \cdot 4x^3.$$

Видим, что выполняется правило: смешанные частные производные одного порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой:
$u''_{xy} = u_{yx}$, $u''_{yz} = u''_{zy}$ и т. д.

$$u''_{zx} = \frac{4\sin\sqrt[3]{3y-4z}}{3(3y-4z)^{2/3}} \cdot 4x^3 = \frac{16x^3 \sin\sqrt[3]{3y-4z}}{3(3y-4z)^{2/3}}.$$

$$u''_{zz}=\frac{4}{3}x^4\cdot\left(\frac{\cos\sqrt[3]{3y-4z}\cdot\frac{1}{3}(3y-4z)^{-2/3}\cdot(-4)\cdot(3y-4z)^{2/3}}{(3y-4z)^{4/3}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\sin\sqrt[3]{3y-4z}\cdot\frac{2}{3}(3y-4z)^{-1/3}\cdot(-4)}{(3y-4z)^{4/3}}\right)=$$

$$=-\frac{16x^4}{9}\cdot\frac{\cos\sqrt[3]{3y-4z}-2\sin\sqrt[3]{3y-4z}\cdot(3y-4z)^{-1/3}}{(3y-4z)^{4/3}}.$$

$$u''_{zy}=\frac{4x^4}{3}\cdot\left(\frac{\cos\sqrt[3]{3y-4z}\cdot\frac{1}{3}(3y-4z)^{-2/3}\cdot 3\cdot(3y-4z)^{2/3}}{(3y-4z)^{4/3}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\sin\sqrt[3]{3y-4z}\cdot\frac{2}{3}(3y-4z)^{-1/3}\cdot 3}{(3y-4z)^{4/3}}\right)=$$

$$=\frac{4x^4}{3}\cdot\frac{\cos\sqrt[3]{3y-4z}-2\sin\sqrt[3]{3y-4z}\,(3y-4z)^{-1/3}}{(3y-4z)^{4/3}}.$$

Задача 2. Вычислить приближенно $(2{,}05)^3\cdot(1{,}99)^2$.

Решение. Имеет место приближенное равенство

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)\approx f(x,\ y)+f'_x(x,\ y)\cdot\Delta x+f'_y(x,y)\cdot\Delta y.$$

Рассмотрим функцию $z=f(x,y)=x^3\cdot y^2$, тогда

$$(2{,}05)^3\cdot(1{,}99)^2=(x+\Delta x)^3(y+\Delta y)^2,\quad \text{где}\quad x=2;\ \Delta x=0{,}05;\quad y=2;\quad \Delta y=-0{,}01.$$

Воспользуемся формулой (1), предварительно найдя $z'_x=f'_x(x,y)$ и $z'_y=f'_y(x,y)$:

$$z'_x=3x^2\cdot y^2=3\cdot 4\cdot 4=48;$$

$$z'_y=x^3\cdot 2y=2^3\cdot 4=32.$$

Следовательно, $(2{,}05)^3\cdot(1{,}99)^2\approx 2^3\cdot 2^2+48\cdot 0{,}05-32\cdot 0{,}01=$
$=32+2{,}4-0{,}32=32+2{,}08.$

Ответ: $(2{,}05)^3\cdot(1{,}99)^2\approx 34{,}08.$

Задача 3. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности F в точке $M(x_0,\ y_0,\ z_0)$, где $F: x^3+y^3-2z=0,\qquad M(-1,\ 1,\ 0).$

Решение. Если поверхность F задана уравнением $F(x,\ y,\ z)=0$, то уравнения касательной плоскости и нормали имеют вид

$$F'_x(x_0,\ y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,\ y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,\ y_0,z_0)(z-z_0)=0,$$

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,\ y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,\ y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,\ y_0,z_0)}.$$

Тогда $x_0=-1,\quad y_0=1,\quad z_0=0.$

Находим $F'_x(x_0,\ y_0,\ z_0)=3x_0^2=3\cdot(-1)=3.$

$F'_y(x_0,\ y_0,\ z_0)=3y_0^2=3\cdot 1^2=3.$

$F'_z(x_0,\ y_0,\ z_0)=-2.$

Подставим в уравнение касательной:

$$3(x+1)+3(y-1)-2(z-0)=0;\qquad 3x+3y-2z=0.$$

Подставим в уравнение нормали

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{-2}.$$

Ответ: Касательная плоскость: $3x+3y-2z=0.$

Нормаль: $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z}{-2}.$

Задача 4. Найти экстремумы функции двух переменных $z=x^3+y^3-3x-3y.$

Решение: Находим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-3;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=3y^2-3.$$

Находим стационарные точки, используя необходимые условия:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ 3y^2 - 3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3\left(x^2 - 1\right) = 0 \\ 3\left(y^2 - 1\right) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3(x-1)(x+1) = 0 \\ 3\,(y-1)\,(y+1) = 0 \end{cases}$$

$$P_1(1, 1), \qquad P_2(1, -1), \qquad P_3(-1, 1), \qquad P_4(-1, -1)$$

Найдем частные производные второго порядка:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \qquad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 0, \qquad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

Составим дискриминант $\Delta = AC - B^2$ для каждой из стационарных точек:

1) $P_1(1,\ 1)$: $\quad A = 6, \quad B = 0, \quad C = 6, \quad \Delta = 36 > 0.$

Следовательно, в точке P_1 есть экстремум. Так как $A = 6 > 0,$ то в точке P_1 функция имеет минимум, равный $z_{min} = z\Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = 1 + 1 - 3 - 3 = -4.$

2) $P_2(1,\ -1)$: $\quad A = 6, \quad B = 0, \quad C = -6, \quad \Delta = -36 < 0.$
Следовательно, в точке P_2 функция экстремума не имеет.

3) $P_3(-1,\ 1)$: $\quad A = -6, \quad B = 0, \quad C = 6, \quad \Delta = -36 < 0.$
Следовательно, в точке P_3 функция экстремума не имеет.

4) $P_4(-1,\ -1)$: $\quad A = -6, \quad B = 0, \quad C = -6, \quad \Delta = 36 > 0.$

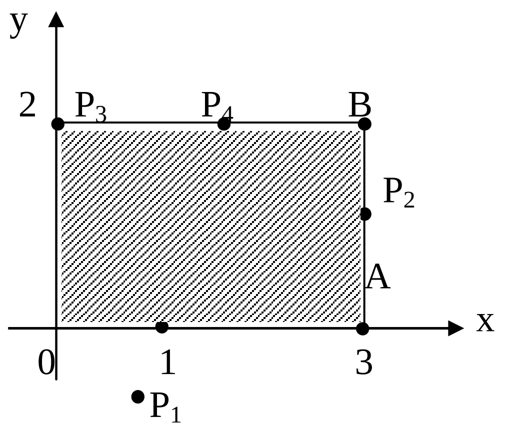
Следовательно, в точке P_4 функция имеет экстремум. Так как $A = -6 < 0$, то это максимум.

Находим $z_{max} = z\Big|_{\substack{x=-1 \\ y=-1}} = -1 - 1 + 3 + 3 = 4$

Ответ: $z_{max} = z\Big|_{\substack{x=-1 \\ y=-1}} = 4, \qquad z_{min} = z\Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = -4.$

Задача 5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 y(3 - 2x + y)$ в прямоугольнике, ограниченном прямыми: $x = 0,\ y = 0,\ x = 3,\ y = 2.$

Решение: Преобразуем функцию z к виду $z = 3x^2y - 2x^3y + x^2y^2$. Найдем стационарные точки, лежащие внутри данного треугольника:



$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 6xy - 6x^2y + 2xy^2 = 2xy(3 - 3x + y) = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 - 2x^3 + 2x^2y = x^2(3 - 2x + 2y) = 0. \end{cases}$$

Приравнивая производные к нулю, можно на x и y сократить, т. к. внутри прямоугольника $x > 0$, $y > 0$. Тогда

$$\begin{cases} y - 3x = -3 \\ 2y - 2x = -3; \end{cases} \qquad \begin{cases} -2y + 6x = 6 \\ 2y - 2x = -3 \end{cases} \qquad 4x = 3; \qquad x = \frac{3}{4}.$$

Следовательно, $y = -3 + 3 \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{-12 + 9}{4} = -\dfrac{3}{4}$.

Стационарная точка с координатами $P_1\left(\dfrac{3}{4}, -\dfrac{3}{4}\right)$, не лежит в области.

Находим экстремум функции на границах:

а) $x = 0$, тогда $z = 0$.

б) $y = 0$, тогда $z = 0$.

в) $x = 3$, тогда $z = 9y(3 - 6 + y) = 9y(y - 3) = 9y^2 - 27y$

$$z'_y = 18y - 27 = 0, \qquad y = \frac{27}{18} = \frac{3}{2}.$$

В точке $P_2\left(3, \dfrac{3}{2}\right)$ находим значение функции z:

$$z\big|_{p_2} = 9 \cdot \frac{9}{4} - 27 \cdot \frac{3}{2} = -\frac{81}{4} = -20{,}25.$$

г) $y=2$, тогда $z=2x^2(3-2x+2)=10x^2-4x^3$,

$$z'_x=20x-12x^2=4x(5-3x)=0.$$

При $x_1=0$, имеет место точка $P_3(0,\ 2)$; $z|_{P_3}=0$.

При $x=\dfrac{5}{3}$; точка P_4 имеет координаты $\left(\dfrac{5}{3},\ 2\right)$; $z|_{P_4}=10\cdot\dfrac{25}{9}-4\cdot\dfrac{125}{27}=\approx 9{,}2$.

Находим значения функции в точках пересечения границ:

а) $0(0,\ 0)$ $z|_0=0$

б) $A(3,\ 0)$ $z|_A=0$

в) $B(3\ ,2)$ $z|_B=9\cdot 2(3-6+2)=-18$.

Из всех значений функции в этих точках выбираем наибольшее и наименьшее:

$$z_{max}=z|_{P_4}=\frac{250}{27};\qquad z_{min}=z|_{P_2}=-20{,}25.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. М.: Рольф, 2000. Ч.1. 288 с. с илл.
2. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. – М.: Наука, 1968. – Т. 1. – 440 с.
3. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. – М.: Наука, 1964. – Т. 1. – 544 с.
4. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов /Под ред. Демидовича Б.П. – М.: Наука, 1970. – 286 с.
5. Сборник задач пол математике для втузов. Линейная алгебра и основы ма–тематического анализа / Под ред. Ефимова А.В., Демидовича Б.П. –М.: Наука, 1981. – 472 с.
6. Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учеб. Пособие / Под ред. Ермакова В. И. – М.: ИНФРА, 2001. – 575 с.
7. Сборник задач и упражнений по курсу высшей математики / Под ред. Кручковича Г.И. М.: Высш. шк., 1973. – 576 с.

Редактор Г. М. Кляут
ИД 06039 от 12.10.01.
Подписано в печать 3.10.03. Формат 60х84 1/16. Бумага офсетная.
Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ. л. 4,25. Уч.- изд. л. 4,25.
Тираж 100 экз. Заказ .

Издательство ОмГТУ. 644050, г. Омск, пр-т Мира, 11
Типография ОмГТУ