Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

“Омский государственный технический университет”

ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Методические указания к практическим занятиям
и типовой расчет

Омск-2005

Составители: Степанов Владимир Николаевич, доцент, канд. физ.- мат. наук
Чурашева Надежда Георгиевна, ст. преподаватель

Печатается по решению редакционно-издательского совета Омского государственного технического университета

1. СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

В математике и физике приходится иметь дело с величинами двух типов: скалярными и векторными. Скалярные величины характеризуются при выбранной единице измерения одним числом (масса, заряд…). Векторные величины характеризуются помимо числа, измеряющего их, еще и своим направлением в пространстве (скорость точки, напряженность электрического заряда, …).

Если в каждой точке пространства (или некоторой его области) определено значение физической величины, то говорят, что задано поле этой величины.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Скалярным полем называется пространство (или его область), в каждой точке которого определена некоторая скалярная функция

$$u = u(x, y, z).$$

Изучим основные характеристики скалярного поля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Геометрическое место точек пространства, в которых функция u(x, y, z) имеет одно и то же значение, называется поверхностью уровня или эквипотенциальной поверхностью скалярного поля.

Поверхности уровня определяются уравнением

$$u(x, y, z) = \text{const}.$$

Рассмотрим примеры.

1. Определить эквипотенциальные поверхности поля электростатического потенциала.

Решение. Потенциал электростатического поля определяется формулой

$$u(x, y, z) = \frac{q}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}},$$

где q – величина заряда; a, b, c – координаты точки, в которой помещен заряд.

Уравнение эквипотенциальных поверхностей имеет вид

$$\frac{q}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} = c,$$

откуда $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = \left(\frac{q}{c}\right)^2$.

Эквипотенциальные поверхности представляют собой концентрические сферы с центром в точке A(a; b; c) и радиусами $|q/c|$. Интересно отметить, что с увеличением C эквипотенциальные поверхности сближаются, сгущаясь в точке, в которой находится заряд.

2. Найти поверхности уровня скалярного поля $u(x, y, z) = A\exp[-h(\bar{i}, \bar{q})]$, где $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, а $\vec{q} = q\cdot(\cos\alpha\cdot\vec{i} + \cos\beta\cdot\vec{j} + \cos\gamma\cdot\vec{k})$, $q = |\vec{q}|$ – постоянный вектор (волновой вектор), h – постоянная распространения среды, постоянная A – амплитуда.

Решение. Уравнение поверхностей уровня

$$e^{-q\cdot(\cos\alpha\cdot x + \cos\beta\cdot y + \cos\gamma\cdot z)} = c.$$

Так как h и q – постоянные числа, получим выражение

$$\cos\alpha\cdot x + \cos\beta\cdot y + \cos\gamma\cdot z = c_1.$$

Это уравнение представляет семейство параллельных плоскостей. Приведённое скалярное поле описывает плоскую волну, распространяющуюся в направлении вектора $\vec{q}_0 = \{\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma\} \parallel \vec{q}$, а поверхности уровня этого поля – фронт волны.

3. Найти поверхности уровня скалярных полей:

а) $u = \dfrac{x^2 + y^2}{z}$; б) $u = x^2 - y^2$; в) $u + x\ln u + y = 0$.

Решение. Например, в плоского поля б) линии уровня $x^2 - y^2 = C$ – семейство гипербол.

Важной характеристикой скалярного поля u(x, y, z) является скорость его изменения в любом направлении. Пусть M_0 – точка поля. Проведём через M_0 луч ℓ, где $\vec{\ell}_0$ - единичный вектор луча ℓ. На луче ℓ выберем точку M, близкую к точке M_0.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Производной скалярного поля u в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ по направлению ℓ называется предел (если он существует)

$$\lim_{\Delta\ell\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta\ell}, \quad \Delta u = u(M) - u(M_0), \quad \Delta\ell = \left|\overline{M_0M}\right|.$$

Такая производная обозначается: $\partial u/\partial\ell$..

Пусть u(x, y, z) дифференцируема. Производная от u по направлению, определяемому направляющими cos α, cos β, cos γ, вычисляется по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial\ell} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \qquad (1)$$

4. Найти производную скалярного поля $u = x^2y + xz^2 - 2$ в точке M_0 (1; 1; -1) по направлению к точке M_1(2; -1; 3).

Решение. Найдём вектор $\overline{M_0M_1}$ и его направляющие косинусы: $\overline{M_0M_1} = (1; -2; 4)$. Длина вектора $\left|\overline{M_0M_1}\right| = \sqrt{1+4+16} = \sqrt{21}$. Следовательно,

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{21}}, \ \cos\beta = \frac{-2}{\sqrt{21}}, \ \cos\gamma = \frac{4}{\sqrt{21}}.$$

Вычислим частные производные функции u и их значения в точке M_0:

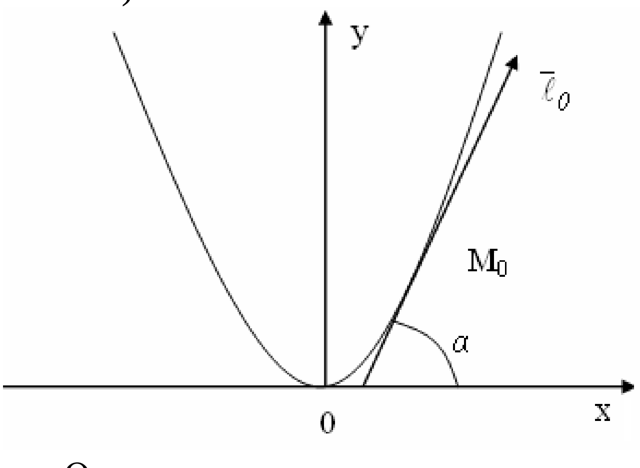
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(2xz + z^2\right)\Big|_{M_0} = 3, \ \frac{\partial u}{\partial y} = x^2\Big|_{M_0} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2xz\Big|_{M_0} = -2.$$

Используя формулу (1), получим

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \ell}\right|_{M_0} = 3\cdot\frac{1}{\sqrt{21}} + 1\cdot\frac{-2}{\sqrt{21}} + (-2)\cdot\frac{4}{\sqrt{21}} = \frac{-7}{\sqrt{21}}.$$

Таким образом, скалярное поле убывает в точке M_0, по направлению $\overline{M_0M_1}$, скорость убывания $\left|\frac{\partial u}{\partial \ell}\right| = \frac{7}{\sqrt{21}}$.

5. Вычислить производную скалярного поля U = arctg xy в точке M_0(1; 1), принадлежащей параболе $y = x^2$, по направлению этой кривой (в направлении возрастания x).



Решение. Направление ℓ параболы $y = x^2$ в точке M_0(1; 1), считается направление касательной к параболе этой точке. Пусть касательная ℓ к кривой в точке M_0 образует с осью 0X угол α.

$$y' = 2x \ \operatorname{tg}\alpha = y'\big|_{x\text{-}1} = 2.$$

Отсюда направляющие косинусы касательной

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\cos\beta = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Значения частных производных данной функции в точке M_0:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{y}{1+(xy)^2}\Big|_{M_0} = \frac{1}{2}; \ \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x}{1+(xy)^2}\Big|_{M_0} = \frac{1}{2}.$$

По формуле (1) $\frac{\partial U}{\partial \ell} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{3}{2\sqrt{5}}$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. <u>Градиентом</u> дифференцируемого скалярного поля

$$u = u(x, y, z)$$

в данной точке называется <u>вектор</u> $\frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}$. Обозначается $\mathrm{grad}\, u$. Связь между производной от u по направлению ℓ и вектором grad u в данной точке даётся формулой

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = \left(\mathrm{grad}\, u, \bar{\ell}_0\right) = \left|\mathrm{grad}\, u\right| \cdot \cos\left(\mathrm{grad}\, u \,\widehat{,}\, \bar{\ell}_0\right), \tag{2}$$

где $\vec{\ell}_0 = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$ - единичный вектор направления ℓ.

Градиент скалярного поля u(x, y, z) направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через данную точку, и указывает направление и величину наибольшего изменения скалярного поля в данной точке. Величина этой наибольшей скорости

$$\left|\mathrm{grad}\, u\right| = \sqrt{u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2}.$$

Единичный вектор нормали $\vec{n}$ к поверхности u(x, y, z) = C

$$\vec{n} = \pm\frac{\mathrm{grad}\, u}{\left|\mathrm{grad}\, u\right|}.$$

Разберём несколько примеров вычисления градиента.

6. Указать направление и скорость наибольшего изменения скалярного поля $u = \ln(x^2 + 2y^2 + 3z^2)$ в точке $M_0(1;\ 1;\ -1)$.

<u>Решение.</u> Скорость изменения поля $u = \ln(x^2 + 2y^2 + 3z^2)$ в точке $M_0(1;\ 1;\ -1)$ максимальна в направлении градиента в этой точке. Величина её равна модулю градиента. Следовательно, решение задачи сводится к нахождению величины и направления градиента в точке M_0. По формуле (2)

$$\mathrm{grad}\, u = \frac{2x}{x^2+2y^2+3z^2}\vec{i} + \frac{4y}{x^2+2y^2+3z^2}\vec{j} + \frac{6z}{x^2+2y^2+3z^2}\vec{k}.$$

В точке $M_0(1; 1; -1)$ $\operatorname{grad} u = \frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} - \vec{k}$, $|\operatorname{grad} u| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + 1} = \frac{\sqrt{14}}{3}$

7. Найти единичный вектор нормали к поверхности $x^3 + y^3 + 3z^2y - 5xy^2 = 9$ в точке $M_0(1; 1; 2)$.

<u>Решение.</u> Градиент скалярного поля $U = x^3 + y^3 + 3yz^2 - 5xy^2$ (данная поверхность – поверхность уровня скалярного поля при $C = 9$) направлен по нормали к данной поверхности, так что вектор

$$\operatorname{grad} u(M_0) = \left(3x^2 - 5y^2\right)\vec{i} + \left(3y^2 + 3z^2 - 10xy\right)\vec{j} + 6zy\,\vec{k} = -2\,\vec{i} + 5\,\vec{j} + 12\,\vec{k}$$

определяет вектор нормали к поверхности.

Единичный вектор нормали $\bar{n} = \frac{\operatorname{grad} u}{|\operatorname{grad} u|} = \frac{-2\cdot\bar{i} + 5\cdot\bar{j} + 12\cdot\bar{k}}{\sqrt{173}}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. <u>Векторным полем</u> называется пространство (или его область), в каждой точке $M(x; y; z)$ которого задан определённый вектор $\bar{a}$.

Вводя в пространство декартову систему координат, представим вектор $\bar{a}$ в виде

$$\bar{a}\,(x, y, z) = a_1(x, y, z)\,\bar{i} + a_2(x, y, z)\,\bar{j} + a_3(x, y, z)\,\bar{k}\,.$$

<u>Кривая L называется векторной линией</u> $\bar{a}$, если в каждой точке этой кривой касательная к ней совпадает с направлением вектора $\bar{a}$ в этой точке.

$$\frac{dx}{a_1(x, y, z)} = \frac{dy}{a_2(x, y, z)} = \frac{dz}{a_3(x, y, z)}, \qquad (3)$$

которую можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt} = a_1(x, y, z)\,,\ \ \frac{dy}{dt} = a_2(x, y, z),\ \ \frac{dz}{dt} = a_3(x, y, z)\ . \qquad (4)$$

Через каждую точку M поля (не являющуюся особой точкой, т. е. $|\bar{a}(M)| \neq 0$), проходит ровно одна векторная линия. Таким образом, векторные линии замкнуты либо начинаются и кончаются на границе поля.

Рассмотрим несколько примеров.

8. Показать, что некоторые линии однородные поля $\vec{a} = m\bar{i} + n\bar{j} + p\bar{k}$ (m, n, p – постоянные) – суть параллельные прямые.

<u>Решение.</u> Система дифференциальных уравнений, определяющая векторные линии, имеет вид $\frac{dx}{dt} = m$, $\frac{dy}{dt} = n$, $\frac{dz}{dt} = p$.

Её общее решение: $x = mt + x_0$; $y = nt + y_0$; $z = pt + z_0$, где x_0, y_0, z_0 – постоянные интегрирования, представляет собой уравнения параллельных прямых в параметрической форме.

9. Определить силовые линии электростатического поля $\bar{E} = q\vec{r}/r^3$, $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, $r = |\bar{r}|$, образованного зарядом q, помещённым в начало координат.

<u>Решение.</u> Составляем систему дифференциальных уравнений силовых линий

$$\frac{r^3dx}{qx} = \frac{r^3dy}{qy} = \frac{r^3dz}{qz} \text{ или } \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

Решая эту систему, получим $y = c_1x$, $z = c_2y$ ($c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$), т. е. силовые линии – прямые, проходящие через начало координат.

10. Найти векторные линии магнитного поля, образованного постоянным электрическим током с силой $\mathfrak{I}$, текущим по бесконечно длинному прямолинейному проводу.

<u>Указания.</u> Если провод принять за ось 0Z, то, как известно из курса электромагнетизма, напряжённость $\bar{H}$ магнитного поля определяется по формуле

$$\bar{H} = \frac{\mathfrak{I}}{2\pi\rho^2}(-y\bar{i} + x\bar{j}),$$

где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ – расстояние от точки наблюдения M(x, y, z) до оси 0Z.

<u>Решение</u>. Система дифференциальных уравнений векторных линий магнитного поля $\bar{H}$ будет иметь вид $\dfrac{dx}{-y} = \dfrac{dy}{x} = \dfrac{dz}{0}$.

Интегрируя, найдём $x^2 + y^2 = R^2$, $z = h$, R, h. – постоянные. Таким образом, векторными линиями магнитного поля $\bar{H}$ являются концентрические окружности с центром на оси 0Z, лежащие в плоскостях $z = \text{const}$.

Задачи для самостоятельной работы

1. Найти поверхности уровня скалярных полей

а) $u = \varphi(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – центрально-симметричное (сферическое) поле.

б) $u = \varphi\sqrt{x^2 + y^2}$ – цилиндрическое поле.

в) $u = \varphi\left(\sqrt{x^2 + y^2}, z\right)$ – осесимметричное поле.

2. Найти линии уровня скалярного поля

а) $u = \ln\sqrt{\dfrac{y}{2x}}$; б) $u = \dfrac{y^2}{x}$; в) $u = e^{x^2 - y^2}$.

3. Найти производную скалярного поля $u = \dfrac{xy}{z}$ по направлению $\overrightarrow{M_0M_1}$ в точке M_0, если $M_0(1;\ 2;\ 1)$, а $M_1(0;\ 3;\ 4)$.

4. Найти производную скалярного поля $u = \ln(xy + yz + xz)$ в точке $M_0(0;\ 1;\ 1)$ по направлению окружности $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 1$.

5. Найти производную функции $u = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ в направлении градиента функции $v = x + y + z$.

6. Найти в точке $M_0(1;\ 1;\ 1)$ направление наибольшего изменения скалярного поля $u = xy + xz + yz$ и величину этого изменения.

7. Определить поле градиентов потенциала $u = \dfrac{q}{r}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ электростатического поля, образованного точечным зарядом q, помещённым в начало координат.

8. Найти единичный вектор нормали к поверхности $x^2 - 4x^2y + 5z^2 = 4$ в точке $M_0(-1;\ 0{,}5;\ -1)$.

9. Найти векторную линию поля $\vec{a} = -y\,\vec{i} + x\,\vec{j} + b\,\vec{k}$ $(b = \mathrm{const})$, проходящую через точку $M_0(1;\ 0;\ 0)$.

10. Плоский поток жидкости характеризуется вектором скорости $\vec{v} = xy\,\vec{i} + x(2x+1)\,\vec{j}$. Определить векторные линии поля скоростей.

11. Найти векторные линии поля градиентов скалярного поля $u = \dfrac{1}{3}x^3 + xy^2 + 4$.

.

2. ПОТОК ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Пусть $\bar{a}(x, y, z) = a_1(x, y, z)\,\bar{i} + a_2(x, y, z)\,\bar{j} + a_3(x, y, z)\,\bar{k}$ – векторное поле. Рассмотрим в векторном поле $\bar{a}$ гладкую ориентируемую поверхность S с единичным вектором нормали $\bar{n}$ к выбранной стороне.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Потоком П векторного поля $\bar{a}(x, y, z)$ через ориентируемую поверхность S в направлении нормали $\bar{n}$ называется поверхностный интеграл

$$\Pi = \iint\limits_S (\bar{a}, \bar{n})\, dS. \tag{5}$$

Вычисление поверхностного интеграла (5) сводится к вычислению двойного интеграла. Для этого поверхность S проектируют взаимно однозначно на одну из координатных плоскостей. Это можно сделать, если уравнение $F(x, y, z) = 0$

поверхности S однозначно разрешимо относительно какой-либо переменной. Пусть, например, поверхность S взаимно однозначно проектируется на плоскость X0Y и задана уравнением $z = f(x, y)$ и D_{xy} – проекция S на плоскость XOY . Так как элемент площади dS поверхности и элемент площади dx dy области D_{xy} связаны равенством

$$dS = \frac{dx\,dy}{|\cos\gamma|},$$

где γ – угол $(\widehat{\bar{n}, 0Z})$, и на поверхности S $z = f(x, y)$, поверхностный интеграл (5) равен следующему двойному:

$$\Pi = \iint\limits_{D_{XY}} \left(\left. \frac{(\bar{a}, \bar{n})}{|\cos\gamma|} \right|_{z=f(x,y)} \right) dx\,dy \qquad (6)$$

Единичный вектор нормали $\bar{n}$ находится по формуле

$$\bar{n} = \pm \frac{\operatorname{grad}[z - f(x, y)]}{|\operatorname{grad}[z - f(x, y)]|} = \pm \frac{-f'_x\,\bar{i} - f'_y\,\bar{j} + \bar{k}}{\sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}} = \pm(\cos\alpha\,\bar{i} + \cos\beta\,\bar{j} + \cos\gamma\,\bar{k}). \qquad (7)$$

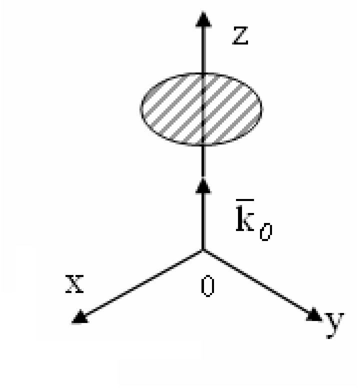
Знак в этой формуле выбирается так, чтобы нормаль $\bar{n}$ указывала заданную сторону поверхности. Аналогично, если S взаимно однозначно проектируется на плоскость Y0Z или X0Z, то

$$\Pi = \iint\limits_{D_{YZ}} \left(\left. \frac{(\bar{a}, \bar{n})}{|\cos\alpha|} \right|_{x=\varphi(y,z)} \right) dy\,dz \qquad \text{или} \qquad \Pi = \iint\limits_{D_{XZ}} \left(\left. \frac{(\bar{a}, \bar{n})}{|\cos\beta|} \right|_{y=\psi(x,z)} \right) dx\,dz\,. \qquad (8)$$

Разберём несколько примеров вычисления потока.

1. Вычислить поток векторного поля $\bar{a} = (x^2 + y^2)\bar{i} + (y^2 + z^2)\bar{j} + (z^2 + x^2)\bar{k}$ через часть плоскости $z = h$, ограниченную окружностью $x^2 + y^2 = 1$, в направлении орта $\bar{k}$.

Решение. В подобных задачах поток векторного поля вычисляется особенно просто. Дело в том, что здесь не нужно находить вектор аналитически. Из геометрических соображений ясно, что $\bar{n} = \bar{k}$ и кроме того, очевидно, $dS = dx\,dy$.



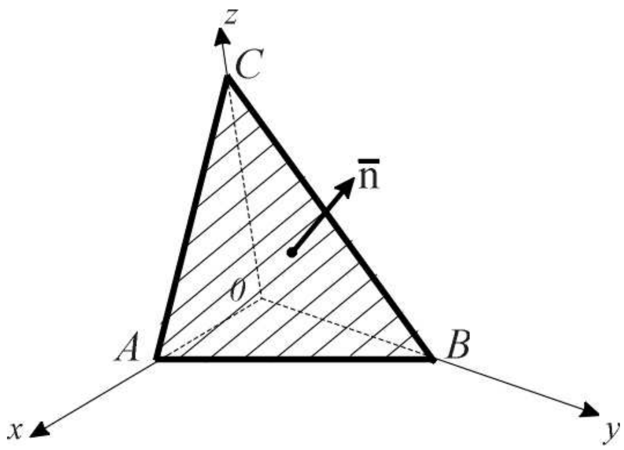
Так как $(\bar{a},\bar{n}) = x^2 + y^2$, по формуле (6)

$$\Pi = \iint\limits_{X^2+Y^2=1} \left(x^2 + z^2\right)\Big|_{z=h} dx\,dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(h^2 + \rho^2\cos^2\varphi\right)\rho\,d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{h^2}{2} + \frac{1}{4}\cos^2\varphi\right]d\varphi = \pi\,h^2 + \frac{\pi}{4}.$$

2. Найти поток векторного поля $\bar{a} = (x - 2z)\,\bar{i} + (x - 3y + z)\,\bar{j} + (5x + y)\,\bar{k}$ через верхнюю сторону треугольника ABC: A(1; 0; 0), B(0; 1; 0), C(0; 0; 1).



<u>Решение.</u> Уравнение плоскости ABC:

$$x + y + z = 1.$$

Нормальный вектор плоскости

$$\bar{N} = (1;\,1;\,1).$$

Единичный вектор нормали

$$\bar{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

$$(\bar{a},\bar{n}) = (x - 2\,z)\frac{1}{\sqrt{3}} + (x + 3y + z)\frac{1}{\sqrt{3}} +$$

$$+ (5x + y)\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(7x + 4y - z).$$

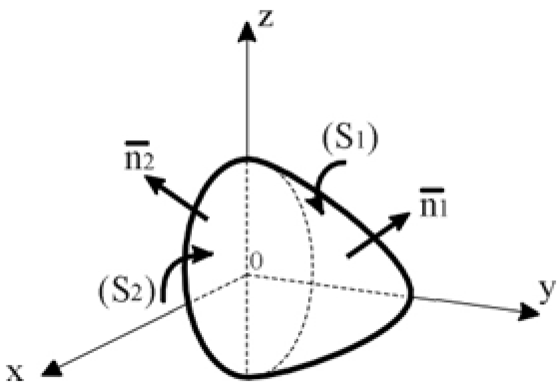
Вычисляем поток, применяя формулу (6):

$$dS = \sqrt{3}dxdy.$$

$$\Pi = \iint\limits_{(\Delta\,ABC)}\left[\sqrt{3}\cdot\frac{7x + 4y - z}{\sqrt{3}}\Bigg|_{z=1-x-y}\right]dx\,dy = \iint\limits_{(\Delta\,ABC)}(8x + 5y - 1)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x}(8x + 5y - 1)\,dy = \int_0^1\left[8x\,(1 - x) + \frac{5}{2}(1 - x)^2 - (1 - x)\right]dx = \frac{5}{3}.$$

3. Найти поток векторного поля $\bar{a} = 2x\,\bar{i} + (1-2y)\,\bar{j} + 2z\,\bar{k}$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности S, состоящей из части S_1 параболоида $x^2 + z^2 = 1 - 2y$ $(y \geq 0)$ и части S_2 плоскости X0Z.



Решение. Искомый поток вычисляется по формуле

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 =$$

$$= \iint\limits_{(S_1)} (a, \bar{n}_1)\, dS + \iint\limits_{(S_2)} (a, \bar{n}_2)\, dS$$

Найдём вначале Π_1. Поверхность S_1 взаимно однозначно проектируется на плоскость XOZ, её проекция D_{XZ} – круг $x^2 + z^2 \leq 1$.

Воспользуемся одной из формул (8).

Уравнением поверхности S_2 будет $y = \frac{1}{2}\left[1 - x^2 - z^2\right]$.

Найдём единичный вектор нормали:

$$\bar{n} = \pm \frac{\operatorname{grad}\left[y - \frac{1}{2}(1 - x^2 - z^2)\right]}{\left|\operatorname{grad}\left[y - \frac{1}{2}(1 - x^2 - z^2)\right]\right|} = \pm \frac{x\,\bar{i} + \bar{j} + z\,\bar{k}}{\sqrt{1 + x^2 + z^2}}.$$

Так как рассматривается внешняя сторона поверхности, cos β должен быть больше нуля. Поэтому в уравнении нормали следует взять знак плюс.

$$(\bar{a}, \bar{n}) = \frac{2x^2 + (1-2y) + 2z^2}{\sqrt{1 + x^2 + z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + z^2}}.$$

$$\Pi_1 = \iint\limits_{(S_1)} (a, \bar{n}_1)dS = \iint\limits_{x^2 + z^2 \leq 1} \frac{2x^2 + (1-2y) + 2z^2}{\sqrt{1 + x^2 + z^2}} \sqrt{1 + x^2 + z^2}\,\Bigg|_{y = \frac{1}{2}(1 - x^2 - y^2)} dx\,dz =$$

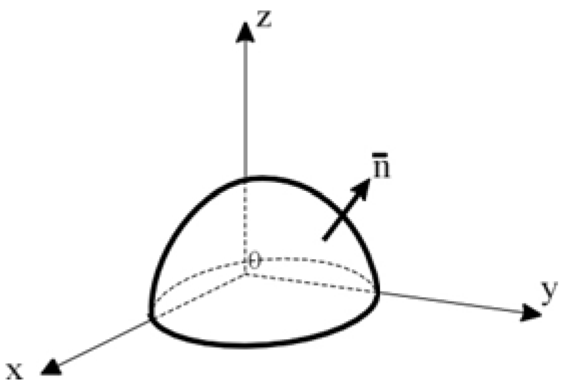
$$= 3 \iint\limits_{x^2 + z^2 \leq 1} (x^2 + z^2)\, dx\, dz = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^2 \rho\, d\rho = 3 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2}\pi.$$

Теперь вычислим поток Π_2. На поверхности S_2, где $y = 0$, $x^2 + z^2 \leq 1$, внешняя нормаль $\bar{n}_2 = -\bar{j}$.

Поэтому $\Pi_2 = \iint\limits_{(S_2)} (\bar{a}, \bar{n}_2)\, dS = -\iint\limits_{(S_2)} (\bar{a}, \bar{j})\, dx\, dz = -\iint\limits_{(S_2)} (1-2y)\Big|_{y=0}\, dx\, dz = -\pi$.

Таким образом, весь поток равен $\pi/2$.

4. Найти поток векторного поля $\bar{a} = y\,\bar{i} - 2x\,\bar{j} - z\,\bar{k}$ через внешнюю сторону полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$.



Решение. Полусфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$ взаимно однозначно проектируется на круг $x^2 + y^2 \leq R^2$.

Единичный вектор нормали к полусфере

$$\bar{n} = \pm\frac{\operatorname{grad}\left[x^2 + y^2 + z^2 - R^2\right]}{\left|\operatorname{grad}[..........]\right|} = \\ = \pm\frac{x\,\bar{i} + y\,\bar{j} + z\,\bar{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Так как $\bar{n}$ образует с осью 0Z острый угол (внешняя сторона поверхности!), то берём знак “плюс” и, кроме того, на поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, поэтому

$$\bar{n} = \frac{1}{R}\left(x\,\bar{i} + y\,\bar{j} + z\,\bar{k}\right), \qquad \cos\gamma = \frac{z}{R}, \qquad dS = \frac{dx\,dy}{\cos\gamma} = \frac{R\,dx\,dz}{y}\ .$$

Вычислим скалярное произведение $(\bar{a},\ \bar{n}) = \dfrac{1}{R}\left(xy - 2xy - z^2\right) = \dfrac{xy + z^2}{R}$.

По формуле (6) получаем, учитывая, что из уравнения сферы $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$:

$$\Pi = \iint\limits_{(S)} (\bar{a}, \bar{n})dS = -\iint\limits_{x^2+y^2\leq R^2} \frac{xy + z^2}{R}\frac{R}{z}\bigg|_{z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\ dx\,dy = \\ = -\iint\limits_{x^2+y^2\leq R^2} \frac{xy + R^2 - x^2 - y^2}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\,dx\,dy.$$

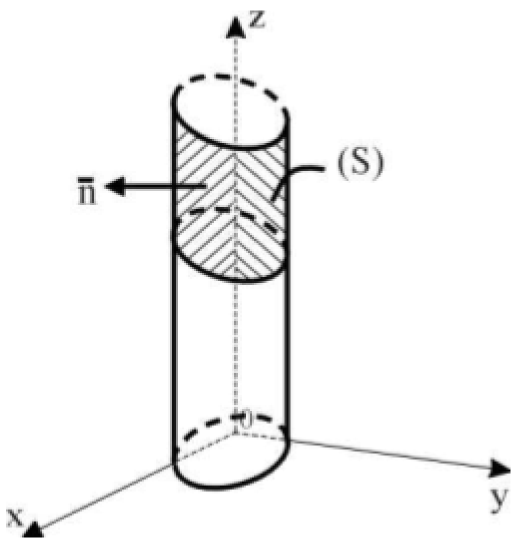
После подстановки $x = \rho\cos\varphi,\ \ y = \rho\sin\varphi$

$$\Pi = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{\rho^2\cos\varphi\ \sin\varphi\ + R^2 - \rho^2}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}\rho d\rho = -\int_0^{2\pi} \cos\varphi\ \sin\varphi\ d\varphi \int_0^R \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} =$$

$$= -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sqrt{R^2 - \rho^2}\rho d\rho = -2\pi\int_0^R \sqrt{R^2 - \rho^2}\,\rho d\rho = 2\pi\,\frac{\left(R^2 - \rho^2\right)^{3/2}}{3}\Bigg|_0^R = -\frac{2}{3}\pi R^3.$$

В некоторых случаях поверхность, через которую вычисляется поток векторного поля, не проектируется взаимно однозначно ни на одну из координатных плоскостей. Разберём, как поступать в таких ситуациях.

5. Вычислить поток векторного поля $\bar{a} = (x - z)\,\bar{i} + (y + z)\,\bar{j} + (x - y)\,\bar{k}$ через внешнюю сторону боковой поверхности кругового цилиндра $x^2 + y^2 = 1$, ограниченного снизу плоскостью $x + y + z = 1$, а сверху – плоскостью $x + y + z = 2$.



Решение. Найдём единичный вектор нормали к цилиндру

$$\bar{n} = \frac{\operatorname{grad}\left[x^2 + y^2 - 1\right]}{\left|\operatorname{grad}[..........]\right|} =$$

$$= \frac{x\,\bar{i} + y\,\bar{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = x\,\bar{i} + y\,\bar{j},$$

так как на поверхности цилиндра

$x^2 + y^2 = 1$.

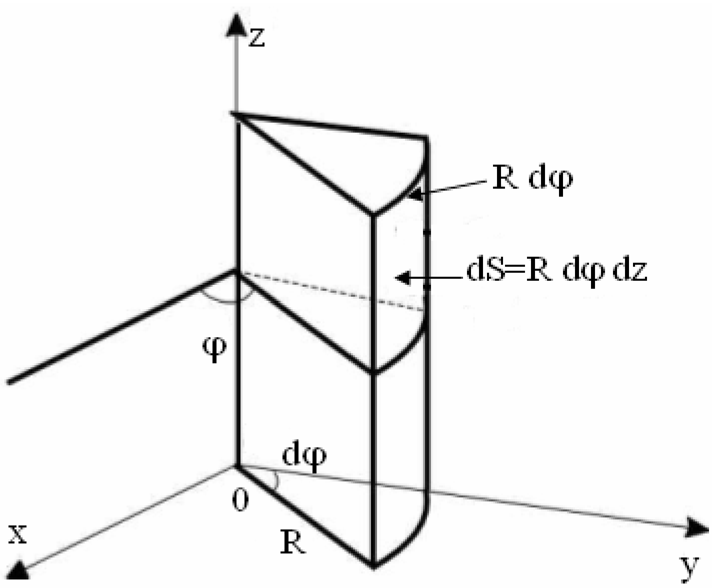
Составляем скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{n}$:

$$(\bar{a}, \bar{n}) = x\,(x - z) + y\,(y + z)\,.$$

По формуле (4) поток $\Pi = \iint\limits_S \left[x(x - z) + y(y + z)\right] dS = \iint\limits_S \left[(y - x)z + 1\right] dS,$

так как $x^2 + y^2 = 1$ на цилиндре.

Для вычисления этого поверхностного интеграла формулой (6) или (8) воспользоваться нельзя. Данная часть цилиндра S на плоскость X0Y проектируется в окружность $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$. На другие координатные плоскости S проектируется также не взаимно однозначно.



Для вычисления получившегося интеграла введём на цилиндре координаты φ и z. Координаты φ, z точки цилиндра связаны с прямоугольными координатами x, y, z этой же точки по формулам

$$x = R\cos\varphi,\; y = R\sin\varphi,\; z = z,$$

где R – радиус цилиндра. Для элемента площади dS цилиндра имеем следующее выражение:

$$dS = R\,d\varphi\,dz$$

(в данном случае R = 1).

Подставляя это в интеграл, найдём $\Pi = \iint\limits_S [(\sin\varphi - \cos\varphi)z + 1]\, d\varphi\, dz$.

На рассматриваемой части цилиндра угол φ изменяется от 0 до 2π, а при каждом фиксированном φ координата z изменяется от z = 1 – x – y = 1 – cos φ – sin φ до z = 2 – x – y = 2 – cos φ – sin φ. Расставляем пределы интегрирования и вычисляем

$$\Pi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{1-(\cos\varphi+\sin\varphi)}^{2-(\cos\varphi+\sin\varphi)} [(\sin\varphi - \cos\varphi)z + 1]\, dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left\{ \left(\frac{1}{2} z^2 (\sin\varphi - \cos\varphi) + z \right) \Bigg|_{1-(\cos\varphi+\sin\varphi)}^{2-(\cos\varphi+\cos\varphi)} \right\} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} \left\{ (\sin\varphi - \cos\varphi) \left[(2 - (\cos\varphi + \sin\varphi))^2 - (1 - (\cos\varphi + \sin\varphi))^2 \right] + 2 \right\} d\varphi = \pi .$$

Задачи для самостоятельной работы

1. Вычислить поток радиуса-вектора $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ через верхнюю сторону круга, вырезаемого конусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ на плоскости z = 3.

2. Найти поток вектора $\bar{a} = (5x + z)\bar{i} + (x - 3y)\bar{j} + (4y - 2z)\bar{k}$ через часть плоскости x + y + z = 2, лежащую в первом октанте в направлении нормали, составляющей с осью 0Z острый угол.

3. Вычислить поток векторного поля $\bar{a} = x^2\bar{i} + y^2\bar{j} + z^2\bar{k}$ через часть конической поверхности $x^2 + y^2 = z^2$ $(0 \le z \le 1)$ в направлении внешней нормали к конусу.

4. Найти поток векторного поля $\bar{a} = xy\,\bar{i} + yz\,\bar{j} + zx\,\bar{k}$ через часть внешней стороны сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, заключенной в первом октанте.

5. Определить поток вектора $\bar{a} = x\,\bar{i} + 2y\,\bar{j} + 3z\,\bar{k}$ через внешнюю сторону цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = 9$, ограниченной плоскостями z = 0 и
x + y + z = 3.

3. ДИВЕРГЕНЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ. ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА

Пусть M – некоторая точка в векторном поле $\bar{a}$. Окружим точку M замкнутой поверхностью S, ограничивающий объём. Вычислим поток П векторного поля $\bar{a}$ через внешнюю сторону поверхности S и составим отношение

$$\frac{\Pi}{V} = \frac{\oiint\limits_S (\bar{a}, \bar{n}) dS}{V}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Дивергенцией (расходимостью) векторного поля $\bar{a}$ в точке M называется предел отношения $\frac{\Pi}{V}$ при условии, что поверхность S произвольным образом стягивается в точке M. Обозначается $\operatorname{div} \bar{a}(M)$.

Итак, по определению

$$\operatorname{div} \bar{a}(M) = \lim_{\substack{S \to M \\ V \to 0}} \frac{\oiint\limits_S (\bar{a}, \bar{n})\, dS}{V}. \tag{1}$$

Физический смысл дивергенции состоит в том, что она определяет мощность источников или стоков векторного поля. Если $\operatorname{div} \bar{a}(M) > 0$, то точка M – источник векторного поля (в окрестности тоски M поле $\bar{a}$ возникает). Если $\operatorname{div} \bar{a}(M) < 0$, то точка M – сток (в окрестности тоски M поле исчезает).

Если $\bar{a} = a_1 \bar{i} + a_2 \bar{j} + a_3 \bar{k}$ и функции a_1, a_2, a_3 имеют непрерывные частные производные первого порядка, то дивергенция вычисляется по формуле

$$\operatorname{div} \bar{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z}. \tag{2}$$

Теорема Остроградского-Гаусса. Поток векторного поля $\bar{a}$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности S равен тройному интегралу от дивергенции этого поля по объёму V, ограниченному поверхностью S

$$\oiint\limits_S (\bar{a}, \bar{n}) dS = \iiint\limits_V \operatorname{div} \bar{a}\, dV. \tag{3}$$

1. Определить, имеет ли поле $\bar{a} = 3x^2 \bar{i} - 5xy\, \bar{j} + z^2 \bar{k}$ источники (стоки) в точках M_1 (1; 2; 3), M_2(1; – 5; – 1), M_3(2; 0; – 1).

Решение. Следует вычислить дивергенцию векторного поля $\bar{a}$ в точках M_1, M_2, M_3. По формуле (2) имеем: $\operatorname{div} \bar{a} = 6x - 5x + 2z$. $\operatorname{div} \bar{a}\big|_{M_1} = 6 \cdot 1 - 5 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 7$;

$\operatorname{div}\bar{a}\big|_{M_2} = 6\cdot 1 - 5 + 2\cdot(-1) = -1;\quad \operatorname{div}\bar{a}\big|_{M_3} = 6\cdot 2 - 5\cdot 2 + 2\cdot(-1) = 0$. В точке M_1 имеется источник, в точке M_2 сток, в точке M_3 нет ни источника, ни стока.

2. Определить дивергенцию вектора напряжённости электростатического поля $\bar{E} = \dfrac{q\bar{r}}{r^3}$, $\bar{r} = x\,\bar{i} + y\,\bar{j} + z\,\bar{k}$, $r = |\bar{r}|$, образованного точечным зарядом q, помещённым в начало координат.

<u>Решение.</u> Запишем подробно выражение для вектора

$$E = \frac{q\left(x\,\bar{i} + y\,\bar{j} + z\,\bar{k}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Найдём частные производную $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{qx}{r^3}\right)$. Частные производные $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{qy}{r^3}\right)$, $\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{qz}{r^3}\right)$ получают из первой замены x на y и x на z. Имеем (для $r \neq 0$)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{qx}{r^3}\right) = q\,\frac{r^3 - x\cdot 3r^3\dfrac{\partial r}{\partial x}}{r^6} - q\,\frac{r - 3x\cdot\dfrac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}\cdot 2x}{r^4} = \frac{q - \dfrac{3x^2}{r}}{r^4} = q\,\frac{r^2-3x^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{qy}{r^3}\right) = q\,\frac{r^2-3y^2}{r^5},\quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{qz}{r^3}\right) = q\,\frac{r^2-3z^2}{r^5}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{div}\bar{E} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{qx}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{qy}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{qz}{r^3}\right) = q\,\frac{3r^2 - 3\left(x^2+y^2+z^2\right)}{r^5} = q\,\frac{3r^2-3r^2}{r^5} = 0.$$

Итак, $\operatorname{div}\bar{E} = 0$ - во всех точках, где $r \neq 0$.

Решим ряд задач на применение теоремы Остроградского.

3. Вычислить поток векторного поля $\bar{a} = x^3\bar{i} + y^3\bar{j} + z^3\bar{k}$ через поверхность куба $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$, $0 \le z \le a$.

<u>Решение.</u> Воспользовавшись теоремой Остроградского, получим, что искомый поток равен

$$\Pi = \oint\!\!\!\oint_S (\bar{a},\bar{n})\,dS = \iiint_V \left(3x^2+3y^2+3z^2\right)dx\,dy\,dz =$$

$$= 3\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^a \left(x^2+y^2+z^2\right)dz = 3a^5.$$

4. Задача № 2 из §3.

Решим эту задачу, используя формулу Остроградского.

$$\bar{a} = 2x\,\bar{i} + (1-2y)\,\bar{j} + 2z\,\bar{k},\ \operatorname{div}\bar{a} = 2 - 2 + 2 = 2.$$

Поток равен

$$\Pi = \iiint\limits_V 2dV.$$

Для вычисления интеграла перейдём к цилиндрическим координатам

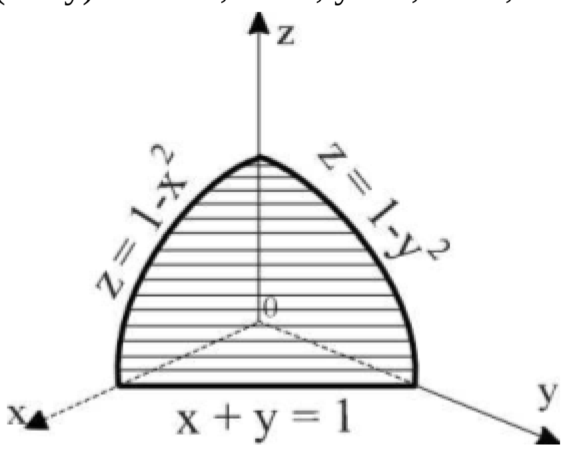
$$x = \rho\cos\varphi,\ z = \rho\sin\varphi,\ y = y.$$

Имеем

$$\Pi = 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho d\rho \int\limits_0^{\frac{1-\rho^2}{2}} dy = 4\pi\int\limits_0^1 \frac{\rho\left(1-\rho^2\right)}{2} d\rho = 2\pi\left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 = 2\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2}\ .$$

Получаем тот же результат, но более коротким путём.

5. Найти поток вектора $\bar{a} = (x + y + z)\,\bar{k}$ через замкнутую поверхность $(x + y)^2 = 1 - z$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, лежащую в первом октанте.



Решение. Поверхность $(x + y)^2 = 1 - z$ представляет собой цилиндр, образующие которого параллельны прямой $x + y = 1$.

Поверхность $(x + y)^2 = 1 - z$ пересекает плоскость $y = 0$ по параболе $z = 1 - x^2$, плоскость $x = 0$ по параболе $z = 1 - y^2$.

Воспользуемся формулой Остроградского. Вычисляем $\operatorname{div}\bar{a}$.

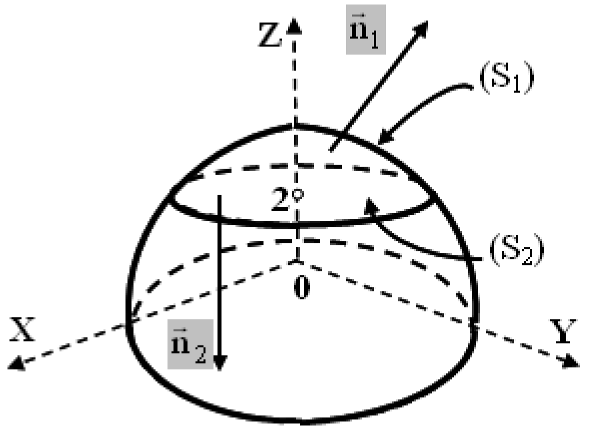
$\operatorname{div}\bar{a} = 1$, поэтому поток численно равен объёму тела.

Вычисляем $\Pi = \iiint\limits_V 1\cdot dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-(x+y)^2} dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left[1-(x+y)^2\right] dy =$

$$= \int\limits_0^1 \left[y - \frac{(x-y)^3}{3}\right]_0^{1-x} dx = \int\limits_0^1 \left[(1-x) - \frac{1}{3}\right] dx = \left(\frac{2}{3}x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

Иногда теорему Остроградского удобно применять для вычисления потока через незамкнутую поверхность. Покажем этот приём на следующем примере.

7. Найти поток векторного поля $\bar{a} = xz\,\bar{i} + yz\,\bar{j} + z^2\bar{k}$ через внешнюю часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, отсечённой плоскостью $z = 2$ ($z \ge 2$).



Решение. Для того, чтобы воспользоваться теоремой Остроградского, замкнём снизу данную поверхность S_1 куском S_2 плоскости $z = 2$, который ограничен окружностью $x^2 + y^2 = 5$, $z = 2$. Пусть V – объём полученного тела. По теореме Остроградского полный поток

$$\Pi = \iiint_V \operatorname{div}\bar{a}\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_V (z + z + 2z)\,dx\,dy\,dz = .$$

$$= 4\iiint_V z\,dx\,dy\,dz$$

Тройной интеграл вычисляем в цилиндрических координатах

$$\Pi = 4\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{5}} \rho\,d\rho \int_2^{\sqrt{9-\rho^2}} z\,dz = 4\pi\int_0^{\sqrt{5}} \rho\left[\left(9-\rho^2\right) - 4\right]d\rho = 4\pi\int_0^{\sqrt{5}}\left(5\rho - \rho^5\right)d\rho =$$

$$= 4\pi\left(\frac{5}{2}\rho^2 - \frac{1}{4}\rho^4\right)\Bigg|_0^{\sqrt{5}} = 25\pi \quad .$$

Ввиду аддитивности поверхностного интеграла

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = \iint_{S_1} (\bar{a}, \bar{n}_1)\,dS + \iint_{S_2} (\bar{a}, \bar{n}_2)\,dS = 25\pi .$$

Отсюда поток через часть сферы

$$\Pi_1 = 25\pi - \Pi_2 = 25\pi - \iint_{S_2} (\bar{a}, \bar{n}_2)\,dS .$$

Поток вектора $\bar{a}$ через круг S_2: $x^2 + y^2 \le 5$, $z = 2$ равен ($n_2 = -\bar{k}$)

$$\Pi_2 = \iint_{S_2} (\bar{a}, \bar{n}_2)\,dS = \iint_{S_2}\left(-z^2\right)dS = -\iint_{x^2+y^2\le 5} z^2\big|_{z=2}\,dx\,dy = -4\iint_{x^2+y^2\le 5} dx\,dy =$$

$$= -4\pi\left(\sqrt{5}\right)^2 = -20\pi .$$

Искомый поток $\Pi_1 = 25\pi - (-\,20\pi) = 45\pi$.

Задачи для самостоятельной работы

1. Вычислить $\operatorname{div}(r \cdot \bar{a})$, где $\bar{a}$ - постоянный вектор, а $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

2. Найти дивергенцию вектора $\overline{H}$ напряжённости магнитного поля, образованного постоянным электрическим током с силой $\Im$, текущем по бесконечно длинному проводнику.

Указание. См. задачу 1.10.

3. Вычислить поток векторного поля $\bar{a} = (y - x)\,\bar{i} + (x + z)\,\bar{j} + (5y - 3z)\,\bar{k}$ через полную поверхность пирамиды, ограниченной плоскостями x = 0, y = 0, z = 0,

x + y + z = 5.

4. Найти поток векторного поля $\bar{a} = x^3\bar{i} + y^3\bar{j} + z^3\bar{k}$ через замкнутую поверхность, ограниченную сферой $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и конусом $x^2 + y^2 = z^2$, $z \geq 0$.

5. Вычислить двумя способами (непосредственно и по теореме Остроградского) поток векторного поля $\bar{a} = y^2\bar{i} + x^2\bar{k}$ через замкнутую поверхность, ограниченную частью поверхности $x^2 = 1 - y - z$ и координатными плоскостями

$(x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0)$.

6. Найти поток векторного поля $\bar{a} = 3x\,\bar{i} - y\,\bar{j} + z\,\bar{k}$ через внешнюю сторону части поверхности параболоида $x^2 + y^2 = 9 - z$, $(0 \leq z \leq 9)$.

4. ЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ В ВЕКТОРНОМ ПОЛЕ. ЦИРКУЛЯЦИЯ

Пусть в поле векторе $\bar{a}$ задана ориентированная (указано направление обхода) кусочно–гладкая кривая L.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Линейным интегралом векторного поля $\bar{a}$ вдоль кривой L называется криволинейный интеграл

$$\int_L (\bar{a}, d\bar{r}) = \int_L a_1\,dx + a_2\,dy + a_3\,dz, \tag{1}$$

где

$$d\bar{r} = dx\,\bar{i} + dy\,\bar{j} + dz\,\bar{k}$$

– дифференциал радиуса вектора $\bar{r}$ вдоль кривой L.

Если $\bar{a}$ - силовое поле, то линейный интеграл равен работе сил этого поля вдоль кривой L.

Отличительное свойство линейного интеграла:

$$\int_{L_{AB}} (\bar{a}, d\bar{r}) = -\int_{L_{BA}} (\bar{a}, d\bar{r}).$$

То есть при изменении направления обхода линии L линейный интеграл меняет знак.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Линейный интеграл по замкнутому контуру L называется <u>циркуляцией</u> C векторного поля $\bar{a}$.

Обозначают:

$$C = \oint\limits_{L} (\bar{a}, d\bar{r}) = \oint\limits_{L} (a_1\, dx + a_2\, dy + a_3\, dz).$$

За положительное направление обхода замкнутой кривой L принимается такое направление, при котором область, ограниченная кривой L, остаётся слева. Циркуляция векторного поля $\bar{a}$ характеризует вращательную способность поля $\bar{a}$ по данному контуру.

Вычисление линейного интеграла и циркуляции сводится к вычислению определённого интеграла.

1. Вычислить линейный интеграл плоского поля $\bar{a} = (x + y)\,\bar{i} + (x - y)\,\bar{j}$ вдоль дуги параболы $y^2 = x$ от точки O(0; 0) до точки A(1; 1).

<u>Решение.</u>

$$\int\limits_{L} (\bar{a}, d\bar{r}) = \int\limits_{L} (x + y)\, dx + (x - y)\, dy.$$

Подставляя сюда $x = y^2$, $dx = 2y\, dy$ и учитывая, что y меняется от 0 до 1, получим

$$\int\limits_{0}^{1} \left[\left(y^2 + y\right)2y + \left(y^2 - y\right)\right] dy = \int\limits_{0}^{1} \left[2y^3 + 3y^2 - y\right] dy = 1.$$

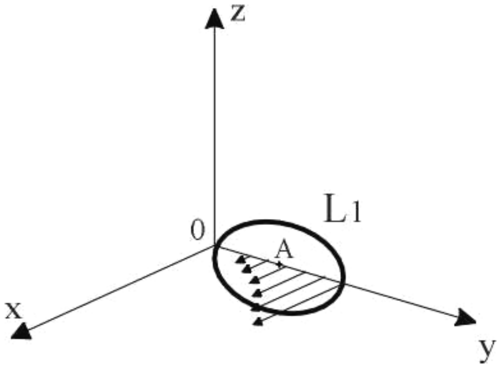
2. Найти работу силового поля $\bar{F} = x\,\bar{i} + x\,\bar{j} - \bar{k}$ вдоль одного витка винтовой линии L: $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = ht$, $(0 \le t \le 2\pi)$

<u>Решение.</u>

$$A = \int\limits_{L} (\bar{F}, d\bar{r}) = \int\limits_{L} x\, dx + x\, dy - dz = \left| \begin{array}{l} x = R\cos t, dx = -\sin t\, dt, \\ y = R\sin t, dy = -R\cos t\, dt \\ z = ht, dz = h\, dt \\ 0 \le t \le 2\pi \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_{0}^{2\pi} \left[-R^2 \sin t \cos t + R^2 \cos^2 t - h\right] dt = \left(-\frac{1}{2} R^2 \sin^2 t + \frac{R^2}{2} t + \frac{R^2}{4} \sin 2t - ht\right)\Bigg|_{0}^{2\pi} = \pi\left(R^2 - 2h\right).$$

3. Вычислить циркуляцию векторного поля $\bar{a} = y\,\bar{i}$ по окружности с центром в точке A(0; R; 0) радиуса R и расположенной сначала в плоскости X0Y, а затем в плоскости y = R.

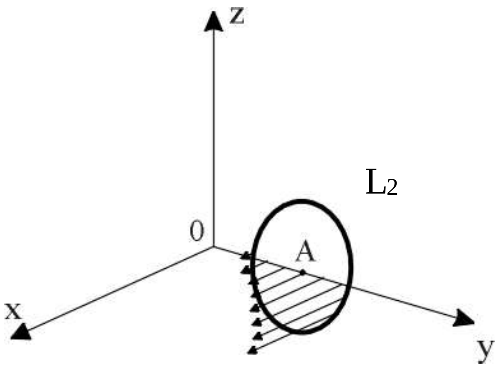


<u>Решение.</u>

1. Параметрические уравнения окружности L_1:

$$x = R\cos t,\ y = R + R\sin t,\ z = 0,\ 0 \le t \le 2\pi.$$

$$C_1 = \oint\limits_{L_1} y\,dx = R^2\int\limits_0^{2\pi}(1+\sin t)\cdot(-\sin t)\,dt = -\pi R^2 .$$



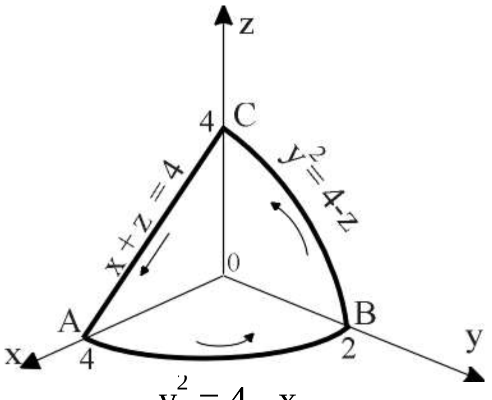
2. Параметрические уравнения окружности L_2:

$$x = R\cos t,\ z = R\sin t,\ y = R,\ 0 \le t \le 2\pi.$$

$$C_2 = \oint\limits_{L_2} y\,dx = -R^2\int\limits_0^{2\pi}\sin t\,dt = 0 .$$

Циркуляция зависит от положения контура в поле.

4. Вычислить циркуляцию векторного поля $\bar{a} = x\,\bar{i} - z\,\bar{j} + y\,\bar{k}$ вдоль контура L, полученного при пересечении поверхности $y^2 = 4 - x - z$ с координатными плоскостями.



<u>Решение.</u>

Контур $L = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}$ состоит из парабол

$y^2 = 4 - x$ /AB/,

$y^2 = 4 - z$ /BC/

и отрезка прямой

$x + z = 4$ /CA/.

$$C = \oint\limits_L (\bar{a}, d\bar{r}) = \int\limits_{\overline{AB}} (\bar{a}, d\bar{r}) + \int\limits_{\overline{BC}} (\bar{a}, d\bar{r}) + \int\limits_{\overline{CA}} (\bar{a}, d\bar{r}) .$$

Каждый из интегралов вычисляем отдельно. На $\overline{AB}$: z = 0, dz = 0, 0 ≤ x ≤ 4, $(\bar{a}, d\bar{r}) = x\,dx$.

$$\int\limits_{\overline{AB}} (\bar{a}, d\bar{r}) = \int\limits_4^0 x\,dx = -8$$

На $\overline{BC}: x=0$, dx = 0, $(\bar{a}, d\bar{r}) = -z\,dy + y\,dz$. Из уравнении параболы $z = 4 - y^2$, $dz = -2y\,dy$, поэтому

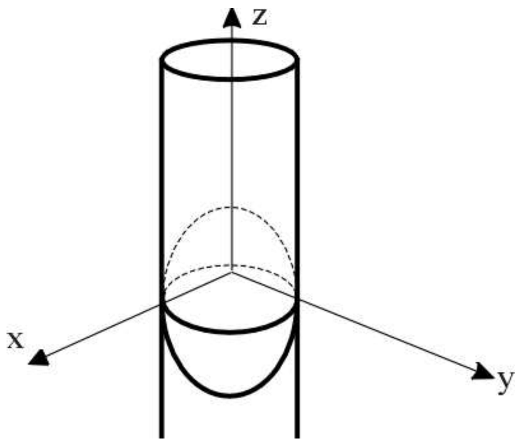
$$(\bar{a}, d\bar{r}) = \left((y^2-4) - 2y^2\right)dy = -\left(y^2+4\right)dy$$

Итак, $\int\limits_{\overline{BC}} (\bar{a}, d\bar{r}) = -\int\limits_2^0 \left(y^2+4\right)dy = \frac{32}{3}$.

На $\overline{CA}: y=0,\quad dy=0,\quad (\bar{a}, d\bar{r}) = x\,dx$. $\qquad \int\limits_{\overline{CA}} (\bar{a}, d\bar{r}) = \int\limits_0^4 x\,dx = 8$.

Таким образом, $C = -8 + \frac{32}{3} + 8 = \frac{32}{3}$.

5. Вычислить циркуляцию векторного поля $\bar{a} = xy\,\bar{i} + yz\,\bar{j} + zx\,\bar{k}$ вдоль контура $L: x^2+y^2=1;\quad x+y+z=1.$



Решение: Имеем: $C = \oint\limits_L xy\,dx + yz\,dy + xz\,dz$.

Линия L есть эллипс, полученный в результате пересечения плоскости $x + y + z = 1$ с цилиндром. Найдём его параметрические уравнения. Любая точка (x; y; z) эллипса проектируется на окружность $x^2 + y^2 = 1$. Поэтому можем положить $0 \le t \le 2\pi$, тогда $z = 1 - x - y = 1 - \cos t - \sin t$ (так как точка находится на плоскости $x + y + z = 1$).

Параметрические уравнения эллипса L:

$$x = \cos t.\ y = \sin t,\ z = 1 - \cos t - \sin t,\ 0 \le t \le 2\pi.$$

Вычисляем циркуляцию

$$C = \int\limits_0^{2\pi} [\cos t \cdot \sin t \cdot \left(-\sin t\right) + \sin t \cdot \left(1 - \cos t - \sin t\right) \cdot \cos t +$$

$$+ \cos t\,(1 - \cos t - \sin t) \cdot \left(\sin t - \cos t\right)]\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left[-3\sin^2 t \cdot \cos t + \sin 2t - \cos^2 t \cdot \sin t - \cos^2 t + \cos^3 t\right]dt = -\int\limits_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = -\pi.$$

Задачи для самостоятельной работы

1. Вычислить линейный интеграл векторного поля

$$\bar{a} = (x + y)\,\bar{i} + (y + z)\,\bar{j} + (x + z)\,\bar{k}$$

вдоль отрезка прямой от точки A(1; 2; 3) до точки B(5; 4; 7).

2. Вычислить работу плоского силового поля $\bar{F} = (2a - y)\,\bar{i} + (y - a)\,\bar{j}$ вдоль первой арки циклоиды $x = a\,(t - \sin t), \quad y = a\,(1 - \cos t)$.

3. Найти циркуляцию векторного поля $\bar{a} = (3x + 5z)\,\bar{i} + (x + 4y)\,\bar{j} + (6x - z)\,\bar{k}$ по контуру треугольника с вершинами в точках A(2; 0; 0), B(0; 2; 0), C(0; 0; 2).

4. Вычислить циркуляцию векторного поля $\bar{a} = x\,\bar{i} + z\,\bar{j} - y\,\bar{k}$ вдоль линии пересечения части поверхности $(x^2 - 1)^2 = z^2 + y^2$, находящейся в первом октанте, с плоскостями координат.

5. РОТОР ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ. ТЕОРЕМА СТОКСА

Пусть координаты векторного поля

$$\bar{a}\,(x, y, z) = a_1(x, y, z)\,\bar{i} + a_2(x, y, z)\,\bar{j} + a_3(x, y, z)\,\bar{k}$$

непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка по всем своим аргументам.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. <u>Ротором</u> (вихрем) векторного поля $\bar{a}$ называется вектор

$$\operatorname{rot}\bar{a} = \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y}\right)\bar{k} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Проекция вектора $\operatorname{rot}\bar{a}/_M$ на ось ℓ характеризует вращательную способность векторного поля в данной точке M вокруг оси ℓ и называется <u>завихренностью</u> векторного поля $\bar{a}$ вокруг этой оси.

<u>ТЕОРЕМА СТОКСА.</u> Циркуляция векторного поля $\bar{a}$ по замкнутому контуру L равна потоку ротора этого векторного поля через любую поверхность (S), натянутую на контур L.

$$\oint_L (\bar{a}, d\bar{r}) = \iint_{(S)} (\operatorname{rot}\bar{a},\ \bar{n})\,dS. \quad (2)$$

Направление обхода контура и сторона поверхности согласованы так, чтобы из конца нормали обход контура в выбранном направлении был виден совершающимся против часовой стрелки.

ПРИМЕРЫ.

1. Найти ротор векторного поля $\bar{a} = (x^2 + y^2)\bar{i} + (y^2 + z^2)\bar{j} + (z^2 + x^2)\bar{k}$

<u>Решение.</u> По формуле (1) имеем

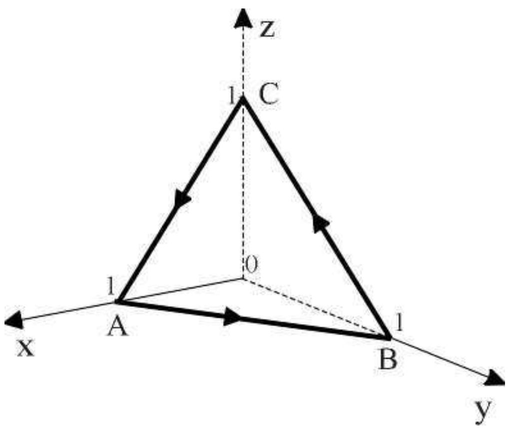
$$\operatorname{rot}\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x^2 + y^2 & y^2 + z^2 & z^2 + x^2 \end{vmatrix}.$$

Раскрывая определитель по элементам первой строки и понимая операцию умножения, например, $\partial/\partial y$ на $z^2 + x^2$ как операцию частного дифференцирования $\dfrac{\partial(z^2 + x^2)}{\partial x}$, найдём

$$\operatorname{rot}\bar{a} = \left(\frac{\partial(z^2 + x^2)}{\partial y} - \frac{\partial(y^2 + z^2)}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial z} - \frac{\partial(z^2 + x^2)}{\partial x}\right)\bar{j} +$$

$$+\left(\frac{\partial(y^2 + z^2)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial y}\right)\bar{k} = -2z\,\bar{i} - 2x\,\bar{j} - 2y\,\bar{k}.$$

2. Найти циркуляцию векторного поля $\bar{a} = (x - 2z)\,\bar{i} + (x + 3y - z)\,\bar{j} + (5x + y)\,\bar{k}$ по контуру треугольника ABC, где A = (1; 0; 0), B(0; 1; 0), C(0; 0; 1).



<u>Решение.</u> Воспользуемся формулой Стокса (2). В качестве поверхности (S), натянутой на контур треугольника ABC, возьмём часть плоскости

$$x + y + z = 1,$$

проходящую через вершины A, B, C и лежащую в первом октанте.

Единичный вектор нормали к этой плоскости

$$\bar{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}\right).$$

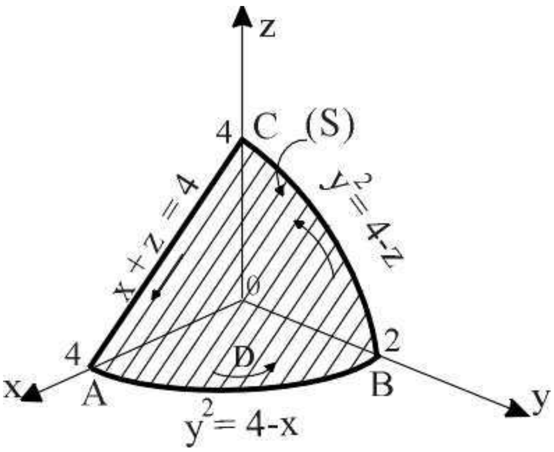
Вычислим ротор данного векторного поля $\bar{a}$. Действуя по формуле (1), найдём

$$\operatorname{rot}\bar{a} = 2\bar{i} - 7\bar{j} + \bar{k}.$$

По формуле Стокса

$$C = \iint\limits_{\Delta ABC} (\operatorname{rot}\bar{a}, \bar{n})\,dS = -\iint\limits_{\Delta ABC} \frac{4}{\sqrt{3}}\,dS = -\frac{4}{\sqrt{3}} S_{\Delta ABC} = -\frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -2.$$

3. Вычислить циркуляцию векторного поля $\bar{a} = x \cdot \bar{i} - z \cdot \bar{j} + y \cdot \bar{k}$ вдоль контура L, полученного при пересечении поверхности $y^2 = 4 - x - z$ с координатными плоскостями.



Решение. Контур $L = \overset{\cup}{AB} + \overset{\cup}{BC} + \overset{\cup}{CA}$.

За поверхность (S), натянутую на L, естественно, взять часть поверхности цилиндра $y^2 = 4 - x - z$ (его образующие параллельны прямой $x + z = 4$), лежащую в первом октанте. Найдём единичный вектор нормали к поверхности цилиндра

$$\bar{n} = \frac{\operatorname{grad}\left(x + y^2 + z - 4\right)}{\left|\operatorname{grad}\left(x + y^2 + z - 4\right)\right|} = \frac{\bar{i} + 2y\bar{j} + \bar{k}}{\sqrt{2 + 4y^2}}.$$

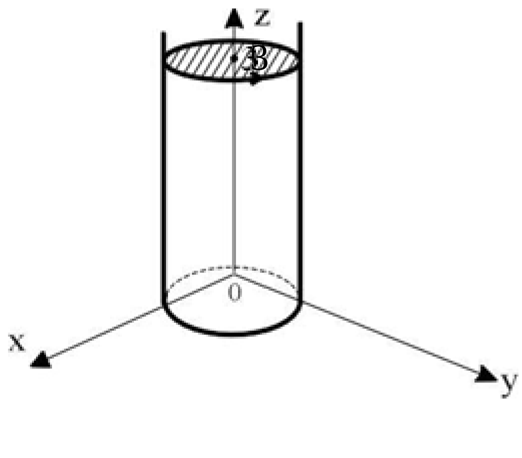
Далее находим ротор векторного поля $\bar{a}$. $\operatorname{rot}\bar{a} = 2\bar{i}$. По формуле Стокса

$$C = \iint\limits_{(S)} \frac{2dS}{\sqrt{2 + 4y^2}}.$$

Вычисляем поверхностный интеграл, сводя его к двойному по области D, ограниченной контуром AB0A.

$$C = \iint\limits_{(D)} \frac{2}{\sqrt{2 + 4y^2}} \sqrt{2 + 4y^2}\, dx\, dy = 2\int_0^2 dy \int_0^{4-x^2} dx = 2\int_0^2 \left(4 - y^2\right) dy = \frac{32}{3}.$$

4. Вычислить циркуляцию векторного поля $\bar{a} = y\bar{i} + x^2\bar{j} - z\bar{k}$ по контуру L: $x^2 + y^2 = 4$, $z = 3$.



Решение. В качестве поверхности, натянутой на контур L, естественно взять круг, имеющий линию L своей границей. Нормаль к кругу следует взять равной $\bar{k}$.

Вычисляем $\operatorname{rot}\bar{a}$ по (1)

$$\operatorname{rot}\bar{a} = (2x - 1)\bar{k}.$$

По формуле Стокса

$$C=\iint\limits_{(S)}(\operatorname{rot}\bar{a},\bar{n})dS = \iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le 4\\ z=3}}(2x-1)\,dxdy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2(2\rho\cos\varphi-1)\rho d\rho=-2\pi\left.\frac{\rho^2}{2}\right|_0^2=-4\pi.$$

Задачи для самостоятельной работы

1. Найти циркуляцию векторного поля $\bar{a}=z\bar{i}+x\bar{j}+y\bar{k}$ по контуру L: $x^2+y^2=4$, $z=0$.

2. Вычислить циркуляцию векторного поля $\bar{a}=2xz\bar{i}-y\bar{j}+z\bar{k}$ по контуру, образованному пересечением плоскости $x+y+2z=2$ с координатными плоскостями.

3. Вычислить поток вихря векторного поля $\bar{a}=y\bar{i}+z\bar{j}+x\bar{k}$ через часть поверхности $z=2(1-x^2-y^2)$ лежащей над плоскостью X0Y.

4. Вычислить (непосредственно и по формуле Стокса) циркуляцию векторного поля $\bar{a}=(x^2+y^2)\bar{i}+(x^2-y^2)\bar{j}+2z^2\bar{k}$ вдоль замкнутой кривой L, составленной из двух дуг полуокружностей L_1: $x^2+y^2=a^2$, $y\ge 0$, $z=0$ и

L_2: $x^2+z^2=a^2$, $z\ge 0$, $x=0$.

6. СОЛЕНОИДАЛЬНЫЕ, БЕЗВИХРЕВЫЕ И ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

I. ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Векторное поле $\bar{a}$ называется соленоидальным в области G, если $\operatorname{div}\bar{a}=0$ в точках области G.

Поток соленоидального поля $\bar{a}$ через любое сечение векторной трубки в направлении векторных линий есть величина постоянная (называемая интенсивностью векторной трубки).

1. Выяснить, является ли векторное поле $\bar{a}=(1+2xy)\bar{i}-y^2z\bar{j}+(z^2y-2zy+1)\bar{k}$ соленоидальным.

Решение. Вычислим дивергенцию векторного поля.

$$\operatorname{div}\bar{a}=2y-2yz+2zy-2y=0,$$

$\bar{a}$ – соленоидальное векторное поле.

2. Показать, что векторное поле $\bar{H}(x,y,z,t)=6x\cos\omega t\,\bar{i}+2\exp(-2y)\cdot\sin\omega t\,\bar{k}$ не может быть полем магнитного вектора.

Решение. Если бы $\overline{H}$ являлось магнитным полем, то $\operatorname{div}\overline{H} \equiv 0$ (из курса физики известно, что магнитное поле не имеет источников). У нас $\operatorname{div}\overline{H} = 6 \cdot \cos \omega t \not\equiv 0$.

3. Доказать, что поле линейных скоростей равномерно вращающейся жидкости $\overline{V} = -\omega y \cdot \overline{i} + \omega x \cdot \overline{j}$ является соленоидальным.

Решение. Действительно, $\operatorname{div}\overline{V} = \frac{\partial}{\partial x}(-\omega y) + \frac{\partial}{\partial y}(\omega x) = 0$.

II. ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Векторное поле $\overline{a}$ – называется безвихревым в области G, если $\operatorname{rot}\overline{a} = 0$ в точках области G.

4. Показать, что поле вектора электрической напряжённости $\overline{E} = q\,\overline{r}/r^3$, $\overline{r} = x\,\overline{i} + y\,\overline{j} + z\,\overline{k}$, $r = |\overline{r}|$, является безвихревым при $r \neq 0$.

Решение. Поле $\overline{E}$ определено во всем пространстве за исключением начала координат.

$$\operatorname{rot}\overline{E} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{qx}{r^3} & \frac{qy}{r^3} & \frac{qz}{r^3} \end{vmatrix} = q\left(-3\frac{z\,\partial r/\partial y}{r^4} + 3\frac{y\,\partial r/\partial z}{r^4}\right)\overline{i} +$$

$$+q\left(-3\frac{x\,\partial r/\partial z}{r^4} + 3\frac{z\,\partial r/\partial x}{r^4}\right)\overline{j} + q\left(-3\frac{y\,\partial r/\partial x}{r^4} + 3\frac{x\,\partial r/\partial y}{r^4}\right)\overline{k} = \ldots = 0.$$

5. Показать, что поле вектора $\overline{a} = \operatorname{grad} U$ безвихревое.

Решение. При условии, что функция $U = u(x, y, z)$ имеет непрерывные производные второго порядка, можем написать

$$\operatorname{rot}\overline{a} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial y}\right)\overline{i} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\right)\overline{j} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)\overline{k} = 0$$

т. е. поле градиентов скалярного поля безвихревое.

III. Определение 3. Векторное поле $\bar{a}$ называется потенциальным, если существует такое скалярное поле u, что $\bar{a} = \operatorname{grad} U$.

Функция U называется потенциалом векторного поля $\bar{a}$.

Если $\bar{a}$ - силовое векторного поле, то потенциалом называется функция (-U), а функция U называется силовой функцией. Потенциал поля определяется не однозначно, а с точностью до произвольной постоянной.

Удобным критерием потенциальности векторного поля является следующая.

ТЕОРЕМА. Для того, чтобы векторное поле $\bar{a}$, заданное в односвязной области G, было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы оно было в этой области безвихревым.

В потенциальном векторном поле линейный интеграл не зависит от пути интегрирования и равен разности потенциалов в конечной и начальных точках:

$$\int\limits_{L_{AB}} (\bar{a}, d\bar{r}) = \int\limits_{L_{AB}} du = u(B) - u(A).$$

Циркуляция потенциального поля по любому замкнутому контуру равна нулю.

Потенциал u(x, y, z) векторного поля

$$\bar{a}\,(x, y, z) = a_1(x, y, z)\,\bar{i} + a_2(x, y, z)\,\bar{j} + a_3(x, y, z)\,\bar{k}$$

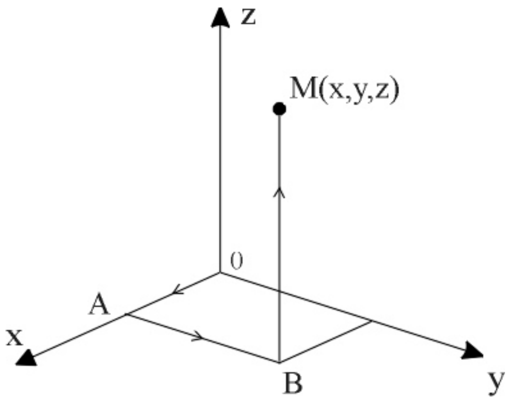
определяется формулой

$$u(x,y,z) = \int\limits_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz, \tag{1}$$

где (x_0, y_0, z_0) – фиксированная, (x, y, z) – произвольная текущая точка.

6. Установить потенциальность поля $\bar{a} = (yz - 2x)\bar{i} + (xz - 2y)\bar{j} + xy\bar{k}$ и найти его потенциал.

Решение. Нетрудно подсчитать, что $\operatorname{rot} \bar{a} = 0$ (проверьте!), т.е. $\bar{a}$ – безвихревое поле. Задано оно во всем пространстве, которое представляет собой односвязную область. Поэтому оно потенциально. Найдём его потенциал по формуле (I), выбирая начало координат за фиксированную точку, т. е. $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, а в качестве пути интегрирования ломанную OABM, звенья которой параллельны осям координат.



На участке 0A:

$y = 0,\ z = 0,\ dy = 0,\ dz = 0;$

на участке AB:

$z = 0,\ dz = 0,\ dx = 0;$

на участке BM:

$dx = 0,\ dz = 0.$

Поэтому и в силу формулу (I)

$$u(x,y,z) = \int\limits_{0ABM} (yz - 2x)dx + (xz - 2y)dy + xy\,dz = \int\limits_{0A} + \int\limits_{AB} + \int\limits_{BM} = \int\limits_{0}^{x} (0\cdot 0 - 2x)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{0}^{y} (x\cdot 0 - 2y)dy + \int\limits_{0}^{z} xy\,dz = -x^2 - y^2 + xyz.$$

Потенциал $U(x, y, z) = xyz - x^2 - y^2$.

Проверка: $\operatorname{grad} u = \operatorname{grad}\left(xyz - x^2 - y^2\right) = (-2x + yz)\cdot\bar{i} + (xz - 2y)\cdot\bar{j} + xy\cdot\bar{k} = \bar{a}$.

7. Показать, что магнитное поле $\overline{H} = \Im\cdot\left(2\pi\rho^2\right)^{-1}\cdot\left(-y\bar{i} + x\bar{j}\right),\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, образованное постоянным электрическим током с силой $\Im$, текущим по бесконечно длинному проводнику (ось z) не является потенциальным во всей области своего задания.

<u>Решение.</u> Поле $\overline{H}$ задано во всём пространстве, из которого выброшена ось 0Z (так как для точек, лежащих на оси 0Z, $\rho = 0$). Эта область не односвязная, так как не на каждый лежащий в ней замкнутый контур можно “натянуть” поверхность, все точки которой принадлежат области. Циркуляция поля $\overline{H}$ вдоль замкнутого контура, охватывающего ось 0Z, отлична от нуля.

Например, если L окружность $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$, то

$$C = \oint\limits_{L}\left(\overline{H}, d\bar{r}\right) = \frac{\Im}{2\pi}\oint\limits_{L}\left[\frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}\right] = \left|\begin{matrix} x = R\cos t \\ y = R\sin t \\ 0 \le t \le 2\pi \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{\Im}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\left[\frac{-R\sin t\cdot(-R\sin t) + R\cos t\cdot R\cos t}{R^2}\right]dt = \Im.$$

Если бы поле было потенциальным, то циркуляция вдоль <u>любого</u> замкнутого контура, лежащего в области задания поля, равнялась бы нулю.

8. Напряжённость $\overline{E}$ электростатического поля, образованного точечным зарядом величины q, помещённым в начало координат, определяется по формуле $\overline{E} = {q\,\overline{r}}\big/{r^3}$, $\overline{r} = x\,\overline{i} + y\,\overline{j} + z\,\overline{k}$, $r = |\overline{r}|$.

1. Доказать, что поле $\overline{E}$ - потенциально при $r \neq 0$.

2. Найти потенциал этого поля.

3. Вычислить работу сил поля $\overline{E}$ при перемещении заряда из точки с радиус – вектором $\overline{r}_1$ в точку с радиус – вектором $\overline{r}_1$.

Решение. Поле $\overline{E}$ задано во всем пространстве за исключением начала координат. Всё пространство с “выколотой” точкой – поверхностно – односвязная область. В задаче 4 этого параграфа показано, что $\operatorname{rot}\overline{E} = 0$ при $r \neq 0$. Следовательно, поле потенциально.

Найдём потенциал поля $\overline{E}$. Пусть $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ – фиксированная точка, не совпадающая с началом координат, а (x; y; z) – текущая точка. Снова выбирая в качестве пути интегрирования ломанную, звенья которой параллельны осям координат и действуя как в задаче 5, находим потенциал

$$u(x, y, z) = -\int\limits_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} q\frac{xdx + ydy + zdz}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3} = -q\int\limits_{x_0}^{x}\frac{xdx}{\left(\sqrt{x^2 + y_0^2 + z_0^2}\right)^3} - q\int\limits_{y_0}^{y}\frac{ydy}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z_0^2}\right)^3} -$$

$$-q\int\limits_{z_0}^{z}\frac{z\,dz}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3} = q\left.\frac{1}{\sqrt{x^2 + y_0^2 + z_0^2}}\right|_{x_0}^{x} + q\left.\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z_0^2}}\right|_{y_0}^{y} +$$

$$+q\left.\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right|_{z_0}^{z} = \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{q}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}.$$

Так как x_0, y_0, z_0 – фиксированы, то $\dfrac{q}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}$ некая постоянная

и потенциал

$$u(x, y, z) = \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + C = \frac{q}{r} + C.$$

Так как $\overline{E}$ потенциальное векторное поле, то работа в нём не зависит от пути и равна разности потенциалов, т. е.

$$A = u(x_2, y_2, z_2) - u(x_1,\ y_1,\ z_1) = q\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Задачи для самостоятельной работы

1. Является ли векторное поле $\bar{a} = x(z^2 - y^2)\bar{i} + y(x^2 - z^2)\bar{j} + z(y^2 - x^2)\bar{k}$ соленоидальным.

2. При каком условии центрированное векторное поле $\bar{a} = \varphi(\bar{r}) \cdot \bar{r}$ будет соленоидальным?

3. Доказать, что центрированное векторное поле $\bar{a} = \varphi(\bar{r}) \cdot \bar{r}$ безвихревое.

Показать, что поле $\bar{a} = yz(2x + y + z)\bar{i} + xz(x + 2y + z)\bar{j} + xy(x + y + 2z)\bar{k}$ безвихревое.

4. Доказать, что следующие векторные поля являются потенциальными и найти их потенциал

а) $\bar{a} = (y + z)\,\bar{i} + (x + z)\,\bar{j} + (x + y)\,\bar{k}$,

б) $\bar{a} = (x^2 - 2yz)\,\bar{i} + (y^2 - 2xz)\,\bar{j} + (z^2 - 2xy)\bar{k}$.

5. Электрическое поле $\bar{E}$ образовано зарядами, находящимися в точках M_1, M_2 $\left(\overrightarrow{OM_i} = \bar{r}_i\right)$. Доказать, что оно потенциально и найти потенциал.

ОТВЕТЫ

1. 3). $-7/\sqrt{11}$; 4). -2; 5). $2v/\sqrt{3}$; 6). $2\left(\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}\right)$ и $2\sqrt{3}$; 7). $-q\,\bar{r}/r^3$;

9). x = cos t, y = sin t, z = bt – винтовая линия;

10). эллипсы с центром в точке $\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$; 11). $x^2 - y^2 = Cy$.

2. 1). 27π; 2). 8; 3). $-\pi/2$; 4). $3\pi/16$; 5). 81π;

3. 1). $\dfrac{(\bar{r}, \bar{a})}{r}$; 2). $\operatorname{div} \bar{H} = 0$, $x^2 + y^2 \neq 0$; 3). $-83\,1/3$; 4). $\dfrac{6\pi}{5}\left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)R^5$;

5). П = – π; 6). 81π;

4. 1). 72; 2). πa^2; 3). 0; 4). $-\pi/2$;

5. 1). 4π; 2). $4/3$; 3). – π; 4). $-4/3\,a^3$;

6. 1) да; 2). $\varphi = \dfrac{C}{r^3}$, $r \neq 0$; 4.б). $u = \dfrac{1}{3}\left(x^3 + y^3 + z^3\right) - 2xyz + C$;

Типовой расчет

Задача 1. Найти векторные линии в векторном поле $\bar{a}(x, y)$.

1. $\bar{a} = 3x\,\bar{i} - 2y\,\bar{j}$	11. $\bar{a} = 3x\,\bar{i} + 2y\,\bar{j}$	21. $\bar{a} = 8x\,\bar{i} - 11y\,\bar{j}$
2. $\bar{a} = -x\,\bar{i} - 5y\,\bar{j}$	12. $\bar{a} = -5y\,\bar{i} - 3x\,\bar{j}$	22. $\bar{a} = 8x\,\bar{i} + 11y\,\bar{j}$
3. $\bar{a} = 8x\,\bar{i} - 5y\,\bar{j}$	13. $\bar{a} = 9x\,\bar{i} - y\,\bar{j}$	23. $\bar{a} = 9x\,\bar{i} + y\,\bar{j}$
4. $\bar{a} = 4x\,\bar{i} - 2y\,\bar{j}$	14. $\bar{a} = x\,\bar{i} + y\,\bar{j}$	24. $\bar{a} = 5y\,\bar{i} - 3x\,\bar{j}$
5. $\bar{a} = x\,\bar{i} - 4y\,\bar{j}$	15. $\bar{a} = 4x\,\bar{i} + 2y\,\bar{j}$	25. $\bar{a} = 6x\,\bar{i} - 3y\,\bar{j}$
6. $\bar{a} = y\,\bar{i} - 2x\,\bar{j}$	16. $\bar{a} = y\,\bar{i} + 2x\,\bar{j}$	26. $\bar{a} = 8x\,\bar{i} + 5y\,\bar{j}$
7. $\bar{a} = -y\,\bar{i} + 5x\,\bar{j}$	17. $\bar{a} = 6y\,\bar{i} - 5x\,\bar{j}$	27. $\bar{a} = x\,\bar{i} - 5y\,\bar{j}$
8. $\bar{a} = -7y\,\bar{i} - 3x\,\bar{j}$	18. $\bar{a} = 7y\,\bar{i} - 3x\,\bar{j}$	28. $\bar{a} = -y\,\bar{i} - 5x\,\bar{j}$
9. $\bar{a} = 10y\,\bar{i} - 3x\,\bar{j}$	19. $\bar{a} = 10y\,\bar{i} + 3x\,\bar{j}$	29. $\bar{a} = -6y\,\bar{i} - 5x\,\bar{j}$
10. $\bar{a} = 4y\,\bar{i} - 7x\,\bar{j}$	20. $\bar{a} = -8y\,\bar{i} - 4x\,\bar{j}$	30. $\bar{a} = 4y\,\bar{i} + 7x\,\bar{j}$

Задача 2. Найти поверхности уровня скалярного поля u = u(x, y, z).

1.	$u = \dfrac{x^2 + 2y^2}{3z}$	16.	$u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + (y-2)^2 + z^2}}$
2.	$u = \dfrac{x^2 - 4y^2}{z}$	17.	$u = \sqrt{0,25x^2 + (y-1)^2 + z^2}$
3.	$u = \dfrac{x^2 + 0,25y^2}{z^2}$	18.	$u = 4\exp[x^2 + y]$
4.	$u = \exp[x^2 + y^2 - 4z]$	19.	$u = 5\exp\left(\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4}\right)$

5. $u = x^2 + y^2$	20. $u = \dfrac{xy}{z}$
6. $u = \sqrt[4]{25x^2 + y^2 + \dfrac{z^2}{4}}$	21. $u = \sqrt[4]{25x^2 + y^2 - \dfrac{z^2}{4}}$
7. $u = \sqrt{0,25x^2 + (y-1)^2 - z}$	22. $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + z^2}}$
8. $u = \dfrac{xy}{z-1}$	23. $u = \dfrac{zy}{x+5}$
9. $u = \left(\dfrac{x^2}{4} - 4y^2\right) \cdot \dfrac{1}{z^2}$	24. $u = \left(\dfrac{x^2}{9} + y^2\right) \cdot \dfrac{1}{z}$
10. $u = \left(\dfrac{x^2}{25} + y^2\right) \cdot \dfrac{1}{z^2}$	25. $u = 5\exp\left(\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{z^2}{4}\right)$
11. $u = \exp\left(\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9}\right)$	26. $u = \exp\left(\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} - z\right)$
12. $u = 2^{\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4}\right)}$	27. $u = \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} - z^2$
13. $u = \left(-\dfrac{x^2}{16} + y^2\right) \cdot \dfrac{1}{z^2}$	28. $u = 5^{\left(-\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + z\right)}$
14. $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + z^2 - y}}$	29. $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + z^2 - 2z - 1 - 2y}}$
15. $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$	30. $u = \exp[x^2 - y^2 - 4z^2]$

Задача 3. Найти единичный вектор нормали к поверхности S в точке M.

S	M
16. $yx^2 - z^2 - 2y = 0$	M(1; 1; 1)

S	M
16. $x^2 + xy^2 - 2z = 0$	M(1; 1; 1)

17. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=z^2$	M(4; 2; 1)
18. $z = 2y \cdot e^{y-x}$	M(1; 1; 2)
19. $z = \sqrt[4]{4+x^2y}$	M(– 2; 3; 2)
20. $z = 4 / (5x^3 – 4x^{-y}) + y$	M(1; 1; 5)
21. $z = 3y / (2y^3 – x)$,	M(1; 1; 3)
22. $z = xy^2 – 4e^{x-y} + 5$	M(1; 1; 0)
23. $z = 2x^4 \cdot e^{y} + y$	M(1; 0; 2)
24. $3x^2 – 2yz^2 – 4y + 3 = 0$	M(– 1; 1; 1)
25. $z = \sqrt{yx^2+8x+y^2}$	M(– 2; 4; 4)
26. $x^2 \cdot y^2 + 4x – z = 0$	M(1; 1; 5)
27. $x^2 – z^2 \cdot y = 0$	M(1; 1; 1)
28. $z = \sqrt{\dfrac{2xy^3-x^4}{4}}$	M(2; 2; 2)
29. $z = \sqrt[3]{\dfrac{3x^2y+2xy^2}{2}}$	M(2; 1; 2)
15. $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y+2x+1}}$	$M\left(3; 0; \dfrac{1}{4}\right)$

17. $– x^2 + xy^2 – 5z = 0$	M(1; 4; 3)
18. $x^2 – 4z^2 – xy = 0$	M(1; 1; 0)
19. $x^2 – 2z^2 + zy = 0$	M(– 1; 0; 1)
20. $9x^2 + 16z^2 = 25$	M(1; 7; – 1)
21. $9x^2 \cdot y^2 + z^2 = 10$	M(1; 1; 1)
22. $z = 15x^3 \cdot e^{y-x}$	M(1; 1; 15)
23. $z = e^{5-4x-y} + 2y$	M(1; 1; 3)
24. $– x^2 + 2xy^2 + yz = 0$	M(2 ; – 1; 0)
25. $x^2 + zy + xz = 0$	M(– 1; 0; 1)
26. $z = 2\ln(e^{y-x} + x^3)$	M(0; 4; 8)
27. $z = 7xy^2 – 4e^{x-y}$	M(1; 1; 3)
28. $z = 3\sqrt{\dfrac{xy-x^2}{0{,}25}}$	M(1; 2; 6)
29. $z = \sqrt[3]{\dfrac{5x^2y-2xy^2-2}{8}}$	M(3; 2; 1)
30. $z = 4\sqrt{yx^2+yx-y^2}$	M(1; 1; 4)

Задача 4. Найти производную скалярного поля $u = u(x, y, z)$ в точке M по направлению нормали $\overline{n}$ к поверхности S, образующей острый угол с положительным направлением оси OZ.

1. $u = 5x^3 + 4e^{y-z} + z$, S: $x^2 + 2y^2 – 2z = 0$, M(0; 1; 1).

2. $u = 7x^{3y} – 4e^{x-z} + 5$, S: $x^2 + y^2 – 2z = 0$, M(1; 1; 1).

3. $u = \ln(5x^3 – 4e^{y-z}) + z$, S: $4x^2 + y^2 – 5z = 0$, M(1; 1; 1).

4. $u = 4 / (5x^3 - 4x^{-z}) + y$, S: $x^2 - z^2 - y = 0$, M(1; 0; 1).

5. $u = e^{3-4x-z} + 2y$, S: $x^2 - z^2 + y = 0$, M(1; 0; –1).

6. $u = 4/\sqrt{x^2 + 2y^3 - z}$, S: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, M(2; 0; 0).

7. $u = 4\sqrt{yx^2 + yz + z^2}$, S: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, M(0; 0; 1).

8. $u = 2\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{xz + y^3 + z^4}\right)$, S: $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$, M(0; 0; 1).

9. $u = 4\sqrt{x^2 + 2y^3 + z^4}$, S: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, M(0; 0; 1).

10. $u = (7x^{3y} - 4e^{x-z}) / 5z$, S: $x^2 + 4y^2 - 2z = 0$, M(2; 0; 2).

11. $u = 8\ln\sqrt[4]{4 + x^2y + z^2} + xz$, S: $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$, M(2; 2; 2).

12. $u = \sqrt[4]{4 + x^2y + z^2} \cdot x^z$, S: $x^2 + z^2 - 2y^2 = 0$, M(2; 2; 2).

13. $u = \sqrt[3]{\dfrac{4x^2y + z^2}{y + x - z + 1}} + x/z$, S: $x^2 + y - 2z^2 = 0$, M(3; 9; 3).

14. $u = \ln\left(\sqrt[5]{4 - 4z^2} + 1\right) + 3xy + 2xz$, S: $x^2 + y^2 + 2z = 0$, M(1; 1; –1).

15. $u = 2 / (5x^3 y^z)$, S: $y^2 + z^2 - x = 0$, M(1; 1; 0).

16. $u = 8 / (y - 4x^z)$, S: $x^2 - 4z^2 - y = 0$, M(1; 0; 1/2).

17. $u = 2\arcsin\left(\sqrt{x + zxy^4 + z^3}\right)$, S: $x^2 + 16y^2 + z^2 = 16$, M(0; 1; 0).

18. $u = 5\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{2xz + y^3 + z^4}{4}}\right)$, S: $x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$, M(1; 1; –1).

19. $u = 9\sin\left(\sqrt{2xz - y^3 + 3z^2 + 1} - 1\right)$, S: $x^2 + y^2 + 6z^2 = 8$, M(1; 1; –1).

20. $u = 3y / (2z^3 x)$, S: $y^2 - z^2 - x = 0$, M(3; 2; 1).

21. $u = 2y^2 z / x$, S: $4x^2 + y^2 + 2z^2 = 144$, M(3; – 6; – 6).

22. $u = \ln\left(\sqrt[7]{3 - 2z^2}\right) \cdot 5xy^3 + 7x$, S: $-x^2 + 2y^2 + z = 0$, M(1; 1; –1).

23. $u = 5x^3 \cdot e^y + z$, S: $x^2 + 2y^2 - z = 0$, M(-1; 0; 1).

24. $u = (3x \cdot e^{2y-z}) / z$, S: $x^2 + 2y^2 + 2z = 6$, M(0; 1; 2).

25. $u = (2y^2 - z) / xz$, S: $xy = z$, M(3; – 3; – 9).

26. $u = (7y \cdot e^{x-z}) / z$,   S: $2x\,y = z - 3$,   M(0; 1; 3).

27. $u = x / \sqrt{3x^2 + 4y^3 - 2z}$,   S: $x^2 + y^2 + z^2 = 5$,   M(2; 1; 0).

28. $u = 15x^3 \cdot e^{y-z} \cdot z$,   S: $x^2 + 2y^2 - 4z = 2$,   M(2; 1; 1).

29. $u = 4\cos\left(\sqrt{2 - 4y^3 + 3z^2} - 1\right)$,   S: $x^2 + 6y^2 + z^2 = 8$,   M(1; 1; –1).

30. $u = xy / (5x^2 - 4\,y^{z}) + zy^4$,   S: $3x^2 - 2z^2 - 4y + 3 = 0$,   M(1; 1; 1).

Задача 5. а) Найти поток векторного поля $\bar{a}\,(x, y, z)$ через верхнюю сторону треугольника ABC.

б) Найти (непосредственно и по формуле Стокса) циркуляцию векторного поля $\bar{a}\,(x, y, z)$ по контуру треугольника с вершинами в точках A, B и C.

1. $\bar{a} = (y - z)\,\bar{i} + (y + z)\,\bar{j} + (x - y)\,\bar{k}$, A(1; 0; 0), B(0; 1; 0), C(0; 0; 1).

2. $\bar{a} = 2x\,\bar{i} + z\,\bar{j} + 5x\,\bar{k}$, A(1; 0; 0), B(0; – 1; 0), C(0; 0; 4).

3. $\bar{a} = (x - 2)\,\bar{i} + (4y + z)\,\bar{j} + (z - y)\,\bar{k}$, A(3; 0; 0), B(0; 3; 0), C(0; 0; 1).

4. $\bar{a} = (x - 2z)\,\bar{i} + (y + 8z)\,\bar{j} + (3z + y)\,\bar{k}$, A(5; 0; 0), B(0; 4; 0), C(0; 0; 2).

5. $\bar{a} = 2x\,\bar{i} + (1 - 2y)\,\bar{j} + 2z\,\bar{k}$, A(7; 0; 0), B(0; – 3; 0), C(0; 0; 7).

6. $\bar{a} = (5x - y)\,\bar{i} + (9y + z)\,\bar{j} + (x - 8y)\,\bar{k}$, A(5; 0; 0), B(0; 6; 0), C(0; 0; 3).

7. $\bar{a} = (5x - 4z)\,\bar{i} + (y - 6z)\,\bar{j} + (x - 7y)\,\bar{k}$, A(3; 0; 0), B(0; 2; 0), C(0; 0; $\sqrt{3}$).

8. $\bar{a} = (5x + z)\,\bar{i} + (x - 3y)\,\bar{j} + (4y - 2z)\,\bar{k}$, A($-\sqrt{3}$; 0; 0), B(0; – 2; 0), C(0; 0; 3).

9. $\bar{a} = (7x - y)\,\bar{i} + (4y + 3z)\,\bar{j} + (x - 4z)\,\bar{k}$, A(1; 0; 0), B(0; 2; 0), C(0; 0; 3).

10. $\bar{a} = (8 - y)\,\bar{i} + (y + 5z)\,\bar{j} + (x - 2z)\,\bar{k}$, A($3\sqrt{3}$; 0; 0), B(0; – 6; 0), C(0; 0; 3).

11. $\bar{a} = (3x - 2y)\,\bar{i} + (y + 3z)\,\bar{j} + (x - 7y)\,\bar{k}$, A(– 1; 0; 0), B(0; 2; 0), C(0; 0; 3).

12. $\bar{a} = (7x - 3)\,\bar{i} + (4y + z)\,\bar{j} + (x - 4)\,\bar{k}$, A(1; 0; 0), B(0; – 2; 0), C(0; 0; 1).

13. $\bar{a} = (2y + 3x)\,\bar{i} + (y + z)\,\bar{j} + (x - 1)\,\bar{k}$, A(2; 0; 0), B(0; 4; 0), C(0; 0; 4).

14. $\bar{a} = (9x - z)\,\bar{i} + (y + 6)\,\bar{j} + (x - 1)\,\bar{k}$, A(1; 0; 0), B(0; – 2; 0), C(0; 0; 2).

15. $\bar{a} = (x - 1)\,\bar{i} + (4 + z)\,\bar{j} + (x - y)\,\bar{k}$, A(2; 0; 0), B(0; – 2; 0), C(0; 0; 1).

16. $\bar{a} = (y - 3)\,\bar{i} + (7 + z)\,\bar{j} + (2x + 4)\,\bar{k}$, A(6; 0; 0), B(0; – 3; 0), C(0; 0; 6).

17. $\bar{a} = (y - 2x)\,\bar{i} + (x + z)\,\bar{j} + (y - x)\,\bar{k}$, A(1; 0; 0), B(0; – 2; 0), C(0; 0; 1).

18. $\bar{a} = (7y - 1)\,\bar{i} + (4x + z)\,\bar{j} + (x - 5)\,\bar{k}$, A(– 2; 0; 0), B(0; – 2; 0), C(0; 0; 1).

19. $\bar{a} = (2y - 1)\,\bar{i} + (4z + 8)\,\bar{j} + (3x - 1)\,\bar{k}$, A(– 5; 0; 0), B(0; – 10; 0), C(0; 0; 10).

20. $\bar{a} = (x - y)\,\bar{i} + (4y + 2)\,\bar{j} + (z - x)\,\bar{k}$, A(1; 0; 0), B(0; – 2; 0), C(0; 0; – 2).

21. $\bar{a} = (y - 1)\,\bar{i} + (x + z)\,\bar{j} + (z - 1)\,\bar{k}$, A(– 2; 0; 0), B(0; – 2; 0), C(0; 0; – 1).

22. $\bar{a} = 8y\,\bar{i} + (4x + 1)\,\bar{j} + (x - z)\,\bar{k}$, A(2; 0; 0), B(0; – 4; 0), C(0; 0; 4).

23. $\bar{a} = y\,\bar{i} + (x + z)\,\bar{j} + (5x - y)\,\bar{k}$, A(4; 0; 0), B(0; – 2; 0), C(0; 0; 4).

24. $\bar{a} = (7y - z)\,\bar{i} + x\,\bar{j} + (y - 2)\,\bar{k}$, A(– 1; 0; 0), B(0; – 2; 0), C(0; 0; –2).

25. $\bar{a} = 3\,\bar{i} + (5y + z)\,\bar{j} + (2x - 7)\,\bar{k}$, A(3; 0; 0), B(0; – 6; 0), C(0; 0; – 6).

26. $\bar{a} = 7\,\bar{i} + 4z\,\bar{j} + (xy - 2)\,\bar{k}$, A(– 6; 0; 0), B(0; – 3; 0), C(0; 0; 6).

27. $\bar{a} = 2x\,\bar{i} + (y + 5z)\,\bar{j} + (x - 9)\,\bar{k}$, A(1; 0; 0), B(0; – 2; 0), C(0; 0; – 3).

28. $\bar{a} = 7x\,\bar{i} + 4y\,\bar{j} + (x - 4z)\,\bar{k}$, A(1; 0; 0), B(0; – 5; 0), C(0; 0; 1).

29. $\bar{a} = 15y\,\bar{i} + (6x + z)\,\bar{j} + (x - 7)\,\bar{k}$, A(1; 0; 0), B(0; – 2; 0), C(0; 0; – 5).

30. $\bar{a} = (11x - 3z)\,\bar{i} + (4 + x)\,\bar{j} + (y - 3)\,\bar{k}$, A(5; 0; 0), B(0; – 2; 0), C(0; 0; – 1).

Задача 6. Найти поток векторного поля $\bar{a}\,(x, y, z)$ через внешнюю сторону части поверхности параболоида $x^2 / p^2 + y^2 / q^2 = c - z$, ($b \le z \le c$) двумя способами (непосредственно и по теореме Остроградского).

$\bar{a}\,(x, y, z)$	p	q	b	c
1. $\bar{a} = 7x\,\bar{i} + 4y\,\bar{j} + (x - 4z)\,\bar{k}$	1	1	0	4
2. $\bar{a} = 3x\,\bar{i} - 2y\,\bar{j} + 5z\,\bar{k}$	3	4	3	7
3. $\bar{a} = x\,\bar{i} + 2y\,\bar{j} + 5z\,\bar{k}$	2	2	0	4
4. $\bar{a} = (x - 2z)\,\bar{i} + 4y\,\bar{j} + \bar{k}$	2	1	0	1
5. $\bar{a} = -x\,\bar{i} + 4y\,\bar{j} - 5z\,\bar{k}$	3	1	1	5

$\bar{a}\,(x, y, z)$	p	q	b	c
16. $\bar{a} = 4x\,\bar{i} + 3y\,\bar{j} + (y - 3z)\,\bar{k}$	1	1	1	5
17. $\bar{a} = 7x\,\bar{i} - 2y\,\bar{j} + z\,\bar{k}$	1	2	0	4
18. $\bar{a} = 3x\,\bar{i} + 5y\,\bar{j} + (y - 7z)\,\bar{k}$	3	4	1	5
19. $\bar{a} = y\,\bar{i} + 5y\,\bar{j} + (x - 2z)\,\bar{k}$	1	1	0	4
20. $\bar{a} = z\,\bar{i} + y\,\bar{j} + (y - 5x)\,\bar{k}$	3	3	1	2

6. $\bar{a}=(y-3x)\,\bar{i}+x\,\bar{j}+\bar{k}$	2	2	2	6	21. $\bar{a}=7z\,\bar{i}+(y-x)\,\bar{j}+5x\,\bar{k}$	1	1	1	2
7. $\bar{a}=4\,\bar{i}+(3y-x)\,\bar{j}+y\,\bar{k}$	3	3	3	7	22. $\bar{a}=x\,\bar{i}+(z-x)\,\bar{j}+3y\,\bar{k}$	1	1	3	7
8. $\bar{a}=(1-2z)\,\bar{i}+y\,\bar{j}+x\,\bar{k}$	4	4	3	7	23. $\bar{a}=(x-y)\,\bar{i}+z\,\bar{j}+2y\,\bar{k}$	4	4	1	2
9. $\bar{a}=12\,\bar{i}+6y\,\bar{j}+x\,\bar{k}$	1	1	2	6	24. $\bar{a}=(x-5)\,\bar{i}+3y\,\bar{j}-z\,\bar{k}$	2	2	2	6
10. $\bar{a}=4\,\bar{i}+4z\,\bar{j}+z\,\bar{k}$	3	3	2	6	25. $\bar{a}=9y\,\bar{i}+(z-2x)\,\bar{j}+z\,\bar{k}$	3	3	4	5
11. $\bar{a}=-z\,\bar{i}+(6y-x)\,\bar{j}+y\,\bar{k}$	2	2	4	5	26. $\bar{a}=5y\,\bar{i}+(y-z)\,\bar{j}-\bar{k}$	1	1	4	5
12. $\bar{a}=z\,\bar{i}+(5y+x)\,\bar{j}-3\,y\,\bar{k}$	3	2	4	8	27. $\bar{a}=-x\,\bar{i}+\bar{j}+4y\,\bar{k}$	2	2	4	8
13. $\bar{a}=2z\,\bar{i}+(y-x)\,\bar{j}+7y\,\bar{k}$	1	1	4	8	28. $\bar{a}=3y\,\bar{i}-5x\,\bar{j}+(4-2z)\,\bar{k}$	3	3	4	8
14. $\bar{a}=-2x\,\bar{i}+z\,\bar{j}+(y-7)\,\bar{k}$	4	4	4	8	29. $\bar{a}=8z\,\bar{i}+6\,\bar{j}+(z-5x)\,\bar{k}$	4	4	1	5
15. $\bar{a}=y\,\bar{i}-\bar{j}+(z-3x)\,\bar{k}$	4	4	2	6	30. $\bar{a}=x\,\bar{i}+z\,\bar{j}+(4y+2x)\,\bar{k}$	4	4	3	7

Задача 7. Найти поток векторного поля $\bar{a}\,(x,y,z)$ через полную поверхность пирамиды, ограниченной плоскостями: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ (нормаль внешняя).

$\bar{a}\,(x,y,z)$	a	b	c	$\bar{a}\,(x,y,z)$	a	b	c
1. $\bar{a}=e^{7x}\,\bar{i}+xy\,\bar{j}+(x-4z)\,\bar{k}$	1	1	1	16. $\bar{a}=4x\,\bar{i}+e^{3y}\,\bar{j}+(y-3z)\,\bar{k}$	1	1	5
2. $\bar{a}=(x-\sin y)\,\bar{i}-2\,\bar{j}+5z\,\bar{k}$	3	4	3	17. $\bar{a}=5x\,\bar{i}-(2y-\cos x)\,\bar{j}+z\,\bar{k}$	1	2	4
3. $\bar{a}=x\,\bar{i}+2y\,\bar{j}+e^{5z}\,\bar{k}$	2	2	2	18. $\bar{a}=x\,\bar{i}-y\,\bar{j}+(xy-7z)\,\bar{k}$	3	1	5
4. $\bar{a}=3xz\,\bar{i}+yz\,\bar{j}-z^2\bar{k}$	2	1	3	19. $\bar{a}=yz\,\bar{i}+xz\,\bar{j}+z^2\bar{k}$	1	3	4
5. $\bar{a}=e^{-x}\,\bar{i}+4y\,\bar{j}-5z\,\bar{k}$	3	1	1	20. $\bar{a}=z^3\,\bar{i}+y^2\,\bar{j}+(y-5x)\,\bar{k}$	3	1	2
6. $\bar{a}=(y-e^{3x})\,\bar{i}+\cos x\,\bar{j}+\bar{k}$	2	2	5	21. $\bar{a}=7x\,\bar{i}+e^{(y-x)}\,\bar{j}+5z\,\bar{k}$	1	1	2
7. $\bar{a}=4\,\bar{i}+3yx\,\bar{j}+zy\,\bar{k}$	3	3	3	22. $\bar{a}=xy\,\bar{i}+yz\,\bar{j}+z^2\bar{k}$	1	3	7

8. $\bar{a} = (1-2z)\,\bar{i} + y\,\bar{j} + x\,\bar{k}$	4	4	3
9. $\bar{a} = 12\,\bar{i} + 6y\,\bar{j} + x\,\bar{k}$	1	1	2
10. $\bar{a} = 4\,\bar{i} + 4z\,\bar{j} + z\,\bar{k}$	3	3	2
11. $\bar{a} = -z\,\bar{i} + (6y-x)\,\bar{j} + y\,\bar{k}$	2	2	4
12. $\bar{a} = z\,\bar{i} + (5y+x)\,\bar{j} - 3y\,\bar{k}$	3	2	4
13. $\bar{a} = 2z\,\bar{i} + (y-x)\,\bar{j} + 7y\,\bar{k}$	1	1	4
14. $\bar{a} = -2x\,\bar{i} + z\,\bar{j} + (y-7)\,\bar{k}$	4	4	4
15. $\bar{a} = y\,\bar{i} - \bar{j} + (z-3x)\,\bar{k}$	4	4	2

23. $\bar{a} = (x-y)\,\bar{i} + z\,\bar{j} + 2y\,\bar{k}$	4	1	2
24. $\bar{a} = (x-5)\,\bar{i} + 3y\,\bar{j} - z\,\bar{k}$	2	2	6
25. $\bar{a} = 9y\,\bar{i} + (z-2x)\,\bar{j} + z\,\bar{k}$	3	4	5
26. $\bar{a} = 5y\,\bar{i} + (y-z)\,\bar{j} - \bar{k}$	1	4	5
27. $\bar{a} = -x\,\bar{i} + \bar{j} + 4y\,\bar{k}$	2	4	8
28. $\bar{a} = 3y\,\bar{i} - 5x\,\bar{j} + (4-2z)\,\bar{k}$	3	4	8
29. $\bar{a} = 8z\,\bar{i} + 6\,\bar{j} + (z-5x)\,\bar{k}$	4	1	5
30. $\bar{a} = x\,\bar{i} + z\,\bar{j} + (4y+2x)\,\bar{k}$	4	3	7

Задача 8. Вычислить циркуляцию векторного поля $\bar{a}\,(x, y, z)$ вдоль линии пересечения части поверхности S, находящейся в первом октанте, с плоскостями координат.

$\bar{a}\,(x, y, z)$	S
1. $\bar{a} = x\,\bar{i} - y\,\bar{j} + 7z\,\bar{k}$	$x^2 + y + 4z^2 = 1$
2. $\bar{a} = -x\,\bar{i} + y\,\bar{j} + 4\bar{k}$	$y^2 = 1 - x - z$
3. $\bar{a} = -2x\,\bar{i} + x\,\bar{j} + z\,\bar{k}$	$z^2 = 2 - x - y$
4. $\bar{a} = 4\,\bar{i} + (3y-x)\,\bar{j} + z\,\bar{k}$	$z^2 = 4 - x - 4y$
5. $\bar{a} = x\,\bar{i} - y\,\bar{j} + z\,\bar{k}$	$x^2 + y^2 + z^2 = 1$
6. $\bar{a} = 7x\,\bar{i} + (3y-1)\,\bar{j} + z\,\bar{k}$	$x^2 + y + z^2 = 9$
7. $\bar{a} = x\,\bar{i} + 2y^3\,\bar{j} + 3\bar{k}$	$x^2 = 4 - y^4 - z$
8. $\bar{a} = z\,\bar{i} - xy\,\bar{j} + z\,\bar{k}$	$y^2 = 16 - x - z$
9. $\bar{a} = z\,\bar{i} + 3y\,\bar{j} - x\,\bar{k}$	$y^2 = 9 - x - z$

$\bar{a}\,(x, y, z)$	S
15. $\bar{a} = 4x\,\bar{i} + \bar{j} + z\,\bar{k}$	$x^2 + y + z^2 = 1$
16. $\bar{a} = 5\,\bar{i} + y\,\bar{j} + 4\bar{k}$	$y^2 = 4 - x - z$
17. $\bar{a} = 2x\,\bar{i} - \bar{j} + 7z\,\bar{k}$	$x^2 + 4y + z^2 = 4$
18. $\bar{a} = -y\,\bar{i} + x\,\bar{j} + 4z\,\bar{k}$	$z^2 = 4 - x - 2y$
19. $\bar{a} = -x\,\bar{i} + z\,\bar{j} + 4y\,\bar{k}$	$x^2 = 4 - y - z$
20. $\bar{a} = \bar{i} + xy\,\bar{j} + z\,\bar{k}$	$x + y + z^2 = 9$
21. $\bar{a} = 2x\,\bar{i} + \bar{j} + z\,\bar{k}$	$x^2 = 9 - y - z^2$
22. $\bar{a} = (x - y)\,\bar{i} - 2\,\bar{j} + 5z\,\bar{k}$	$z^2 = 4 - 2x - y$
23. $\bar{a} = z\,\bar{i} - y^3\,\bar{j} - x\,\bar{k}$	$y^4 = 1 - 4x - z$

10. $\bar{a} = 2\,\bar{i} - xy^5\,\bar{j} + 6\bar{k}$	$y^6 = 1 - x - z$		24. $\bar{a} = \bar{i} - 5y\,\bar{j} - x\,\bar{k}$	$y^2 = 9 - 3x - z$
11. $\bar{a} = -z\,\bar{i} + x\,\bar{j} + 3y\bar{k}$	$y = 9 - 3x - z$		25. $\bar{a} = y\,\bar{i} + 3x\,\bar{j} - z^3\,\bar{k}$	$z^4 = 4 - x - y$
12. $\bar{a} = y\,\bar{i} - 7x\,\bar{j} + z^5\,\bar{k}$	$z^6 = 1 - x - y$		26. $\bar{a} = \bar{i} - y^3\,\bar{j} - z\bar{k}$	$y^4 = 1 - x - z^2$
13. $\bar{a} = 8\,\bar{i} + 2y^3\,\bar{j} - \bar{k}$	$y^4 = 16 - x - z$		27. $\bar{a} = 2x\,\bar{i} + 4y^3\,\bar{j} - \bar{k}$	$y^4 = 1 - x^2 - z$
14. $\bar{a} = -z\,\bar{i} + (y - x)\,\bar{j} + y\bar{k}$	$y = 8 - 2x - z$		28. $\bar{a} = -e^{3x}\,\bar{i} + x\,\bar{j} + z\,\bar{k}$	$z^2 = 4 - x - 4y$
15. $\bar{a} = y\,\bar{i} + (z - x)\,\bar{j} + z\,\bar{k}$	$y = 12 - 3x - z$		29. $\bar{a} = 4x\,\bar{i} + e^{2y}\,\bar{j} + \bar{k}$	$y = 1 - x - z$

Задача 9. Найти ротор векторного поля $\bar{a}\,(x, y, z)$.

1. $\bar{a} = \dfrac{y}{xz^5}\,\bar{i} + (z - x)\,\bar{j} + e^z\,\bar{k}$

2. $\bar{a} = \dfrac{z}{x^5}\,\bar{i} + (4 - x)\,\bar{j} + \cos x\,\bar{k}$

3. $\bar{a} = z^2 y^5\,\bar{i} + z\sqrt{x^5}\,\bar{j} + e^{2z-4}\,\bar{k}$

4. $\bar{a} = -e^{3x}\,\bar{i} + xy^4\,\bar{j} + z\bar{k}$

5. $\bar{a} = \dfrac{x}{y - z}\,\bar{i} + (y - z)^2\,\bar{j} + \bar{k}$

6. $\bar{a} = x^9 y\,\bar{i} + \dfrac{z}{x}\,\bar{j} + e^{5zy^3}\,\bar{k}$

7. $\bar{a} = 3^{x-y}\,\bar{i} + \dfrac{y}{x}\,\bar{j} + e^{6zy^7}\,\bar{k}$

8. $\bar{a} = z\,\bar{i} + \dfrac{z}{x^7}\,\bar{j} + e^{5z - y^3}\,\bar{k}$

9. $\bar{a} = xe^z\,\bar{i} + x^2\,\bar{j} + \dfrac{yz}{x}\bar{k}$

10. $\bar{a} = xe^{zx}\,\bar{i} + xy^z\,\bar{j} + \bar{k}$

16. $\bar{a} = \dfrac{x - y}{xz^5}\,\bar{i} + z\,\bar{j} + e^{xy}\,\bar{k}$

17. $\bar{a} = x^2 y\,\bar{i} + z\sqrt{y}\,\bar{j} + e^{2z}\,\bar{k}$

18. $\bar{a} = \dfrac{z}{y^4}\,\bar{i} + (y - x)\,\bar{j} + \cos z\,\bar{k}$

19. $\bar{a} = 4xz^5\,\bar{i} + e^{2y - xz}\,\bar{j} + \bar{k}$

20. $\bar{a} = \dfrac{y}{x - z}\,\bar{i} + (y - x)\,\bar{j} + 2z\bar{k}$

21. $\bar{a} = x^2 y^7\,\bar{i} + y\sqrt{xz^5}\,\bar{j} + e^{2zy}\,\bar{k}$

22. $\bar{a} = z^9 y^3\,\bar{i} + \dfrac{z}{y}\,\bar{j} + xe^{y^3}\,\bar{k}$

23. $\bar{a} = e^{3 - xz}\,\bar{i} + xy^9\,\bar{j} + z\bar{k}$

24. $\bar{a} = xe^{3x}\,\bar{i} + xy^8\,\bar{j} + yz\bar{k}$

25. $\bar{a} = ye^{2x}\,\bar{i} + z^2\,\bar{j} + \dfrac{y - z}{x}\bar{k}$

11. $\bar{a} = ze^{3xz}\,\bar{i} + xy\,\bar{j} + y^z\,\bar{k}$

12. $\bar{a} = 5^z\,\bar{i} + \dfrac{z}{xy^7}\,\bar{j} + e^{-x}\,\bar{k}$

13. $\bar{a} = \left(x^2 - y^7\right)\bar{i} + \sqrt{x - z^5}\,\bar{j} + e^{2zy}\,\bar{k}$

14. $\bar{a} = 7^{3x-4y}\,\bar{i} + \dfrac{2y}{x}\,\bar{j} + e^{zy}\,\bar{k}$

15. $\bar{a} = \dfrac{x^5}{y - z}\,\bar{i} + (y - z)^5\,\bar{j} + 3y\,\bar{k}$

26. $\bar{a} = xe^{zyx}\,\bar{i} + 3y^z\,\bar{j} + yz\,\bar{k}$

27. $\bar{a} = y\,\bar{i} + 5^{z^2}\,\bar{j} + \dfrac{xy - z}{x^3}\,\bar{k}$

28. $\bar{a} = ze^{2x-z}\,\bar{i} + y^2\,\bar{j} + \dfrac{yz}{x}\,\bar{k}$

29. $\bar{a} = \dfrac{x^2}{yz}\,\bar{i} + (yz)^2\,\bar{j} + x\,\bar{k}$

30. $\bar{a} = \dfrac{1}{yz}\,\bar{i} + (yz)^3\,\bar{j} - x^4\,\bar{k}$

Задача 10. Является ли векторное поле $\bar{a}\,(x, y, z)$ соленоидальным?

1. $\bar{a} = 6zx^2\,\bar{i} - 4yz^2\,\bar{j} - (2x^3 - 4zy^2)\,\bar{k}$

2. $\bar{a} = (2yz + 2x)\,\bar{i} + 2(xz - y)\,\bar{j} + 2xy\,\bar{k}$

3. $\bar{a} = 3(y - z - x^2)\,\bar{i} + 3(xy + z)\,\bar{j} + 3(y + xz)\,\bar{k}$

4. $\bar{a} = (2x + 4yz)\,\bar{i} + (4xz + 5y^4)\,\bar{j} - (2z + 4xy + 20y^3z)\,\bar{k}$

5. $\bar{a} = (5yz - \cos(x + y))\,\bar{i} - (5xz - \cos(x + y))\,\bar{j} + 5xy\,\bar{k}$

6. $\bar{a} = (yz - 5y)\,\bar{i} + (xz + 5x)\,\bar{j} + xy\,\bar{k}$

7. $\bar{a} = (5yz - 2x)\,\bar{i} + (5xz + 2y)\,\bar{j} + 5xy\,\bar{k}$

8. $\bar{a} = (yz - \sin(2x + y))\,\bar{i} + (xz + 2\sin(2x + y))\,\bar{j} + xy\,\bar{k}$

9. $\bar{a} = (2\cos(x + 2z) - 5y^4)\,\bar{i} + 6x^5\,\bar{j} - (\cos(x + 2z) + 9y^8)\,\bar{k}$

10. $\bar{a} = 6zx^2\,\bar{i} - 6yz^2\,\bar{j} - 2(3xz^2 - z^3)\,\bar{k}$

11. $\bar{a} = -2yz\,\bar{i} + (6yz - 2xz)\,\bar{j} - (3z^2 - 2xy)\,\bar{k}$

12. $\bar{a} = e^{3x-6y+3z}(5\bar{i} + 5\bar{j} + 5\bar{k})$

13. $\bar{a} = (e^{2x+y+z} + 1)\,\bar{i} - (e^{2x+y+z} + 2)\,\bar{j} + (e^{2x+y+z} + 3)\,\bar{k})$

14. $\bar{a} = (2z - 6x^2y^4)\,\bar{i} - (y^2z^4 - x^3y^3)\,\bar{j} + (2x + y^3z^3)\,\bar{k}$

15. $\bar{a} = 2\cos(x^2 + yz)\cdot(2x\,\bar{i} - z\,\bar{j} + y\,\bar{k})$

16. $\bar{a} = (2y - 5x^4 y^4)\bar{i} - (2x + 7 - 4x^3 y^5)\bar{j} + 4y^3 x^3 \bar{k}$

17. $\bar{a} = 6\cos(2xy - z^2) \cdot (y\bar{i} + x\bar{j} - z\bar{k})$

18. $\bar{a} = e^{5x - 6y + z}(3\bar{i} + 3\bar{j} + 3\bar{k})$

19. $\bar{a} = -2yz\bar{i} + (4yz - 2xz)\bar{j} + (2y^2 - 2xy)\bar{k}$

20. $\bar{a} = 9zx^2\,\bar{i} - 6yz^2\,\bar{j} + (3x^3 - 6zy^2)\bar{k}$

21. $\bar{a} = 15zx^2\,\bar{i} - 10yz^2\,\bar{j} + (5x^3 - 10zy^2)\bar{k}$

22. $\bar{a} = \dfrac{-2}{z^2}\,\bar{i} + \dfrac{2}{x^3}\,\bar{j} + \dfrac{3}{y^4}\,\bar{k}$

23. $\bar{a} = \sin(xy) \cdot (zy\,\bar{i} - xz\bar{j} + xy\bar{k})$

24. $\bar{a} = (6x^2 + z^2)\bar{i} + 2yz\bar{j} + (2xz + y^2 + 5z^4)\bar{k}$

25. $\bar{a} = e^{x^2 + y^2 - z^2}\,(2y\bar{i} - 2x\bar{j} + 2z\bar{k})$

26. $\bar{a} = 3z^5 x^2\,\bar{i} - 6yz^2\,\bar{j} + (2z^3 - x + 9)\bar{k}$

27. $\bar{a} = \dfrac{2x\bar{i} - 4y\bar{j} + 2z\bar{k}}{x^2 + y^2 + z^2}$

28. $\bar{a} = 3yz\bar{i} + 3z(x - 2y)\bar{j} + (3z^2 - 3xy)\bar{k}$

29. $\bar{a} = \dfrac{-4x\bar{i} + 2y\bar{j} + 2z\bar{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

30. $\bar{a} = \cos(xyz) \cdot (2yz\,\bar{i} - 4xz\bar{j} + 2xy\bar{k})$

Задача 11. Является ли векторное поле $\bar{a}\,(x, y, z)$ безвихревым?

1. $\bar{a} = 5\cos(2x^2 + yz) \cdot (4x\,\bar{i} + z\bar{j} + y\bar{k})$

2. $\bar{a} = \dfrac{-2y}{x^2}\,\bar{i} + \dfrac{2x}{y^3}\,\bar{j} + \dfrac{3}{z^4}\,\bar{k}$

3. $\bar{a} = (6x^2 + z^2)\bar{i} + 2yz\bar{j} + (2xz + y^2 + 5z^4)\bar{k}$

4. $\bar{a} = -3x^2 y^4\,\bar{i} + (3y^2 z^4 - 4x^3 y^3)\bar{j} + 4y^3 z^3\,\bar{k}$

5. $\bar{a} = yz\bar{i} + z(x - 2y)\bar{j} - (y^2 - xy)\bar{k}$

6. $\bar{a} = zx^2\,\bar{i} - yz^2\,\bar{j} - (y^2z - x^3)\,\bar{k}$

7. $\bar{a} = -6x^2y^4\,\bar{i} + (21y^2z^4 - 8x^3y^3)\,\bar{j} + 28y^3z^3\,\bar{k}$

8. $\bar{a} = \cos\left(\dfrac{xyz}{2}\right)\cdot(yz\,\bar{i} + xz\,\bar{j} + xy\,\bar{k})$

9. $\bar{a} = 3zx^2\,\bar{i} - 2yz^2\,\bar{j} + (x^3 - 2zy^2)\,\bar{k}$

10. $\bar{a} = \cos(2xy + z^2)\cdot(2y\,\bar{i} + 2x\,\bar{j} + 2z\,\bar{k})$

11. $\bar{a} = 15zx^2\,\bar{i} - 10yz^2\,\bar{j} + (5x^3 - 10zy^2)\,\bar{k}$

12. $\bar{a} = -xyz\,\bar{i} + (yz - xyz)\,\bar{j} + (y^2 - xyz)\,\bar{k}$

13. $\bar{a} = (e^{x+y+z} + 2xyz)\,\bar{i} + (xe^{x+y+z} + 3)\,\bar{j} + (e^{x+y+z} + 4z)\,\bar{k})$

14. $\bar{a} = e^{3x+4y+5z}(3x\,\bar{i} + y\,\bar{j} + 3z\,\bar{k})$

15. $\bar{a} = \dfrac{x\,\bar{i} + y\,\bar{j} + z\,\bar{k}}{\sqrt[5]{x^2 + y^2 + z^2}}$

16. $\bar{a} = (4yz + 3y)\,\bar{i} + (4xz + 3x)\,\bar{j} + 4xy\,\bar{k}$

17. $\bar{a} = zx^2\,\bar{i} - yz^2\,\bar{j} + (x^3 - 2y^2z)\,\bar{k}$

18. $\bar{a} = -5x^4z\,\bar{i} + 6yz^5\,\bar{j} + 9xz^8\,\bar{k}$

19. $\bar{a} = -\sin(x + y)\,\bar{i} - \sin(x + y)\,\bar{j} + 10\,\bar{k}$

20. $\bar{a} = -\cos\,(x + y)\,\bar{i} - \cos\,(x + y)\,\bar{j} + \bar{k}$

21. $\bar{a} = e^{5\left(x^2 + y^2 + z^2\right)}(x\,\bar{i} + y\,\bar{j} + z\,\bar{k})$

22. $\bar{a} = (2x + 4yz)\,\bar{i} + (4xz + 5y^4)\,\bar{j} + 4xy\,\bar{k}$

23. $\bar{a} = e^{7xyz}(3yz\,\bar{i} + 3xz\,\bar{j} + 3xy\,\bar{k})$

24. $\bar{a} = \dfrac{8x\,\bar{i} + 8y\,\bar{j} + 8z\,\bar{k}}{\sqrt[3]{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^5}}$

25. $\bar{a} = \sin(2xyz)\cdot(2zy\,\bar{i} + 2xz\,\bar{j} + 2xy\,\bar{k})$

26. $\bar{a} = (y - z - x^2)\,\bar{i} + (x + z)\,\bar{j} + (y - x)\,\bar{k}$

27. $\bar{a} = \left(9yz + 2x\right)\bar{i} + 9xz\,\bar{j} + 9xy\,\bar{k}$

28. $\bar{a} = 3zx^2\,\bar{i} - 2yz^2\,\bar{j} + (x^3 - 2zy^2)\,\bar{k}$

29. $\bar{a} = (7yz - 9x)\,\bar{i} + (7xz - 9y)\,\bar{j} + 7xy\,\bar{k}$

30. $\bar{a} = -yz\,\bar{i} + (yz - 2xz)\,\bar{j} + (y^2 - 2xy)\,\bar{k}$

Задача 12. Установить потенциальность поля $\bar{a}\,(x, y, z)$ и найти его потенциал.

1. $\bar{a} = (yz - 5y)\,\bar{i} + (xz - 5x)\,\bar{j} + xy\,\bar{k}$

2. $\bar{a} = (5yz - 2x)\,\bar{i} + (5xz - 2y)\,\bar{j} + 5xy\,\bar{k}$

3. $\bar{a} = 6zx^2\,\bar{i} - 4yz^2\,\bar{j} + (2x^3 - 4zy^2)\,\bar{k}$

4. $\bar{a} = (2yz + 2x)\,\bar{i} + 2xz\,\bar{j} + 2xy\,\bar{k}$

5. $\bar{a} = 3(y - z - x^2)\,\bar{i} + 3(x + z)\,\bar{j} + 3(y - x)\,\bar{k}$

6. $\bar{a} = (3yz + 2x)\,\bar{i} + (3xz + 2\sin(y + z))\,\bar{j} + (3xy + 2\sin(y + z))\,\bar{k}$

7. $\bar{a} = e^{2xyz}(2yz\,\bar{i} + 2xz\,\bar{j} + 2xy\,\bar{k})$

8. $\bar{a} = 2^{xyz}\ln 2\;(yz\,\bar{i} + xz\,\bar{j} + xy\,\bar{k})$

9. $\bar{a} = e^{x^2 + y^2 + z^2}\,(2x\,\bar{i} + 2y\,\bar{j} + 2z\,\bar{k})$

10. $\bar{a} = (2x + 4yz - \cos(x + y))\,\bar{i} + (4xz + 5y^4 - \cos(x + y))\,\bar{j} + 4xy\,\bar{k}$

11. $\bar{a} = (5yz - \cos\,(x + y))\,\bar{i} + (5xz - \cos\,(x + y))\,\bar{j} + 5xy\,\bar{k}$

12. $\bar{a} = (yz - \sin(x + y))\,\bar{i} + (xz - \sin(x + y))\,\bar{j} + xy\,\bar{k}$

13. $\bar{a} = -5x^4\,\bar{i} + 6y^5\,\bar{j} + 9z^8\,\bar{k}$

14. $\bar{a} = 6zx^2\,\bar{i} - 4yz^2\,\bar{j} + 2(x^3 - 2y^2z)\,\bar{k}$

15. $\bar{a} = \sin(xyz)\cdot(zy\,\bar{i} + xz\,\bar{j} + xy\,\bar{k})$

16. $\bar{a} = -2yz\,\bar{i} + (6yz - 2xz)\,\bar{j} + (3y^2 - 2xy)\,\bar{k}$

17. $\bar{a} = e^{3x + 3y + 3z}(3\,\bar{i} + 3\,\bar{j} + 3\,\bar{k})$

18. $\bar{a} = (e^{x+y+z} + 2)\,\bar{i} + (e^{x+y+z} + 3)\,\bar{j} + (e^{x+y+z} + 4)\,\bar{k}$

19. $\bar{a} = -2yz\,\bar{i} + (4yz - 2xz)\,\bar{j} + (2y^2 - 2xy)\,\bar{k}$

20. $\bar{a} = 9zx^2\,\bar{i} - 6yz^2\,\bar{j} + (3x^3 - 6zy^2)\,\bar{k}$

21. $\bar{a} = 15zx^2\,\bar{i} - 10yz^2\,\bar{j} + (5x^3 - 10zy^2)\,\bar{k}$

22. $\bar{a} = 6\cos(2xy + z^2)\cdot(y\,\bar{i} + x\,\bar{j} + z\,\bar{k})$

23. $\bar{a} = \cos(xyz)\cdot(2yz\,\bar{i} + 2xz\,\bar{j} + 2xy\,\bar{k})$

24. $\bar{a} = (2z - 6x^2y^4)\,\bar{i} + (21y^2z^4 - 8x^3y^3)\,\bar{j} + (2x + 28y^3z^3)\,\bar{k}$

25. $\bar{a} = 3zx^2\,\bar{i} - 2yz^2\,\bar{j} - (2y^2z - x^3)\,\bar{k}$

26. $\bar{a} = 3yz\,\bar{i} + 3z(x - 2y)\,\bar{j} - (3y^2 - 3xy)\,\bar{k}$

27. $\bar{a} = (2y - 3x^2y^4)\,\bar{i} + (2x + 3y^2z^4 - 4x^3y^3)\,\bar{j} + 4y^3z^3\,\bar{k}$

28. $\bar{a} = (6x^2 + z^2)\,\bar{i} + 2yz\,\bar{j} + (2xz + y^2 + 5z^4)\,\bar{k}$

29. $\bar{a} = (2e^{x+y+z} - 9yz)\,\bar{i} + (2e^{x+y+z} - 9xz)\,\bar{j} + (2e^{x+y+z} - 9xy)\,\bar{k})$

30. $\bar{a} = 2\cos(x^2 + yz)\cdot(2x\,\bar{i} + z\,\bar{j} + y\,\bar{k})$

Библиографический список

1. М.Л. Краснов, А.И. Киселёв, Г.И. Макаренко. Векторный анализ. М.: Наука, 1978.

2. Г.И. Кручкович и др. Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики. М.: Высшая школа, 1970.

3.Б.К. Пчелин. Векторный анализ для инженеров – электриков и радистов. М.: Энергия, 1968.

4. И.В. Мисюркеев. Сборник задач по методам математической физики. М.: Просвещение, 1975.

5. А.М. Колобов, Л.П. Черенкова. Избранные главы высшей математики. часть 2. Минск: Высшая школа, 1967.

Содержание

Редактор Г. М. Кляут

Сводный темплан 2005 г.

ИД 06039 от 12.10.01

Подписано в печать 18.02.05 . Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.

Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ. л. 3,0. Уч.–изд. л. 3,0.

Тираж 300 экз. Заказ

Издательство ОмГТУ. 644050, Омск, пр-т Мира, 11

Типография ОмГТУ