Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

«Омский государственный технический университет»

Исследование операций

Методические указания по выполнению типового расчета

Омск - 2005

Составитель: Чурашева Надежда Георгиевна, ст. преподаватель

Печатается по решению редакционно-издательского совета Омского государственного технического университета

Редактор Н. Н. Пацула
ИД 06039 от 12.10.01
Сводный темплан 2005 г.
Подписано в печать 18.06.05 . Формат 60х84 1/16. Бумага офсетная.
Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ. л. 2,0. Уч.–изд. л. 2,0.
Тираж 300 экз. Заказ

Издательство ОмГТУ. 644050, Омск, пр-т Мира, 11
Типография ОмГТУ

Типовой расчет

Задание 1. Решить задачу линейного программирования: a) графически, b) симплекс-методом.

1. $f(x) = 2x_1 + 4x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 2x_1 - x_2 \le 12, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2. $f(x) = x_1 + x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 0, \\ 6x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

3. $f(x) = 3x_1 + 2x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 8, \\ 4x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

4. $f(x) = 2x_1 + 5x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 \le 15, \\ 2x_1 - x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

5. $f(x) = 4x_1 + 5x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \le 7, \\ 4x_1 + 5x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

6. $f(x) = 2x_1 - 3x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

7. $f(x) = x_1 - x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 0, \\ 5x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

8. $f(x) = 6x_1 + 5x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 7, \\ 2x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

9. $f(x) = 2x_1 + 4x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 \le 12, \\ 2x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

10. $f(x) = 5x_1 + 4x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 2x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

11. $f(x) = 2x_1 + x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 9, \\ 2x_1 - x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

12. $f(x) = x_1 + 3x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \le 5, \\ 5x_1 + x_2 \le 13, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

13. $f(x) = 7x_1 + 4x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 5, \\ 2x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

14. $f(x) = 2x_1 - x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5, \\ 2x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

15. $f(x) = 2x_1 - x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 2, \\ 10x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

16. $f(x) = 3x_1 + 4x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 + 2x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

17. $f(x) = x_1 - x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 4, \\ 2x_1 + 5x_2 \ge 6, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

18. $f(x) = 5x_1 + 6x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 12, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

19. $f(x) = 3x_1 - x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 5, \\ x_1 + x_2 \le 7, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

20. $f(x) = x_1 + x_2 \to \max$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 4, \\ 2x_1 + 5x_2 \ge 5, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

21. $f(x) = 4x_1 + x_2 \to \max$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4, \\ 12x_1 + 5x_2 \le 15, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

22. $f(x) = 2x_1 - x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 9, \\ x_1 + x_2 \le 11, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

23. $f(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \le 5, \\ x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

24. $f(x) = x_1 - x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 4, \\ 2x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

25. $f(x) = 3x_1 - 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 \le 10, \\ x_1 + x_2 \le 13, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

26. $f(x) = 5x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \le 8, \\ 4x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

27. $f(x) = 2x_1 + 7x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 \le 15, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

28. $f(x) = 3x_1 + 5x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 4, \\ 2x_1 + 5x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

29. $f(x) = 4x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 8, \\ 2x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

30. $f(x) = 2x_1 + 6x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 10x_2 \le 15, \\ x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задание 2. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом.

1. $f(x) = x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 - 7 \to \min$

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 7, \\ 10x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 26, \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \ge 0. \end{cases}$$

2. $f(x) = 21x_1 + 2x_2 + 30x_3 + x_5 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 2x_5 = 50, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 32, \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21, \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \ge 0. \end{cases}$$

3. $f(x) = 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 + 12 \to \min$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 14, \\ x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 25, \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \ge 0. \end{cases}$$

4. $f(x) = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 \to \min$

$$\begin{cases} 8x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 52, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 32, \\ x_2 + 5x_3 + x_4 + x_5 = 21, \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \ge 0. \end{cases}$$

5. $f(x) = 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 - 5x_5 + 15 \to \min$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 14, \\ 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 30, \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \ge 0. \end{cases}$$

6. $f(x) = x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_5 \to \min$

$$\begin{cases} 9x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 80, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 36, \\ 4x_2 + 5x_3 + x_4 + x_5 = 28, \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \ge 0. \end{cases}$$

7. $f(x) = x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 5x_5 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 15, \\ 5x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 100, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0. \end{cases}$$

8. $f(x) = 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_5 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 80, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 36, \\ 4x_2 + 5x_3 + x_4 + x_5 = 28, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0. \end{cases}$$

9. $f(x) = 10x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 5x_5 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 4x_4 + x_5 = 100, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 50x_4 = 100, \\ 2x_2 + x_3 + 10x_4 + 10x_5 = 100, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0. \end{cases}$$

10. $f(x) = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_5 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 32, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 36, \\ x_2 + 5x_3 + x_4 + 2x_5 = 26, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0. \end{cases}$$

11. $f(x) = x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 - x_5 - 10 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 + x_5 = 98, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 98, \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 88, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0. \end{cases}$$

12. $f(x) = 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 + x_5 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 60, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 35, \\ 4x_2 + 5x_3 + x_4 + x_5 = 30, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0. \end{cases}$$

13. $f(x) = x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 + 2 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 + x_5 = 18, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 80, \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 18, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0. \end{cases}$$

14. $f(x) = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_5 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 60, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 35, \\ 5x_2 + 5x_3 + x_4 + 4x_5 = 80, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0. \end{cases}$$

15. $f(x) = x_1 + 7x_2 + 2x_3 + x_4 + 4x_5 - 5 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 + x_5 = 18, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 80, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 202, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0. \end{cases}$$

16. $f(x) = 7x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_5 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 67, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 32, \\ 5x_2 + 5x_3 + x_4 + 4x_5 = 86, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0. \end{cases}$$

17. $f(x) = x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 9x_4 + 4x_5 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 + x_5 = 20, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 50, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 202, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0. \end{cases}$$

18. $f(x) = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_5 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 9, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 7, \\ 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 4x_5 = 8, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0. \end{cases}$$

19. $f(x) = 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + x_4 + x_5 + 1 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 22, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 50, \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 20, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

20. $f(x) = 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_5 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 7, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = 7, \\ 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 2x_5 = 6, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

21. $f(x) = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 4 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 12, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 45, \\ -4x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 = 19, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

22. $f(x) = 8x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_5 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 15, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = 12, \\ 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 2x_5 = 21, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

23. $f(x) = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 + 1 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 14, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 25, \\ -5x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 = 24, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

24. $f(x) = 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_5 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 7x_5 = 16, \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 + 2x_4 = 15, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 9, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

25. $f(x) = 9x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 17, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 27, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 22, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

26. $f(x) = -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_5 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + 7x_5 = 27, \\ 5x_1 + 6x_2 - x_3 + 2x_4 = 15, \\ 3x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 8, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

27. $f(x) = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_5 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 17, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 33, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 22, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

28. $f(x) = -4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 7x_5 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 18, \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 + 2x_4 = 24, \\ 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 12, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

29. $f(x) = 21x_1 + 2x_2 + 30x_3 + 5x_4 + x_5 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 2x_5 = 50, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 32, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

30. $f(x) = -5x_1 + 7x_2 - 5x_3 + 8x_5 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 18, \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 + 2x_4 = 26, \\ 7x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 14, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Задание 3. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом, составить двойственную задачу и найти ее решение.

1. $f(x) = 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3{,}4x_2 + 2x_3 \le 34, \\ 4{,}75x_1 + 11x_2 + 2x_3 \le 70, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

2. $f(x) = 4x_1 + 5x_2 + 4x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 3, \\ 3x_1 + 5x_2 + 5x_3 \le 8, \\ -6x_1 + x_2 + x_3 \ge -5, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

3. $f(x) = 6x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 \le 13, \\ x_1 + 11x_2 + 2x_3 \le 14, \\ x_1 - x_2 - x_3 \ge -1, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

4. $f(x) = 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 12x_3 \le 16, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 \le 12, \\ -6x_1 + x_2 + x_3 \ge -10, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

5 $f(x) = 2x_1 + 4x_2 - x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 \le 8, \\ x_1 - x_2 - x_3 \ge -3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \le 5, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

6. $f(x) = 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 12x_3 \le 16, \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \le 7, \\ x_1 + x_2 - x_3 \ge 0, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

7. $f(x) = 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 9, \\ x_1 - x_2 - x_3 \ge -2, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \le 7, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

8. $f(x) = 5x_1 - 5x_2 + 6x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 9x_3 \le 14, \\ 5x_1 + 5x_2 + 4x_3 \le 9, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \ge -1, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

9. $f(x) = x_1 - 2x_2 + 2x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 6, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 \ge -1, \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 \le 9, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

10. $f(x) = 9x_1 - 5x_2 + 8x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \le 10, \\ 4x_1 + 8x_2 - 4x_3 \le 8, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 \ge -7, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

11. $f(x) = 5x_1 - 5x_2 + 6x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 9, \\ -7x_1 + x_2 + x_3 \ge -6, \\ 4x_1 + x_2 + 7x_3 \le 11, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

12. $f(x) = x_1 - 5x_2 + x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \le 10, \\ 5x_1 + 8x_2 - 4x_3 \le 5, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 \ge -5, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

13. $f(x) = -5x_1 + 7x_2 + 6x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 7, \\ -5x_1 + x_2 + x_3 \ge -8, \\ 9x_1 + x_2 + 9x_3 \le 10, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

14. $f(x) = x_2 + x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 10x_1 - 2x_2 + x_3 \le 9, \\ 5x_1 + 8x_2 - 4x_3 \le 9, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 \ge -2, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

15. $f(x) = -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \le 12, \\ -5x_1 + x_2 + x_3 \ge -1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 15, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

16. $f(x) = 10x_1 - 3x_2 + 2x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 10x_1 - 2x_2 + x_3 \le 11, \\ 5x_1 + 8x_2 - 4x_3 \le 1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 \ge -1, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

17. $f(x) = - x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 12, \\ -5x_1 + x_2 + x_3 \ge -4, \\ 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 8, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

18. $f(x) = x_1 - 3x_2 + 2x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \le 2, \\ 6x_1 + 8x_2 - 5x_3 \le 1, \\ 4x_1 - x_2 - 5x_3 \ge -1, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

19. $f(x) = - x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 8, \\ -4x_1 + x_2 + x_3 \ge -2, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 9, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

20. $f(x) = 7x_1 - 3x_2 + 8x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \le 12, \\ 4x_1 + 8x_2 - 5x_3 \le 8, \\ 4x_1 - x_2 - 5x_3 \ge -10, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

21. $f(x) = - 7x_1 + 8x_2 + 7x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 8, \\ -5x_1 + x_2 + x_3 \ge -5, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 9, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

22. $f(x) = 4x_1 - x_2 + 4x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 + x_3 \le 7, \\ 4x_1 + 8x_2 - 5x_3 \le 10, \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 \ge -1, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

23. $f(x) = - 9x_1 + 5x_2 + 4x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 10, \\ -4x_1 + x_2 + x_3 \ge -8, \\ 4x_1 + 8x_2 + 3x_3 \le 14, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

24. $f(x) = 2x_1 - x_2 + 5x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 8x_3 \le 7, \\ 2x_1 + 7x_2 - 5x_3 \le 6, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 \ge 0, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

25. $f(x) = -4x_1 + 8x_2 + 7x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + 2x_3 \le 9, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 \ge -3, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 16, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

26. $f(x) = 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 5x_3 \le 13, \\ 2x_1 + 7x_2 + 2x_3 \le 18, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 \ge -9, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

27. $f(x) = 4x_1 + 5x_2 + 7x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \le 5, \\ -5x_1 + x_2 + x_3 \ge -15, \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 \le 14, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

28. $f(x) = 2x_1 + 8x_2 + 3x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 8x_3 \le 4, \\ 2x_1 + 7x_2 + 2x_3 \le 23, \\ -3x_1 + x_2 - 3x_3 \ge 0, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

29. $f(x) = 5x_1 + 5x_2 + 6x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 3, \\ -6x_1 + x_2 + x_3 \ge -5, \\ 3x_1 + 5x_2 + 5x_3 \le 8, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

30. $f(x) = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \le 2, \\ 6x_1 + 8x_2 - 5x_3 \le 1, \\ 4x_1 - x_2 - 5x_3 \ge -1, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Задание 4. Решить целочисленную задачу методом Гомори.

1. $f(x) = 3x_1 + 4x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 7, \\ 2x_1 - x_2 \le 12, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2. $f(x) = 7x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 0, \\ 6x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

3. $f(x) = 3x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 8, \\ 4x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

4. $f(x) = 2x_1 + 15x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 \le 11, \\ 2x_1 - x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

5. $f(x) = 4x_1 + 5x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \le 7, \\ 4x_1 + 5x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

6. $f(x) = 2x_1 - 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

7. $f(x) = 9x_1 + 7x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 2, \\ 5x_1 + 4x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

8. $f(x) = 7x_1 + 10x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 12, \\ 2x_1 - x_2 \le 7, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

9. $f(x) = x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \le 5, \\ 5x_1 + x_2 \le 13, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

10. $f(x) = 5x_1 + 4x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 5, \\ 2x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

11. $f(x) = x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 5, \\ 2x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

12. $f(x) = 2x_1 - x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 2, \\ 10x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

13. $f(x) = 3x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 + 2x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

14. $f(x) = x_1 - x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 4, \\ 2x_1 + 5x_2 \ge 6, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

15. $f(x) = 7x_1 + 6x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 7, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 12, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

16. $f(x) = 3x_1 - x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 5, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

17. $f(x) = 2x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 4, \\ 2x_1 + 5x_2 \ge 5, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

18. $f(x) = 4x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4, \\ 12x_1 + 5x_2 \le 15, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

19. $f(x) = 4x_1 - x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 9, \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

20. $f(x) = 2x_1 + 9x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \le 5, \\ x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

21. $f(x) = x_1 - x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 4, \\ 2x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

22. $f(x) = 3x_1 - 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 \le 10, \\ x_1 + x_2 \le 13, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

23. $f(x) = 5x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \le 8, \\ 4x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

24. $f(x) = 11x_1 + 7x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 10x_2 \le 15, \\ 3x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

25. $f(x) = 3x_1 + 5x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 4, \\ 2x_1 + 5x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

26. $f(x) = 4x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 8, \\ 2x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

27. $f(x) = 2x_1 + 6x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 10x_2 \le 15, \\ x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

28. $f(x) = 9x_1 + 5x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 4, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

29. $f(x) = 9x_1 + 5x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 7, \\ 2x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

30. $f(x) = 5x_1 + 4x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \le 17, \\ 2x_1 + x_2 \le 13, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задание 5. Решить транспортную задачу.

В 1

	B1	**B2**	**B3**	**B4**	
A1	1	8	2	10	**190**
A2	20	21	7	8	**120**
A3	7	11	5	9	**240**
	210	**120**	**170**	**50**	

В 2

	B1	**B2**	**B3**	**B4**	
A1	2	2	5	1	**140**
A2	1	8	11	1	**190**
A3	9	8	7	2	**230**
	120	**210**	**190**	**40**	

B 3

	B1	B2	B3	B4	
A1	3	3	3	2	**200**
A2	1	7	5	11	**180**
A3	4	3	9	3	**190**
	130	**230**	**80**	**130**	

B 4

	B1	B2	B3	B4	
A1	4	3	2	5	**250**
A2	22	2	5	8	**130**
A3	10	16	22	3	**230**
	70	**230**	**240**	**70**	

B 5

	B1	B2	B3	B4	
A1	5	1	1	2	**25**
A2	7	2	4	3	**13**
A3	4	7	2	4	**23**
	7	**23**	**24**	**7**	

B 6

	B1	B2	B3	B4	
A1	6	3	14	10	**25**
A2	3	15	4	5	**13**
A3	8	11	5	2	**25**
	16	**20**	**20**	**7**	

B 7

	B1	B2	B3	B4	
A1	7	12	5	9	**50**
A2	4	2	9	21	**30**
A3	12	3	4	7	**35**
	15	**25**	**25**	**50**	

B 8

	B1	B2	B3	B4	
A1	8	10	5	11	**10**
A2	7	6	4	5	**30**
A3	7	2	8	2	**35**
	5	**30**	**20**	**20**	

B 9

	B1	B2	B3	B4	
A1	9	15	10	1	**10**
A2	3	8	3	2	**30**
A3	6	2	5	8	**25**
	15	**10**	**15**	**25**	

B 10

	B1	B2	B3	B4	
A1	10	8	12	18	**20**
A2	23	1	4	25	**20**
A3	25	18	4	6	**25**
	15	**20**	**10**	**20**	

B 11

	B1	B2	B3	B4	
A1	11	9	4	4	**30**
A2	5	7	10	5	**10**
A3	3	5	4	6	**65**
	30	**10**	**5**	**60**	

B 12

	B1	B2	B3	B4	
A1	12	18	23	14	**15**
A2	4	5	3	16	**25**
A3	11	8	17	4	**35**
	25	**20**	**15**	**15**	

B 13

	B1	B2	B3	B4	
A1	13	8	20	10	**10**
A2	22	2	7	8	**12**
A3	7	11	5	9	**24**
	21	**5**	**15**	**5**	

B 14

	B1	B2	B3	B4	
A1	14	10	25	10	**45**
A2	12	8	11	15	**95**
A3	9	8	7	12	**23**
	33	**50**	**35**	**45**	

B 15

	B1	B2	B3	B4	
A1	15	11	3	22	**20**
A2	10	10	5	11	**80**
A3	14	22	11	22	**90**
	35	**20**	**85**	**50**	

B 16

	B1	B2	B3	B4	
A1	10	3	2	5	**45**
A2	2	2	5	8	**100**
A3	10	6	2	3	**55**
	45	**60**	**50**	**45**	

B 17

	B1	B2	B3	B4	
A1	17	15	10	11	**10**
A2	9	8	14	12	**30**
A3	6	12	15	8	**25**
	15	**10**	**15**	**25**	

B 18

	B1	B2	B3	B4	
A1	18	8	12	18	**20**
A2	9	16	4	5	**20**
A3	25	18	14	6	**25**
	15	**20**	**10**	**20**	

B 19

	B1	B2	B3	B4	
A1	19	9	6	7	**30**
A2	5	7	10	9	**20**
A3	8	5	8	6	**65**
	30	**10**	**15**	**60**	

B 20

	B1	B2	B3	B4	
A1	20	18	23	14	**25**
A2	14	5	12	16	**25**
A3	11	8	17	14	**35**
	25	**20**	**25**	**15**	

B 21

	B1	B2	B3	B4	
A1	21	8	9	10	**30**
A2	11	2	7	8	**12**
A3	7	12	5	9	**24**
	21	**15**	**15**	**15**	

B 22

	B1	B2	B3	B4	
A1	22	10	15	10	**45**
A2	12	8	11	15	**95**
A3	9	8	17	12	**50**
	40	**60**	**35**	**55**	

В 23

	B1	B2	B3	B4	
A1	23	11	14	22	**50**
A2	10	10	15	11	**80**
A3	14	22	11	12	**90**
	35	**50**	**85**	**50**	

В 24

	B1	B2	B3	B4	
A1	24	3	12	5	**40**
A2	2	12	5	8	**100**
A3	10	6	2	3	**60**
	40	**60**	**50**	**50**	

В 25

	B1	B2	B3	B4	
A1	25	15	10	1	**30**
A2	3	8	3	2	**30**
A3	6	2	5	8	**25**
	15	**20**	**25**	**25**	

В 26

	B1	B2	B3	B4	
A1	26	8	12	18	**40**
A2	23	12	4	25	**20**
A3	25	18	4	6	**25**
	25	**20**	**20**	**20**	

В 27

	B1	B2	B3	B4	
A1	27	9	4	4	**30**
A2	5	7	10	5	**30**
A3	3	5	4	6	**65**
	30	**10**	**25**	**60**	

В 28

	B1	B2	B3	B4	
A1	28	8	23	4	**45**
A2	4	5	3	6	**25**
A3	11	8	7	4	**35**
	25	**20**	**25**	**35**	

В 29

	B1	B2	B3	B4	
A1	29	8	10	10	**30**
A2	12	2	7	8	**42**
A3	7	11	5	9	**24**
	21	**25**	**15**	**35**	

В 30

	B1	B2	B3	B4	
A1	30	10	5	10	**45**
A2	12	8	11	5	**85**
A3	9	8	7	12	**23**
	33	**40**	**35**	**45**	

Задание 6. Дана платежная матрица игры. Найти седловые точки и оптимальные стратегии игроков.

1.

9	8	10	10
12	2	7	8
7	7	5	9

2.

2	8	10	10
1	2	7	8
0	1	5	9

3.

12	8	8	10
12	2	7	8
7	11	5	9

4.

9	8	10	5
12	2	7	4
7	11	5	0

5.

4	6	0	3
1	7	7	8
7	7	8	9

6.

9	8	1	6
2	2	7	5
7	11	8	6

7.

6	8	5	10
12	7	7	8
7	11	5	9

8.

19	18	10	10
12	2	7	8
7	11	5	9

9.

5	7	1	1
12	7	7	8
7	1	5	9

10.

20	8	6	8
12	2	3	8
7	11	5	9

11.

6	8	4	9
12	2	3	8
7	11	3	9

12.

21	8	9	5
12	2	7	5
7	7	5	4

13.

7	8	9	10
7	9	7	8
7	11	5	9

14.

22	18	17	10
12	2	27	8
17	11	5	9

15.

8	8	10	10
12	8	7	8
7	6	5	9

16.

23	18	10	10
12	12	1	18
7	11	5	9

17.

9	8	6	5
2	2	7	4
7	1	5	0

18.

24	8	3	2
12	2	3	8
12	14	3	3

19.

10	10	10	10
12	10	17	18
17	11	15	19

20.

25	28	100	10
12	2	10	8
70	10	5	9

21.

11	8	11	11
12	2	7	8
17	11	15	11

22.

26	18	16	9
12	2	7	8
10	11	12	9

23.

12	18	18	12
12	2	7	8
7	11	12	9

24.

27	12	14	10
12	12	17	18
7	11	5	12

25.

13	8	5	4
4	2	3	2
7	4	5	3

26.

28	7	4	5
12	2	4	8
7	11	5	9

27.

14	10	10	12
12	2	1	8
7	11	5	10

28.

29	28	20	20
12	20	7	8
20	11	5	9

29.

15	7	1	1
12	6	6	8
17	1	5	6

30.

30	15	5	40
12	9	7	8
10	11	9	9

Задание 7. Дана платежная матрица игры. Решить графически игру.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 8 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 3 \\ 6 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ **5.** $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 6 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 8 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ **8.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ **9.** $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 & -1 \\ 8 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 1 \\ 6 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ **11.** $\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 3 & 3 \\ 6 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ **12.** $\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 7 & 3 \\ 6 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 & 2 \\ 8 & -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 7 & -3 & 4 & 5 \\ 8 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **15.** $\begin{pmatrix} 10 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 5 & 1 \\ 6 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ **17.** $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 1 \\ 6 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ **18.** $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 1 \\ 6 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 & 6 \\ 8 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ **20.** $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 & 2 \\ 6 & -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ **21.** $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 9 & 2 \\ 8 & -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 5 & 1 \\ 7 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ **23.** $\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 5 & 1 \\ 6 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ **24.** $\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 5 & 1 \\ 6 & 0 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 1 \\ 8 & -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 7 & 2 \\ 8 & -4 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ **27.** $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 & 2 \\ 8 & -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 6 & 1 \\ 7 & 0 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ **29.** $\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 5 & 1 \\ -6 & 10 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ **30.** $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 1 \\ 7 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

Задание 8. Дана платежная матрица игры. Найти решение игры путем сведения ее к задаче линейного программирования.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 9 \\ 3 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 3 \\ 6 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 8 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 8 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 4 \\ 1 & 5 & 7 & 5 \\ 6 & 5 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ **5.** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 5 \\ 8 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **8.** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ **9.** $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ **11.** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 8 \\ 4 & 4 & 3 & 3 \\ 7 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ **12.** $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 4 \\ 6 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ 4 & 4 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ **15.** $\begin{pmatrix} 9 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 8 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ **17.** $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ 4 & 4 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ **18.** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 & 4 \\ 8 & 4 & 5 & 3 \\ 9 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ **20.** $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ **21.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 3 \\ 6 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ **23.** $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ **24.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 2 & 8 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 3 \\ 6 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ **27.** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} 2 & 8 & 8 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 3 \\ 6 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ **29.** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ **30.** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Примеры решения заданий

Задачи линейного программирования

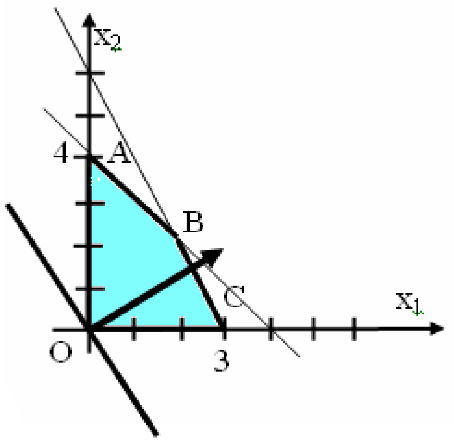
Пример 1. Решить ЗЛП

$$f(x) = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$
$$x_1 + x_2 \le 4,$$
$$2x_1 + x_2 \le 6,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$$

a) графически, b) симплекс-методом.

а) **<u>Шаг 1.</u>** Строится множество D допустимых решений задачи, оно представляет собой четырехугольник OABC на плоскости $x_1 O x_2$ с вершинами в точках O, A, B, C, с координатами (0; 0), (0; 4), (2; 2), (3; 0), соответственно.

<u>Шаг 2.</u> Из начала координат откладывается вектор-градиент $\nabla f = (3; 2)$ функции f(x), указывающий направления ее возрастания.



<u>Шаг 3.</u> Строится прямая $3x_1 + 2x_2 = \text{const}$ – линия уровня функции f(x), перпендикулярная вектору градиента $\nabla f = (3; 2)$.

<u>Шаг 4.</u> Линия уровня $3x_1 + 2x_2 = \text{const}$ передвигается в направлении вектора $\nabla f = (3; 2)$ до тех пор, пока она не покинет область D. Крайняя точка области, в которой линия уровня покидает допустимую область, и является решением задачи. В данном случае – это точка B(2; 2).

<u>Шаг 5.</u> Находится оптимальное значение функции.

$$f^*(2; 2) = 3x_1 + 2x_2 = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 10.$$

b) **Шаг 1.** Задача приводится к специальному виду, для этого к левым частям неравенств прибавляются дополнительные переменные x_3 и x_4, превращающие неравенства в равенства.

$$f(x) = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 4,$$
$$2x_1 + x_2 + x_4 = 6,$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4.$$

Переменные x_3 и x_4 входят в первое и второе уравнения соответственно с коэффициентами единица, тогда x_3, x_4 – начальный базис, x_1, x_2 – свободные переменные, b – вектор ограничений.

Шаг 2. Составляется соответствующая симплекс - таблица:

базис	**свободные**			**Отношение**
	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	**b**	
$\mathbf{x_3}$	1	1	4	4
$\mathbf{x_4}$	2	1	6	$3 \Leftarrow \min$
f(x)	-3	-2	0	
	$\Uparrow \min$			

Так как свободные переменные всегда равны нулю, то для данного начального базиса f(x) будет равна нулю:

$$f(x) = c_0 - \sum c_i x_i = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 6 = 0.$$

Так как имеются $c_j < 0$, приступаем к улучшению плана.

Шаг 3. Выбирается разрешающий j-й столбец, соответствующий наименьшему отрицательному c_j.

Шаг 4. Разрешающую строку определяют следующим образом: рассчитываются так называемые симплексные отношения, т. е. отношения текущих значений базисных переменных к положительным коэффициентам разрешающего столбца, соответствующим данным базисным переменным. Затем берется минимальное из этих отношений и по тому, какой строке оно соответствует, определяется ведущая строка.

Шаг 5. Находится разрешающий элемент, он расположен на пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца (в нашем случае он равен 2).

Шаг 6. Определяются переменные, которые будут исключены из базиса и включены в него. Переменную, которой соответствует разрешающий столбец, включаются в базис вместо переменной, которой соответствует разрешающая строка. В базис вводим переменную x_1, которому соответствует минимальное значение c_j. Из базиса выводится x_4, так как минимальное θ достигается в этой строке формулой $\theta = \min\left\{\frac{4}{1}, \frac{6}{2}\right\}$.

Таким образом, элемент a_{41} будет разрешающим (в таблице выделен серым цветом).

Шаг 7. Заполняем таблицу, соответствующую новому базисному решению.

	свободные			θ
базис	x_4	x_2	b	
x_3	- 0,5	0,5	1	0,5 / 1⇐ min
x_1	0,5	0,5	3	0,5 / 3
f(x)	1,5	- 0,5	9	
		⇑min		

Шаг 8. Так как в строке f(x) оценок полученного нового плана имеется отрицательное значение c_j, приступаем к следующей итерации, продолжая улучшать план.

б\с	x_4	x_3	b
x_2			2
x_1			2
f(x)	1	1	10

Поскольку все $c_j \geq 0$, то план, представленный в данной таблице, будет оптимальным.

Ответ: $f^*(x) = 10$; $x_1^* = 0$; $x_2^* = 6$

Пример 2. Решить каноническую задачу линейного программирования:

$$f(X) = x_1 - 2x_2 - 2x_3 \to \max$$
$$x_1 + 4x_2 + x_3 = 5,$$
$$x_1 - 2x_2 - x_3 = -1,$$
$$x_j \geq 0, \ j = 1, 2, 3.$$

Данная каноническая задача линейного программирования (КЗЛП) не является специальной (СЗЛП), поэтому применяем метод искусственного базиса. Строим вспомогательную задачу линейного программирования и приводим ее к специальному виду, выражая целевую функцию через небазисные переменные x_j, j=1,…,3. Эта задача имеет вид:

$$h(X) = -(t_1 + t_2) = -6 + 6x_2 + 2x_3 \to \max$$
$$x_1 + 4x_2 + x_3 + t_1 = 5,$$
$$x_1 - 2x_2 - x_3 + t_2 = -1,$$
$$\text{все } x_j \geq 0, t_i \geq 0.$$

Решаем специальную задачу линейного программирования симплекс-методом:

б\с	x_1	x_2	x_3	b		б\с	x_1	x_2	t_2	b		б\с	t_1	x_2	t_2	b
t_1	1	4	1	5		t_1	2	2	-1	4	←	x_1	0.5	1	-0,5	2
t_2	-1	2	1	1	←	x_3	-1	2	1	1		x_3	0,5	3	0,5	3
h	0	-6	-2	-6		h	-2	-2	2	-4		h	1	0	1	0
			↑				↑									
f	-1	2	2	0		f	1	-2	2	-2		f	-0,5	-3	5/2	-4

Так как max h = 0, то множество X допустимых решений КЗЛП не пусто, т. е. $X \neq \varnothing$, поэтому существует СЗЛП, эквивалентная данной КЗЛП. Эта задача имеет вид:

$$f(X) = -4 + 3x_2 \to \max$$
$$x_1 + x_2 = 2,$$
$$3x_2 + x_3 = 3,$$
$$\text{все } x_j \geq 0.$$

Линейные уравнения этой системы и f(X) получены из завершающей симплекс-таблицы вспомогательной задачи.

Решаем специальную задачу линейного программирования симплекс-методом:

б\c	x_2	b		б\c	x_3	b
x_1	1	2		x_1	-1/3	1
x_3	3	3	←	x_2	1/3	1
f	-3	-4		f	1	-1
	↑					

Отсюда оптимальный план $X^*(1;\ 1;\ 0)$, $f_{max} = -1$.

Пример 3. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом, составить двойственную задачу и найти ее решение.

$$Z = 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \to \max$$
$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 25,$$
$$4x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 30,$$
$$3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 42,$$
$$\text{все } x_j \geq 0.$$

Математическая модель прямой задачи

$Z = 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \to \max$
$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 25,$
$4x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 30,$
$3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 42,$
$x_1 \geq 0,$
$x_2 \geq 0,$
$x_3 \geq 0,$
$x_4 \geq 0.$

Математическая модель двойственной задачи

$f = 25y_1 + 30y_2 + 42y_3 \to \min$
$y_1 \geq 0,$
$y_2 \geq 0,$
$y_3 \geq 0,$
$2y_1 + 4y_2 + 3y_3 \geq 6,$
$3y_1 + y_2 + 5y_3 \geq 5,$
$2y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 4,$
$y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 3.$

Специальный вид

$Z = 6x_1+5x_2+4x_3+3x_4 \to \max$
$2x_1+3x_2+2x_3+x_4+S_1=25,$
$4x_1+x_2+3x_3+2x_4+S_2=30,$
$3x_1+5x_2+2x_3+2x_4+S_3=42,$
$x_1, x_2, x_3, x_4, S_1, S_2, S_3 \geq 0$

	S2	x2	x3	x4	b	
S1	-0,5	2,5	0,5	0	10	4
x1	0,25	0,25	0,75	0,5	7,5	30
S3	-0,75	4,25	-0,25	0,5	19,5	4,58
Z	1,5	-3,5	0,5	0	45	
		↑				

	x1	x2	x3	x4	b				S2	x2	x3	x4	b
S1	2	3	2	1	25	12,5		x2					4
S2	4	1	3	2	30	7,5		x1					6,5
S3	3	5	2	2	42	14		S3					2,5
Z	-6	-5	-4	-3	0			Z	0,8	1,4	1,2	0	59
	↑												

$X^*(6.5, 4, 0, 0)$, $Z^*=59$.

Решение двойственной задачи можно найти с помощью второй теоремы двойственности:

$(2x_1+ 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 25)\ y_1 = 0 \Rightarrow (2 \bullet 6{,}5 + 3 \bullet 4 - 25)\ y_1 = 0 \Rightarrow 0 = 0,$

$(4x_1+ x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 30)\ y_2 = 0 \Rightarrow (4 \bullet 6{,}5 + 4 - 30)\ y_2 = 0 \Rightarrow 0 = 0,$

$(3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 42)\ y_3 = 0 \Rightarrow (3 \bullet 6{,}5 + 5 \bullet 4 - 42)\ y_3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2{,}5y_3 = 0 \Rightarrow y_3 = 0,$

$(2y_1 + 4y_2 + 3y_3 - 6)\ x_1 = 0 \Rightarrow (2y_1 + 4y_2 + 3y_3 - 6)\ 6{,}5 = 0 \Rightarrow (2y_1 + 4y_2 + 3y_3 - 6 = 0),$

$(3y_1 + y_2 + 5y_3 - 5)\ x_2 = 0 \Rightarrow (3y_1 + y_2 + 5y_3 - 5)\ 4 = 0 \Rightarrow (3y_1 + y_2 + 5y_3 - 5 = 0),$

$(2y_1 + 3y_2 + 2y_3 - 4)\ x_3 = 0 \Rightarrow (2y_1 + 3y_2 + 2y_3 - 4)\ 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0,$

$(y_1 + 2y_2 + 2y_3 - 3)\ x_4 = 0 \Rightarrow 0 = 0.$

Решая систему $y_3 = 0$; $2y_1 + 4y_2 + 3y_3 - 6 = 0$; $3y_1 + y_2 + 5y_3 - 5 = 0$,

находим $y_1 = 1{,}4$; $y_2 = 0{,}8$; $y_3 = 0$; $f^* = 25 \bullet 1{,}4 + 30 \bullet 0{,}8 + 42 \bullet 0 = 59$.

Пример 4. Решить целочисленную задачу линейного программирования методом Гомори.

$$f(X) = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$$
$$2x_1 + x_3 = 3,$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6,$$
$$\text{все } x_j \ge 0.$$

Сначала находится решение задачи симплекс-методом.

б\с	x_1	x_2	b		б\с	x_3	x_2	b		б\с	x_3	x_4	b
x_3	2	0	3	←	x_1	1/2	0	3/2		x_1	1/2	0	3/2
x_4	2	3	6		x_4	-1	3	3	←	x_2	-1/3	1/3	1
f	-2	-1	0		f	1	-1	3		f	2/3	1/3	4
	↑						↑						

$X^*_{нц}(3/2; 1; 0; 0)$.

Переменная x_1 – дробная. Строим по строке x_1 отсечение:

$$\{1/2\}\ x_3 + \{0\}\ x_4 \ge \{3/2\}, \text{ т. е. } x_3 \ge 1.$$

Здесь дробная часть числа a находится по формуле $\{a\} = a - [a]$, где $[a]$ – целая часть числа a.

$$\{1/2\} = 1/2 - 0,\ \{0\} = 0,\ \{3/2\} = 3/2 - 1 = 1/2.$$

Из последней таблицы

$f(X) = 4 - 2/3\, x_3 - 1/3\, x_4 \to \max$

$1/2\, x_3 + x_1 = 3/2,$

$-1/3\, x_3 + 1/3\, x_4 + x_2 = 1,$

все $x_j \geq 0.$

Составляем задачу с дополнительным ограничением:

$f(X) = 4 - 2/3\, x_3 - 1/3\, x_4 \to \max$

$1/2\, x_3 + x_1 = 3/2,$

$-1/3\, x_3 + 1/3\, x_4 + x_2 = 1,$

$x_3 - x_5 = 1,$

все $x_j \geq 0.$

Полученную задачу решаем М-методом:

$F(X) = 4 - 2/3\, x_3 - 1/3\, x_4 - M\, t_1 = 4 - 2/3\, x_3 - 1/3\, x_4 + M\,(-1 + x_3 - x_5) \to \max$

$1/2\, x_3 + x_1 = 3/2,$

$-1/3\, x_3 + 1/3\, x_4 + x_2 = 1,$

$x_3 - x_5 + t_1 = 1,$

$t_1 \geq 0$, все $x_j \geq 0.$

б\с	x_3	x_4	x_5	b		б\с	t_1	x_4	x_5	b
x_1	1/2	0	0	3/2		x_1	-1/2	0	1/2	1
x_2	-1/3	1/3	0	1		x_2	1/3	1/3	-1/3	4/3
t_1	1	0	-1	1	$\leftarrow$	x_3	1	0	-1	1
f	2/3	1/3	0	4		f	-2/3	1/3	2/3	10/3
M	-1	0	1	-1		M	1	0	0	0
	$\uparrow$									

$x_2 = 4/3$, требуется еще итерация. Из последней симплекс-таблицы

$f(X) = 10/3 - 1/3\, x_4 - 2/3\, x_5 \to \max$

$x_1 + 1/2\, x_5 = 1,$

$x_2 + 1/3\, x_4 - 1/3\, x_5 = 4/3,$

$- x_5 + x_3 = 1,$

$\{1/3\}\, x_4 + \{-1/3\}\, x_5 \geq \{4/3\},$

все $x_j \geq 0.$

$\{-1/3\} = -1/3 - (-1) = 2/3,\ \{4/3\} = 4/3 - 1 = 1/3.$

Получаем каноническую задачу линейного программирования :

$f(X) = 10/3 - 1/3\, x_4 - 2/3\, x_5 \to \max$

$x_1 + 1/2\, x_5 = 1,$

$x_2 + 1/3\, x_4 - 1/3\, x_5 = 4/3,$

$- x_5 + x_3 = 1,$

$x_4 + 2x_5 - x_6 = 1,$

все $x_j \geq 0.$

Применяем М-метод.

$F(X) = 10/3 - 1/3\, x_4 - 2/3\, x_5 - M\,(1 - (x_4 + 2x_5 - x_6)) \to \max$

$x_1 + 1/2\, x_5 = 1;\quad x_2 + 1/3\, x_4 - 1/3\, x_5 = 4/3;\quad - x_5 + x_3 = 1;\quad x_4 + 2x_5 - x_6 + t = 1;$

$t \geq 0$, все $x_j \geq 0.$

б\с	x_4	x_5	x_6	b		б\с	t	x_5	x_6	b
x_1	0	½	0	1		x_1				1
x_2	1/3	-1/3	0	4/3		x_2				1
x_3	0	-1	0	1		x_3				1
t	1	2	-1	1	←	x_4				1
f	1/3	2/3	0	10/3		f		0	1/3	3
M	-1	-2	1	-1		M		0	0	0
	↑									

Оптимальное целочисленное решение $X^*_ц(1,1,1,1)$.

Пример 5. Решить транспортную задачу.

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	3	2	4	30
A_2	3	2	5	1	40
A_3	4	3	2	6	20
Потребности	20	30	30	10	90

Шаг 1. (Нахождение опорного плана перевозок методом минимального элемента.) В матрице стоимостей перевозок находится наименьший элемент, это $c_{24} = 1$. Находится количество единиц перевозимого груза от A_2 к B_4 («минимум из спроса и предложения») $x_{24} = \min\{40, 10\} = 10$, потребности B_4 удовлетворены полностью и четвертый столбец исключается из дальнейшего рассмотрения.

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	3	2	4	30
A_2	3	2	5	1 10	40
A_3	4	3	2	6	20
Потребности	20	30	30	10	90

После этого в матрице стоимостей перевозок с исключенным 4-м столбцом находится наименьший элемент. Таких элементов несколько, пусть это будет $c_{22} = 2$.

$$x_{22} = \min\{30, 30\} = 30.$$

В результате из рассмотрения исключаются вторая строка и второй столбец.

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	3	2	4	30
A_2	3	2 30	5	1 10	40
A_3	4	3	2	6	20
Потребности	20	30	30	10	90

Среди оставшихся элементов матрицы стоимостей перевозок снова находится наименьший элемент. Таких элементов несколько, пусть это будет $c_{13} = 2$. Тогда

$$x_{13} = \min\{30, 30\} = 30.$$

Из рассмотрения в результате исключаются первая строка и третий столбец.

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	3	2 30	4	30
A_2	3	2 30	5	1 10	40
A_3	4 20	3	2	6	20
Потребности	20	30	30	10	90

В последнюю неисключенную клетку вписывается 20.

Итак, опорный план найден: $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 10 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Шаг 2. (Определение базисных элементов.) Число базисных элементов вычисляется по формуле $m + n - 1$, где m – число поставщиков, n – число потребителей.

В данном случае $m + n - 1$ = 3 + 4 – 1 = 6, но опорный план имеет только 4 ненулевых компоненты. Они являются базисными. Но в базис необходимо включить еще два элемента так, чтобы, используя лишь базисные клетки таблицы, нельзя было построить цикла. Таковыми являются элементы x_{11}, x_{32}.

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2 0	3	2 30	4	30
A_2	3	2 30	5	1 10	40
A_3	4 20	3 0	2	6	20
Потребности	20	30	30	10	90

Цикл изображают в таблице ТЗ в виде замкнутой ломаной линии. В любой клетке цикла происходит поворот звена ломаной линии на 90^0.

Шаг 3. (Определение потенциалов.) Для всех базисных клеток (i, j) решается система из шести уравнений $\alpha_i + \beta_j = c_{ij}$ с семью неизвестными α_i, $i = \overline{1, m}$, β_j $j = \overline{1, n}$. Для определенности $\alpha_1 = 0$.

	$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 1$	$\beta_3 = 2$	$\beta_4 = 0$
$\alpha_1 = 0$	2 0	3	2 30	4
$\alpha_2 = 1$	3	2 30	5	1 10
$\alpha_3 = 2$	4 20	3 0	2	6

Шаг 4. (Подсчет псевдостоимостей.) Для всех свободных клеток вычисляются

$$\tilde{c}_{ij} = \alpha_i + \beta_j.$$

Если все они не превышают стоимостей, то план оптимален, если есть свободная клетка, где $\tilde{c}_{ij} > c_{ij}$, то план можно улучшить, перебрасывая перевозки по циклу свободной клетки.

	$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 1$	$\beta_3 = 2$	$\beta_4 = 0$
$\alpha_1 = 0$	2 0	1 3	2 30	0 4
$\alpha_2 = 1$	3 3	2 30	3 5	1 10
$\alpha_3 = 2$	4 20	3 3 0	4 2	2 6

Шаг 5. Так как клетка (3, 3) имеет отрицательную цену $\tilde{c}_{ij} > c_{ij}$, то план не является оптимальным. Для клетки (3, 3) строится цикл. Цена цикла $\gamma_{33} = 2 - 4 = -2$.

По циклу переносим 20 единиц груза (больше нельзя, чтобы перевозки в клетке (3, 1) не стали отрицательными). При этом стоимость плана уменьшается на 40.

	$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 1$	$\beta_3 = 2$	$\beta_4 = 0$
$\alpha_1 = 0$	+ 2 0	1 3	– 2 30	0 4
$\alpha_2 = 1$	3 3	2 30	3 5	1 10
$\alpha_3 = 2$	4 20 –	3 3 0	4 2 +	2 6

Шаг 6. Для нового плана вычисляются новые значения платежей и псевдостоимостей.

	$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 3$	$\beta_3 = 2$	$\beta_4 = 2$
$\alpha_1 = 0$	2 20	3 3	2 10	2 4
$\alpha_2 = -1$	1 3	2 30	1 5	1 10
$\alpha_3 = 0$	2 4	3 0	2 20	2 6

Так как в последней таблице все псевдостоимости не превосходят соответствующих стоимостей, то получен оптимальный план.

$$X^* = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \end{pmatrix}.$$

Стоимость перевозок при этом $L^* = 20 \cdot 2 + 10 \cdot 2 + 30 \cdot 2 + 10 \cdot 1 + 20 \cdot 2 = 170$.

Теория игр

Пример 1. Пусть игра 4×4 задана матрицей. Дана платежная матрица игры. Найти седловые точки и оптимальные стратегии игроков.

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	4	5	9	3	3
A_2	8	4	3	7	3
A_3	7	6	8	9	6
A_4	7	2	4	6	2
β_j	8	6	9	9	

<u>Решение</u>. Нижняя цена игры максимин $\alpha = \max\limits_j \min\limits_i a_{ij} = 6$. Верхняя цена игры минимакс $\beta = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = 6$.

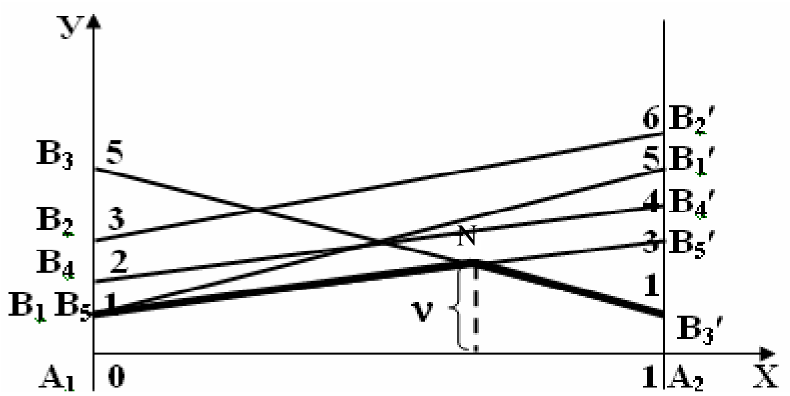
Как видим, нижняя цена игры равна верхней цене игры, т. е. $\alpha = \beta = 6$.
В таких случаях говорят, что игра имеет чистую цену игры : $\alpha = \beta = \nu$.

В матрице такой игры существует элемент, который является одновременно минимальным в своей строке и максимальным в своём столбце, в нашем примере элемент $a_{32} = 6$. Такой элемент называется <u>седловой точкой</u>. Седловой точке соответствует пара минимаксных стратегий A_3 и B_2. Эти стратегии называются <u>оптимальными</u>, а совокупность оптимальных стратегий является решением игры.

Пример 2. Графически решить игру с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

<u>Решение</u>. На плоскости XOY введём систему координат и на оси Ox отложим отрезок единичной длины A_1, A_2. В точках A_1 и A_2 восстановим перпендикуляры и на полученных прямых будем откладывать выигрыш игроков. На первом перпендикуляре (в данном случае он совпадает с осью 0у) отложим выигрыш игрока 1 при стратегии A_1, а на втором – при стратегии A_2.



Соединяя между собой точки B_1 и B'_1, B_2 и B'_2, B_3 и B'_3 , B_4и B'_4, B_5 и B'_5, получим пять прямых, расстояние до которых от оси 0X определяет средний выигрыш при любом сочетании соответствующих стратегий. Ординаты точек, принадлежащих ломаной $B_5NB'_3$, определяют минимальный выигрыш игрока 1 при применении им любых смешанных стратегий. Эта минимальная величина является максимальной в точке N, следовательно, этой точке соответствует оптимальная стратегия $S_A^* = (p_1; p_2)$, а её ордината равна цене игры υ. Координаты точки N находим как точку пересечения прямых $B_5B'_5$ и $B_3B'_3$. Следовательно, B_5 и B_3 – активные стратегии, а вероятности использования стратегий B_1, B_2, B_4 равны 0, т. е. $q_1 = q_2 = q_4 = 0$.

Для нахождения оптимальных стратегий игроков будут использоваться третий и пятый столбцы матрицы игры $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Для нахождения $S_A^* = (p_1; p_2)$ используем для первого уравнения коэффициенты из третьего столбца, для второго – из пятого.

$$\begin{cases} 5p_1 + p_2 = \nu, \\ p_1 + 2p_2 = \nu, \\ p_1 + p_2 = 1. \end{cases} \quad S_A^* = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

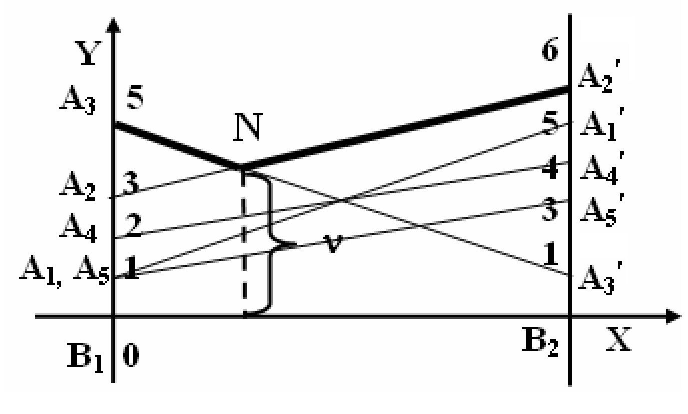
Аналогично, при нахождении $S_B^* = (q_1; q_2; q_3; q_4; q_5) = (0; 0; q_3; 0; q_5)$ используются для первого уравнения коэффициенты первой строки, для второго – второй.

$$\begin{cases} 5q_3 + q_5 = \nu, \\ q_3 + 2q_5 = \nu, \\ q_3 + q_5 = 1. \end{cases} \quad S_B^* = \left(0; 0; \frac{1}{3}; 0; \frac{2}{3}\right).$$

Пример 3. Графически решить игру с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \\ 5 & 1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. На плоскости XOY введём систему координат и на оси Ox отложим отрезок единичной длины B_1, B_2. В точках B_1 и B_2 восстановим перпендикуляры и на полученных прямых будем откладывать выигрыш игроков. На первом перпендикуляре (в данном случае он совпадает с осью 0y) отложим проигрыш игрока 2 при стратегии B_1, а на втором – при стратегии B_2.



Соединяя между собой точки A_1 и A'_1, A_2 и A'_2, A_3 и A'_3 , A_4 и A'_4, A_5 и A'_5, получим пять прямых, расстояние до которых от оси 0X определяет средний проигрыш при любом сочетании соответствующих стратегий. Ординаты точек, принадлежащих ломаной $A_3NA'_2$, определяют максимальный проигрыш игрока 2 при применении им любых смешанных стратегий. Эта максимальная величина является минимальной в точке N, следовательно, этой точке соответствует оптимальная стратегия $S_B^* = (q_1; q_2)$, а её ордината равна цене игры υ. Координаты точки N находим как точку пересечения прямых $A_2A'_2$ и $A_3A'_3$. Следовательно, A_2 и A_3 – активные стратегии, а вероятности использования стратегий A_1, A_4, A_5 равны 0, т. е. $p_1 = p_4 = p_5 = 0$.

Для нахождения оптимальных стратегий игроков будут использоваться вторая и третья строки матрицы игры.

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения $S_B^* = (q_1; q_2)$ используем для первого уравнения коэффициенты второй строки, для второго – третьей.

$$\begin{cases} 3q_1 + 6q_2 = \nu, \\ 5q_1 + q_2 = \nu, \\ q_1 + q_2 = 1. \end{cases} \quad S_B^* = \left(\frac{5}{7}; \frac{2}{7}\right).$$

Аналогично, при нахождении $S_A^* = (p_1; p_2; p_3; p_4; p_5) = (0; p_2; p_3; 0; 0)$ используются коэффициенты столбцов.

$$\begin{cases} 3p_2 + 5p_3 = \nu, \\ 6p_2 + p_3 = \nu, \\ p_2 + p_3 = 1. \end{cases} \quad S_A^* = \left(0; \frac{4}{7}; \frac{3}{7}; 0; 9\right).$$

Пример 4. Найти решение игры, определяемой матрицей

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

<u>Решение</u>. При решении этой игры к каждому элементу матрицы P прибавим 4 и получим следующую матрицу :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 4 & 2 \\ 7 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Составим теперь пару взаимно двойственных задач :

$$z = x_1 + x_2 + x_3 \to \min \qquad\qquad z' = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 + 7x_3 \geq 1, \\ 3x_1 + 10x_2 + 7x_3 \geq 1, \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 \geq 1, \\ 8x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 1, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} 3y_1 + 3y_2 + 6y_3 + 8y_4 \leq 1, \\ 9y_1 + 10y_2 + 4y_3 + 2y_4 \leq 1, \\ 7y_1 + 7y_2 + 5y_3 + 4y_4 \leq 1, \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0. \end{cases}$$

Решим вторую из них :

$$(y_1;\ y_2;\ y_3;\ y_4) = \left(\frac{1}{27};\quad 0;\quad \frac{4}{27};\quad 0\right),$$

а из соотношений двойственности следует, что

$$(\ x_1;\ x_2;\ x_3) = \left(\frac{2}{27};\ 0;\ \frac{1}{9}\right).$$

Цена игры с платёжной матрицей P_1 равна

$$\upsilon_1 = \frac{1}{x_1 + x_2 + x_3} = \frac{1}{\frac{2}{27} + 0 + \frac{1}{9}} = \frac{27}{5},$$

а игры с платёжной матрицей – P : $\upsilon = \upsilon_1 - 4 = \dfrac{27}{5} - 4 = \dfrac{7}{5}$.

При этом оптимальные стратегии игроков имеют вид:

$$S_A^* = (p_1;\ p_2;\ p_3) = (\upsilon_1 x_1;\ \upsilon_1 x_2;\ \upsilon_1 x_3) = \left(\frac{2}{5};\ 0;\ \frac{3}{5}\right),$$

$$S_B^* = (q_1;\ q_2;\ q_3;\ q_4) = (\upsilon_1 y_1;\ \upsilon_1 y_2;\ \upsilon_1 y_3;\ \upsilon_1 y_4) = \left(\frac{1}{5};\quad 0;\quad \frac{4}{5};\quad 0\right).$$

Библиографический список

1. Исследование операций в экономике / Под ред. Н. Ш. Кремера – М.: Юнити, 2000. – 385 с.

2. Дегтярёв Ю. И. Исследование операций. – М.: Высш. школа, 1986. – 367 с.

3. Зайченко Ю. П. Исследование операций. – Киев: Вища школа, 1989. – 277 с.

4. Моисеев Н. Н. Математические задачи системного анализа. – М.: Наука, 1981. – 264 с.

5. Вентцель Е. С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. – М.: Наука, 1988. – 185 с.

6. Морозов В. В. и др. Исследование операций в задачах и упражнениях. – М.: Высш. школа, 1986. – 132 с.

7. Кошкин Ю. Н. Системный анализ и исследование операций. – Новосибирск: НЭТИ, 1991. – 234 с.