Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

«Омский государственный технический университет»

РЯДЫ

Методические указания

по выполнению типового расчета

Омск-2005

Составитель Чурашева Надежда Георгиевна, ст. преподаватель

Печатается по решению редакционно-издательского совета Омского государственного технического университета

Прежде чем приступить к выполнению типового расчета, студентам рекомендуется ознакомиться с содержанием справочного материала, а затем и с примерами решения задач.

1. ТИПОВОЙ РАСЧЕТ

Задача № 1. Найти сумму ряда.

Задача № 2. Используя признак сравнения сходимости, исследовать ряд на сходимость.

Задача № 3. Используя предельную форму признака сравнения сходимости, исследовать ряд на сходимость.

Задача № 4. Используя признак Даламбера, исследовать ряд на сходимость.

Задача № 5. Используя радикальный признак Коши, исследовать ряд на сходимость.

Задача № 6. Используя интегральный признак Коши, исследовать ряд на сходимость.

Задача № 7. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд.

Задача № 8. Найти радиус сходимости и интервал сходимости степенного ряда.

Задача № 9. Используя дифференцирование и интегрирование степенных рядов, найти сумму и указать область сходимости данного ряда.

Задача № 10. Используя табличные разложения, составить ряд Тейлора по степеням (x–a) для указанной функции и указать область сходимости.

Задача № 11. Вычислить интеграл с точностью 0,0001.

Задача № 12. Найти первые 4 – 5 отличных от нуля членов в разложении решения y(x) дифференциального уравнения в ряд Тейлора по степеням (x–a).

Задача № 13. Разложить данную функцию $y = f(x)$ с периодом 2π, заданную на интервале $]-\pi,\pi[$, в тригонометрический ряд Фурье.

Задача № 14. Разложить функцию $y = f(x)$, заданную на интервале $]0, l[$, в тригонометрический ряд Фурье по косинусам.

Задача № 15. Разложить функцию $y = f(x)$, заданную на интервале $]0; l[$, в тригонометрический ряд Фурье по синусам.

Задача	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4	Вариант 5
1	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10}{3^n}$	$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{4}{n(n-1)}$	$\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{4}{(n-3)(n+1)}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+5^{2n}}{40^n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2+5n+4}$
2	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\lvert\sin 2n\rvert}{2n^2+n+1}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\lvert\cos n\rvert}{3n^3+5n+1}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n+1}{3n^3+2}$	$\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{4}{\ln\ln n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5\cdot 2^n}{3^{3n+2}}$
3	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{tg}^4\left(\frac{\pi}{\sqrt[5]{n}}\right)$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{\sin\frac{2}{\sqrt{n}}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{tg}\,\frac{5^n}{4^{2n}}$
4	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(3n-1)!}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^2\cdot 5^n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-1)!}{(2n+3)!}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{(2n)!}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(3n)!}{(4n-2)!}$
5	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{3n-1}\right)^n$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{\ln^n(n+8)}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)^{n^3}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^{2n}}{(n+9)^{n-1}}$
6	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n^2+1)}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{n^6+1}$	$\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{arctg}\,n}{1+n^2}$	$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin(\pi/n)}{n^2}$
7	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+8)}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{(n+2)^{n/2}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^{n-1}}{2^{2n+5}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{7^n+5}$	$\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{3n^2-7}$
8	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(nx)^n$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{n^n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x-2)^n\cos\frac{\pi}{n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3-x)^n}{2^n+1}$	$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{3n^2-8}$
9	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}2nx(x^2-2)^{n-1}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+3)x^{n+5}$
10	$y=2^x$, $a=1$	$y=\frac{2}{1+x^2}$, $a=0$	$y=e^{3x}-1$, $a=2$	$y=\sin\frac{x^2}{3}$, $a=0$	$y=\frac{2}{(1+x)^2}$, $a=0$
11	$\int\limits_0^{0,5}e^{-x^2}dx$	$\int\limits_0^{0,5}\sin x^3dx$	$\int\limits_0^{1}\mathrm{arctg}\frac{x}{2}dx$	$\int\limits_0^{0,5}\frac{dx}{1+x^7}$	$\int\limits_0^{0,2}\ln(1+x^4)dx$
12	$y'=y\,\mathrm{tg}\,x$, $y(\pi/6)=1$	$y'=x^3y+x^2$, $y(2)=0$	$y'=\mathrm{tg}\,x+xy^2$, $y(0)=1$	$y'=x^2-y^2$, $y(2)=1$	$y'=e^y$, $y(-2)=0$

Задача	Вариант 6	Вариант 7	Вариант 8	Вариант 9	Вариант 10
1	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln 4)^n+1}{5^n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{15^n}{11^{2n+2}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+\sqrt{3^n}}{e^n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left\|\ln\frac{1}{2{,}2}\right\|^n$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5\cdot 8^n}{3^{2n+1}}$
2	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n11^n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}40\left(\frac{3}{7^n}\right)^n$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^3+n+9}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7\cdot 5^n}{n+7^n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{8\cdot 3^n}{11\cdot 2^n}$
3	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{3^n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e^{\operatorname{tg}\frac{2}{n}}-1\right)$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin\sqrt[3]{\frac{\pi}{n^4}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n+1}{3n^4-1}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln^2\frac{n+2}{n+1}$
4	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{9}{n3^n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2^n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n n!}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n n!}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(n+5)!}$
5	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2n+1}}{5^n}$	$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)^n}{(2n-3)^{n+1}}$	$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n^2-3}\right)^{n/2}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\cdot\sin^n\frac{1}{n}$
6	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n^{-1}}{n^2}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-2}}{\cos^2 n^{-1}}$	$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{6}{n\cdot\ln^8 n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-2}\cdot\operatorname{tg}n^{-1}}{\cos^2 n^{-1}}$	$\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{\ln^{-1}\ln n}{n\cdot\ln n}$
7	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n+9}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{\sqrt{n+2}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n-1}}{\sqrt{2n+1}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{n}$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(\pi n/2)}{3n+5}$
8	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{3^{n+1}-2}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{n-1}}{\sqrt[3]{n+1}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{4^n+1}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{8^n-5}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(6-2x)^n}{5^{n-1}}$
9	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+3)x^{n+3}$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n+4}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^2+n)x^n$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}2n\cdot x^{2n-1}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x-1)^n$
10	$y=\operatorname{ch}2x,$ $a=3$	$y=\operatorname{sh}3x,$ $a=-5$	$y=\ln(3x-2),$ $a=2$	$y=\ln(1+3x),$ $a=2$	$y=\cos x,$ $a=1$
11	$\int\limits_0^1\frac{\cos x-1}{x}dx$	$\int\limits_0^1\frac{\sin x-x}{x^2}dx$	$\int\limits_0^{0,2}\ln(1+x^2)dx$	$\int\limits_0^{0,1}\frac{e^{-x}-1}{x}dx$	$\int\limits_0^{0,5}\frac{3x^3}{2+x^9}dx$
12	$y'=\ln y+1$ $y(1)=1$	$y'=\operatorname{arctg}y$ $y(4)=1$	$y'=\ln(1+x)+y^2$ $y(1)=0$	$y'=x^3-y^3$ $y(1)=-1$	$y'=y\cos x$ $y(\pi)=1$

Задача	Вариант 11	Вариант 12	Вариант 13	Вариант 14	Вариант 15
1	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2-1}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{n^2+n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln 4}{(n+2)(n+3)}$	$\sum_{n=1}^{\infty}(\ln 2)^{2n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 1}{5^{n+2}}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{15\cdot 11^n}{11\cdot 15^{n-1}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5+n^2}{n+2n^7}$	$\sum_{n=1}^{\infty}8\left(\frac{\pi}{e}\right)^{n-1}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lvert\sin 5n^2\rvert}{1+2n^4}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^n}{8e^{n-1}}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{e}{\pi}\right)^n$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(1/n)}{\sqrt{n^2+4}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(3^{1/n}-1\right)^2$	$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{tg}\left(\frac{1}{e}\right)^n$	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\left(\frac{e}{\pi}\right)^n\right)$
4	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{5^n}$	$\sum_{n=4}^{\infty}\frac{(2n-7)!}{(n+7)!}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\pi/n)}{n!}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n!}}{e^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\pi/n)}{(2n)!}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-2}{n}\right)^{n^2}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+5}{5n+2}\right)^{n^2}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{arctg}^n\frac{n}{n+2}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-2}\right)^{3n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^n$
6	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+1}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^4+4}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n}}{e^{-n}+1}$	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3n^4}{n^{10}-1}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{arctg}^7 n}{n^2+1}$
7	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-\ln n)^n}{n^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-n-1)^n}{\sqrt{n^{n+1}}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\pi n/2)}{n^2}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+4}}{(-1)^n n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n-1}}{n^{n+1}}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+e)^n}{e^{n-1}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+\pi)^n}{\sin(\pi/n)}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+\ln 2)^n}{\ln^n 4}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x+1)^n}{6^{2n-1}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{4^{n-1}}$
9	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n-1}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x/2-1)^n}{n}$	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^{n+1}}{n+1}$
10	$y=\ln x$, $a=4$	$y=5^{3x}$, $a=1$	$y=\mathrm{sh}x$, $a=2$	$y=\mathrm{ch}x$, $a=1$	$y=\ln 2x$, $a=2$
11	$\int_0^1 \mathrm{arctg}x^2dx$	$\int_0^{0,5}\ln(1+x^3)dx$	$\int_0^{0,4}(e^{-x^3}-1)dx$	$\int_0^{0,3}\sin x^2dx$	$\int_0^{0,1}\cos 3x dx$
12	$y'=y^3+3xy$, $y(-1)=2$	$y'=x^3y+x^2$, $y(2)=0$	$y''=\cos\pi y'$, $y'(2)=y(2)=0{,}25$	$y'=x^2+2xy$, $y(3)=-2$	$y'=e^{x^2}+y$, $y(0)=1$

Задача	Вариант 16	Вариант 17	Вариант 18	Вариант 19	Вариант 20
1	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^n+3^{2n}}{7^{3n}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10\cdot 7^{n+1}}{11^{n-1}}$	$\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{4}{(n-3)(n-2)}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot 3^{2n}}{2^{4n}}$	$\sum\limits_{n=6}^{\infty}\frac{10}{n^2-25}$
2	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2}{2n^3+1}$	$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{3n-5}{2n^4-5}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+\cos n}{5n^4+n}$	$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{10}{\ln n}$	$\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{\lvert\cos e^n\rvert}{2n^5-8}$
3	$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{2n-3}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi}{7^{2n+1}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{\sqrt{n+2}}{8n^4}$	$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\ln n}{n^7-1}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(5^{\left(1/\sqrt{n}\right)}-1\right)^3$
4	$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{(n-1)!}}{n!}$	$\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{n!}{\cos(\pi/n)}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(2n)!}$	$\sum\limits_{n=4}^{\infty}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n!}\right)$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{2}{n!}\right)$
5	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln^{\frac{n}{2}}\left(1+\frac{2^n}{7^n}\right)$	$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}$	$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{4n^2}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^{n-1}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln^n(1+n^{-3})$
6	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{-n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n^2}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin e^{-n}}{e^n}$
7	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{n}{2}\right)^{1-n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\cos n^{-1}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+n^5}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{\ln(n+5)}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$
8	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+9)^n}{(9n)!}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{2n+1}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{n^4+n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-7)^n}{\sqrt{n}+7}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-e)^n}{3^{2n+1}}$
9	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(5x)^n$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+2)x^{n/2}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1{,}5)x^{3n+2}$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}n(x-4)^n$	$\sum\limits_{n=10}^{\infty}(n-10)x^n$
10	$y=\sin x,$ $a=\pi/2$	$y=\frac{4}{x+7},$ $a=-2$	$y=\frac{x-7}{3x-1},$ $a=2$	$y=\frac{x-1}{x+2},$ $a=-3$	$y=\frac{8}{5-x},$ $a=1$
11	$\int\limits_0^{0{,}1}2^{-x^2}dx$	$\int\limits_0^{0{,}01}\sqrt[4]{1+x}\,dx$	$\int\limits_0^{0{,}5}\ln(5+x^6)dx$	$\int\limits_0^{0{,}1}\operatorname{arctg}2x\,dx$	$\int\limits_0^{0{,}1}\sin x^2dx$
12	$y'=y\cdot e^{x^2/2}$ $y(0)=1$	$y'=\sqrt{y-x}$ $y(2)=6$	$y'=x\cdot y-x^5$ $y(1)=1$	$y'=2^x+2^y$ $y(1)=0$	$y'=x\cdot\ln y$ $y(5)=e$

Задача	Вариант 21	Вариант 22	Вариант 23	Вариант 24	Вариант 25
1	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+4^n}{6^n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\ln 2{,}5)^{3n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{n^2+11n+30}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\cos 1)^n$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^n}{e^{2n}}$
2	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\lvert\sin n\rvert}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt[3]{n}+n^2}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^7+\lvert\cos n\rvert}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}5^{n^2-3n^3}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n^9}}$
3	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{8}{\sqrt[4]{n}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{9}{8^{n-1}}\right)$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^{10}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e^{0,5/n}-1\right)$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$
4	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(3n-2)!}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+5)!}{7^{n^2}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(4n+2)!}{(3n+5)!}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(3n)!}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{n!}$
5	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{tg}^{2n}\left(\frac{\pi}{\sqrt[4]{n}}\right)$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{((n+1)/n)^{n^2}}{7^n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(3^{2/n}\cdot n-1\right)^n}{3^{n^2}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e^{\pi/n}-1\right)^{n/2}$	$\sum\limits_{n=5}^{\infty}\cos^n\left(\frac{\pi}{n}+\frac{\pi}{4}\right)$
6	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2^{-n}}{2^n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{8}{10+n^2}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^{-\sqrt[3]{n}}}{\sqrt[3]{n^2}}$	$\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2-4}$
7	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{2^{2n-1}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(e-2)^{n-1}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n^4+4}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-\sin(1/n))^n$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{tg}\frac{-1}{n}\right)^n$
8	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^{2n}}{9^n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{3n}}{7n+4}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^{2n-1}}{4^{n-3}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-6)^n}{n^8+2n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{(3n-1)!}$
9	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+3}}{n+3}$	$\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{x^{n/2}}{n-2}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x/5+3)^n}{n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x/4)^n}{n}$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x-7)^{n+1}}{n+1}$
10	$y=5^{2x}$, $a=-4$	$y=\frac{8}{x-5}$, $a=-1$	$y=\mathrm{arctg}\frac{x^2}{3}$, $a=0$	$y=e^{x^2}-1$, $a=0$	$y=\sin\left(\frac{x+1}{\pi}\right)$, $a=1$
11	$\int\limits_0^{0,2}e^{2-3x}dx$	$\int\limits_0^{0,4}\ln(2+x)dx$	$\int\limits_0^{0,1}e^{4-3x^2}dx$	$\int\limits_0^{0,01}\sqrt{1+x^2}dx$	$\int\limits_0^{1}\mathrm{arctg}\frac{x}{4}dx$
12	$y'=y\cdot\ln x$, $y(e)=\pi$	$y'=3\cdot\sqrt[3]{xy}$, $y(8)=1$	$y'=\cos x^2$, $y(\sqrt{\pi})=1$	$y'=e^{2y}-e^{3x}$, $y(0)=\ln 2$	$y'=\mathrm{tg}\,x+y^2$, $y(2\pi)=2$

Задача	Вариант 26	Вариант 27	Вариант 28	Вариант 29	Вариант 30
1	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin e}{5}\right)^n$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot 5^{n-1}}{3^{2n+1}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^2}{n(2n+4)}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2+3n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{8^n}{3^{2n-2}}$
2	$\sum\limits_{n=3}^{\infty}\sqrt[3]{\frac{6}{n^2-4}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10}{7^n\cdot\sqrt{n}}$	$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2n+4}{\sqrt[3]{n^7+3n}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+5}{\sqrt{2n^4+7}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt{n^6+4}}$
3	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{n}{e^n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin^9\frac{2}{\sqrt{n}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{5^n}{10^n+5^{-n}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{3}{n}}-1\right)^5$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\sqrt[5]{3n-2}}{8n\sqrt{n}}$
4	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^6}{2^n+1}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{9^n-1}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{100^{2n}}{(3n+1)!}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^{n!}}{7^{n^2}}$
5	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^6}{6^n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{8^{n/3}}{n^8}$	$\sum\limits_{n=5}^{\infty}\sin^n\left(\frac{\pi}{n}+\frac{\pi}{6}\right)$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n^2}$	$\sum\limits_{n=5}^{\infty}\operatorname{tg}^n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)$
	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{9^{-\sqrt{n+2}}}{\sqrt{n+2}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n^2+n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{(n+2)^4+1}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^9(n+1)}{n+1}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+5)^{-1}}{\ln^3(n+5)}$
7	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-e)^n}{n!}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{(2n-1)!}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{(3!)^{n-1}}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{2}}$
8	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{\sqrt[4]{n^{10}+1}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{3^{2n+5}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{3}\right)^n$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{4}-\frac{1}{2}\right)^{2n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x+7)^n$
9	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}5nx^{5n-1}$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}nx^{n+\frac{4}{5}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)x^{n-\frac{1}{2}}$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+4)x^{n+3}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(x-\frac{1}{3}\right)^n$
10	$y=\cos\frac{x^4}{\pi}$, $a=0$	$y=\frac{5}{2+x}$, $a=3$	$y=\frac{6}{8+x^3}$, $a=0$	$y=e^{3x}$, $a=-2$	$y=2^{2x}$, $a=-1$
11	$\int\limits_0^{0,2}\frac{5dx}{2+x^5}$	$\int\limits_0^{0,1}\sqrt{1+x^4}\,dx$	$\int\limits_0^{0,1}\frac{x^2dx}{1+x^4}$	$\int\limits_0^{0,2}\frac{\sin x^4}{x^3}dx$	$\int\limits_0^{0,5}\frac{e^{-x^4}-1}{x^2}dx$
12	$y'=e^{\sqrt{y}}$ $y(5)=1$	$y'=3x^2y$ $y(1)=e$	$y'=\sin y+y$ $y(-4)=\pi$	$y'=\sin(\pi y)$ $y(-7)=0,5$	$y'=-y^2x$ $y(-3)=1$

Вари- ант	Задача 13	Задача 14	Задача 15
1.	$y=\begin{cases}2, & -\pi<x<0,\\ -x, & 0\le x<\pi.\end{cases}$	$y=\begin{cases}0, & 0<x<1,\\ x+8, & 1\le x<2.\end{cases}$	$y=\begin{cases}2, & 0<x<1,\\ x-3, & 1\le x<3.\end{cases}$
2.	$y=\begin{cases}x, & -\pi<x<0,\\ 0, & 0\le x<\pi.\end{cases}$	$y=\begin{cases}1-x, & 0<x<2,\\ 6, & 2\le x<3.\end{cases}$	$y=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ x+4, & 1\le x<5.\end{cases}$
3.	$y=\begin{cases}2x, & -\pi<x<0,\\ -x, & 0\le x<\pi.\end{cases}$	$y=\begin{cases}4, & 0<x<5,\\ 4x-7, & 5\le x<6.\end{cases}$	$y=\begin{cases}9, & 0<x<4,\\ 9-x, & 4\le x<8.\end{cases}$
4.	$y=\begin{cases}x-1, & -\pi<x<0,\\ -5, & 0\le x<\pi.\end{cases}$	$y=\begin{cases}7, & 0<x<1,\\ 1-x, & 1\le x<3.\end{cases}$	$y=2x-9,\ l=5$
5.	$y=\begin{cases}\pi, & -\pi<x<0,\\ \pi-x, & 0\le x<\pi.\end{cases}$	$y=\begin{cases}25, & 0<x<2,\\ x-5, & 2\le x<3.\end{cases}$	$y=\begin{cases}6-5x, & 0<x<1,\\ 0, & 1\le x<3.\end{cases}$
6.	$y=\left\|\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right\|$	$y=\begin{cases}2, & 0<x<10,\\ -x, & 10\le x<12.\end{cases}$	$y=\begin{cases}9, & 0<x<4,\\ 3x, & 4\le x<8.\end{cases}$
7.	$y=\begin{cases}-x, & -\pi\le x<0,\\ 3, & 0\le x<\pi.\end{cases}$	$y=\begin{cases}2+x, & 0<x<1,\\ 0, & 1\le x<3.\end{cases}$	$y=\begin{cases}0, & 0<x<\pi,\\ 2x, & \pi\le x<2\pi.\end{cases}$
8.	$y=\begin{cases}x-9, & -\pi<x<0,\\ -1, & 0\le x<\pi.\end{cases}$	$y=\begin{cases}1, & 0<x<3,\\ x-8, & 3\le x<5.\end{cases}$	$y=\begin{cases}0, & 0<x<2,\\ 1-x, & 2\le x<3.\end{cases}$
9.	$y=\begin{cases}x-3, & -\pi<x<0,\\ -4, & 0\le x<\pi.\end{cases}$	$y=\begin{cases}-6, & 0<x<3,\\ 6-x, & 3\le x<7.\end{cases}$	$y=\begin{cases}2, & 0<x<4,\\ x+8, & 4\le x<5.\end{cases}$
10.	$y=\begin{cases}0, & -\pi<x<0,\\ 2-x, & 0\le x<\pi.\end{cases}$	$y=\begin{cases}x+2, & 0<x<2,\\ -3, & 2\le x<9.\end{cases}$	$y=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 2x+4, & 1\le x<3.\end{cases}$
11.	$y=\begin{cases}2x+3, & -\pi<x<0,\\ -2, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$	$y=\begin{cases}2, & 0<x<5,\\ x-5, & 5\le x<9.\end{cases}$	$y=\begin{cases}0, & 0<x<1,\\ x+8, & 1\le x<2.\end{cases}$
12.	$y=\begin{cases}7+x, & -\pi<x<0,\\ -1, & 0\le x<\pi.\end{cases}$	$y=\begin{cases}1, & 0<x<4,\\ x-3, & 4\le x<9.\end{cases}$	$y=5x-1,\ l=\pi$
13.	$y=\begin{cases}4, & -\pi\le x<0,\\ x-1, & 0\le x<\pi.\end{cases}$	$y=\begin{cases}4, & 0<x<3,\\ 3-x, & 3\le x<9.\end{cases}$	$y=\begin{cases}7, & 0<x<1,\\ 1-x, & 1\le x<3.\end{cases}$
14.	$y=\begin{cases}2x+5, & -\pi<x<0,\\ -3, & 0\le x<\pi.\end{cases}$	$y=\begin{cases}5, & 0<x\le4,\\ 2x-9, & 4<x<9.\end{cases}$	$y=2x-3,\ l=2$
15.	$y=\begin{cases}0, & -\pi<x<0,\\ x-1, & 0\le x<\pi.\end{cases}$	$y=\begin{cases}2, & 0<x<1,\\ x-3, & 1\le x<3.\end{cases}$	$y=3x-4,\ l=1$
16.	$y=\begin{cases}x+2\pi, & -\pi<x<0,\\ -\pi, & 0\le x<\pi.\end{cases}$	$y=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ x+4, & 1\le x<5.\end{cases}$	$y=2x-9,\ l=5$
17.	$y=\|2-\pi x\|$	$y=4x-3,\ l=2$	$y=2\pi x-3\pi,\ l=2$

Вари-ант	Задача 13	Задача 14	Задача 15
18.	$y=\begin{cases}-5, & -\pi<x<0,\\ \pi x-1, & 0\le x<\pi.\end{cases}$	$y=\begin{cases}0, & 0<x<7,\\ 4x+1, & 7\le x<8.\end{cases}$	$y=\begin{cases}2, & 0<x<1,\\ x-3, & 1\le x<3.\end{cases}$
19.	$y=\left\lvert\frac{\pi}{2}-x\right\rvert$	$y=2x-3,\ l=2$	$y=\frac{2x-3}{4},\ l=4$
20.	$y=\left\lvert 2\pi-\frac{x}{2}\right\rvert$	$y=3x-4,\ l=1$	$y=x-\pi,\ l=4$
21.	$y=\begin{cases}2x+\pi, & -\pi<x<0,\\ -1, & 0\le x<\pi.\end{cases}$	$y=\begin{cases}9, & 0<x<4,\\ 9-x, & 4\le x<8.\end{cases}$	$y=\begin{cases}1, & 0<x<4,\\ x-3, & 4\le x<9.\end{cases}$
22.	$y=\lvert\pi+x\rvert$	$y=2x-9,\ l=5$	$y=\begin{cases}0, & 0<x<7,\\ 4x+1, & 7\le x<8.\end{cases}$
23.	$y=\left\lvert\frac{\pi-x}{3}\right\rvert$	$y=x-1,\ l=2$	$y=\begin{cases}4-x, & 0\le x<1,\\ -1, & 1\le x<\pi.\end{cases}$
24.	$y=\lvert 2(\pi-x)\rvert$	$y=3-x,\ l=2$	$y=\begin{cases}4, & 0<x<5,\\ 4x-7, & 5\le x<6.\end{cases}$
25.	$y=\begin{cases}4-x, & -\pi\le x<0,\\ -1, & 0\le x<\pi.\end{cases}$	$y=2\pi x-3\pi,\ l=2$	$y=6-x,\ l=4$
26.	$y=\lvert x-1\rvert$	$y=x-\pi,\ l=4$	$y=\begin{cases}\pi, & 0<x<2,\\ x-e, & 2\le x<3.\end{cases}$
27.	$y=\left\lvert\frac{3\pi+x}{5}\right\rvert$	$y=\frac{2x-3}{4},\ l=4$	$y=\begin{cases}2, & 0<x<5,\\ x-5, & 5\le x<9.\end{cases}$
28.	$y=\lvert 2\pi-x\rvert$	$y=\begin{cases}4, & 0\le x<2,\\ x-1, & 2\le x<\pi.\end{cases}$	$y=2x,\ l=1$
29.	$y=\lvert 0{,}3(\pi+x)\rvert$	$y=\frac{x}{2},\ l=6$	$y=\begin{cases}-6, & 0<x<3,\\ 6-x, & 3\le x<7.\end{cases}$
30.	$y=\lvert 0{,}2(3\pi-x)\rvert$	$y=\begin{cases}2, & 0<x<5,\\ 3x-7, & 5\le x<6.\end{cases}$	$y=\begin{cases}2, & 0<x<10,\\ -x, & 10\le x<12.\end{cases}$

2. СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Тригонометрические и гиперболические функции

Функция	Аргумент					
	0	**π/6**	**π/4**	**π/3**	**π/2**	**π**
sin u	0	1/2	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1	0
cos u	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	1/2	0	-1
tg u = sin u/ cos u	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$		0
ctg u = cos u/ sin u		$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0	

sin(-u) = – sin u	cos(-u) = cos u	tg (-u) = – tg u	ctg (-u) = – ctg u
sin(π–u) = sin u	sin(π+u) = – sin u	cos(π-u) = – cos u	cos(π+u) = – cos u
sin(π/2–u) = cos u	sin(π/2+u) = cos u	cos(π/2-u) = sin u	sin(3π/2–u) = -cos u
cos(π/2+u)= –sin u	sin(3π/2+u) = -cos u	cos(3π/2-u) = –sin u	cos(3π/2+u) = sin u
$\sin^2 u + \cos^2 u = 1$	$1+tg^2u = 1/\cos^2u$	$1+ctg^2u = 1/\sin^2u$	2sin u cos u = sin2u
$\cos 2u = \cos^2u-\sin^2u = 1-2\sin^2u = 2\cos^2u-1$		$\sin^2u = (1-\cos 2u)/2$	$\cos^2u = (1+\cos 2u)/2$
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$		$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$	
sin α sin β = (cos(α–β)–cos(α+β))/2		$\sin u = 2tg(u/2)/(1+tg^2(u/2))$	
cos α cos β = (cos(α–β)+cos(α+β))/2		$\cos u = (1-tg^2(u/2))/(1+tg^2(u/2))$	
sin α cos β = (sin(α–β)+sin(α+β))/2		arcsin α + arccos α = π/2	
$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$		$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$	
$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\ \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$		$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$	
$\mathrm{ch}\, u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$	$\mathrm{sh}\, u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$	$\mathrm{th}\, u = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}$	$\mathrm{cth}\, u = \frac{e^u + e^{-u}}{e^u - e^{-u}}$
$\mathrm{ch}^2u - \mathrm{sh}^2u = 1$	$\mathrm{sh}2u = 2\mathrm{sh}\,u\,\mathrm{ch}\,u$	$\mathrm{ch}\,0 = 1$	$\mathrm{sh}\,0 = 0$

Таблица эквивалентных бесконечно малых ($\alpha \to 0$)

$\sin\alpha \sim \alpha$	$e^{\alpha}-1 \sim \alpha$	$\ln(1+\alpha) \sim \alpha$
$\mathrm{tg}\,\alpha \sim \alpha$	$b^{\alpha}-1 \sim \alpha \ln b$	$1-\cos\alpha \sim \alpha^2/2$
$\mathrm{arctg}\,\alpha \sim \alpha$	$\arcsin\alpha \sim \alpha$	$\sqrt[m]{1+\alpha}-1 \sim \alpha/m$

Правила и формулы дифференцирования

$c'=0$	$(cu)'=cu'$	$(u\pm v)'=u'\pm v'$	$(u\cdot v)'=u'v+v'u$
$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$	$\left(\dfrac{c}{u}\right)'=-\dfrac{cu'}{u^2}$	$\left(\dfrac{u}{c}\right)'=\dfrac{u'}{c}$	$(\mathrm{tg}u)'=u'/\cos^2 u$
$(u^n)'=n\cdot u^{n-1}u'$	$(a^u)'=a^u\ln a\, u'$	$(\log_a u)'=\dfrac{u'}{u\ln a}$	$(\mathrm{ctg}u)'=-u'/\sin^2 u$
$(e^u)'=e^u u'$	$(\ln u)'=u'/u$	$(\mathrm{arctg}\,u)'=\dfrac{u'}{1+u^2}$	$(\arcsin u)'=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$(\cos u)'=-\sin u\; u'$	$(\sin u)'=\cos u\; u'$	$(\mathrm{arcctg}\,u)'=\dfrac{-u'}{1+u^2}$	$(\arccos u)'=\dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$(\mathrm{sh}\,u)'=\mathrm{ch}\,u\; u'$	$(\mathrm{ch}\,u)'=\mathrm{sh}\,u\; u'$	$(\mathrm{th}\,u)'=u'/\mathrm{ch}^2 u$	$(\mathrm{cth}\,u)'=-u'/\mathrm{sh}^2 u$

Интегрирование. Основные формулы и свойства

$\int(a\cdot f(u)\pm b\cdot g(u))du = a\cdot\int f(u)du \pm b\cdot\int g(u)du$	$\int_a^b f(u)du=F(b)-F(a),\ F'(u)=f(u)$
$\int f(u(x))u'(x)dx=\int f(u)du$	$\int u^n du=u^{n+1}/(n+1)+c,\quad n\neq -1$

$\int u\,dv=u\cdot v-\int v\,du$	$\int e^u du=e^u+c$	$\int\dfrac{du}{u}=\ln\lvert u\rvert+c$

$\int \operatorname{tg} u\, du = -\ln\lvert\cos u\rvert + c$	$\int \operatorname{ctg} u\, du = \ln\lvert\sin u\rvert + c$	
$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$	$\int a^u du = a^u/\ln a + c$, $a>0$, $a\neq 1$	
$\int \sin u\, du = -\cos u + c$	$\int \cos u\, du = \sin u + c$	$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + c$
$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$	$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$	
$\int du/\cos^2 u = \operatorname{tg} u + c$	$\int du/\sin^2 u = -\operatorname{ctg} u + c$	$\int du/\operatorname{ch}^2 u = \operatorname{th} u + c$
$\int \operatorname{sh} u\, du = \operatorname{ch} u + c$	$\int \operatorname{ch} u\, du = \operatorname{sh} u + c$	$\int du/\operatorname{sh}^2 u = -\operatorname{cth} u + c$
$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + c$	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 \pm a}\right\rvert + c$	
$\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left\lvert \operatorname{tg}\frac{u}{2}\right\rvert + c$	$\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left\lvert \operatorname{tg}(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4})\right\rvert + c$	$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{u-a}{u+a}\right\rvert + c$
$\int \frac{du}{u^2 + 1} = \operatorname{arctg} u + c$	$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + c$	
$\int e^{ax}\sin bx\, dx = e^{ax}\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2 + b^2} + c$	$\int e^{ax}\cos bx\, dx = e^{ax}\frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2 + b^2} + c$	

Числовые и степенные ряды

Определение. Пусть дана бесконечная числовая последовательность $\{a_n\}$, сумма вида $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ называется числовым рядом и обозначается

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{1}$$

a_n называется n–м или общим членом ряда.

Определение. Сумма $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ n первых членов ряда называется n–й частичной суммой ряда.

Определение. Если существует конечный предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то ряд называется сходящимся, а число S – суммой ряда. В этом случае пишут $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Определение. Ряд называется расходящимся, если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует (в частности, если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$).

Справедливы следующие теоремы.

1. Отбрасывание от ряда или присоединение к нему любого конечного числа начальных членов не изменит его сходимости или расходимости.

2. Если все члены сходящегося ряда (1) умножить на число α, то получится сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$, а его суммой будет число αS.

3. (Необходимый признак сходимости ряда.) Если ряд (1) сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. (Значит, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд (1) расходится.)

Сходимость рядов с положительными членами

Пусть дан ряд с положительными членами $a_n > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{2}$$

Следующие достаточные признаки позволяют судить о сходимости или расходимости ряда (2).

1. Признак сравнения. Пусть даны ряды (2) и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{3}$$

с положительными членами, причем при всех достаточно больших n $a_n \le b_n$, тогда из сходимости ряда (3) следует сходимость ряда (2), а из расходимости ряда (2) следует расходимость ряда (3).

Сравнение обычно производится с табличными рядами:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} bq^{n-1}$ (геометрическая прогрессия, сходится при $|q| < 1$, расходится при $|q| \ge 1$);

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{A}{n^{\alpha}}$ (сходится при $\alpha > 1$, расходится при $\alpha \le 1$).

2. Предельная форма признака сравнения. Если существует конечный и отличный от нуля предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$, то ряды (2) и (3) сходятся либо расходятся одновременно. (В частности, если при $n\to\infty$ $a_n \sim b_n$, то ряды (2) и (3) сходятся либо расходятся одновременно.)

3. Признак Даламбера. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$, то ряд (2) сходится. Если предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$, то ряд (2) расходится. Если предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$, то вопрос о сходимости ряда (2) остается открытым.

4. Радикальный признак Коши. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}<1$, то ряд (2) сходится. Если предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}>1$, то ряд (2) расходится. Если предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$, то вопрос о сходимости ряда (2) остается открытым.

5. Интегральный признак Коши. Пусть общий член ряда

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n \quad (a_n > 0,\ m \geq 1) \tag{4}$$

представляется в виде $a_n = f(n)$, т. е. в виде функции натурального аргумента n. Если заменить аргумент n на непрерывно изменяющийся аргумент x, то ряд (4) и интеграл $\int\limits_m^{+\infty} f(x)dx$ сходятся и расходятся одновременно при условии, что f(x) – непрерывная, положительная и монотонно убывающая функция при $x \geq m$.

Сходимость знакопеременных рядов

Определение. Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \tag{5}$$

с членами произвольных знаков называется знакопеременным.

Определение. Ряд (5) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|. \tag{6}$$

Определение. Ряд (5) называется условно сходящимся, если он сходится, а ряд (6) расходится.

Определение. Ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}a_n$ или $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n}a_n$ ($a_n > 0$)

(7) называется знакочередующимся.

Признак Лейбница (Достаточный признак сходимости знакочередующихся рядов). Если члены ряда (7) начиная с некоторого монотонно убывают по абсолютной величине и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд (7) сходится.

Действия над рядами

Теорема1. Если сходятся слагаемые ряды, то сходится и суммарный ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm c_n).$$

Теорема 2. Если сходятся перемножаемые ряды, причем хотя бы один абсолютно, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_1 c_n + a_2 c_{n-1} + \ldots + a_n c_1)$.

Определение. Частным от деления ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ на ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ называется такой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, что $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Приближенное вычисление суммы ряда

Для приближенного вычисления суммы S сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ полагают, что $S \approx S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$, пренебрегая остатком $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k)$.

Для знакочередующихся рядов, удовлетворяющих признаку Лейбница, справедлива следующая оценка: $|R_n| \le |c_{n+1}|$.

Для сходящихся знакоположительных рядов, члены которого монотонно убывают начиная с (n + 1)–го, справедливы следующие оценки остатка:

$$R_n \le \int_{n}^{\infty} f(x)dx; \qquad \int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \le R_n \le f(n+1) + \int_{n+1}^{\infty} f(x)dx.$$

Степенные ряды

Определение. Степенным рядом называется функциональный ряд

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \ldots + a_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n, \qquad (8)$$

члены которого есть произведения постоянных $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ на степенные функции с целыми показателями степеней от разности (x - a).

Постоянные a_0, a_1, a_2, a_3, …, a_n, … называются коэффициентами степенного ряда. В частном случае при a = 0 имеют степенной ряд вида

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Основное свойство степенных рядов сформулировано в **теореме Абеля**. Если степенной ряд (8) сходится при x = x_0, то он сходится и притом абсолютно при всяком значении x, удовлетворяющем условию

$$|x-a|<|x_0-a|.$$

Одним из следствий теоремы Абеля является существование для всякого степенного ряда интервала сходимости, симметричного относительно x = a [для ряда (8)]. Обозначим через число R половину длины интервала сходимости – радиус сходимости. Тогда интервал сходимости для ряда (8) запишется в виде

$$|x-a|< R \text{ или } a-R < x < a+R,$$

а при a = 0

$$|x|< R \text{ или } -R < x < R.$$

В частных случаях радиус сходимости ряда R может оказаться равным нулю или бесконечности. Если R = 0, это означает, что область сходимости состоит из одной точки x = a, другими словами, ряд расходится для всех значений x, кроме одного. Если же R = ∞, то ряд сходится на всей числовой оси, т. е. ряд сходится при всех значениях x.

На концах интервала сходимости в точках x = a ± R различные степенные ряды ведут себя по-разному: одни сходятся абсолютно на обоих концах, другие – либо условно сходятся на обоих концах, либо на одном сходятся условно, а на другом расходятся; существуют ряды, которые расходятся на обоих концах.

Для определения интервала и радиуса сходимости степенного ряда можно использовать следующие способы.

1. Если среди коэффициентов ряда a_0, a_1, a_2, a_3, …, a_n, … нет равных нулю, т. е. ряд содержит все целые положительные степени разности x – a, то радиус сходимости находится по формуле

$$R=\lim_{n\to\infty}|a_n/a_{n+1}| \text{ или } R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

при условии, что этот предел, конечный или бесконечный, существует (это условие должно выполняться и для нижеприведенных способов).

2. Если степенной ряд имеет вид

$$a_0+a_1(x-a)^p+a_2(x-a)^{2p}+a_3(x-a)^{3p}+\ldots+a_n(x-a)^{np}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^{np},$$

где p – некоторое определенное целое положительное число, то радиус сходимости данного ряда

$$R=\sqrt[p]{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}.$$

3. Во всех случаях интервал сходимости степенного ряда можно находить, непосредственно применяя известные признаки Даламбера или Коши к ряду, составленному из абсолютных величин членов исходного ряда.

Запишем степенной ряд в виде

$$u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x),$$

используя следующие обозначения: $u_0 = a_0$, $u_n = a_n\,(x-a)^N$, где зависимость N от n может быть любой (в частности, N = p·n) и через a_n обозначен не коэффициент при $(x\text{-}a)^n$, а коэффициент n-го члена ряда. Применяя к ряду, составленному из абсолютных значений членов ряда признак Даламбера или признак Коши, интервал сходимости исходного степенного ряда находим из соответствующих неравенств:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} < 1 \text{ или } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} < 1.$$

Теорема 1. Если ряд (8) сходится на отрезке [a; b], то его можно почленно проинтегрировать на этом отрезке:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_a^b c_n (x-a)^n dx\right] = \int_a^b \left[\sum_{n-1}^{\infty} c_n (x-a)^n\right] dx.$$

Теорема 2. Ряд (8) можно почленно продифференцировать в каждой точке x его интервала сходимости.

Ряд Тейлора

Ряд Тейлора для функции f(x) в окрестности точки x = a (ряд по степеням x-a) имеет вид

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots +$$

$$+ \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Таблица разложений функций в ряд Тейлора

$e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \qquad (\lvert x\rvert < \infty)$
$\sin x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \qquad (\lvert x\rvert < \infty)$
$\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \qquad (\lvert x\rvert < \infty)$
$\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots \qquad (\lvert x\rvert < 1)$
$(1 + x)^m = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)(m-2)...(m-n+1)}{n!} x^n = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \ldots$ $(\lvert x\rvert < 1)$
$\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots, \quad -1 < x \le 1$
$\text{arctg}\, x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots, \quad \lvert x\rvert \le 1$

Ряды Фурье

Определение. Пусть f(x) – кусочно непрерывная периодическая функция с периодом T=2*l*. Рядом Фурье функции f(x) называется ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l} \right), \tag{9}$$

где $a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx,\ a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx,\ b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx,\ n = 1, 2, 3 \ldots. \qquad (10)$

Теорема Дирихле. Если функция f(x) непрерывна или имеет точки разрыва только 1-го рода на [–*l*; *l*] и при этом на [–*l*; *l*] у нее конечное число экстремумов и точек разрыва (условия Дирихле), то ряд Фурье этой функции сходится для любых x из [–*l*; *l*]. Сумма этого ряда S(x) равна:

1) f(x) в точках непрерывности из (–*l*; *l*);

2) среднему арифметическому пределов функции f(x) слева и справа в каждой

точке x_0 разрыва функции, т. е. $S(x_0) = 0{,}5[f(x_0-0)+ f(x_0+0)]$;
3) $S(x) = 0{,}5[f(l-0)+ f(-l+0)]$ при $x = -l$ и $x = l$.

Если функция f(x) четная, т. е. $f(-x) = f(x)$, то все $b_n = 0$, ряд Фурье имеет вид

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l}, \tag{11}$$

где $$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx, \quad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx, \quad n=1,\,2,\,3\,... \tag{12}$$

Если функция f(x) нечетная, т. е. $f(-x) = -f(x)$, то ее рядом Фурье является ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{l}, \tag{13}$$

где $$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx, \quad n=1,\,2,\,3\,... \tag{14}$$

3. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача № 1. Найти суммы числовых рядов

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}; \quad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{4^{n/2}}.$$

а) Разложим общий член ряда на простейшие дроби:

$$\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right).$$

Запишем сумму n первых слагаемых ряда $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ =

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{13}\right)+\ldots+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-7}-\frac{1}{4n-3}\right)+$$

$$+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\frac{1}{4n+1}.$$

Отсюда $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\frac{1}{4n+1}\right)=\frac{1}{4}.$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10}{4^{n/2}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5}{2^{n-1}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ – убывающая геометрическая прогрессия с $q=\frac{1}{2}<1$ и $a_1 = 5$, тогда $S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{5}{1-0{,}5}=10.$

Задача № 2. Используя признак сравнения, исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos(\pi/n)|}{5n^3+2n^2-2} \quad .$$

Сравним исследуемый ряд с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n^3}$ (он сходится, т. к. степень $\alpha = 3>1$).

Очевидно, справедливо неравенство $\frac{|\cos(\pi/n)|}{5n^3+2n^2-2} \le \frac{1}{5n^3}$. Значит, согласно признаку сравнения, исследуемый ряд тоже сходится.

Задача № 3. Используя предельную форму признака сравнения, исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{3n-1}{5n^3}$ на сходимость.

Сравним данный ряд со сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Предел отношения их общих членов $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\arcsin\left((3n-1)/5n^3\right)}{1/n^2} = \frac{3}{5} \ne 0$, что означает сходимость исследуемого ряда.

Задача № 4. Используя признак Даламбера, исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-2)!}{(4n)!}.$$

Вычисляем предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(3n+1)!/(4n+4)!}{(3n-2)!/(4n)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(3n+1)3n(3n-1)}{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)} = 0.$$

Результат меньше единицы, это говорит о сходимости ряда.

Задача № 5. Используя радикальный признак Коши, исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{n^2}}{n^{n-1}+2n-1}$.

Так как предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{e^{n^2}}{n^{n-1}+2n-1}} = +\infty > 1$, ряд расходится.

Задача № 6. Используя интегральный признак Коши, исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{-n}}{e^{-2n}+4}$.

Если заменить аргумент n на непрерывно изменяющийся аргумент x, то ряд и интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\dfrac{e^{-x}}{e^{-2x}+4}dx$ сходятся и расходятся одновременно, т. к. подынтегральная функция непрерывна, положительна и монотонно убывает при $x \geq 1$:

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{e^{-x}}{e^{-2x}+4}dx=-\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{de^{-x}}{(e^{-x})^2+4}=\frac{-1}{2}\operatorname{arctg}\frac{e^{-x}}{2}\Bigg|_1^{+\infty}=\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2e}\right).$$

В результате вычисления несобственного интеграла получено, что его значение конечно, это говорит о сходимости интеграла, а следовательно, и ряда.

Задача № 7. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{3n^2+n-2}.$$

Легко проверить, что оба условия теоремы Лейбница выполняются для рассматриваемого ряда: члены ряда начиная с первого монотонно убывают по абсолютной величине, т. е. $\frac{1}{2}>\frac{2}{12}>\frac{3}{28}>\ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{3n^2+n-2} = 0$, что говорит о сходимости исследуемого ряда.

Если записать знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3n^2+n-2}$ соответствующим данному, то, согласно признаку сравнения, этот ряд будет расходящимся, т. к. $\dfrac{n}{3n^2+n-2}>\dfrac{1}{4n}$ (как известно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n}$ – расходящийся).

Отсюда можно сделать вывод об условной сходимости знакочередующегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{3n^2+n-2}.$$

Задача № 8. Дан степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{3n-2}$. Найти область его сходимости и интервал сходимости.

Пусть R – радиус сходимости ряда. Он может быть вычислен по формуле

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|a_n/a_{n+1}\right|. \text{ Отсюда } R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1/(3n-2)}{1/(3n+1)}\right|=1.$$

Интервал сходимости находится с помощью неравенства $|x-a|<R$; подставляя a = 1 и R = 1, находим $|x-1|<1$. Получается, что $0<x<2$.

Остается выяснить, сходится или расходится ряд в граничных точках интервала сходимости. Для этого в рассматриваемый ряд подставляются x = 0, а затем x = 2 и соответствующие числовые ряды исследуются на сходимость.

При x = 0 получится знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n-2}$. Оба условия теоремы Лейбница выполняются для него: члены ряда монотонно убывают по абсолютной величине, т. е. $\frac{1}{1}>\frac{1}{4}>\frac{1}{7}>\ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3n-2}=0$, что говорит о сходимости исследуемого ряда.

При x = 2 получится знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-2}$. Он расходящийся, согласно признаку сравнения, т. к. $\frac{1}{3n-2}>\frac{1}{4n}$ $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n}-\text{расходящийся}\right)$. Следовательно, уточненный интервал сходимости имеет вид $0\le x<2$.

Задача № 9. Используя дифференцирование и интегрирование степенных рядов, найти сумму и указать область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x^2-3)^{n-1}$.

Пусть $z = x^2 - 3$, тогда получается ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\,z^{n-1}$. Легко видеть (применяя методы предыдущей задачи № 8), что он сходится для всех z: $|z|<1$. Обозначив сумму нового ряда S(z), проинтегрируем равенство $S(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\,z^{n-1}$ на отрезке [0, z], используя таблицу разложений в ряд Тейлора, а затем продифференцируем получившееся равенство:

$$\int_0^z S(z)dz=\sum_{n=1}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z}-1;\quad S(z)=\left(\frac{1}{1-z}-1\right)'=\frac{1}{(1-z)^2}.$$

Подставив $z = x^2–3$ в последнее равенство, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(x^2-3)^{n-1}=\frac{1}{(x^2-4)^2}.$$

Это разложение имеет силу, если $\left|x^2-3\right|<1$, т. е. $2 < x^2 < 4$, а, значит, область сходимости исследуемого ряда является объединением двух интервалов:

$$-2 < x < \sqrt{2} \text{ и } \sqrt{2} < x < 2.$$

Задача № 10. Используя табличные разложения, составить ряд Тейлора для функции $y=\cos\left(\frac{\pi(x-1)}{4}\right)$ по степеням $x-4$.

Используя формулу $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$, преобразуем функцию следующим образом: $y=\cos\left(\frac{\pi(x-4+4-1)}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi(x-4)}{4}+\frac{3\pi}{4}\right)=$

$$=\cos\frac{\pi(x-4)}{4}\cos\frac{3\pi}{4}-\sin\frac{\pi(x-4)}{4}\sin\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\frac{\pi(x-4)}{4}+\sin\frac{\pi(x-4)}{4}\right].$$

Применяя таблицу разложений функций в ряд Тейлора, получаем

$$y=\cos\left(\frac{\pi(x-1)}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi^{2n}(x-4)^{2n}}{4^{2n}(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi^{2n+1}(x-4)^{2n+1}}{4^{2n+1}(2n+1)!}\right]=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{2}\pi^{2n}(x-4)^{2n}}{2\cdot4^{2n}(2n)!}\left(1+\frac{\pi(x-4)}{4(2n+1)}\right).$$

Задача № 11. Вычислить интеграл $\int_0^{0,1}\frac{e^{-x}+x-1}{x^2}dx$ с точностью 0,0001.

Используя таблицу разложений в ряд Тейлора, получаем

$$e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\dots$$

Этот ряд является знакочередующимся и сходится для любого x. Отсюда после вычитания из обеих частей равенства по $1-x$ следует, что

$$e^{-x}-1+x=\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\dots$$

Разделим это равенство на x^2: $\frac{e^{-x}+x-1}{x^2}=\frac{1}{2!}-\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{4!}-\dots$

Данный ряд также является знакочередующимся и сходится для любого x. Отсюда следует, что его можно почленно проинтегрировать на отрезке [0; 0,1]:

$$\int_0^{0,1}\frac{e^{-x}+x-1}{x^2}dx=\int_0^{0,1}\left[\frac{1}{2!}-\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{4!}-\dots\right]dx=\left[\frac{x}{2!}-\frac{x^2}{2\cdot3!}+\frac{x^3}{3\cdot4!}-\dots\right]\Bigg|_0^{0,1}=$$

$$=\frac{0,1}{2!}-\frac{0,1^2}{2\cdot3!}+\frac{0,1^3}{3\cdot4!}-\dots\approx0,05-0,000\,83=0,499\,17\approx0,4992.$$

После почленного интегрирования вновь получился знакочередующийся сходящийся ряд. Для приближенного вычисления суммы S сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ полагают, что $S \approx S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$, пренебрегая остатком $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f(k)$.

Для знакочередующихся рядов, удовлетворяющих признаку Лейбница, справедлива следующая оценка: $|R_n| \le |c_{n+1}|$.

Третье слагаемое суммы $\frac{0{,}1}{2!} - \frac{0{,}1^2}{2 \cdot 3!} + \frac{0{,}1^3}{3 \cdot 4!} - ...$, т. е. $\frac{0{,}1^3}{3 \cdot 4!}$ меньше 0,0001, поэтому для нахождения приближенного значения интеграла с заданной точностью достаточно вычислить сумму первых двух слагаемых.

Задача № 12. Найти первые 4 – 5 отличных от нуля членов в разложении функции y(x) в ряд Тейлора по степеням (x – a), если $y' = 2x^4 y,\ y(1) = \pi$.

Ряд Тейлора для функции f(x) в окрестности точки x = a (по степеням x – a) имеет вид $f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots +$

$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n .$$

Отсюда $a = 1,\ y(1) = \pi,\ y'(1) = 2x^4 y\big|_{x=1} = 2 \cdot 1^2 \cdot \pi = 2\pi$,

$$y''(1) = (2x^4 y)'\big|_{x=1} = (8x^3 y + 2x^4 y')\big|_{x=1} = 8 \cdot 1^3 \cdot \pi + 2 \cdot 1^4 \cdot 2\pi = 12\pi,$$

$$y'''(1) = (8x^3 y + 2x^4 y')'\big|_{x=1} = (24x^2 y + 16x^3 y' + 2x^4 y'')\big|_{x=1} = 24\pi + 32\pi + 24\pi = 80\pi.$$

Таким образом, искомый ряд Тейлора для y(x) в окрестности точки x = 1 имеет вид $y(x) = \pi + \frac{2\pi}{1!}(x-1) + \frac{12\pi}{2!}(x-1)^2 + \frac{80\pi}{3!}(x-1)^3 + \ldots$

Задача № 13. Разложить функцию $y = \begin{cases} \pi, & -\pi < x < 0, \\ \pi - x, & 0 \le x < \pi; \end{cases}$

с периодом 2π в тригонометрический ряд Фурье (рис. 1).

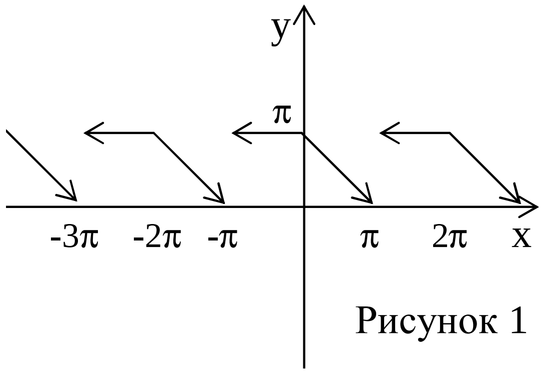

Рисунок 1

Данная функция y удовлетворяет всем условиям теоремы Дирихле и поэтому может быть разложена в ряд Фурье. Используя выражение (10), где $l = \pi$, получаем коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \pi dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\pi - x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \pi dx - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x dx = \frac{3\pi}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \pi\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\pi - x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \pi\cos nx\,dx -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx = \left.\frac{\sin nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_{0}^{\pi} = \frac{(-1)^{n+1}+1}{\pi n^2};$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \pi\sin nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\pi - x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \pi\sin nx\,dx -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx dx = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{-x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right]_{0}^{\pi} = \frac{(-1)^n}{n}, \quad n = 1, 2, 3...$$

После подстановки этих коэффициентов в (9) получим искомый ряд:

$$\frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}+1}{\pi n^2}\cos nx + \frac{(-1)^n}{n}\sin nx\right]$$

Так как функция y удовлетворяет условиям Дирихле, сумма полученного ряда равна значению функции в любой точке ее непрерывности. В точках разрыва сумма равна $\pi/2$. На рисунке 2 показан график суммы ряда.

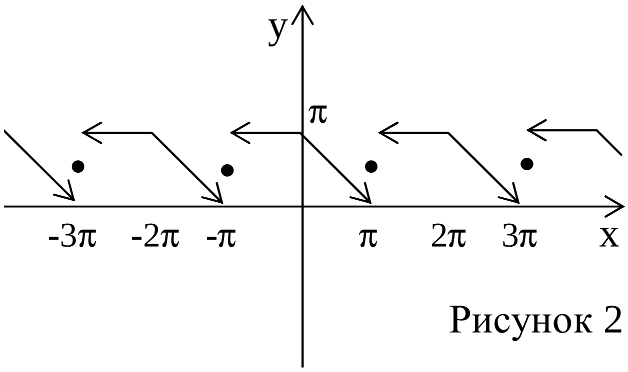

Рисунок 2

Задача № 14. Разложить функцию $y = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 2 - x, & 1 \le x < 2, \end{cases}$ заданную на интервале]0; 2[, в тригонометрический ряд Фурье по косинусам (рис. 3).

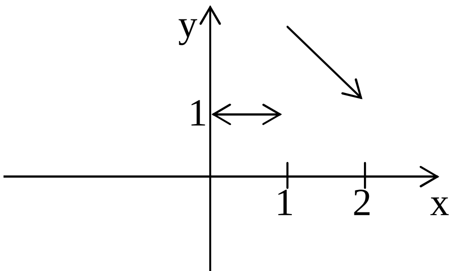

Рисунок 3

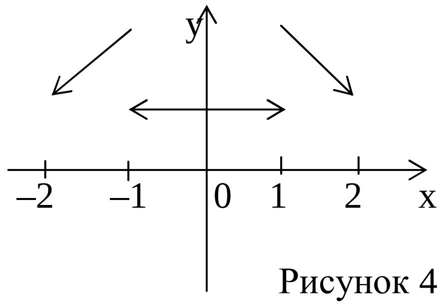

Рисунок 4

Доопределяя функцию y на интервале]–2; 0[четным образом (рис. 4), эту вспомогательную функцию продолжим периодически на всю числовую прямую с периодом T = 4 (рис. 5), получим l = 2. Тогда, используя формулы (11), (12), находим

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx = \int_0^1 dx + \int_1^2 (2 - x)dx = \frac{3}{2};$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx = \int_0^1 \cos\frac{\pi n x}{2}dx + \int_1^2 (2 - x)\cos\frac{\pi n x}{2}dx = \left.\frac{2\sin\frac{\pi n x}{2}}{\pi n}\right|_0^1 +$$

$$+ \left.\frac{2(2 - x)\sin\frac{\pi n x}{2}}{\pi n}\right|_1^2 - \left.\frac{4\cos\frac{\pi n x}{2}}{\pi^2 n^2}\right|_1^2 = 4\frac{\cos\frac{\pi n}{2} + (-1)^{n+1}}{\pi^2 n^2}, \qquad n = 1, 2, 3...$$

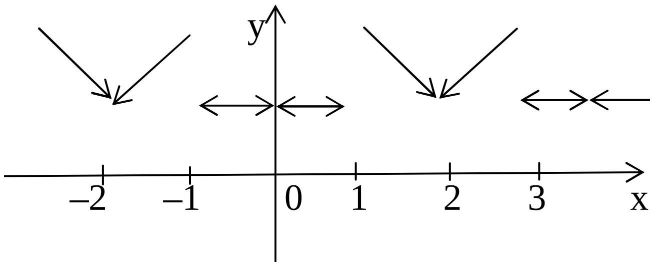

Рисунок 5

После подстановки этих коэффициентов в (10) получим искомый ряд:

$$\frac{3}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{\cos\frac{\pi n}{2} + (-1)^{n+1}}{\pi^2 n^2}\cos\frac{\pi n x}{2}.$$

На интервале]0; 2[сумма полученного ряда равна значению функции. На рисунке 6 показан график суммы ряда.

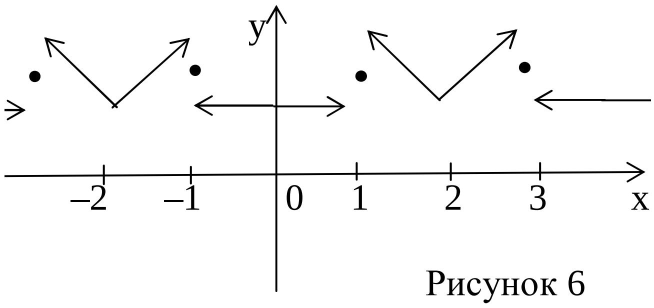

Рисунок 6

Задача № 15. Разложить функцию $y=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 2-x, & 1\le x<2,\end{cases}$ заданную на интервале]0; 2[, в тригонометрический ряд Фурье по синусам (рис. 3).

Доопределим функцию y на интервале]–2; 0[нечетным образом (рис. 7), а затем продолжим периодически на всю числовую прямую с периодом T = 4.

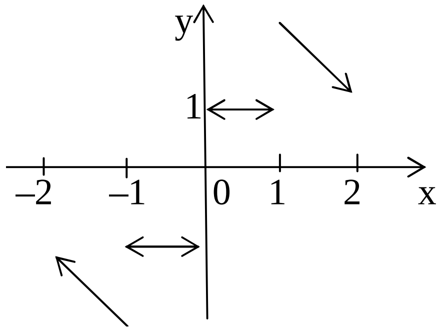

Рисунок 7

Найдем коэффициенты Фурье по формуле (14) при $l = 2$:

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx=\int_0^1\sin\frac{\pi nx}{2}dx+\int_1^2(2-x)\sin\frac{\pi nx}{2}dx=\left.\frac{-2\cos\frac{\pi nx}{2}}{\pi n}\right|_0^1+$$

$$+\left.\frac{-2(2-x)\cos\frac{\pi nx}{2}}{\pi n}\right|_1^2-\left.\frac{4\sin\frac{\pi nx}{2}}{\pi^2n^2}\right|_1^2=2\cdot\frac{1-\cos\frac{\pi n}{2}}{\pi n}+2\cdot\frac{\cos\frac{\pi n}{2}}{\pi n}+\frac{4\sin\frac{\pi n}{2}}{\pi^2n^2}=$$

$$=\frac{2\pi n+4\sin\frac{\pi n}{2}}{\pi^2n^2},\qquad n=1,\,2,\,3...$$

После подстановки этих коэффициентов в (13) получим искомый ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi n + 4\sin\frac{\pi n}{2}}{\pi^2 n^2} \sin\frac{\pi n x}{2}.$$

На интервале]0; 2[сумма этого ряда равна значению функции. На рисунке 8 показан график суммы ряда.

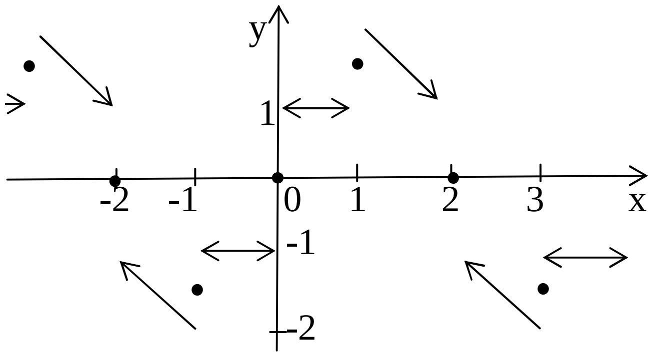

Рисунок 8

Библиографический список

1. Шмелев П. А. Теория рядов в задачах и упражнениях. – М.: Высш. школа, 1982. – 178 с.

2. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. – М.: Наука, 1978. – 563 с.

3. Бугров Я. С., Никольский С. М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1980. – 467 с.

4. Колобов А. М. Избранные главы высшей математики. Ч. 1. Ряд Фурье. Интеграл Фурье. Операционное исчисление. – Минск: Высш. школа, 1985. – 220 с.

5. Ефимов А. В. Математический анализ (специальные разделы). Ч. 1. Общие функциональные ряды и их приложения. – М. : Высш. школа, 1980. – 279 с.

6. Ряды и их приложения: Метод. указания / Сост.: Г. А. Кузик, Э. Г. Кучеренко. – Омск: Изд. ОмПИ, 1992. – 36 с.

Содержание

Редактор Г. М. Кляут
Сводный темплан 2005 г.
ИД 06039 от 12.10.01
Подписано в печать 18.02.05 . Формат 60х84 1/16. Бумага офсетная.
Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ. л. 2,0. Уч.–изд. л. 2,0.
Тираж 500 экз. Заказ

Издательство ОмГТУ. 644050, Омск, пр-т Мира, 11
Типография ОмГТУ