Министерство образования РФ

Омский государственный технический университет

Кратные и криволинейные интегралы

Методические указания и контрольные задания
для студентов – заочников ОмГТУ

Омск - 2001

Составители: Цветков Виктор Александрович
Цветкова Валентина Дмитриевна

Методические указания содержат теоретические сведения, примеры с решениями, а также типовые расчеты для самостоятельной работы студентов-заочников ОмГТУ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА НА МНОЖЕСТВЕ ω И ЕГО СВОЙСТВА

Пусть задано множество ω, элементы этого множества обозначим M. Пусть в каждой точке M множества ω определена функция $U=f(M)$. Проделаем следующие операции:

1)разбиваем множество ω произвольным образом на n подмножеств величиной $\Delta\omega_1, \Delta\omega_2,\ldots, \Delta\omega_n$; обозначим наибольший диаметр этих подмножеств через λ: $\lambda = max\ diam\ \Delta\omega_i$ – ранг дробления;

2)на каждом из n подмножеств выберем произвольным образом по точке M_i и вычислим значение функции в них $U_i=f(M_i)$;

3)составим интегральную сумму $\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\omega_i$;

4)устремляя ранг дробления λ к нулю, найдем предел интегральных сумм:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\omega_i$$

Определение. Интегралом функции $U=f(M_i)$ на множестве ω называется предел последовательности интегральных сумм, когда ранг дробления λ стремится к нулю, и обозначается

$$\int_{\omega} f(M)d\omega = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\omega_i \qquad (1)$$

Определение. Функция $U=f(M_i)$, для которой существует интеграл (1), называется интегрируемой на множестве ω.

Теорема. Достаточным условием интегрируемости функции является ее непрерывность.

Основные свойства интеграла.

1. $\int_{\omega} Kf(M)d\omega = K\int_{\omega} f(M)d\omega$, где $K=const.$

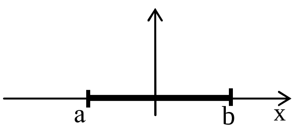
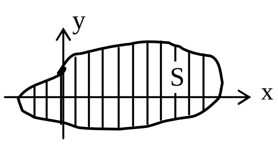
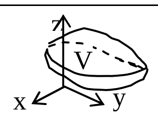
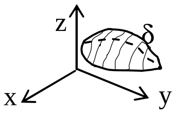
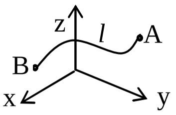
2. $\int\limits_{\omega}\left(f_1(M)+f_2(M)\right)d\omega=\int\limits_{\omega}f_1(M)d\omega+\int\limits_{\omega}f_2(M)d\omega$

3. если $\omega=\omega_1+\omega_2$, то $\int\limits_{\omega}f(M)d\omega=\int\limits_{\omega_1}f(M)d\omega+\int\limits_{\omega_2}f(M)d\omega$

4. $\left|\int\limits_{\omega}f(M)d\omega\right|\le\int\limits_{\omega}\left|f(M)\right|d\omega$

5. $\int\limits_{\omega}f(M)d\omega=f(\overline{M})|\omega|$, где $x=\sqrt{y^2-1}$ - некоторая определенная точка множества ω , а $|\omega|$ - величина ω (площадь, длина и т.д.)

Элемент M множества ω геометрически изображается точкой с соответствующими координатами. Потому в зависимости от вида множества интегрирования ω, интегралы делятся на несколько классов, приведенных ниже в таблице:

№	ω	dω	$\int\limits_{\omega}f(M)d\omega$	название
1		dx	$\int\limits_a^b f(x)dx$	определенный
2		dS	$\iint\limits_S f(x;y)dxdy$	двойной
3		dV	$\iiint\limits_V f(x;y;z)dxdydz$	тройной
4		$d\delta$	$\iint\limits_S(x+y)dxdy=\int\limits_{-2}^{0}dx\int\limits_{x^2+1}^{5}(x+y)dy=$	поверхностный (1-го рода)
5		dl	$\int\limits_l f(x;y;z)dl$	криволинейный (1-го рода)

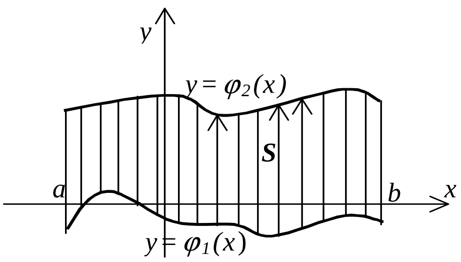
ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

Множество интегрирования ω изображается множеством точек плоскости $(x;y)$, будем его обозначать S; подынтегральная функция является функцией двух аргументов $U=f(M)=f(x;y)$; $d\omega=dS$ – дифференциал площади (элемент площади); в декартовой системе координат $dS=dxdy$. По определению (1)

$$\int_{\omega} f(M)d\omega = \iint_{S} f(x;y)dxdy$$

При вычислении двойной интеграл заменяется повторным интегралом (интеграл от интеграла) по правилу:

пусть область интегрирования S есть часть плоскости $(x;y)$, ограничена линиями: $x=a$, $x=b$, $(a<b)$ $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$, $(\varphi_1(x)\le\varphi_2(x),\ \forall x\in[a;b])$, тогда



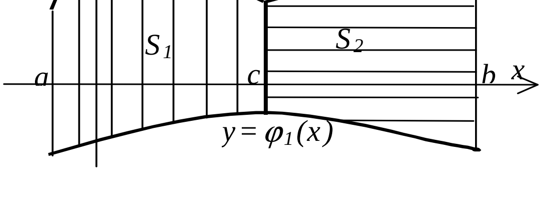
область 1-го типа

$$\iint_{S} f(x;y)dxdy = \int_{a}^{b}\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)dy\right)dx$$

Для удобства формулу записывают иначе

$$\iint_{S} f(x;y)dxdy = \int_{a}^{b}dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)dy \qquad (2)$$

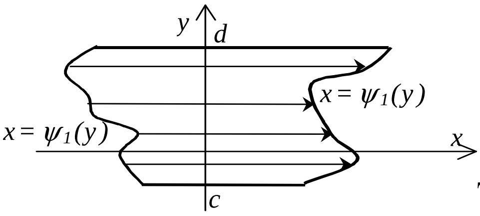
Здесь интеграл по x называется внешним интегралом, интеграл по y – внутренним. При вычислении внутреннего интеграла аргумент x считается постоянным. Если область S сверху (или снизу) ограничена двумя линиями, то прямой $x=c$, проведенной через точку их пересечения перпендикулярно оси Ox, область разбивается на две области первого типа, и интеграл заменяется суммой интегралов на основании свойства интегралов:



$$\iint_{S} f(x;y)dxdy = \iint_{S_1} f(x;y)dxdy + \iint_{S_2} f(x;y)dxdy =$$

$$= \int_{a}^{c}dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_1(x)} f(x;y)dxdy + \int_{c}^{b}dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_3(x)} f(x;y)dxdy$$

Пусть область интегрирования S ограничена линиями: $y=c$, $y=d$, $(c<d)$, $x=\psi_1(y)$, $x=\psi_2(y)$, $(\psi_1(y)\le\psi_2(y),\ \forall y\in[c;d])$.



область 2-го типа

Тогда

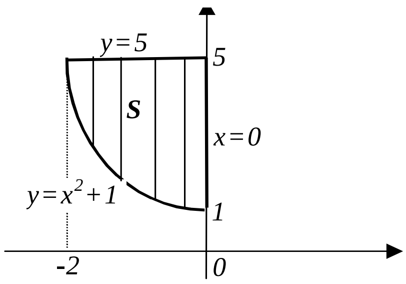
$$\iint\limits_S f(x;y)dxdy=\int\limits_c^d\left(\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x;y)dx\right)dy$$

Для удобства формулу записывают в виде

$$\iint\limits_S f(x;y)dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x;y)dx \qquad (3)$$

Выбрать порядок интегрирования для вычисления двойного интеграла - это значит выбрать одну из двух формул (2) или (3).

Пример. Вычислить $\iint\limits_S (x+y)dxdy$, где S ограничена линиями $y=x^2+1;\ y=5;\ x=0,\ (x>0)$. S – область 1-го типа, потому вычисляем по (2).



$$\iint\limits_S (x+y)dxdy=\int\limits_{-2}^{0}dx\int\limits_{x^2+1}^{5}(x+y)dy=$$

Вычисляем внутренний интеграл; x=const. $\int\limits_{x^2+1}^{5}(x+y)dy=$

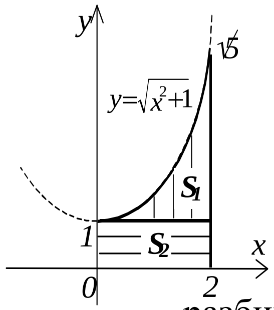
$$=\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x^2+1}^{5}=\left(x5+\frac{25}{2}\right)-\left(x\left(x^2+1\right)+\frac{\left(x^2+1\right)^2}{2}\right)=12+4x-x^2-x^3-\frac{x^4}{2}=$$

$$=\int\limits_{-2}^{0}\left(12+4x-x^2-x^3-\frac{x^4}{2}\right)dx=\left(12x+2x^2-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{10}\right)\Bigg|_{-2}^{0}=$$

$$(0)-(12(-2)+2(-2)^2-\frac{(-2)^3}{3}-\frac{(-2)^4}{4}-\frac{(-2)^5}{10})=\frac{212}{15};$$

Пример. Изменить порядок интегрирования в интеграле $\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{\sqrt{1+x^2}} f(x;y)dy$

По заданным четырем пределам интегрирования записываем уравнение четырех линий, ограничивающих область интегрирования *S; x=0; x=2; y=0;* $y=\sqrt{1+x^2}$. Строим эти линии



Разрешаем уравнение дуги гиперболы $y=\sqrt{1+x^2}$ относительно абсциссы $x=\sqrt{y^2-1}$. Область интегрирования *S* не принадлежит к 2-му типу, т.к. слева ограничена двумя различными линиями *x=0* и $x=\sqrt{y^2-1}$. Поэтому прямой *y=1* разбиваем ее на две области 2-го типа: S_1 и S_2. Тогда по (3)

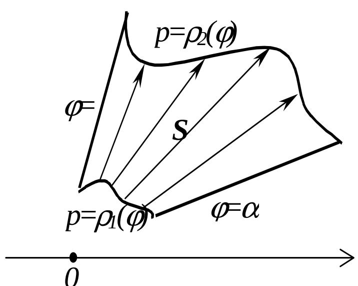
$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{1+x^2}} f(x;y)dy = \iint_S f(x;y)dxdy = \iint_{S_1} f(x;y)dxdy + \iint_{S_2} f(x;y)dxdy =$$

$$= \int_0^1 dy \int_0^2 f(x;y)dx + \int_1^{\sqrt{5}} dy \int_{\sqrt{y^2-1}}^2 f(x;y)dx$$

Пределы интегрирования в повторном интеграле определяются уравнениями границ области интегрирования *S*. Потому, как правило, чем проще уравнения границ, тем проще вычисления интегралов. В разных системах координат уравнение одной и той же линии имеют различный вид.

Например: окружность с центром в начале координат и радиусом *R* в декартовой системе координат задается уравнением $x^2+y^2+R^2$, а в полярной системе координат $\rho{=}R$.

Если область интегрирования *S* ограничена линиями, заданными в полярной системе координат $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$, $\rho=\rho_1(\varphi)$, $\rho=\rho_2(\varphi)$, то пределы интегрирования расставляются по правилу



$$\iint_S \Phi(\rho;\varphi)d\rho d\varphi = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \Phi(\rho;\varphi)d\rho \qquad (4)$$

При вычислении двойного интеграла удобно, чаще всего, переходить к полярным координатам, если область интегрирования ограничена окружностью. Для перехода к полярным координатам необходимо:

1)записать уравнения границ в полярной системе координат, найти координаты точек их пересечения;

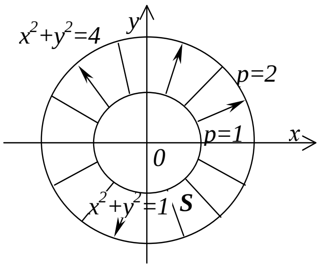
2)в подынтегральной функции декартовы координаты x и y заменить полярными по формулам $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$;

3)элемент площади в декартовых координатах заменить по формуле $dS=dxdy=\rho d\rho d\varphi$;

4)расставить пределы интегрирования по (4).

$$\iint_S f(x;y)dxdy = \iint_S f(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi \qquad (5)$$

Пример. Вычислить, перейдя к полярным координатам интеграл $\iint_S \sqrt{4-x^2-y^2}dxdy$, где область интегрирования S: $1\le x^2+y^2\le 4$.



1. Уравнения границ $x^2+y^2=1$ и $x^2+y^2=4$. В полярной системе координат: $(\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2=1$ и $(\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2=4$, или $\rho=1$ и $\rho=2$; $0\le\varphi\le 2\pi$

2. $f(x;y)=\sqrt{4-x^2-y^2}=\sqrt{4-(\rho\cos\varphi)^2-(\rho\sin\varphi)^2}=\sqrt{4-\rho^2}$

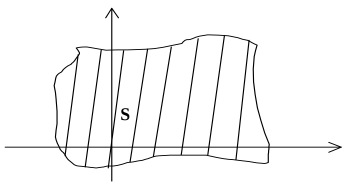
$$\iint_S \sqrt{4-x^2-y^2}dxdy = \iint_S \sqrt{4-\rho^2}\rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 \sqrt{4-\rho^2}\rho d\rho =$$

Вычисляем внутренний интеграл $\int_1^2 \sqrt{4-\rho^2}\rho d\rho =$	$t=4-\rho^2$; $dt=-2\rho d\rho$; $\rho d\rho=-0.5dt$ $\rho=1 \Rightarrow t=3$ $\rho=2 \Rightarrow t=0$	

$$=\int_3^0 \sqrt{t}\left(-\frac{1}{2}\right)dt = -\frac{1}{2}\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_3^0 = \sqrt{3} \;=\; = \int_0^{2\pi}\sqrt{3}d\varphi = 2\pi\sqrt{3}$$

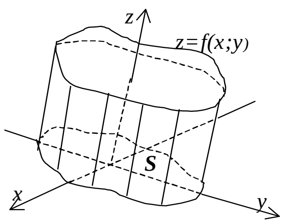
Приложения двойного интеграла.

1. Площадь плоской фигуры



$$S = \iint\limits_S dxdy \qquad (6)$$

2. Объем цилиндрического тела, снизу ограниченного частью S плоскости (xy),



сверху – поверхностью $z=f(x;y)$, а с боков цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Oz:

$$V = \iint\limits_S f(x;y)dxdy \qquad (7)$$

3. Масса плоской пластинки, занимающей область S и плотность которой задается функцией $\mu=\mu(x,y)$:

$$m = \iint\limits_S \mu(x;y)dxdy \qquad (8)$$

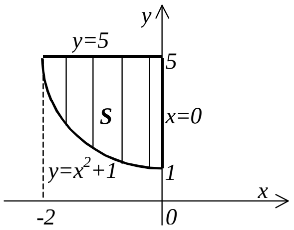
4. Координаты центра тяжести плоской пластины $C(x_c;y_c)$

$$x_c = \frac{\iint\limits_S x\mu(x;y)dxdy}{\iint\limits_S \mu(x;y)dxdy}; \qquad y_c = \frac{\iint\limits_S y\mu(x;y)dxdy}{\iint\limits_S \mu(x;y)dxdy} \qquad (9)$$

5. Момент инерции плоской пластины относительно координатных осей

$$I_{ox} = \iint\limits_S y^2\mu(x;y)dxdy; \qquad I_{oy} = \iint\limits_S x^2\mu(x;y)dxdy \qquad (10)$$

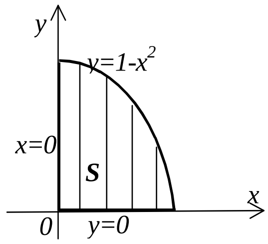
Пример. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями: $x=0$, $y=5$, $y=x^2+1$.



$$S=\iint_S dxdy=\int_{-2}^{0}dx\int_{x^2+1}^{5}dy=\left|\int_{x^2+1}^{5}dy=y\Big|_{x^2+1}^{5}=5-\left(x^2+1\right)=4-x^2\right|=$$

$$=\int_{-2}^{0}\left(4-x^2\right)dx=\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{0}=0-\left(4(-2)-\frac{(-2)^3}{3}\right)=\frac{16}{3};$$

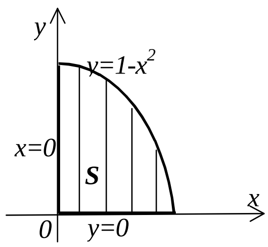
Пример. Вычислить массу плоской пластины ограниченной линиями $x=0$, $y=0$, $y=1-x^2$, если ее плотность в каждой точке равна абсциссе этой точки, $\mu=x$;



$$m=\iint_S xdxdy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x^2}xdy=\left[\int_0^{1-x^2}xdy=xy\Big|_0^{1-x^2}=x\left(1-x^2\right)=x-x^3\right]=$$

$$=\int_0^1\left(x-x^3\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4};$$

Пример. Вычислить координаты центра тяжести однородной пластинки, ограниченной линиями $x=0, y=0, y=1-x^2, \mu=const.$



$$\iint_S \mu dxdy=\mu\int_0^1 dx\int_0^{1-x^2}dy=\left|\int_0^{1-x^2}dy=y\Big|_0^{1-x^2}=1-x^2\right|=\mu\int_0^1\left(1-x^2\right)dx=\mu\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}\mu;$$

$$\iint_S x\mu dxdy=\mu\int_0^1 dx\int_0^{1-x^2}xdy=\left|\int_0^{1-x^2}xdy=xy\Big|_0^{1-x^2}=x\left(1-x^2\right)\right|=\mu\int_0^1(x-x^3)dx=\mu\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{4}\mu;$$

$$\iint_S \mu dxdy=\mu\int_0^1 dx\int_0^{1-x^2}ydy=\left[\int_0^{1-x^2}ydy=\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{1-x^2}=\frac{\left(1-x^2\right)^2}{2}=\frac{1}{2}-x^2+\frac{x^4}{2}\right]=\mu\int_0^1\left(\frac{1}{2}-x^2+\frac{x^4}{2}\right)dx=\mu\left(\frac{1}{2}x-x^2+\frac{x^5}{10}\right)\Bigg|_0^1=\frac{4}{15}\mu;$$

$$x_C=\frac{\iint_S x\mu(x;y)dxdy}{\iint_S \mu(x;y)dxdy}=\frac{\frac{1}{4}\mu}{\frac{2}{3}\mu}=\frac{3}{8}; \qquad y_C=\frac{\iint_S y\mu(x;y)dxdy}{\iint_S \mu(x;y)dxdy}=\frac{\frac{4}{15}\mu}{\frac{2}{3}\mu}=\frac{2}{5};$$

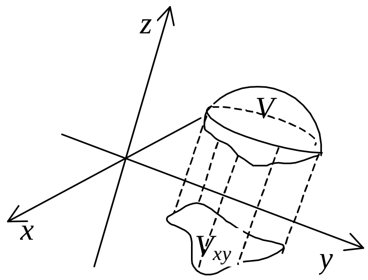
$C\left(\frac{3}{8};\frac{2}{5}\right)$.

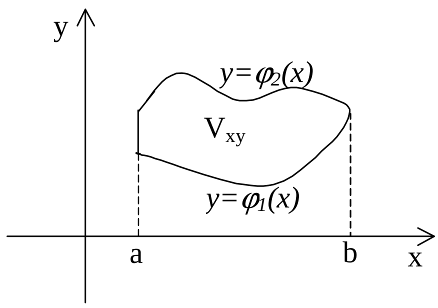
ТРОЙНОЙ ИНТЕРГРАЛ

Пусть в ограниченной замкнутой пространственной области V задана непрерывная функция $f(x;y;z)$. Тогда тройной интеграл от этой функции определяется как

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\gamma_i,\zeta_i)\Delta V_i \qquad (11)$$

Пусть область V снизу ограниченна поверхностью $z=\psi_1(x;y)$, а сверху – поверхностью $z=\psi_2(x;y)$, причем $\psi_1(x;y)\le\psi_2(x;y)$. Проекция V_{xy} области V на плоскость xOy ограничена линиями: $x=a$, $x=b$, $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$, где $a>b$ $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$ $\forall x\in[a, b]$.





Тогда тройной интеграл вычисляется по формуле

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dy\right)dx \qquad (12)$$

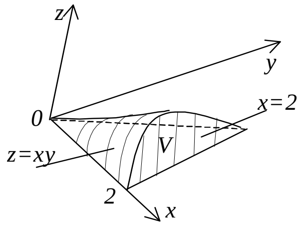
Элемент объема dV в декартовой системе координат равен произведению дифференциалов декартовых координат $dV=dxdydz$. Формула (12) обычно записывается в виде

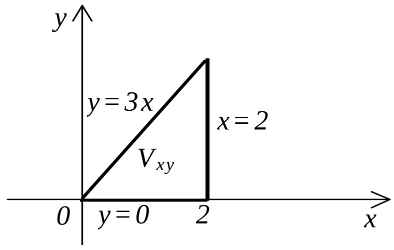
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \qquad (13)$$

При вычислении интеграла по одной из переменных все другие считаются постоянными

Пример. Вычислить $\iiint\limits_V x^2 zdxdydz$, где V ограничена поверхностями: $x=0$, $y=0$, $y=3x$, $z=0$, $z=xy$.

Первые четыре уравнения в пространстве задают плоскости, пятое – гиперболический параболоид.





По формуле (13) расставляем пределы интегрирования:

$$\iiint\limits_V x^2 z dxdydz = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{3x} dy \int\limits_0^{xy} x^2 z dz$$

Последовательно вычисляем три определенных интеграла:

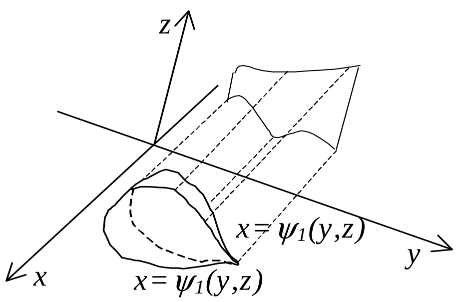
$$\int\limits_0^{xy} x^2 z dz = x^2 \int\limits_0^{xy} z dz = x^2 \left.\frac{z^2}{2}\right|_0^{xy} = x^2 \left(\frac{(xy)^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = \frac{x^4 y^2}{2};$$

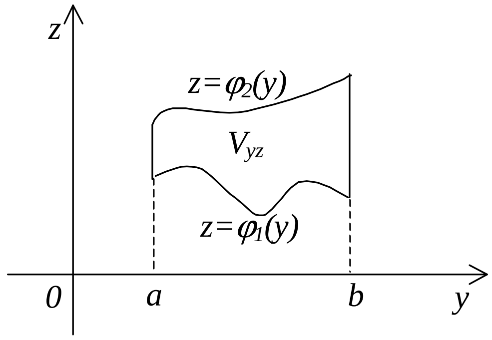
$$\int\limits_0^{3x} \frac{x^4 y^2}{2} dy = \frac{x^4}{2} \int\limits_0^{3x} y^2 dy = \frac{x^4}{2} \left.\frac{y^3}{3}\right|_0^{3x} = \frac{x^4}{2} \frac{27x^3}{3} = \frac{9x^7}{2};$$

$\int\limits_0^2 \frac{9x^7}{2} dx = \frac{9}{2} \int\limits_0^2 x^7 dx = \frac{9}{2} \left.\frac{x^8}{8}\right|_0^2 = \frac{9}{2} \frac{256}{8} = 144$; Таким образом:

$$\iiint\limits_V x^2 z dxdydz = 144.$$

Часто бывает удобным при вычислении тройного интеграла применять другой порядок интегрирования. Так, если V ограничена поверхностями $x=\psi_1(y;z)$ и $x=\psi_2(y;z)$, а ее проекция V_{yz} на координатную плоскость yOz ограничена линиями: $y=a$, $y=b$, $z=\varphi_1(y)$, $z=\varphi_2(y)$, то вычисление тройного интеграла удобнее проводить по формуле:





$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \int\limits_a^b dy \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} dz \int\limits_{\psi_1(y,z)}^{\psi_2(y,z)} f(x,y,z)dx \qquad (14)$$

Приложения тройного интеграла

1. Объем тела, занимающего пространственную область V:

$$V = \iiint\limits_V dxdydz \qquad (15)$$

2. Масса тела плотностью $\mu=\mu(x;y;z)$:

$$m = \iiint\limits_V \mu(x,y,z)dxdydz \qquad (16)$$

3. Статические моменты тела с плотностью $\mu=\mu(x;y;z)$ относительно координатных плоскостей:

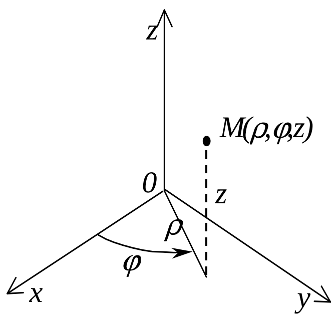
$$M_{xy} = \iiint\limits_V z\mu dxdydz; \quad M_{xz} = \iiint\limits_V y\mu dxdydz; \quad M_{yz} = \iiint\limits_V x\mu dxdydz \qquad (17)$$

4. Координаты центра тяжести объемного тела $C(x_c;\, y_c;\, z_c)$:

$$x_c = \frac{\iiint\limits_V x\mu dxdydz}{m}; \quad y_c = \frac{\iiint\limits_V y\mu dxdydz}{m}; \quad z_c = \frac{\iiint\limits_V z\mu dxdydz}{m} \qquad (18)$$

Часто для вычисления тройного интеграла удобнее перейти к другой системе координат.

Цилиндрическая система координат



Цилиндрические координаты точки M: ρ,φ,z. $0<\rho\le+\infty$; $-\pi<\varphi<\pi$ (или $0\le\varphi\le2\pi$), $-\infty\le z\le+\infty$. Декартовы и цилиндрические координаты связаны соотношениями: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $z=z$. (19)

Элемент объема dV в цилиндрической системе координат: $dV=\rho d\rho d\varphi dz$. (20)

Для перехода в тройном интеграле к цилиндрическим координатам необходимо:

1)записать уравнения границ области V в цилиндрических координатах;

2)в подынтегральной функции $f(x;y;z)$ декартовы координаты заменить цилиндрическими по (19);

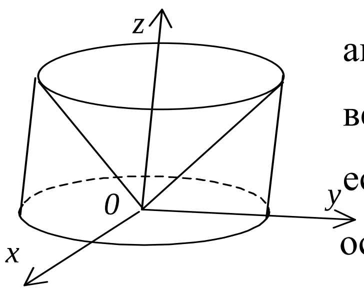
3)заменить элемент объема dV по (20).

Тогда тройной интеграл перепишется в виде:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_V f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi dz \qquad (21)$$

Цилиндрические координаты удобно вводить, как правило, в тех случаях, когда область интегрирования V ограничена круговыми цилиндрами, образующие которой параллельны координатной оси.

Пример. Вычислить массу тела ограниченного поверхностями $x^2+y^2=z^2$, $x^2+y^2=R^2$, $z=0$, $(z\geq 0)$, если его плотность в каждой точке равна аппликате этой точки. $x^2+y^2=z^2$ есть коническая поверхность с вершиной в начале координат и осью симметрии Oz; $x^2+y^2=R^2$ есть цилиндрическая поверхность с образующей параллельной оси Oz.



Плотность тела μ=z согласно (16), масса тела $\boldsymbol{m}$ равна:

$$m = \iiint\limits_V zdxdydz$$

Перейдем к цилиндрическим координатам:

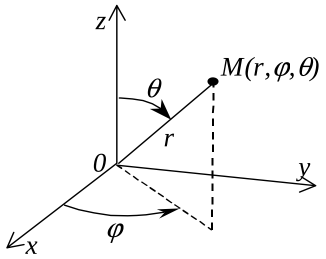
$x^2+y^2=R^2 \Rightarrow \rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=R^2 \Rightarrow \rho=R;$

$x^2+y^2=z^2 \Rightarrow \rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=z^2 \Rightarrow z=\rho;$

$$\iiint\limits_V zdxdydz = \iiint\limits_V z\rho d\rho d\varphi dz = \int\limits_0^R d\rho\int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi\int\limits_0^{\rho}\rho zdz = \int\limits_0^R d\rho\int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi\left(\rho\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\rho} = \int\limits_0^R d\rho\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\rho^3}{2}d\varphi = \int\limits_0^R d\rho\left(\frac{\rho^3}{2}\varphi\Big|_{-\pi}^{\pi}\right) =$$

$$= \int\limits_0^R \pi\rho^3 d\rho = \pi\frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^R = \frac{\pi R^4}{4};$$

Сферическая система координат



Сферические координаты точки M: r, φ, θ. $0 \le r \le +\infty$; $-\pi \le \varphi \le \pi$ (или $0 \le \varphi 2\pi$), $0 \le \theta \le \pi$. Декартовы координаты выражаются через сферические по формулам:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = \cos\theta \qquad (22)$$

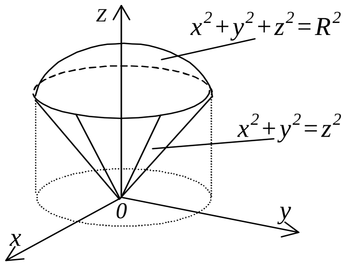
Элемент объема dV в сферической системе координат:

$$dV = r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta \qquad (23)$$

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_V f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\, r^2\sin\theta dr d\varphi d\theta \qquad (24)$$

Сферические координаты удобны в тех случаях, как правило, когда область интегрирования V ограничена сферическими поверхностями.

Пример. Вычислить объем тела ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x^2+y^2=z^2$, $(z \ge 0)$.



Записываем уравнения поверхностей в сферической системе координат; сфера: $x^2+y^2+z^2=R^2 \Rightarrow r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + r^2\cos^2\theta = R^2 \Rightarrow r=R$;

конус: $x^2+y^2=z^2 \Rightarrow r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin2\theta\sin2\varphi = r^2\cos^2\theta \Rightarrow tg^2\theta = 1 \Rightarrow \theta = \pi/4$.

Согласно (15) и (16) имеем:

$$\iiint\limits_V dxdydz = \iiint\limits_V r^2\sin\theta dr d\varphi d\theta = \int\limits_0^R dr \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/4} r^2 \sin\theta d\theta = \int\limits_0^R dr \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi \left(-r^2\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi/4} = \int\limits_0^R dr \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi\, r^2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) =$$

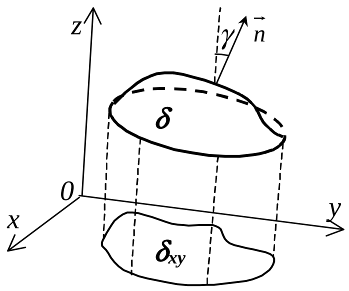
$$= \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \int\limits_0^R r^2 dr \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \int\limits_0^R r^2 dr \varphi\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} 2\pi \int\limits_0^R r^2 dr = \pi\left(2-\sqrt{2}\right)\frac{r^3}{3}\Bigg|_0^R = \frac{\pi R^3\left(2-\sqrt{2}\right)}{3};$$

ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ ПЕРВОГО РОДА

Пусть $U=f(x;y;z)$ – непрерывная функция, определенная в точках некоторой гладкой поверхности δ. Тогда поверхностным интегралом I рода, или интегралом по площади поверхности, называется предел интегральных сумм

$$\iint_{\delta} f(x;y;z)d\delta=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\upsilon_i;\zeta_i)\Delta\delta_i \qquad (25)$$

При вычислении поверхностный интеграл заменяется двойным интегралом. Пусть поверхность δ задана уравнением $z=z(x;y)$ и однозначно проецируется на плоскость xOy. Вектор нормали $\vec{n}$ к поверхности δ образует угол γ с осью Oz. Тогда



$$d\delta=\frac{dxdy}{|\cos\gamma|} \qquad (26)$$

$$|\cos\gamma|=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} \qquad (27)$$

$$\iint_{\delta} f(x;y;z)d\delta=\iint_{\delta_{xy}} f(x;y;z(x;y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy \qquad (28)$$

Если поверхность δ задана уравнением $x=x(y;z)$, δ_{yz} – ее проекция на плоскость yOz, α - угол между нормалью к поверхности δ и осью Ox, то

$$d\delta=\frac{dydz}{|\cos\alpha|} \text{ и} \qquad (29)$$

$$\iint_{\delta} f(x;y;z)d\delta=\iint_{\delta_{yz}} f(x(y;z);y;z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dydz \qquad (30)$$

Если поверхность δ задана уравнением $y=y(x;z)$, то получается третья форма для вычисления поверхностного интеграла

$$\iint_{\delta} f(x;y;z)d\delta=\iint_{\delta_{xz}} f(x;y(x;z);z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,dxdz \qquad (31)$$

Площадь S поверхности δ вычисляется

$$S=\iint_{\delta} d\delta \qquad (32)$$

Масса материальной поверхности, плотность которой равна $\mu=\mu(x;y;z)$

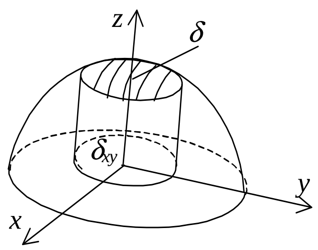
вычисляется как

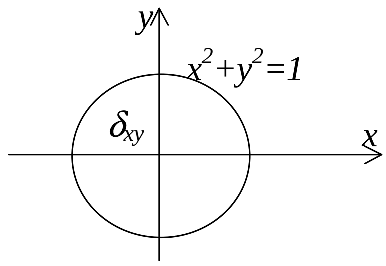
$$m=\iint_{\delta}\mu(x;y;z)d\delta \qquad (33)$$

Координаты центра тяжести $C(x_c;y_c;z_c)$ вычисляются по формулам

$$x_c=\frac{\iint_{\delta}x\mu d\delta}{m};\qquad y_c=\frac{\iint_{\delta}y\mu d\delta}{m};\qquad z_c=\frac{\iint_{\delta}z\mu d\delta}{m} \qquad (34)$$

Пример. Вычислить площадь части сферы $x^2+y^2+z^2=5$, расположенной выше плоскости xOy внутри цилиндра $x^2+y^2=1$.





Проекция δ_{xy} части сферы δ на плоскость xOy есть круг с границей $x^2+y^2=1$. Уравнение δ разрешится относительно z однозначно: $z=\sqrt{5-x^2-y^2}$

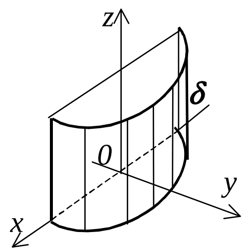
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{5-x^2-y^2}};\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{5-x^2-y^2}};\qquad \text{по формуле (28)}$$

$$S=\iint_{\delta}d\delta=\iint_{\delta_{xy}}\sqrt{1+\frac{x^2}{5-x^2-y^2}+\frac{y^2}{5-x^2-y^2}}dxdy=\sqrt{5}\iint_{\delta_{xy}}\frac{dxdy}{\sqrt{5-x^2-y^2}}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{Для вычисления}\\ \text{двойного интеграла}\\ \text{перейдем к полярным}\\ \text{координатам}\end{array}\quad \begin{cases}x=\rho\cos\varphi \quad dxdy=\rho d\rho d\varphi\\ y=\rho\sin\varphi \quad x^2+y^2=1\Rightarrow \rho=1\end{cases}\right|=\sqrt{5}\iint_{\delta_{xy}}\frac{\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{5-\rho^2}}=\sqrt{5}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\frac{\rho d\rho}{\sqrt{5-\rho^2}}=$$

$$=\sqrt{5}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\frac{-\frac{1}{2}d\left(5-\rho^2\right)}{\sqrt{5-\rho^2}}=\sqrt{5}\int_0^{2\pi}d\varphi\left(-\sqrt{5-\rho^2}\Big|_0^1\right)=\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-2\right)\int_0^{2\pi}d\varphi=2\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-2\right)\pi.$$

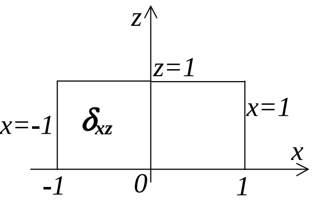
Пример. Вычислить массу поверхности $x^2+y^2=1$, $(y\geq 0)$, вырезаемую плоскостями $y=0$, $z=0$, $z=1$, если ее плотность в каждой точке равна аппликате этой точки.



Проекция на плоскость xOy есть линия, поэтому проецируем ее на плоскость xOz и вычисления ведем по (31)

$$\mu = z; \qquad y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}; \frac{\partial y}{\partial z} = 0$$



$$d\delta = \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)^2 + (0)^2} dxdy = \frac{dxdy}{\sqrt{1 - x^2}};$$

$$m = \iint_{\delta} \mu d\delta = \iint_{\delta_{xz}} \frac{z}{\sqrt{1 - x^2}} dxdz = \int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{1} \frac{z}{\sqrt{1 - x^2}} dz =$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{\frac{1}{2} dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{2} \arcsin x \Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2};$$

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Пусть функция $U=f(x;y;z)$ определена и непрерывна в точках гладкой линии l. Тогда криволинейным интегралом по длине дуги, или интегралом первого рода, называется предел интегральных сумм

$$\int_{l} f(x; y; z) dl = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i; \upsilon_i; \zeta_i) \Delta l_i \tag{35}$$

Пусть линия l задана параметрическими уравнениями

$x=x(t), y=y(t), z=z(t), \alpha \le t \le \beta$

Тогда дифференциал дуги dl равен

$$dl = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt \tag{36}$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по параметру t. Тогда криволинейный интеграл (35) заменяется определенным интегралом

$$\int_{l} f(x; y; z) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t); y(t); z(t)) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt \tag{37}$$

Если линия интегрирования *l* задана уравнением *y=y(x),* то

$$dl = \sqrt{1+\left(y^{/}\right)^2}dx$$

$$\int_l f(x;y)dl = \int_\alpha^\beta f(x;y(x))\sqrt{1+\left(y^{/}\right)^2}dx \qquad (38)$$

При задании линии *l* уравнением в полярной системе координат $\rho=\rho(\varphi)$ получаем следующую форму для вычисления криволинейного интеграла.

$$dl = \sqrt{\rho^2+\left(\rho^{/}\right)^2}d\varphi$$

$$\int_l f(x;y)dl = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi)\sqrt{\rho^2+\left(\rho^{/}\right)^2}d\varphi \qquad (39)$$

Приложения криволинейного интеграла I рода аналогичны другим видам интегралов.

Длина дуги линии *l* равна

$$l = \int_l dl \qquad (40)$$

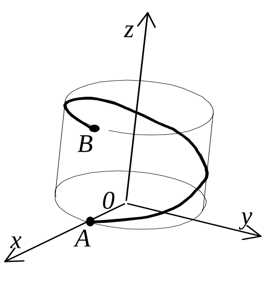
Масса ***m*** дуги материальной линии с плотностью $\mu=\mu(x;y;z)$

$$m = \int_l \mu dl \qquad (41)$$

Координаты центра тяжести линии $C(x_c;y_c;z_c)$

$$x_c = \frac{\int_l x\mu dl}{m}; \quad y_c = \frac{\int_l y\mu dl}{m}; \quad z_c = \frac{\int_l z\mu dl}{m} \qquad (42)$$

Пример. Вычислить длину дуги линии $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=t$, $0\le t\le 2\pi$ (винтовая линия).



$$\dot{x} = -\sin t; \ \dot{y} = \cos t; \ \dot{z} = 1;$$

$$dl = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1}dt = \sqrt{2}dt;$$

$$l=\int_l dl=\int_0^{2\pi}\sqrt{2}dt=2\sqrt{2}\pi .$$

Пусть функции *P(x;y;z)*, *Q(x;y;z;)*, *R(x;y;z)* непрерывны в точках дуги *AB* гладкой линии *l*. Интеграл вида $\int_l Pdx+Qdy+Rdz$ называется криволинейным интегралом по координатам или второго рода. При вычислении он заменяется определенным интегралом с помощью уравнений линии *l*. Пусть линия *l* задана параметрическими уравнениями *x=x(t)*, *y=y(t)*, *z=z(t)*, значение параметра t_A соответствует точке *A*, t_B – точке *B*. Тогда

$$\int_l Pdx+Qdy+Rdz=\int_{t_A}^{t_B}\left[P(x(t);y(t);z(t))\dot{x}+Q(x(t);y(t);x(t))\dot{y}+R(x(t);y(t);x(t))\dot{z}\right]dt \quad (43)$$

Здесь нижний предел интегрирования t_A, в отличие от криволинейного интеграла первого рода, всегда определяется начальной точкой *A*. Поэтому он может быть и больше верхнего предела t_B.

Если линия *l* задана уравнением *y=y(x)*, $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$, то

$$\int_l Pdx+Qdy=\int_{x_A}^{x_B}\left[P(x;y(x))+Q(x;y(x))\,y'\right]dx \quad (44)$$

Пример. Вычислить $\int_{AB} xydx+yzdy+xzdz$, где *AB* – четверть окружности *x*=cos*t*, *y*=sin*t*, *z=1*, проходимая в положительном направлении.

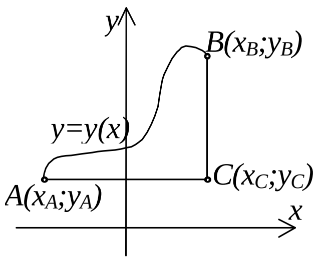
$$\int_{AB} xydx+yzdy+xzdz=\int_0^{\pi/2}\left[\cos t\sin t(-\sin t)+\sin t\cdot 1(\cos t)+\cos t\cdot 1\cdot 0\right]dt=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\left[-\sin^2 t\cos t+\sin t\cos t\right]dt=\int_0^{\pi/2}\left[-\sin^2 t+\sin t\right]d(\sin t)=\left(-\frac{\sin^3 t}{3}+\frac{\sin^2 t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{1}{6}.$$

Пусть функции *P=P(x;y)*, *Q=Q(x;y)* вместе со своими частными производными первого порядка непрерывны в односвязной области χ и линия *l* целиком находится в этой области. Тогда необходимым и достаточным условием независимости криволинейного интеграла $\int_l Pdx+Qdy$ от линии интегрирования является выполнение в области χ тождественного равенства

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (45)$$

В этом случае линию интегрирования можно заменить любой другой, проходящей через точки A и B. Удобно выбирать ломаную ACB, состоящую из отрезков прямых, параллельных осям координат.



$$\int_{AB} Pdx+Qdy=\int_{AC} Pdx+Qdy+\int_{CB} Pdx+Qdy=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{Уравнение AC: } y=y_A;\ dy=dy_A=0\\ \text{Уравнение CB: } x=x_B;\ dx=dx_B=0\end{array}\right|=$$

$$=\int_{x_A}^{x_B} P(x;y_A)dx+\int_{y_A}^{y_B} Q(x_B;y)dy \qquad (46)$$

Интеграл, не зависящий от линии интегрирования, часто обозначается как

$$\int_{(x_A;y_A)}^{(x_B;y_B)} Pdx+Qdy$$

Условие (45) является одновременно условием того, что дифференциальное выражение $Pdx+Qdy$ является полным дифференциалом некоторой функции двух аргументов $U=U(x;y)$:

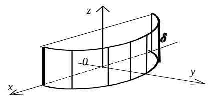
$$dU=Pdx+Qdy \qquad \text{т.е. } \frac{\partial U}{\partial x}=P; \qquad \int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{1}\frac{z}{\sqrt{1-x^2}}dz=. \qquad (47)$$

Тогда
$$\int_{l} Pdx+Qdy=\int_{l} dU=U(x_B;y_B)-U(x_A;y_A) \qquad (48)$$

Выбирая некоторую фиксированную точку $(x_0;y_0)$, переменную точку $(x;y)$ и, обозначая $U(x_0;y_0)=C$, получаем с помощью (46) и (48) правило нахождения функции $U(x;y)$ по ее полному дифференциалу:

$$\int_l f(x,y)dl=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\sqrt{\rho^2+\left(\rho'\right)^2}\,d\varphi \qquad (49)$$

Пример. По дифференциальному выражению $\left(y^2e^x+\dfrac{1}{y}+2\right)dx+\left(2y\,e^x-\dfrac{x}{y^2}+e^y\right)dy$ восстановить функцию.

Здесь $P=y^2e^x+\dfrac{1}{y}+2$;  ;

$Q=2ye^x-\dfrac{x}{y^2}+e^y$; $\quad \dfrac{\partial Q}{\partial x}=2y\,e^x-\dfrac{1}{y^2}$; Следовательно, $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$; *(y≠0).*

Выбираем начальную точку *(0;1)*, конечную точку (перемен.) *(x;y)*. Согласно (49)

$$U(x;y)=\int_0^x\left(e^x+3\right)dx+\int_1^y\left(2y\,e^x-\frac{x}{y^2}+e^y\right)dy+C \;=\; \left|\begin{array}{l}\text{Во втором интеграле}\\ \text{аргумент } x \text{ считается}\\ \text{постоянным}\end{array}\right| =$$

$$12+4x-x^2-x^3-\frac{x^4}{2}=$$

$$\sqrt{5}\iint_{\delta_{xy}}\frac{\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{5-\rho^2}}=\sqrt{5}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\frac{\rho d\rho}{\sqrt{5-\rho^2}}=.$$

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

1. Определение двойного интеграла; его геометрический и физический смысл.
2. Определение тройного интеграла; его геометрический и физический смысл.
3. Основные свойства интегралов.
4. Формулы вычисления двойного и тройного интегралов.
5. Двойной интеграл в полярных координатах.
6. Цилиндрические координаты. Тройной интеграл в цилиндрических координатах.
7. Сферические координаты. Тройной интеграл в сферических координатах.
8. Криволинейный интеграл I рода, его вычисление.

9. Приложения криволинейного интеграла I рода.
10. Криволинейный интеграл II рода, его вычисление. Физический смысл.
11. Независимость криволинейного интеграла II рода от формы линии интегрирования.
12. Восстановление функции двух переменных по ее полному дифференциалу

Задача 1

Определить порядок интегрирования:

1.1 $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2+y}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0} f(x,y)dx$

1.2 $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)dx$

1.3 $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$

1.4 $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx$

1.5 $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} f(x,y)dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{x}^{0} f(x,y)dy$

1.6 $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2+y}} f(x,y)dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)dx$

1.7 $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{e} dy \int\limits_{-1}^{-\ln y} f(x,y)dx$

1.8 $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{x^2} f(x,y)dy$

1.9 $\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x,y)dy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f(x,y)dy$

1.10 $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{1-x^2}^{1} f(x,y)dy + \int\limits_{1}^{e} dx \int\limits_{\ln x}^{1} f(x,y)dy$

1.11 $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{2-y} f(x,y)dx$

1.12 $\int\limits_{0}^{\pi/4} dy \int\limits_{0}^{\sin y} f(x,y)dx + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} dy \int\limits_{0}^{\cos y} f(x,y)dx$

1.13 $\int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{-(2+x)}^{0} f(x,y)dy + \int\limits_{-1}^{e} dx \int\limits_{\sqrt[3]{x}}^{0} f(x,y)dy$

1.14 $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{e} dy \int\limits_{\ln y}^{1} f(x,y)dx$

1.15 $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{0} f(x,y)dx$

1.16 $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-y}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)dx$

1.17 $\int_0^1 dy \int_0^{y^2} f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x,y)dx$

1.18 $\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f(x,y)dy + \int_{\sqrt{3}}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x,y)dy$

1.19 $\int_{-2}^{-1} dy \int_{-(2+y)}^{0} f(x,y)dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{\sqrt[3]{y}}^{0} f(x,y)dx$

1.20 $\int_0^1 dy \int_0^{y} f(x,y)dx + \int_1^{e} dy \int_{\ln y}^{1} f(x,y)dx$

1.21 $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$

1.22 $\int_0^{\pi/4} dx \int_0^{\sin x} f(x,y)dy + \int_{\pi/4}^{\pi/2} dx \int_0^{\cos x} f(x,y)dy$

1.23 $\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{y}^{0} f(x,y)dx$

1.24 $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy$

1.25 $\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy + \int_{\sqrt{3}}^{2} dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$

1.26 $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{0} f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{2-x}}^{0} f(x,y)dy$

1.27 $\int_0^1 dx \int_0^{x} f(x,y)dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$

1.28 $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$

1.29 $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{2-x}} f(x,y)dy$

1.30 $\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy + \int_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int_0^{2-\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$

Задача 2

Вычислить:

2.1 $\iint\limits_D (12x^2y^2 + 16x^3y^3)dxdy;$

$D: x=1;\ y=x^2;\ y=-\sqrt{x}.$

2.2 $\iint\limits_D (9x^2y^2 + 48x^3y^3)dxdy;$

$D: x=1;\ y=\sqrt{x};\ y=-x^2.$

2.3 $\iint\limits_D (36x^2y^2 + 96x^3y^3)dxdy;$

$D: x=1;\ y=\sqrt[3]{x};\ y=-x^3.$

2.4 $\iint\limits_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3)dxdy;$

$D: x=1;\ y=x^3;\ y=-\sqrt[3]{x}.$

2.5 $\iint\limits_D (27x^2y^2 + 48x^3y^3)dxdy;$

$D: x=1;\ y=x^2;\ y=-\sqrt[3]{x}.$

2.6 $\iint\limits_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3)dxdy;$

$D: x=1;\ y=\sqrt[3]{x};\ y=-x^2.$

2.7 $\iint\limits_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3)dxdy;$

$D: x=1;\ y=x^3;\ y=-\sqrt{x}.$

2.8 $\iint\limits_D (27x^2y^2 + 48x^3y^3)dxdy;$

$D: x=1;\ y=\sqrt{x};\ y=-x^3.$

2.9 $\iint\limits_D (4xy + 3x^2y^2)dxdy;$

$D: x = 1;\ y = x^2;\ y = -\sqrt{x}.$

2.10 $\iint\limits_D (12xy + 9x^2y^2)dxdy;$

$D: x = 1;\ y = \sqrt{x};\ y = -x^2.$

2.11 $\iint\limits_D (8xy + 9x^2y^2)dxdy;$

$D: x = 1;\ y = \sqrt[3]{x};\ y = -x^3.$

2.12 $\iint\limits_D (24xy + 18x^2y^2)dxdy;$

$D: x = 1;\ y = x^3;\ y = -\sqrt[3]{x}.$

2.13 $\iint\limits_D (12xy + 27x^2y^2)dxdy;$

$D: x = 1;\ y = x^2;\ y = -\sqrt[3]{x}.$

2.14 $\iint\limits_D (8xy + 18x^2y^2)dxdy;$

$D: x = 1;\ y = \sqrt[3]{x};\ y = -x^2.$

2.15 $\iint\limits_D \left(\frac{4}{5}xy + \frac{9}{11}x^2y^2\right)dxdy;$

$D: x = 1;\ y = x^3;\ y = -\sqrt{x}.$

2.16 $\iint\limits_D (\frac{4}{5}xy + 9x^2y^2)dxdy;$

$D: x = 1;\ y = \sqrt{x};\ y = -x^3.$

2.17 $\iint\limits_D (24xy - 48x^3y^3)dxdy;$

$D: x = 1;\ y = x^2;\ y = -\sqrt{x}.$

2.18 $\iint\limits_D (6xy + 24x^3y^3)dxdy\ ;$

$D: x = 1;\ y = \sqrt{x};\ y = -x^2.$

2.19 $\iint\limits_D (4xy + 16x^3y^3)dxdy;$

$D: x = 1;\ y = \sqrt[3]{x};\ y = -x^3.$

2.20 $\iint\limits_D (4xy + 16x^3y^3)dxdy;$

$D: x = 1;\ y = x^3;\ y = -\sqrt[3]{x}.$

2.21 $\iint\limits_D (44xy + 16x^3y^3)dxdy;$

$D: x = 1;\ y = x^2;\ y = -\sqrt[3]{x}.$

2.22 $\iint\limits_D (4xy + 176x^3y^3)dxdy;$

$D: x = 1;\ y = \sqrt[3]{x};\ y = -x^2.$

2.23 $\iint\limits_D (xy - 4x^3y^3)dxdy;$

$D: x = 1;\ y = x^3;\ y = -\sqrt{x}.$

2.24 $\iint\limits_D (4xy + 176x^3y^3)dxdy;$

$D: x = 1;\ y = \sqrt{x};\ y = -x^3.$

2.25 $\iint\limits_D (6x^2y^2 + \frac{25}{3}x^4y^4)dxdy;$

$D: x = 1;\ y = x^2;\ y = -\sqrt{x}.$

2.26 $\iint\limits_D \left(9x^2y^2 + 25x^4y^4\right)dxdy;$

$D: x = 1;\ y = -x^2;\ y = \sqrt{x}.$

2.27 $\iint\limits_D (3x^2y^2 + \frac{50}{3}x^4y^4)dxdy;$

$D: x = 1;\ y = \sqrt[3]{x};\ y = -x^3.$

2.28 $\iint\limits_D (9x^2y^2 + 25x^4y^4)dxdy;$

$D: x = 1;\ y = x^3;\ y = -\sqrt[3]{x}.$

2.29 $\iint\limits_D (54x^2y^2 + 150x^4y^4)dxdy;$

$D: x = 1;\ y = x^2;\ y = -\sqrt[3]{x}.$

2.30 $\iint\limits_D (x\ \ y\ \ - 9x^5y^5)dxdy;$

$D: x = 1;\ y = \sqrt[3]{x};\ y = -x^2.$

Задача 3

Найти площадь фигуры, перейдя к полярной системе координат:

3.1 $y^2 - 2y + x^2 = 0,$
$y^2 - 4y + x^2 = 0,$
$y = x/\sqrt{3},\ y = \sqrt{3}x.$

3.2 $x^2 - 4x + y^2 = 0,$
$x^2 - 8x + y^2 = 0,$
$y = 0,\ y = x/\sqrt{3}.$

3.3 $y^2 - 6y + x^2 = 0,$
$y^2 - 10y + x^2 = 0,$
$y = x/\sqrt{3},\ y = \sqrt{3}x.$

3.4 $x^2 - 6x + y^2 = 0,$
$x^2 - 10x + y^2 = 0,$
$y = 0,\ y = x.$

3.5 $y^2 - 8y + x^2 = 0,$
$y^2 - 10y + x^2 = 0,$
$y = x/\sqrt{3},\ y = \sqrt{3}x.$

3.6 $x^2 - 4x + y^2 = 0,$
$x^2 - 8x + y^2 = 0,$
$y = 0,\ y = x.$

3.7 $y^2 - 4y + x^2 = 0,$
$y^2 - 6y + x^2 = 0,$
$y = x,\ x = 0.$

3.8 $x^2 - 2x + y^2 = 0,$
$x^2 - 10x + y^2 = 0,$
$y = 0,\ y = \sqrt{3}x.$

3.9 $y^2 - 6y + x^2 = 0,$
$y^2 - 10y + x^2 = 0,$
$y = x,\ x = 0.$

3.10 $x^2 - 2x + y^2 = 0,$
$x^2 - 4x + y^2 = 0,$
$y = x/\sqrt{3},\ y = \sqrt{3}x.$

3.11 $y^2 - 2y + x^2 = 0,$
$y^2 - 4y + x^2 = 0,$
$y = \sqrt{3}x,\ x = 0.$

3.12 $x^2 - 2x + y^2 = 0,$
$x^2 - 6x + y^2 = 0,$
$y = x/\sqrt{3},\ y = \sqrt{3}x.$

3.13 $y^2 - 4y + x^2 = 0,$
$y^2 - 6y + x^2 = 0,$
$y = \sqrt{3}x,\ x = 0.$

3.14 $x^2 - 2x + y^2 = 0,$
$x^2 - 8x + y^2 = 0,$
$y = x/\sqrt{3},\ y = \sqrt{3}x.$

3.15 $y^2 - 2y + x^2 = 0,$
$y^2 - 6y + x^2 = 0,$
$y = x/\sqrt{3},\ x = 0.$

3.16 $x^2 - 2x + y^2 = 0,$
$x^2 - 4x + y^2 = 0,$
$y = 0,\ y = x/\sqrt{3}.$

3.17 $y^2 - 2y + x^2 = 0,$
$y^2 - 10y + x^2 = 0,$
$y = x/\sqrt{3},\ y = x\sqrt{3}.$

3.18 $x^2 - 2x + y^2 = 0,$
$x^2 - 6x + y^2 = 0,$
$y = 0,\ y = x/\sqrt{3}.$

3.19 $y^2 - 4y + x^2 = 0,$
$y^2 - 10y + x^2 = 0,$
$y = x/\sqrt{3},\ y = x\sqrt{3}.$

3.20 $x^2 - 2x + y^2 = 0,$
$x^2 - 6x + y^2 = 0,$
$y = 0,\ y = x.$

3.21 $y^2-2y+x^2=0,$
$y^2-4y+x^2=0,$
$y=x, x=0.$

3.22 $x^2-2x+y^2=0,$
$x^2-4x+y^2=0,$
$y=0, y=\sqrt{3}x.$

3.23 $y^2-6y+x^2=0,$
$y^2-8y+x^2=0,$
$y=x, x=0.$

3.24 $x^2-4x+y^2=0,$
$x^2-8x+y^2=0,$
$y=0, y=\sqrt{3}x.$

3.25 $y^2-4y+x^2=0,$
$y^2-8y+x^2=0,$
$y=x, x=0.$

3.26 $x^2-4x+y^2=0,$
$x^2-8x+y^2=0,$
$y=x/\sqrt{3}, y=\sqrt{3}x.$

3.27 $y^2-4y+x^2=0,$
$y^2-8y+x^2=0,$
$y=\sqrt{3}x, x=0.$

3.28 $x^2-4x+y^2=0,$
$x^2-6x+y^2=0,$
$y=x/\sqrt{3}, y=x\sqrt{3}.$

3.29 $y^2-2y+x^2=0,$
$y^2-10y+x^2=0,$
$y=x/\sqrt{3}, x=0.$

3.30 $x^2-6x+y^2=0,$
$x^2-10x+y^2=0,$
$y=x/\sqrt{3}, y=x\sqrt{3}.$

Задача 4

Найти центр тяжести пластинки D, ограниченной кривыми с поверхностной плотностью μ *:*

2.18 $\iint_D (6xy+24x^3y^3)\,dx\,dy$;
$D: x=1;\ y=\sqrt{x};\ y=-x^2.$

4.2 $D: x^2+y^2=1, x^2+y^2=4,$
$x=0, y=0 (x\ge 0, y\ge 0);$
$\mu=(x+y)/(x^2+y^2).$

4.3 $D: x=1, y=0, y^2=4x\ (y\ge 0);$
$\mu=7x^2/2+5y.$

4.4 $D: x^2+y^2=9, x^2+y^2=16,$
$x=0, y=0 (x\ge 0, y\ge 0);$
$\mu=(2x+5y)/(x^2+y^2).$

4.5 $D: x=2, y=0, y^2=2x\ (y\ge 0);$
$\mu=7x^2/8+2y.$

4.6 $D: x^2+y^2=1, x^2+y^2=16,$
$x=0, y=0 (x\ge 0, y\ge 0);$
$\mu=(x+y)/(x^2+y^2).$

4.7 $D: x=2, y=0, y^2=x/2\ (y\ge 0);$
$\mu=7x^2/2+6y.$

4.8 $D: x^2+y^2=4, x^2+y^2=25,$
$x=0, y=0 (x\ge 0, y\le 0);$
$\mu=(2x-3y)/(x^2+y^2).$

4.9 $D: x=1, y=0, y^2=4x \ (y \geq 0);$
$\mu = x+3y^2.$

4.10 $D: x^2+y^2=1, x^2+y^2=9,$
$x=0, y=0 (x \geq 0, y \leq 0);$
$\mu = (x-y)/(x^2+y^2).$

4.11 $D: x=1, y=0, y^2=x \ (y \geq 0);$
$\mu = 3x+6y^2.$

4.12 $D: x^2+y^2=9, x^2+y^2=25,$
$x=0, y=0 (x \leq 0, y \geq 0);$
$\mu = (2y-x)/(x^2+y^2).$

4.13 $D: x=2, y=0, y^2=x/2 \ (y \geq 0);$
$\mu = 2x+3y^2.$

4.14 $D: x^2+y^2=4, x^2+y^2=16,$
$x=0, y=0 (x \leq 0, y \geq 0);$
$\mu = (2y-3x)/(x^2+y^2).$

4.15 $D: x=\frac{1}{2}, y=0, y^2=8x \ (y \geq 0);$
$\mu = 7x+3y^2.$

4.16 $D: x^2+y^2=9, x^2+y^2=16,$
$x=0, y=0 (x \leq 0, y \geq 0);$
$\mu = (2y-5x)/(x^2+y^2).$

4.17 $D: x=1, y=0, y^2=4x \ (y \geq 0);$
$\mu = 7x^2+2y.$

4.18 $D: x^2+y^2=1, x^2+y^2=16,$
$x=0, y=0 (x \geq 0, y \geq 0);$
$\mu = (x+3y)/(x^2+y^2).$

4.19 $D: x=2, y=0, y^2=2x \ (y \geq 0);$
$\mu = 7x^2/4+y/2.$

4.20 $D: x^2+y^2=1, x^2+y^2=4,$
$x=0, y=0 (x \geq 0, y \geq 0);$
$\mu = (x+2y)/(x^2+y^2).$

4.21 $D: x=2, y=0, y^2=2x \ (y \geq 0);$
$\mu = 7x^2/4+y.$

4.22 $D: x^2+y^2=1, x^2+y^2=9,$
$x=0, y=0 (x \geq 0, y \leq 0);$
$\mu = (2x-y)/(x^2+y^2).$

4.23 $D: x=2,\ y=0,\ y^2 = x/2\ \ (y \ge 0);$
$\mu = 7x^2/2 + 8y.$

4.24 $D: x^2+y^2=1, x^2+y^2=25,$
$x=0, y=0 (x \ge 0, y \le 0);$
$\mu = (x-4y)/(x^2+y^2).$

4.25 $D: x=1,\ y=0,\ y^2 = 4x\ \ (y \ge 0);$
$\mu = 6x + 3y^2.$

4.26 $D: x^2+y^2=4, x^2+y^2=16,$
$x=0, y=0 (x \ge 0, y \ge 0);$
$\mu = (3x-y)/(x^2+y^2).$

4.27 $D: x=2,\ y=0,\ y^2 = x/2\ \ (y \ge 0);$
$\mu = 4x + 6y^2.$

4.28 $D: x^2+y^2=4, x^2+y^2=9,$
$x=0, y=0 (x \le 0, y \ge 0);$
$\mu = (y-4x)/(x^2+y^2).$

4.29 $D: x=\frac{1}{2},\ y=0,\ y^2 = 2x\ \ (y \ge 0);$
$\mu = 4x + 9y^2.$

4.30 $D: x^2+y^2=4, x^2+y^2=9,$
$x=0, y=0 (x \le 0, y \ge 0);$
$\mu = (y-2x)/(x^2+y^2).$

Задача 5

С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного данными поверхностями:

5.1 $y = 16\sqrt{2x}, y = \sqrt{2x}, z = 0, x + z = 2.$

5.2 $y = 5\sqrt{x}, y = \frac{5x}{3}, z = 0, z = 5 + 5\sqrt{x}/3.$

5.3 $x^2 + y^2 = 2, y = \sqrt{x}, y = 0, z = 0, z = 15x.$

5.4 $x + y = 2, y = \sqrt{x}, z = 12y, z = 0.$

5.5 $y = 20\sqrt{2y}, x = 5\sqrt{2y}, z = 0, z + y = 1/2.$

5.6 $x = 5\sqrt{y}/2, x = 5y/6, z = 0, z = 30y.$

5.7 $x^2 + y^2 = 2, x = \sqrt{y}, x = 0, z = 0, z = 30y.$

5.8 $x + y = 2, x = \sqrt{y}, z = 12x/5, z = 0.$

5.9 $y = 17\sqrt{2x}, y = 2\sqrt{2x}, z = 0, z = \frac{1}{2} - x.$

5.10 $y = 5\sqrt{x}/3, y = 5x/9, z = 0, z = 5(3+\sqrt{x})/9.$

5.11 $x^2 + y^2 = 8, y = \sqrt{2x}, y = 0, z = 0, z = 5x/11.$

5.12 $x + y = 4, y = \sqrt{2x}, z = 3y, z = 0.$

5.13 $x = \frac{5}{6}\sqrt{y}, x = \frac{5}{18}y, z = 0, z = \frac{5}{18}\left(3+\sqrt{y}\right).$

5.14 $x = 19\sqrt{2y}, x = 4\sqrt{2y}, z = 0, z + y = 2.$

5.15 $x^2 + y^2 = 8, x = \sqrt{2y}, x = 0, z = 0, z = \frac{30}{11}y.$

5.16 $x + y = 4, x = \sqrt{2y}, z = \frac{3}{5}x, z = 0.$

5.17 $y = 6\sqrt{3x}, y = \sqrt{3x}, z = 0, x + z = 3.$

5.18 $y = \frac{5}{6}\sqrt{x}, y = \frac{5}{18}x, z = 0, z = \frac{5}{18}\left(3+\sqrt{x}\right).$

5.19 $x^2 + y^2 = 18, y = \sqrt{3x}, z = 0, z = \frac{5}{11}x.$

5.20 $x + y = 6, y = \sqrt{3x}, z = 4y, z = 0.$

5.21 $x = 7\sqrt{3y}, x = 2\sqrt{3y}, z = 0, z + y = 3.$

5.22 $x = \frac{5\sqrt{y}}{3}, x = \frac{5}{9}y, z = 0, z = 5\left(3+\sqrt{y}\right)/9.$

5.23 $x^2 + y^2 = 18, x = \sqrt{3y}, x = 0, z = 0, z = \frac{10}{11}y.$

5.24 $x + y = 6, x = \sqrt{3y}, z = \frac{4}{5}x, z = 0.$

5.25 $y = \sqrt{15x}, y = \sqrt{15}x, z = 0, z = \sqrt{15}\left(1+\sqrt{x}\right).$

Задача 6

В тройном интеграле по области V, заданной неравенствами, перейти к сферическим координатам и расставить пределы интегрирования:

6.1 $1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 49, \quad -x \le y \le 0, \quad -\sqrt{\frac{x^2+y^2}{35}} \le z \le \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}.$

6.2 $4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 64,\ -\sqrt{3x} \le y \le 0,\ \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{15}} \le z \le \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{3}}$

6.3 $4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 64,\ -\dfrac{x}{\sqrt{3}} \le y \le 0,\ z \le \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{3}}$

6.4 $4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 36,\ 0 \le y \le -\dfrac{x}{\sqrt{3}},\ z \ge -\sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{63}}.$

6.5 $1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 36,\ -\sqrt{3}x \le y \le \sqrt{3}x,\ z \ge \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{99}}.$

6.6 $25 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 100,\ x\sqrt{3} \le y \le -\sqrt{3x},\ z \le \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{99}}.$

6.7 $1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 49,\ y \le -\dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y \le -x\sqrt{3},\ 0 \le z \le \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{24}}.$

6.8 $25 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 121,\ y \ge -x\sqrt{3},\ y \ge -\sqrt{3x},\ \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{24}} \le z \le 0.$

6.9 $4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 64,\ x \le y \le 0,\ -\sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{35}} \le z \le \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{3}}.$

6.10 $16 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 100,\ x\sqrt{3} \le y \le 0,\ \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{15}} \le z \le \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{3}}.$

6.11 $16 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 100,\ -x\sqrt{3} \le y \le -\dfrac{x}{\sqrt{3}},\ z \le \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{3}}.$

6.12 $16 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 64,\ z \ge -\sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{63}},\ -\dfrac{x}{\sqrt{3}} \le y \le -x\sqrt{3}.$

6.13 $4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 49,\ y \le 0,\ \text{y} \le x\sqrt{3},\ z \ge \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{99}}.$

6.14 $36 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 121,\ y \ge x\sqrt{3},\ y \ge 0,\ z \le -\sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{99}}.$

6.15 $4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 64,\ y \le x\sqrt{3},\ y \le \dfrac{x}{\sqrt{3}},\ 0 \le z \le \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{24}}.$

6.16 $36 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 144,\ y \ge x\sqrt{3},\ y \ge \dfrac{x}{\sqrt{3}},\ -\sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{24}} \le z \le 0.$

6.17 $9 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 81,\ 0 \le y \le -x,\ -\sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{3}} \le z \le \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{35}}.$

6.18 $36 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 144,\ 0 \le y \le -x\sqrt{3},\ -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}} \le z \le \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{15}}.$

6.19 $36 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 144,\ x\sqrt{3} \le y \le \dfrac{x}{\sqrt{3}},\ z \le \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}.$

6.20 $36 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 100,\ \dfrac{x}{\sqrt{3}} \le y \le x\sqrt{3},\ z \ge -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{63}}.$

6.21 $9 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 64,\ y \le \dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y \le -\dfrac{x}{\sqrt{3}},\ z \ge \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{99}}.$

6.22 $49 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 144,\ y \ge \dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y \ge -\dfrac{x}{\sqrt{3}},\ z \le -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{99}}.$

6.23 $9 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 81,\ y \le 0,\ y \le \dfrac{x}{\sqrt{3}},\ 0 \le z \le \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{24}}.$

6.24 $49 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 169,\ y \ge 0,\ y \ge \dfrac{x}{\sqrt{3}},\ -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{24}} \le z \le 0.$

6.25 $16 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 100,\ 0 \le y \le x,\ -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}} \le z \le \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{35}}.$

Задача 7

Вычислить массу тела V с плотностью μ, ограниченного данными поверхностями.

7.1 $64\left(x^2+y^2\right) = z^2,\ x^2+y^2 = 4,\ y = 0,\ z = 0,\ (y \ge 0, z \ge 0),\ \mu = \dfrac{5}{4}\left(x^2+y^2\right).$

7.2 $x^2+y^2+z^2 = 4,\ x^2+y^2 = 1,\ x = 0,\ \mu = 4\cdot|z|,\ \left(x \ge 0, x^2+y^2 \le 1\right).$

7.3 $x^2+y^2 = 1,\ x^2+y^2 = 2x,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ \mu = 10x,\ (x \ge 0, y \ge 0).$

7.4 $x^2+y^2 = \dfrac{16}{49}z^2,\ x^2+y^2 = \dfrac{4}{7}z,\ x = 0,\ y = 0,\ \mu = 80yz,\ (x \ge 0, y \ge 0).$

7.5 $x^2+y^2+z^2 = 1,\ x^2+y^2 = 4z^2,\ x = 0,\ y = 0,\ \mu = 20z,\ (x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0)$

7.6 $36\left(x^2+y^2\right) = z^2,\ x^2+y^2 = 1,\ x = 0,\ z = 0,\ \mu = \dfrac{5}{6}\left(x^2+y^2\right),\ (x \ge 0, z \ge 0).$

7.7 $x^2+y^2+z^2 = 16,\ x^2+y^2 = 4,\ \mu = 2|z|,\ \left(x^2+y^2 \le 4\right).$

7.8 $x^2+y^2 = 4,\ x^2+y^2 = 8x,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ \mu = 5x,\ (x \ge 0, y \ge 0).$

7.9 $x^2+y^2=\frac{4}{25}z^2,\ \ x^2+y^2=\frac{2}{5}z,\ x=0,\ \ y=0,\ \ \mu=28xz,\ \ (x\geq 0, y\geq 0).$

7.10 $x^2+y^2+z^2=4,\ \ x^2+y^2=z^2,\ x=0,\ \ y=0, \mu=6z,\ (x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0).$

7.11 $25(x^2+y^2)=z^2,\ \ x^2+y^2=4,\ x=0, y=0, \mathrm{z}=0, \mu=2(x^2+\mathrm{y}^2),\ (x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0).$

7.12 $x^2+y^2+z^2=9,\ \ x^2+y^2=4, y=0, \mu=|z|, (y\geq 0, x^2+y^2\leq 4).$

7.13 $x^2+y^2=1,\ \ x^2+y^2=6z,\ x=0,\ \ y=0,\ \ z=0, \mu=90y,\ (x\geq 0, y\geq 0).$

7.14 $x^2+y^2=\frac{z^2}{25},\ \ x^2+y^2=\frac{z}{5}, x=0,\ \ y=0,\ \ \mu=14yz,\ (x\geq 0, y\geq 0).$

7.15 $x^2+y^2+z^2=4,\ \ x^2+y^2=9z^2, x=0, y=0, \mu=10z, (x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0).$

7.16 $9(x^2+y^2)=z^2,\ \ x^2+y^2=4,\ x=0, y=0, \mathrm{z}=0, \mu=\frac{5}{3}(x^2+y^2),\ (x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0).$

7.17 $x^2+y^2+z^2=4,\ \ x^2+y^2=1,\ \mu=6|z|,\ (x^2+y^2\leq 1).$

7.18 $x^2+y^2=1,\ \ x^2+y^2=z,\ x=0,\ \ y=0,\ \ z=0, \mu=10y,\ (x\geq 0, y\geq 0).$

7.19 $x^2+y^2=\frac{z^2}{49},\ \ x^2+y^2=\frac{z}{7},\ x=0,\ \ y=0,\ \ \mu=10xz,\ (x\geq 0, y\geq 0).$

7.20 $x^2+y^2+z^2=4,\ \ x^2+y^2=4z^2, x=0, y=0,\ \mu=10z,\ (x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0).$

7.21 $16(x^2+y^2)=z^2,\ \ x^2+y^2=1,\ x=0, y=0, \mu=5(x^2+y^2),\ (x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0).$

7.22 $x^2+y^2+z^2=16, x^2+y^2=4,\ \mu=|z|,\ (x^2+y^2\leq 4).$

7.23 $x^2+y^2=4, x^2+y^2=4z,\ x=0, y=0, z=0, \mu=5y,\ (x\geq 0, y\geq 0).$

7.24 $x^2+y^2=z^2, x^2+y^2=z,\ x=0, y=0, \mu=35yz,\ (x\geq 0, y\geq 0).$

7.25 $x^2+y^2+z^2=1, x^2+y^2=z^2,\ x=0, y=0, \mu=32z\ ,\ (x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0).$

Задача 8

Вычислить площадь поверхности σ, лежащей внутри поверхности P:

8.1 $\sigma: x^2+y^2=4z;\ \ P: x^2+y^2=4.$

8.2 $\sigma: x^2+y^2+z^2=2;\ \ P: x^2+y^2=z^2,\ \ (z\geq 0).$

8.3 $\sigma: \mathrm{z}=4-x^2-y^2;\ \ P: x^2+y^2=3.$

8.4 $\sigma: x^2+y^2+z^2=3;\ \ P: x^2+y^2=2,\ \ (z\geq 0).$

8.5 $\sigma: x^2+y^2+z^2=4;\ \ P: x^2+y^2=3z.$

8.6 $\sigma: x^2+y^2+z^2=2$; $P: x^2+y^2=z^2$, $(z\le 0)$.

8.7 $\sigma: z=-\sqrt{3-x^2-y^2}$; $P: x^2+y^2=2$.

8.8 $\sigma: x^2+y^2=z^2$; $P: z=2-x^2-y^2$, $(z\le 0)$.

8.9 $\sigma: x^2+y^2=z$; $P: x^2+y^2=1$.

8.10 $\sigma: z=\sqrt{8-x^2-y^2}$; $P: 2z=x^2+y^2$.

8.11 $\sigma: x^2+y^2+z^2=22$; $P: 2z=2+x^2+y^2$.

8.12 $\sigma: \mathrm{z}=\sqrt{x^2+y^2}$; $P: x^2+y^2=4$.

8.13 $\sigma: \mathrm{z}=4-2x^2-2y^2$; $P: x^2+y^2=1$.

8.14 $\sigma: \mathrm{z}=\frac{1}{8}\left(x^2+y^2\right)$; $P: x^2+y^2=16$.

8.15 $\sigma: x^2+y^2+z^2=26$; $P: 2z=x^2+y^2-2$.

8.16 $\sigma: z=\sqrt{32-x^2-y^2}$; $P: x^2+y^2-4z=0$.

8.17 $\sigma: 2z=x^2+y^2$; $P: x^2+y^2=8$.

8.18 $\sigma: x^2+y^2+z^2=32$; $P: 4z=-x^2-y^2$, $(z\le 0)$.

8.19 $\sigma: 4z+x^2+y^2=0$; $P: x^2+y^2=16$.

8.20 $\sigma: z=-\sqrt{8-x^2-y^2}$; $P: x^2+y^2=z^2$.

8.21 $\sigma: z=1+x^2+y^2$; $P: x^2+y^2=9$.

8.22 $\sigma: z=1-x^2-y^2$; $P: x^2+y^2=4$.

8.23 $\sigma: z=-\sqrt{12-x^2-y^2}$; $P: 4z=-x^2-y^2$.

8.24 $\sigma: z=\sqrt{18-x^2-y^2}$; $P: x^2+y^2=2$.

8.25 $\sigma: 2z=3-x^2-y^2$; $P: x^2+y^2=z^2$.

Задача 9

Вычислить работу, совершаемую переменной $\vec{F}\,(P,Q)$ силой на линии l:

9.1 $\vec{F}(-y;x)$; l – верхняя половина эллипса x=2cos$t$, y=3sin$t$, проходимая в положительном направлении.

9.2 $\vec{F}\,(x^2 - y;\, x + y);$ *l* – треугольник с вершинами *A(0,0), B(1,0), C(0,1)* обходимый в положительном направлении.

9.3 $\vec{F}\,(y; 2x);$ *l* – дуга $y=x^2$ от *A(1,1)* до *B(4,2)*.

9.4 $\vec{F}\left(\frac{y^2+1}{y}; -\frac{x}{y^2}\right)$; *l* – отрезок прямой от *A(1,2)* до *B(2,4)*.

9.5 $\vec{F}\,(2xy^3; 3x^2y^2);$ *l* – отрезок прямой от *A(1,2)* до *B(2,4)*.

9.6 $\vec{F}\left(\frac{y}{x^2+y^2}; \frac{-x}{x^2+y^2}\right)$ *l* – окружность $x=\cos t$, $y=\sin t$, проходимая в отрицательном направлении.

9.7 $\vec{F}\left(x^2 - y; y^2 - x\right)$; *l* – дуга $y = \frac{16}{9}x^2$ от *A(0,0)* до *B(3,4)*.

9.8 $\vec{F}\,(x - y; x + y)$; *l* - окружность $x=\cos t$, $y=\sin t$, проходимая в

отрицательном направлении.

9.9 $\vec{F}\left(y; \frac{x}{y}\right)$; *l* - дуга $y=e^{-x}$ от *A(0,1)* до *B(-1,e)*.

9.10 $\vec{F}\left(3x^2y; x^3 - 2\right)$, *l* – отрезок прямой от *A(1,1)* до *B(2,4)*.

9.11 $\vec{F}\left(x^2 + y^2; x^2 - y^2\right)$, *l* – $y=|x|$ от *A(-1,1)* до *B(2,2)*.

9.12; $\vec{F}\,(-y; x)$ *l* –дуга циклоиды $x=t - \sin t$, $y=1 - \cos t$ от *A(2π,0)* до *B(0,0)*.

9.13 ; $\vec{F}(x+y;x-y)$ l - окружность x = 4cos$t$, y = 4sin$t$, обходимая в положительном направлении.

9.14 ; $\vec{F}\left(x^2+y;y^2+x\right)$ l – ломаная *ACB*, где *A(1,2), B(3,5), C(3,2).*

9.15 $\vec{F}(-y;x)$; l – треугольник с вершинами *A(-2,0), B(2,0), C(0,2),* обходимый в положительном направлении.

9.16 $\vec{F}\left(y;xe^{x^3}\right)$; l - дуга $y=x^2$ от *A(0,0)* до *B(1,1).*

9.17 $\vec{F}\left(2xy;-x^2\right)$; l - дуга $x=2y^2$ от *O(0,0)* до *A(2,1).*

9.18 $\vec{F}\left(\frac{-y^2}{x^{5/3}+y^{5/3}};\frac{x^2}{x^{5/3}+y^{5/3}}\right)$; l –дуга астроиды x=8cos^3t, y=8sin^3t от *A(8,0)* до *B(0,8).*

9.19 $\vec{F}\left(x^2-y^2;xy\right)$; l – отрезок прямой от *A(1,1)* до *B(3,4).*

9.20 $\vec{F}\left((x-y)^2;(x+y)^2\right)$; l – ломаная *OAB,* где *O(0,0), A(2,0), B(4,2).*

9.21 $\vec{F}\left(-y;\frac{x}{y}\right)$; l - дуга $x=2e^{-x}$ от *A(0,2)* до *B(-1,2e).*

9.22 $\vec{F}\left(3x^2y+1;x^3-1\right)$; l – ломаная *OAB,* где *O(0,0), A(2,0), B(4,2).*

9.23 ; $\vec{F}\left(2xy^3;3x^2y^2\right)$ l - дуга $y=x^2$ от *O(0,0)* до *A(1,1).*

9.24 $\vec{F}\left(\frac{y}{x^2+y^2};\frac{-x}{x^2+y^2}\right)$; l - дуга $x=y^2$ от *A(1,1)* до *B(4,2).*

9.25 $\vec{F}\left(2xy^3;3x^2y^2\right)$; l – линия $y = |x|$ от *A(-2;2)* от *B(1;1).*

Задача 10

Вычислить массу дуги материальной линии l с плотностью μ:

10.1 l: $y=x^{3/2}$ от $x=0$ до $x=5$; $\mu=2$.

10.2 l: $y=\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)$ от $x=0$ до $x=1$; $\mu=e^{x}$.

10.3 l: $x=8\sin t+6\cos t,\ y=6\sin t-8\cos t$ от $t=0$ до $t=\frac{\pi}{2}$; $\mu=3$.

10.4 l: $y=\sqrt{x^{3}}$ от $x=0$ до $x=1$; $\mu=\sqrt{4+9x}$.

10.5 l: $x=t-\sin t,\ y=1-\cos t$, от $t=0$ до $t=2\pi$; $\mu=1$.

10.6 l: $x^{2}+y^{2}=x$, $\mu=\sqrt{x^{2}+y^{2}}$.

10.7 l: $y^{2}=\frac{4}{9}x^{3}$ от $A(3;2\sqrt{3})$ до $B(8;\frac{32\sqrt{2}}{3})$; $\mu=\sqrt{x^{2}+y^{2}}$.

10.8 l: $y=\ln x$ от $A(1;0)$ до $B(e;1)$; $\mu=x^{2}$.

10.9 l: $x=\cos t,\ y=\sin t$ от $t=0$ до $t=\pi$; $\mu=x^{2}$.

10.10 l: $y=2\sqrt{x^{3}}$, от $x=0$ до $x=1$; $\mu=\frac{1}{2}x$.

10.11 l: $x=\cos t,\ y=\sin t$ от $t=0$ до $t=\frac{\pi}{2}$; $\mu=y^{2}$.

10.12 l: $y=2\ln x$ от $x=1$ до $x=2$; $\mu=x^{4}$.

10.13 l: $y=\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)$ от $x=0$ до $x=1$; $\mu=e^{-x}$.

10.14 l: $x=2\cos t,\ y=2\sin t$ от $t=0$ до $t=\pi$; $\mu=\frac{3}{2}x$.

10.15 l: $y=3-\ln x$ от $x=1$ до $x=e$; $\mu=\sqrt{x^{2}+1}$.

10.16 l: $x=2\cos t,\ y=\sin t$ от $t=0$ до $t=\frac{\pi}{2}$; $\mu=xy$.

10.17 $l:\ y=\frac{3}{2}+2\ln x$ от $x=1$ до $x=2$; $\mu=x^2$.

10.18 $l:\ y=\frac{1}{2}x-2$ от $x=0$ до $x=4$; $\mu=\frac{1}{x-y}$.

10.19 $l:\ x=\cos t, y=2\sin t$ от $t=0$ до $t=\frac{\pi}{2}$; $\mu=y$.

10.20 $l:\ y=\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)$ от $x=0$ до $x=1$; $\mu=e^{2x}$.

10.21 $l:\ x=\cos^3 t, y=\sin^3 t$ от $t=0$ до $t=\frac{\pi}{2}$; $\mu=\sin t$.

10.22 $l:\ y=2\sqrt{x^3}$ от $x=0$ до $x=1$; $\mu=(1+9x)$.

10.23 $l:\ y=1-\frac{3}{2}\ln x$ от $x=1$ до $x=e$; $\mu=2x^2$.

10.24 $l:\ y=8x-5$ от $x=2$ до $x=3$; $\mu=\frac{1}{2x-1}$.

10.25 $l:\ x=3\cos t, y=3\sin t$ от $t=0$ до $t=\pi$; $\mu=\frac{1}{9}x^2$.

Задача 11

Восстановить функцию по ее полному дифференциалу, предварительно убедившись, что она существует:

11.1 $\left(2xy\text{-}\frac{1}{x^2}\right)dx+\left(x^2-\frac{2}{y^3}\right)dy$

11.2 $\left(\frac{2}{x^2}+\cos^2 y\right)dx+\left(y-x\sin 2y\right)dy$

11.3 $\left(\ln y+\frac{y}{x}-x\right)dx+\left(\ln x+\frac{x}{y}+1\right)dy$

11.4 $\left(\frac{1}{x-1}+\frac{\cos x}{y-1}\right)dx+\frac{1-\sin x}{(y-1)^2}dy$

11.5 $\left(2\cos 2x\cos 3y-\frac{1}{x}\right)dx+\left(\frac{2}{y}-3\sin 2x\sin 3y\right)dy$

11.6 $\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y}\right)dx+\frac{1-x}{y^2}dy$

11.7 $\left(e^{-x}-\frac{2}{yx^3}\right)dx+\left(\sin 3y-\frac{1}{x^2y^2}\right)dy$

11.8 $\left(\frac{1}{x+y}+2\right)dx+\left(\frac{1}{x+y}-3\right)dy$

11.9 $\frac{1\text{-}2y}{x^2y}dx+\frac{1-x}{xy^2}dy$

11.10 $(x+y\sin^2 2)dx+(1+x\sin^2 y+xy\sin 2y)dy$

11.11 $(2xe^{xy}+x^2ye^{xy})dx+\left(x^3e^{xy}+\frac{1}{y^2}+x^2\right)dy$

11.12 $\left(\frac{\sin y}{x+y}-\frac{x\sin y}{(x+y)^2}\right)dx+\left(\frac{x\cos y}{x+y}-\frac{x\sin y}{(x+y)^2}\right)dy$

11.13 $\left(\frac{y-x}{(x+y)^3}-\frac{y}{x^2}\right)dx+\left(\frac{1}{x}+2y-\frac{2x}{(x+y)^3}\right)dy$

11.14 $(2xe^y+ye^x+y)dx+(x^2e^y+e^x+x)dy$

11.15 $\left(3x^2y-ye^{xy}-\frac{y^2}{x^2}\right)dx+\left(\frac{2y}{x}+x^3-xe^{xy}\right)dy$

11.16 $(2ye^x-y^2e^x-2xy^2)dx+(2e^x-2ye^x-2yx^2)dy$

11.17 $(2x\sin y-y^3-y\sin x)dx+(x^2\cos y-3xy^2+\cos x)dy$

11.18 $(3e^{x+y}-3x^2y^2+2xy)dx+(3e^{x+y}-2x^3y+x^2+\cos y)dy$

11.19 $\left(\cos y-\frac{6}{x^3y^2}+10x\right)dx+\left(-\frac{6}{x^2y^3}-x\sin y\right)dy$

11.20 $\left(\frac{2x}{y^3}+ye^x+y^2\right)dx+\left(e^x-\frac{3x^2}{y^4}+2xy\right)dy$

11.21 $(2x+4y-ye^{xy})dx+(4x+10y-xe^{xy})dy$

11.22 $\left(\frac{3x^2}{y}+4e^{x+y}-y^2\right)dx+\left(4e^{x+y}-\frac{x^3}{y^2}-2xy\right)dy$

$$11.23\quad \left(2x-\frac{2}{(x+y)^2}-\sin y\right)dx+\left(\frac{-2}{(x+y)^2}-x\cos y\right)dy$$

$$11.24\quad \left(y-y\sin x+\frac{1}{(x+y)^2}\right)dx+\left(\cos x+x+\frac{1}{(x+y)^2}\right)dy$$

$$11.25\quad \left(2xy-\frac{y}{x^2}\right)dx+\left(x^2-2e^y+\frac{1}{x}\right)dy$$

Список литературы

1. Н.С. Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. М.: Наука, 1970.Т II.
2. А.Ф. Бермант, И.Г. Араманович. Краткий курс математического анализа для втузов. М.: Наука, 1967.
3. П.Е. Данко, А.Г. Попов. Высшая математика в упражнениях и задачах. М.: Высш. шк., 1974.
4. А.А. Гусак. Пособие к решению задач по высшей математике. Минск, 1973.
5. Сборник задач по курсу высшей математики / Под редакцией Г.Н. Кручковича. М.: Высш. шк., 1973.
6. Л.А. Кузнецов. Сборник заданий по высшей математике. М.: Высш. шк., 1983.