

Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

«Омский государственный технический университет»

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методические указания для дистанционного обучения
студентов 1-2 курса

Омск – 2005

Составители: Соколовский Мирон Наумович, доцент;
Цветкова Валентина Дмитриевна, ст.преподаватель

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 1

Основы статистического описания

Порядок выполнения работы

1. Упорядочить выборку (таблица 1).
2. Построить эмпирическую функцию распределения и гистограмму.
3. Найти выборочные математическое ожидание, дисперсию, коэффициент асимметрии и эксцесс, выборочную медиану.
4. Составить отчет, в котором привести расчетную таблицу 2, график эмпирической функции распределения, гистограмму и вычисленные значения выборочных числовых характеристик.
5. Ответить устно на контрольные вопросы.

Упорядочение выборки

Упорядочение выборки удобно сделать следующим образом: выписать все выборочные значения x_i (на отдельную карточку); расположить карточки в порядке возрастания выборочных значений.

В дальнейшем под номером выборочного значения будет пониматься номер после упорядочения.

Построение эмпирической функции распределения и гистограммы

Полагая вероятность каждого значения x_i равной $1/n$, получим распределение выборки. **Эмпирическая функция распределения** или функция распределения выборки $F^*(x)$ тогда будет определяться следующим образом:

$$F^*(x) = n_x / n, \quad (1)$$

где n - объем выборки, n_x - число выборочных значений, меньших x .

При большом объеме ($n \geq 50$) выборку целесообразно предварительно подвергнуть **группировке** следующим образом.

Построить интервал, содержащий все выборочные значения, левый и правый концы этого интервала – приближенные (с малым числом значащих цифр) значения наименьшего и наибольшего элементов выборки, причем в первом случае приближение берется с недостатком, а во втором – с избытком.

Полученный интервал разделить на m равных частей (интервалов), заботясь при этом (для упрощения вычислений) о том, чтобы границы интервалов были числами с малым количеством значащих цифр.

Все расчеты удобно оформить в виде таблицы 2. Выбрав число интервалов $m = 20$ (оно в процессе обработки может быть изменено), обозначим границы $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(m)}$. Поместим значения границ в графу 2. Подсчитаем число элементов n_i выборки, попавших в i – й интервал. Может случиться, что отдельные значения x_i совпадут со значениями границ некоторых интервалов.

Таблица 1

2,551 016	1,182 147	0,784 914	0,543 969	0,370 497
0,123 475	0,028 970	1,514 199	0,938 832	0,644 410
0,294 172	0,172 712	0,071 059	2,269 003	1,143 489
0,529 767	0,359 708	0,226 162	0,116 188	0,022 701
0,912 381	0,627 765	0,432 929	0,284 614	0,644 831
0,108 985	0,016 493	1,391 414	0,887 003	0,611 552
2,075 379	1,107 083	0,744 048	0,515 881	0,349 101
0,275 199	0,157 049	0,057 722	1,927 765	1,072 682
0,502 296	0,338 672	0,209 119	0,101 864	0,010 347
0,862 617	0,595 748	0,409 327	0,265 924	0,149 362
1,808 440	1,040 075	0,705 673	0,489 001	0,328 414
0,094 823	0,004 260	1,288 835	0,839 146	0,580 335
0,256 785	0,141 768	0,044 663	1,708 286	1,099 087
0,475 982	0,318 322	0,193 528	0,087 860	3,666 642
0,816 525	0,565 292	0,386 585	0,247 778	0,144 266
1,621 985	0,979 563	0,669 527	0,463 229	0,308 390
0,080 974	2,740 878	1,200 742	0,794 363	0,550 603
0,238 898	0,126 852	0,031 872	1,546 169	0,951 370
0,450 731	0,298 613	0,176 366	0,074 163	2,383 084
0,773 600	0,536 252	0,364 641	0,230 143	0,119 526
1,478 563	0,924 394	0,635 357	0,438 479	0,288 987
0,067 429	2,156 978	1,123 547	0,753 194	0,522 222
0,221 509	0,112 284	0,019 357	1,417 563	0,898 534
0,426 461	0,279 507	0,160 612	0,060 761	1,991 291
0,733 434	0,508 501	0,343 442	0,212 993	0,105 125
1,361 986	0,837 702	0,802 959	0,414 671	0,270 168
0,054 165	1,860 452	1,054 846	0,714 200	0,495 074
0,204 591	0,098 048	0,007 049	1,310 953	0,849 819
0,403 098	0,620 967	0,145 245	0,047 639	1,752 317
0,695 695	0,481 930	0,322 938	0,196 300	0,091 049
1,263 774	0,826 816	0,572 158	0,391 737	0,251 900
0,041 180	1,660 161	0,992 954	0,677 647	0,469 056
0,188 118	0,084 128	3,014 916	1,219 908	0,804 629
0,380 578	0,242 962	0,234 861	0,644 572	0,764 142
1,449 796	0,065 355	0,217 582	0,421 017	0,724 561
1,338 022	0,051 159	0,200 768	0,389 853	0,687 338
1,243 237	0,038 235	0,184 395	0,375 517	0,662 208
1,160 953	0,025 573	0,168 440	0,353 952	0,618 948
1,088 252	0,013 163	0,152 881	0,333 106	0,587 369
1,023 134	0,000 994	0,137 701	0,312 933	0,557 309

Таблица 2

№ п/п	Ј (до объеди- нения)	n_i (до объе- ди- не- ния)	Ј (после объеди- нения)	n_i (пос- ле объе- дине- ния)	P_i^*	\tilde{x}_i	$F^*(\tilde{x}_i)$	$\tilde{x}_i P_i^*$	$\tilde{x}_i^2 P_i^*$	$\tilde{x}_i^3 P_i^*$	$\tilde{x}_i^4 P_i^*$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	(0,000-0,185)	50	(0,000-0,185)	50	0,252525	0,092500	0	0,023358	0,002161	0,000200	0,000018
2	(0,185-0,370)	38	(0,185-0,370)	38	0,191919	0,277500	0,252525	0,653258	0,014779	0,004101	0,001138
3	(0,370-0,555)	28	(0,370-0,555)	28	0,141414	0,462500	0,444444	0,665404	0,030249	0,013990	0,006470
4	(0,555-0,740)	22	(0,555-0,740)	22	0,111111	0,647500	0,585858	0,071944	0,046584	0,030163	0,019530
5	(0,740-0,925)	17	(0,740-0,925)	17	0,085859	0,832500	0,696969	0,071478	0,059505	0,049538	0,041240
6	(0,925-1,110)	11	(0,925-1,295)	20	0,101010	1,110000	0,782228	0,112121	0,124454	0,138144	0,153340
7	(1,110-1,295)	9		14	0,070707	1,572500	0,883838	0,111187	0,174841	0,274937	0,432339
8	(1,295-1,480)	7	(1,850-2,775)	9	0,045454	2,312500	0,954545	0,105119	0,243072	0,562104	1,299866
9	(1,480-1,665)	4									
10	(1,665-1,850)	3									
11	(1,850-2,035)	3									
12	(2,035-2,220)	2									
13	(2,220-2,405)	2									
14	(2,405-2,590)	1									
15	(2,590-2,775)	1									
16	(2,775-2,960)	0									
17	(2,960-3,145)	1									
18	(3,145-3,330)	0									
19	(3,330-3,515)	0									
20	(3,515-3,700)	1									

В таких случаях поступают различными способами: а) уславливаются все такие элементы совокупности относить либо к правому, либо к левому интервалу; б) эти элементы учитываются и в левом и в правом интервале, полагая, что в каждый интервал попало по 1/2 элемента. Значения n_i поместим в графу 3.

Интервалы, в которые попадает малое число элементов (концевые), рекомендуется объединить. Для построения гистограммы желательно, чтобы число элементов в каждом интервале было не меньше 10, а число интервалов не меньше 8. Уточненные границы интервалов поместим в графу 4, а число элементов, попавших в каждый интервал после уточнения границ, в графу 5.

Обозначим середины полученных интервалов через \tilde{x}_i и поместим эти значения в графу 7.

Замечание. При малом объеме выборки в качестве \tilde{x}_i будет выступать сами выборочные значения, которые поместим в графу 7. При этом графы 2-5 не заполняются.

Определим частоту попадания выборочных значений в i -й интервал:

$$P_i^* = n_i / n, \quad (2)$$

где n_i – число элементов, попавших в i -й интервал, n – объем выборки. Полученные значения P_i^* поместим в графу 6. Их можно проверить, вычислив сумму частот $\sum_{i=1}^{m_1} P_i^*$, где m_1 – число уточненных интервалов. Эта сумма должна быть равна единице.

Замечание. При малом объеме выборки частота каждого выборочного значения постоянна и равна $1/n$.

Эмпирическая функция распределения строится как функция распределения выборки $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{m_1}$, причем значение \tilde{x}_1 повторяется n_1 раз, \tilde{x}_2 – n_2 раза и т. д. (все элементы исходной выборки, попавшие в i -й интервал, заменены на \tilde{x}_i).

Очевидно, что для всех $x \in (\tilde{x}_{i-1}, \tilde{x}_i]$, $2 \leq i \leq m_1$,

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \frac{n_1 + n_2 + \dots + n_{i-1}}{n} = \frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + \dots + \frac{n_{i-1}}{n}.$$

Таким образом, $F^*(x) = \sum_{s=1}^{i-1} P_s^*$, $x \in (\tilde{x}_{i-1}, \tilde{x}_i]$. (3)

Кроме того, $F^*(x) = 0$ при $x \leq \tilde{x}_1$ и $F^*(x) = 1$ при $x > \tilde{x}_{m_1}$.

Значения $F^*(x_i)$ можно поместить в графу 8. Пример графика эмпирической функции распределения представлен на рисунке 1. Доказано, что эмпирическая функция распределения, построенная по всей выборке, сходится по вероятности к функции распределения генеральной совокупности при $n \rightarrow \infty$. Но и эмпирическая функция распределения, построенная по группированной выборке, дает достаточно хорошее представление о функции распределения генеральной совокупности.

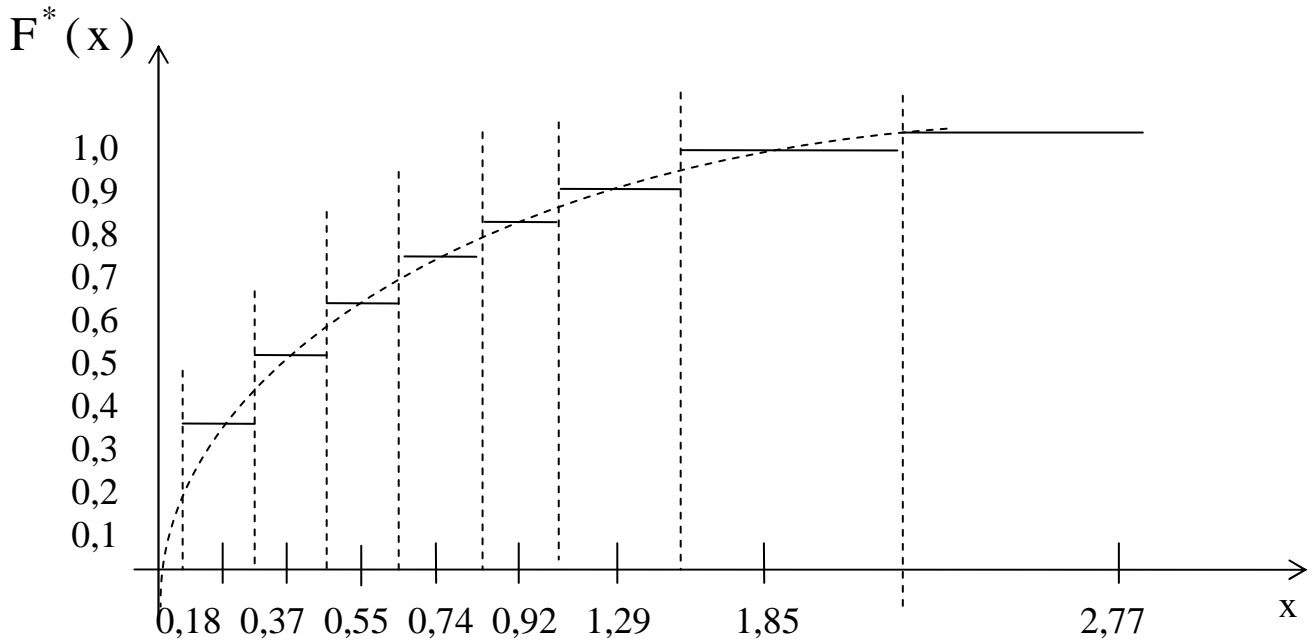


Рисунок 1

Если рассматривается выборка из генеральной совокупности значений непрерывной случайной величины, то можно для более наглядного представления о функции распределения генеральной совокупности построить ломаную, соединив точки $(x^{(i)}, F^*(x^{(i)}))$ (рис. 1, пунктирная линия).

Замечание. График эмпирической функции распределения можно построить непосредственно, взяв примерно двадцать идущих подряд элементов исходной (до упорядочения) выборки.

Гистограмма строится по группированной выборке следующим образом: над каждым интервалом (графа 4) строим прямоугольник, площадь которого равна частоте попадания в данный интервал, т. е. высота прямоугольника равна частоте, деленной на длину соответствующего интервала (рис. 2).

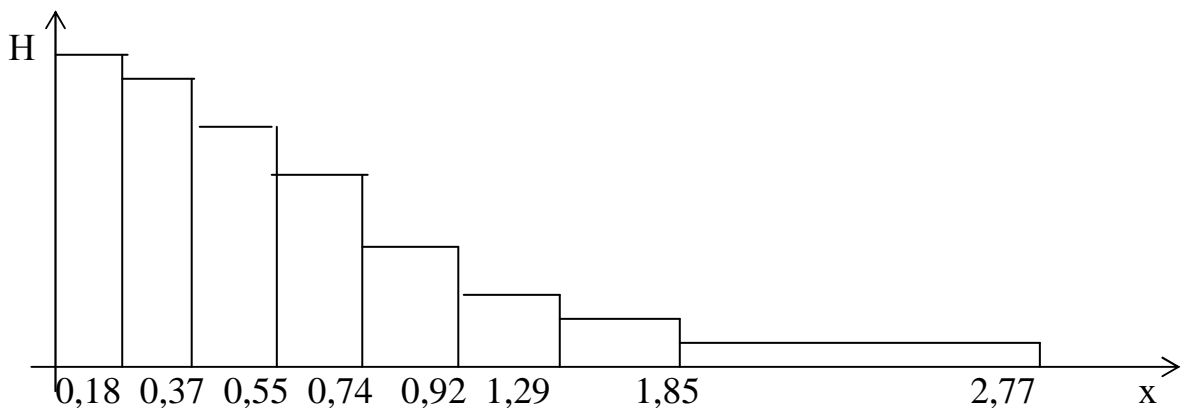


Рисунок 2

Плавная кривая, проведенная по средним точкам верхних оснований прямоугольников гистограммы для выборки из генеральной совокупности значений

непрерывной случайной величины, дает представление о графике плотности распределения генеральной совокупности.

Замечание. При построении плавной кривой не следует стремиться проводить ее строго через средние точки оснований, так как число элементов, попадающих в каждый интервал, является случайным, и даже в том случае, когда исследуемая случайная величина строго следует закону распределения, характеризующему плотностью вероятности $f(X)$, эти точки не совпадут точно с точками теоретической кривой.

Нахождение числовых характеристик выборки

Среднее значение выборки вычисляется по формуле

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{m_1} \tilde{x}_i \cdot P_i^* , \quad (4)$$

где \tilde{x}_i – середины уточненных интервалов (табл. 2, гр. 7), P_i^* – частоты попадания в i -й интервал (гр. 6). Промежуточные результаты $\tilde{x}_i \cdot P_i^*$ можно поместить в графу 9.

Выборочная дисперсия вычисляется по формуле

$$S^2 = \sum_{i=1}^{m_1} (\tilde{x}_i - \bar{x})^2 \cdot P_i^* \quad (5)$$

или

$$S^2 = \sum_{i=1}^{m_1} \tilde{x}_i^2 \cdot P_i^* - \bar{x}^2 . \quad (6)$$

Промежуточные значения $\tilde{x}_i^2 \cdot P_i^*$ можно поместить в графу 10.

Выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесс вычисляются по формулам

$$A^* = \frac{m_3}{S^3}; \quad E^* = \frac{m_4}{S^4} - 3, \quad (7)$$

где m_3, m_4 – выборочные центральные моменты 3 и 4-го порядка соответственно:

$$m_3 = \sum_{i=1}^{m_1} (\tilde{x}_i - \bar{x})^3 \cdot P_i^*, \quad m_4 = \sum_{i=1}^{m_1} (\tilde{x}_i - \bar{x})^4 \cdot P_i^* \quad (8)$$

или

$$m_3 = \sum_{i=1}^{m_1} \tilde{x}_i^3 \cdot P_i^* - 3\bar{x} \sum_{i=1}^{m_1} \tilde{x}_i^2 \cdot P_i^* + 2\bar{x}^3 , \quad (9)$$

$$m_4 = \sum_{i=1}^{m_1} \tilde{x}_i^4 \cdot P_i^* - 4\bar{x} \sum_{i=1}^{m_1} \tilde{x}_i^3 \cdot P_i^* + 6\bar{x}^2 \sum_{i=1}^{m_1} \tilde{x}_i^2 \cdot P_i^* - 3\bar{x}^4 \quad (10)$$

Промежуточные значения $\tilde{x}_i^3 \cdot P_i^*$, $\tilde{x}_i^4 \cdot P_i^*$ можно поместить в графы 11 и 12.

Замечание. Более точными будут выборочные характеристики, полученные по всей выборке. Например,

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (11)$$

Аналогично вычисляются значения S^2 , A^* , E^* .

Выборочная медиана M_e^* может быть определена по всей упорядоченной выборке следующим образом: если объем выборки n - нечетное число, то

$$M_e^* = x_{[n/2]+1}; \quad (12)$$

если n четное, то

$$M_e^* = \frac{1}{2} [x_{[n/2]} + x_{[n/2]+1}], \quad (13)$$

где $[n/2]$ - целая часть $n/2$.

Для выборки из генеральной совокупности значений непрерывной случайной величины выборочная медиана может быть определена по графику эмпирической функции распределения как абсцисса точки с ординатой $1/2$.

Найденные числовые характеристики выборки могут служить оценками соответствующих характеристик генеральной совокупности.

Пример выполнения и оформления лабораторной работы

Дана выборка, содержащая двести элементов (табл.1). Упорядочим выборку. Наименьшее число равно 0,000 994, наибольшее 3,666 642. Интервал $(0,000; 3,700)$ разделим на 20 равных частей. Границы интервалов занесем в графу 2 таблицы 2.

Число элементов, попавших в i -й интервал, занесем в графу 3. Два числа - 3,014 916, 3,666 642, резко отличающиеся от других и полученные, видимо, за счет грубых ошибок опыта, можно отбросить. Таким образом, $n = 198$.

Объединим интервалы так, чтобы новые интервалы содержали не менее 8-10 элементов. Новые границы интервалов, а также число элементов, попавших в уточненные интервалы, поместим в графы 4 и 5. В графу 6 поместим частоты попаданий в каждый интервал. Далее таблица 2 заполняется в соответствии с описанием работы.

По полученным данным строится график эмпирической функции распределения (рис.1) и гистограмма (рис.2).

По формулам (4), (6), (7) вычисляются выборочные среднее, дисперсия, коэффициент асимметрии и эксцесс.

Предварительно удобно вычислить следующие суммы:

$$d_1 = \sum_{i=1}^{m_1} \tilde{x}_i \cdot P_i^* = 0,613\ 862; \quad d_3 = \sum_{i=1}^{m_1} \tilde{x}_i^3 \cdot P_i^* = 1,073\ 177;$$

$$d_2 = \sum_{i=1}^{m_1} \tilde{x}_i^2 \cdot P_i^* = 0,695645; \quad d_4 = \sum_{i=1}^{m_1} \tilde{x}_i^4 \cdot P_i^* = 1,953941.$$

Тогда $\bar{x} = d_1 = 0,613\ 862$.

$$S^2 = d_2 - \bar{x}^2 = 0,318\ 818; \quad S = \sqrt{S^2} = 0,564\ 640;$$

$$m_3 = d_3 - 3\bar{x}d_2 + 2\bar{x}^3 = 1,020\ 170; \quad m_4 = d_4 - 4\bar{x}d_3 + 6\bar{x}^2d_2 - 3\bar{x}^4 = 0,465\ 641;$$

$$A^* = \frac{m_3}{S^3} = 5,666\ 493; \quad E^* = \frac{m_4}{S^4} - 3 = 1,581\ 046.$$

Выборочную медиану M_e^* определим по графику эмпирической функции распределения: $M_e^* = 0,45$.

Контрольные вопросы

1. Разъясните понятия: генеральная совокупность, случайная выборка, оценка.
2. Что такое эмпирическая функция распределения и как она вычисляется по данным выборки ?
3. Что такое гистограмма распределения и как она строится по данным выборки ?
4. Какие оценки параметров называются точечными ?
5. Что такое состоятельность, эффективность и несмещенность точечных оценок?
6. В чем состоит метод моментов определения точечных оценок ?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 2

Проверка статистической гипотезы о законе распределения генеральной совокупности по выборке

Порядок выполнения работы

1. Для заданного статистического материала построить гистограмму и выдвинуть гипотезу о законе распределения генеральной совокупности.
2. Найти оценки неизвестных параметров распределения.
3. Проверить выдвинутую гипотезу по критерию χ^2 на уровнях значимости $\alpha = 0,05$; $\alpha = 0,01$.
4. Составить отчет, в котором привести графическое изображение исходной выборки в виде гистограммы или эмпирической функции распределения, расчетную таблицу, результаты проверки гипотезы.
5. Ответить устно на контрольные вопросы.

Построение гистограммы и выдвижение гипотезы о распределении генеральной совокупности

Данная выборка подвергается группировке и по группированной выборке строится гистограмма. Процесс группировки и построения гистограммы описан в лаб. работе 1. По виду гистограммы выдвигается гипотеза о распределении генеральной совокупности.

Определение оценок параметров распределения

После выдвижения гипотезы о виде закона распределения определяем по группированной выборке оценки параметров распределения.

Например, для нормального закона требуется найти оценки математического ожидания и среднего квадратичного отклонения; для показательного закона – оценку параметра λ . Для большинства законов параметры либо являются математическим ожиданием и дисперсией, либо являются функциями этих числовых характеристик. Поэтому в подавляющем числе случаев для определения оценок параметров распределения достаточно определить оценки математического ожидания и дисперсии.

Оценки математического ожидания и дисперсии определяются по формулам

$$M^*[X] = \bar{x} = \sum_{i=1}^{m_1} P_i^* \tilde{x}_i ; \quad (1)$$

$$D^*[X] = S^2 = \sum_{i=1}^{m_1} \tilde{x}_i^2 P_i^* - \bar{x}^2 , \quad (2)$$

где m_1 – число уточненных интервалов, \tilde{x}_i – середины уточненных интервалов; P_i^* – частоты попадания в i -й интервал.

Замечание. Оценки параметров выборки, определенные по негруппированной выборке, будут более точными, но громоздкость вычислений не всегда оправдывается улучшением результата. При использовании ЭВМ оценки параметров рекомендуется определять по всей выборке.

Проверка согласия теоретического и статистического распределений

При построении гистограммы была выдвинута гипотеза о законе распределения генеральной совокупности. Назовем этот закон распределения теоретическим. Проверим его согласие с распределением выборки.

Сущность проверки статистической гипотезы заключается в том, чтобы установить, согласуются или нет данные наблюдения и выдвинутая гипотеза, можно ли расхождения между гипотезой и результатом выборочных наблюдений отнести за счет случайной погрешности, обусловленной механизмом случайного отбора. При этом критерии в задачах проверки гипотез о параметрах распределения называют критериями значимости, а в задачах проверки гипотез о законах распределения – критериями согласия.

Идея проверки статистической гипотезы состоит в следующем. Пусть H_0 - выдвинутая гипотеза, которую назовем **основной**, противопоставляя ее множеству H_a **альтернативных** гипотез. Для проверки основной гипотезы H_0 проводится опыт, результатом которого является величина Z , скалярная мера близости между гипотетическим и эмпирическим распределениями или между гипотетической и эмпирической характеристиками распределения. Z представляет собой одномерную величину, значения которой изменяются от опыта к опыту. Закон распределения Z предполагается известным. По заданному α ($\alpha \ll 1$) область значений Z можно разбить на две области: R_1 и R_2 . Область R_2 определяется из условия $P(Z \in R_2 / H_0) = \alpha$ и называется **критической** областью гипотезы H_0 на **уровне значимости** α . Таким образом, при условии справедливости гипотезы H_0 попадание величины Z в критическую область R_2 есть событие маловероятное, практически невозможное. Процедура проверки гипотезы заключается в следующем: по заданному уровню значимости α определяются R_1 и R_2 , затем проводится опыт. Если его результат $Z \in R_2$, т. е. произошло событие, практически невозможное при условии справедливости гипотезы H_0 , то **гипотеза H_0 отвергается на уровне значимости α** . Если $Z \notin R_2$, т. е. $Z \in R_1$, то **гипотеза H_0 не отвергается на уровне значимости α** . Стандартным значением для уровня значимости является одно из следующих значений: 0,05; 0,01; 0,001. Величина Z называется **критерием** проверки гипотезы H_0 .

Очевидно, что при такой проверке правильная гипотеза может быть отвергнута. Ошибка, заключающаяся в том, что **отвергается верная гипотеза**, называется **ошибкой первого рода**. Вероятность такой ошибки равна $P(Z \in R_2 / H_0) = \alpha$. Выбор малого α гарантирует, что ошибка первого рода будет совершаться редко.

Возможна еще **ошибка второго рода**, состоящая в том, что гипотеза H_0 , будучи **неверной, не отвергается**. Вероятность ошибки второго рода равна $P(Z \in R_1 / H_a) = \beta$. Величина $1 - \beta = 1 - P(Z \in R_1 / H_a) = P(Z \notin R_1 / H_a) = P(Z \in R_2 / H_a)$ называется **мощностью** критерия Z при заданном α . Для уменьшения вероятности ошибки второго рода или, что то же самое, для увеличения мощности критерия, вероятность $P(Z \in R_2 / H_a)$ должна быть возможно большей.

Таким образом, при выборе критической области R_2 будем руководствоваться следующими соображениями:

$$P(Z \in R_2 / H_0) = \alpha, \quad P(Z \in R_2 / H_a) = \max. \quad (3)$$

Процесс проверки статистической гипотезы сводится к следующему:

- выдвигается основная гипотеза H_0 и множество альтернативных гипотез H_a ;
- выбирается критерий, представляющий собой некоторую меру близости между гипотетическим и эмпирическим распределениями или между гипотетической и эмпирической характеристиками распределения;
- критерий выбирается так, чтобы его распределение было известно;
- назначается уровень значимости α и определяется критическая область R_2 ;
- производится опыт и по данным опыта (выборочным наблюдениям) вычисляется значение критерия $z_{\text{выб}}$;
- если $z_{\text{выб}} \in R_2$, то гипотеза H_0 отвергается, если $z_{\text{выб}} \in R_1$, то гипотеза H_0 не отвергается на уровне значимости α .

Из большого числа различных критериев чаще других используется **критерий согласия χ^2** , предложенный К. Пирсоном. В этом критерии в качестве меры расхождения теоретического и статистического распределений выбирается величина χ^2 , определяемая равенством

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m_1} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}, \quad (4)$$

где n – объем выборки; m_1 – число интервалов, на которые разбита выборка; n_i – число элементов выборки, попавших в i -й интервал; P_i – теоретическая вероятность попадания значений случайной величины в i -й интервал.

Вероятность P_i определяется в согласии с теоретическим законом распределения

$$P_i = F_T(x^{(i)}) - F_T(x^{(i-1)}), \quad (5)$$

или

$$P_i = \int_{x^{(i-1)}}^{x^{(i)}} f_T(x) dx, \quad (6)$$

где $x^{(i-1)}$, $x^{(i)}$ – границы i -го интервала.

Примеры

Пусть выдвинуты гипотезы о распределении генеральной совокупности:

$$1) \text{ по показательному закону } P_i = \int_{x^{(i-1)}}^{x^{(i)}} f_T(x) dx = \int_{x^{(i-1)}}^{x^{(i)}} \lambda^* e^{-\lambda^* x} dx = e^{-\lambda^* x^{(i-1)}} - e^{-\lambda^* x^{(i)}},$$

где λ^* - оценка параметра показательного закона распределения по выборке;
 $\lambda^{(*)} = 1/\bar{x}$. Здесь \bar{x} - оценка математического ожидания;

$$2) \text{ по нормальному закону } P_i = \Phi\left(\frac{x^{(i)} - \bar{x}}{S}\right) - \Phi\left(\frac{x^{(i-1)} - \bar{x}}{S}\right),$$

где \bar{x} - оценка математического ожидания, S^2 - оценка дисперсии по выборке.

$S = \sqrt{S^2}$ - оценка среднего квадратичного; $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ - функция Лапласа (табл. А1);

$$3) \text{ по закону Релея } P_i = \int_{x^{(i-1)}}^{x^{(i)}} f_r(x) dx = \int_{x^{(i-1)}}^{x^{(i)}} \frac{x}{\bar{a}^2} e^{-\frac{x^2}{2\bar{a}^2}} dx = e^{-\frac{(x^{(i-1)})^2}{2\bar{a}^2}} - e^{-\frac{(x^{(i)})^2}{2\bar{a}^2}},$$

где \bar{a} - оценка параметра закона Релея по выборке : $\bar{a} = \sqrt{2/\pi} \cdot \bar{x}$;

$$4) \text{ по равномерному закону } P_i = \int_{x^{(i-1)}}^{x^{(i)}} f_r(x) dx = \frac{x^{(i)} - x^{(i-1)}}{\bar{b} - \bar{a}},$$

где \bar{b} и \bar{a} - оценки крайних значений выборки, которые находятся из системы
 $\bar{x} = \frac{\bar{a} + \bar{b}}{2}$; $S^2 = \frac{(\bar{b} - \bar{a})^2}{12}$.

Случайная величина χ^2 , независимо от вида закона распределения генеральной совокупности, при достаточно больших n ($n \geq 50$) имеет распределение χ^2 с числом степеней свободы $k = m_1 - r - 1$, где m_1 - число интервалов, r - число параметров распределения, определенных по выборке.

Задаваясь **уровнем значимости** ($\alpha = 0,01; 0,05; 0,1$), по таблице А2 определим критическое значение χ_α^2 , такое, что $P(\chi^2 > \chi_\alpha^2) = \alpha$. При больших m_1 ($m_1 > 30$) χ^2 распределено асимптотически нормально и можно пользоваться таблицами нормального закона. Если $\chi^2 < \chi_\alpha^2$, то выдвинутая гипотеза о виде закона распределения генеральной совокупности не отвергается на уровне значимости α (гипотеза не противоречит опытным данным), если же $\chi^2 > \chi_\alpha^2$, то гипотеза отвергается на уровне значимости α .

Замечание. Критерий Пирсона обладает большей мощностью, если интервалы содержат примерно равное число элементов, при этом длины интервалов не обязательно должны быть равными. Поэтому при использовании критерия Пирсона нужно произвести новое разбиение данной выборки на интервалы, содержащие примерно равное число элементов.

Замечание. Все расчеты вести с тем количеством знаков, с каким даны значения случайной величины (можно добавить один дополнительный знак).

Пример выполнения и оформления лабораторной работы

Дана выборка, содержащая 200 элементов (см. лаб. раб. 1, табл. 1). Упорядочим выборку. Наименьшее число равно 0,000 9 94, наибольшее число равно 3,666 642. Интервал (0,0001; 3,700) разделим на 20 равных частей. Границы интервалов занесем в графу 2 таблицы 1. Число элементов, попавших в i -й интервал, занесем в графу 3. Два числа - 3,014 916, 3,666 642, резко отличающиеся от других и полученные, видимо, за счет грубых ошибок опыта, можно отбросить. Таким образом, $n = 198$. Объединим интервалы таким образом, чтобы новые интервалы содержали не менее 8-10 элементов. Новые границы интервалов, а также число элементов, попавших в уточненные интервалы, поместим в графы 4 и 5, в графу 6 поместим частоты попаданий в каждый интервал. По полученным данным построим гистограмму (см. лаб. раб. 1, рис.2.). Вид гистограммы дает право выдвинуть гипотезу о показательном распределении генеральной совокупности.

Оценку параметра показательного закона можно определить следующим образом: $\lambda^* = 1/\bar{x}$, где $\bar{x} = \sum_{i=1}^{m_1} x_i P_i^*$. $m_1 = 8$ - число уточненных интервалов.

Для удобства значения $\tilde{x}_i P_i^*$ поместим в графу 8, значения $\tilde{x}_i = \frac{x^{(i)} + x^{(i-1)}}{2}$ предварительно были помещены в графу 7. Оценка математического ожидания $\bar{x} = 0,613 862$, оценка параметра показательного закона $\lambda^* = 1,629 030 6$. Для вычисления величины χ^2 - меры расхождения теоретического и статистического распределений - вычислим теоретические вероятности попаданий значений случайной величины в i - й интервал по формуле (6). Значения $\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$ для каждого i занесем в графу 11. Вычисленное значение $\chi^2 = 0,519 65$.

В данном примере по выборке определен один параметр λ . Следовательно, $r = 1$ и число степеней свободы распределения $k = 8 - 1 - 1 = 6$. Зададимся уровнем значимости $\alpha = 0,1$. По таблице А2 находим $\chi_\alpha^2 = 10,64$. Вычисленное значение $\chi^2 = 0,519 65$ меньше $\chi_\alpha^2 = 10,64$, следовательно, гипотеза не отвергается с уровнем значимости $\alpha = 0,1$.

Контрольные вопросы

1. Что такое эмпирическая функция распределения, как она вычисляется по данным выборки?
2. Что такое гистограмма распределения, как она строится по данным выборки?
3. Объяснить содержательный смысл критерия χ^2 как меры близости эмпирического и теоретического распределений.
4. Как учитывается при пользовании критерием согласия χ^2 факт определения параметров теоретического распределения по данным выборки?
5. Почему при $\chi_{\text{выб}}^2 > \chi_\alpha^2$ гипотезу следует отбросить?

Таблица 1

№ п/п	J (до объединения)	n_i (до объединения)	J (после объединения)	n_i (после объединения)	P_i^*	\tilde{x}_i	$\tilde{x}_i P_i^*$		P_i	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	(0,000-0,185)	50	(0,000-0,185)	50	0,252 525	0,0925	0,233 585		0,244 485	0,052 3541
2	(0,185-0,370)	38	(0,185-0,370)	38	0,191 919	0,2775	0,053 2575		0,184 713	0,055 6801
3	(0,370-0,555)	28	(0,370-0,555)	28	0,141 414	0,4625	0,065 4039		0,139 554	0,004 9092
4	(0,555-0,740)	22	(0,555-0,740)	22	0,111 111	0,6475	0,071 9444		0,105 434	0,060 525
5	(0,740-0,925)	17	(0,740-0,925)	17	0,085 859	0,8325	0,071 4778		0,079 657	0,095 5973
6	(0,925-1,110)	11	(0,925-1,295)	11	0,101 010	1,11	0,112 1211		0,105 650	0,040 3464
7	(1,110-1,295)	9								
8	(1,295-1,480)	7								
9	(1,480-1,665)	4	(1,295-1,850)	14	0,070707	1,5725	0,111 1867		0,079 914	0,210 0245
10	(1,665-1,850)	3								
11	(1,850-2,035)	3								
12	(2,035-2,220)	2								
13	(2,220-2,405)	2	(1,850-2,775)	9	0,045454	2,3125	0,105 1123		0,045 678	0,000 2145
14	(2,405-2,590)	1								
15	(2,590-2,775)	1								
16	(2,775-2,960)	0								
17	(2,960-3,145)	1								
18	(3,145-3,330)	0								
19	(3,330-3,515)	0								
20	(3,515-3,700)	1								

$\bar{x} = 0,613 862 0$ $k = 8 - 1 - 1 = 6$
 $\lambda^* = 1,629 030 6$ $\chi^2_{\alpha} = 10,64$
 $\chi^2 = 0,519 65$

Исходные данные для лабораторных работ 1 и 2

Вариант № 1

1.3477	0.2103	0.1986	0.6075	0.1855	1.2369	0.6342	0.6085
0.1149	0.0589	2.4146	0.3616	0.0507	0.4288	0.5271	0.0256
0.0122	0.0372	3.1630	0.0052	0.1318	0.2368	0.3951	0.1228
1.2179	1.1764	0.7849	0.0127	1.1532	0.6347	0.3706	1.4618
0.6058	2.2735	0.9660	2.5070	1.2873	0.2850	0.4288	1.5013
0.6288	0.3467	0.0852	0.3289	0.8315	0.5832	0.9193	0.2175
0.7987	0.3619	0.9346	1.1240	2.0330	0.4499	0.8190	0.3876
1.5254	0.0460	0.2162	0.0940	0.3219	0.0553	0.5683	0.7826
0.1124	0.4599	0.8962	0.4216	0.5704	0.5462	0.0617	0.3739
1.1240	0.2457	0.8243	0.7718	2.2571	3.1750	0.1205	0.1577
0.2793	0.2657	0.3568	0.3157	0.5193	0.0412	0.0783	0.5974
0.3485	0.3693	0.1615	4.1198	0.6488	0.6333	0.3160	2.4637
0.3243	0.6258	1.0332	2.1218	0.5510	1.0726	0.2653	0.8948
0.5117	0.5252	0.4743	0.4009	0.4780	0.2046	1.9297	0.2017
0.0243	0.2475	0.4533	1.5822	1.0943	0.1892	0.0776	0.6677
0.0492	0.7961	0.7037	1.6622	0.6615	0.3959	0.1086	0.4650
2.1563	0.9641	0.0725	0.0578	0.1003	0.7716	0.5468	0.7078
0.9448	0.1065	0.8215	0.0667	2.3079	2.9904	0.2937	0.1147
0.2728	0.9434	0.4326	0.2749	2.9410	0.2141	0.1783	0.2735
0.1445	0.0090	0.1459	0.1555	0.4759	1.5617	0.8086	0.4629
0.0746	4.9853	1.2168	1.0016	0.8417	1.1090	0.2977	0.9793
0.9855	2.6596	0.6743	0.4680	0.0179	1.9120	0.4759	0.4485
0.8310	1.2612	0.1081	2.7027	1.4983	0.1689	0.4115	0.0489
0.5970	0.2522	1.3052	0.4892	0.1613	0.0472	2.6204	0.4666
0.4302	0.7117	0.1903	1.5936	1.1317	0.1480	0.9583	0.6624

Вариант № 2

0.3639	15.7043	15.8147	10.9448	12.8447	12.7036	10.5928	15.9408
17.8467	17.5426	9.1074	16.8199	17.9345	14.1755	12.7105	16.4833
10.6358	10.7336	11.9992	9.3556	17.8406	14.3568	12.7007	10.7907
12.8535	9.3731	11.3272	9.1465	9.2691	13.9372	15.0389	10.4843
12.7315	14.5391	16.9874	13.6222	14.6781	11.4847	12.9776	11.8096
11.9415	14.4223	11.4321	11.7697	10.8655	11.8593	13.7937	9.5225
10.0634	17.4378	15.6489	15.9054	16.8901	13.0613	17.3292	14.7345
16.6887	13.7271	11.5663	14.1702	13.9874	17.2542	13.1888	13.0493
10.8654	15.3801	11.8382	12.0552	12.0544	16.6025	9.1056	9.3818
15.0866	15.2036	14.4613	9.1367	14.7842	17.0645	17.4948	13.3497
14.5245	14.3665	16.1781	15.6683	9.0281	14.7821	12.7080	12.6286
14.7153	12.7473	11.1183	10.0108	9.4614	15.2069	11.0048	13.1608
13.3960	13.3140	13.6324	10.9050	14.1341	9.6038	15.7577	13.6088
17.6983	15.3642	13.7708	17.0728	9.9821	13.6738	13.6828	12.0089
17.3998	11.9523	12.3599	16.7297	9.8781	9.2046	12.8390	14.3314
9.4397	11.3336	17.1303	13.1852	17.3003	13.5367	17.6822	16.2167
11.3975	16.7524	11.8494	14.9654	17.1970	9.9666	16.5777	12.8995
15.1422	11.4021	13.9111	16.0113	15.1247	11.3525	10.1626	9.2859
16.3515	17.8863	16.3365	11.9010	16.2388	13.8029	10.1000	11.5713
17.1066	9.0083	10.6381	14.9322	11.2141	17.4039	15.6370	15.7857
11.2645	9.2173	12.5013	10.1046	16.1039	12.3228	14.2306	12.5337
11.8117	10.5395	16.7353	16.1804	17.4240	13.6220	15.1363	13.6934
12.9012	15.3221	10.4475	10.8456	16.3148	14.0612	13.7071	12.3407
17.7772	9.6189	15.8947	13.9279	12.5600	9.22 95	11.2844	16.6641

Вариант № 3

5.0507	1.9953	1.9391	3.3910	1.4591	2.950 5	4.1187	2.8250
1.4749	1.0564	6.7604	2.6163	4.6126	2.156 7	3.9500	3.8223
0.4818	0.8397	7.7376	0.3140	2.2995	2.242 8	2.5987	2.4447
4.8013	4.7188	3.8544	0.4914	2.5686	2.643 9	1.7487	8.8306
3.3864	6.5600	4.2762	6.8886	2.4777	3.441 7	4.4224	6.3373
3.4500	2.5617	1.2702	2.4954	3.1124	3.153 0	2.9965	2.7547
3.8883	2.6173	4.2059	4.6126	0.6789	2.164 5	2.9293	5.4725
5.3734	0.9338	2.0232	1.3339	0.9659	3.881 9	3.6498	5.6091
6.3886	4.2718	1.1721	1.0459	0.9624	4.6283	2.8490	3.0015
4.2289	1.4203	3.9432	1.1240	4.8859	2.8536	3.4610	2.7896
2.2726	4.2258	2.8617	2.2811	2.1851	1.8741	3.4662	7.0427
1.6538	0.4144	1.6622	1.7158	6.0159	0.9802	2.3226	3.4647
1.1888	9.7140	4.7992	4.3542	1.7884	1.5795	3.3225	3.1586
4.3191	7.0951	3.5726	2.9763	0.9456	4.6722	2.9183	2.7350
3.9660	1.5249	1.4308	7.1524	1.6742	4.9362	1.0232	2.6485

3.3618	5.2601	4.9704	3.0432	3.5410	2.9720	3.2156	2.8491
0.5821	5.3307	1.8980	5.4922	4.8386	3.3939	7.7522	4.1714
5.3255	2.0291	3.6703	4.2591	3.9673	0.6970	3.8487	3.9373
1.7474	2.7086	1.0813	2.9138	6.2033	2.3579	2.6606	3.2799
3.5385	1.2123	1.5104	2.0134	2.4685	1.8373	1.7278	0.8837
1.3784	1.4342	1.2180	5.4369	3.2860	3.9123	3.3627	3.4624
6.6094	3.2173	2.4457	4.5817	6.5363	2.3739	6.8288	4.5058
7.4610	3.8218	2.2412	3.2296	3.1353	3.6604	4.1155	1.9682
3.0015	7.5235	6.0437	3.0080	3.5044	1.4738	1.9539	1.8925
3.9915	4.3054	2.9668	4.5511	2.9602	2.2755	3.5551	2.7375

Вариант № 4

9.2123	13.9594	14.0575	11.4175	14.0575	12.8198	10.1618	10.1618
4.8100	15.3661	8.2722	12.8217	8.2722	15.5003	13.9101	13.9101
5.8637	15.5934	8.0954	15.9418	8.0954	12.2019	10.2811	10.2811
9.4540	9.5409	10.6659	15.8583	10.6659	13.6712	10.5228	10.5228
11.4254	8.3316	10.0686	8.2392	10.0686	13.5143	12.8545	12.8545
11.3168	12.9236	15.0999	13.0472	15.0999	12.7703	14.3805	14.3805
10.6147	15.0134	10.6242	9.6582	15.3781	11.3309	9.8829	9.8829
8.943	12.4332	10.0743	8.3908	15.2862	11.8347	12.1177	12.1177
14.834 4	10.7150	14.8920	10.1311	13.4442	13.6570	12.2407	12.2407
9.65 81	13.1415	10.1352	13.4598	14.4345	9.3684	10.9866	12.5637
13.4103	8.0250	15.8990	14.5347	9.9681	13.6197	15.2269	8.8730
12.9107	8.4101	8. 0074	15.2058	14.8758	8.5502	10.5328	8.7806
13.0802	12.1545	8.1932	10.0129	9.2867	14.3146	12.3654	8.9818
11.9076	8.1818	12.3888	10.4993	14.1286	15.4880	14.5213	14.3826
15.7318	12.0326	11.2983	11.4677	10.9536	14.5020	9.4561	9.64 05
15.4665	12.3804	12.6005	15.8019	12.1085	11.1644	11.1123	8.8592
10.4974	14.1696	12.7616	11.2895	12.4988	12.6495	14.7358	10.0911
8.4 644	15.4511	12.3886	13.3679	8.2 040	10.6745	9.0334	12.2692
13.0973	14.6518	10.2087	11.5357	11.2921	12.7391	8.9778	15.4702
11.5993	9.5 917	10.5416	12.2610	11.8247	14.4149	13.8996	12.1625
8.3393	9.3 193	8.0938	15.4038	8.1302	11.4662	11.6100	11.4124
11.8664	9.7287	15.5509	11.7233	12.1086	8.2541	15.3371	13.1397
11.2254	11.1686	11.2960	10.4620	14.1381	10.2856	14.7578	13.5172
11.6984	14.9510	9.7820	10.7157	12.5958	14.0317	15.1684	8.5367
12.0967	8.3160	14.0068	8.1215	13.9274	8.8985	9.6934	11.1411
12.1841	14.8125	11.7202	13.2731	14.2323	13.3025	15.1759	12.1719
10.0306	10.5786	13.4545	14.8708	10.9695	13.2731	10.0306	9.6934

Вариант № 5

0.8576	0.1338	0.1264	0.3865	0.1777	0.1691	0.2270	0.0367
0.0731	0.0375	1.5365	0.2301	0.2218	0.2350	0.1028	0.0424
0.0078	0.0237	2.0128	0.0033	0.2063	0.3982	0.6575	0.1749
0.7750	0.7486	0.4994	0.0081	0.3256	0.3342	0.3018	2.6216
0.3855	1.4468	0.6147	1.5953	0.0154	0.1575	0.2884	1.3502
0.4001	0.2206	0.0542	0.2093	0.0313	0.5066	0.4478	0.2551
0.5083	0.2303	0.5947	0.7153	1.3722	0.6135	0.0461	1.0069
0.9707	0.0293	0.1376	0.0598	0.6012	0.6782	0.5227	1.0577
0.0715	0.2926	0.5703	0.2683	0.1736	0.6003	0.2753	0.0475
0.7153	0.1563	0.5245	0.4912	0.0919	0.0057	0.0928	0.2009
0.6272	0.273 7	0.4215	0.0311	1.6675	1.6924	0.4291	0.0989
0.5288	0.118 0	0.7871	0.2969	0.4035	0.8026	0.0688	0.6374
0.3799	0.032 3	0.2728	0.3872	0.3354	0.1605	0.8306	0.2978
0.0113	0.9553	0.4027	0.0163	0.2514	1.2167	0.1211	1.7199
0.9535	0.1384	0.0838	0.0781	0.2358	0.1075	0.4529	0.3113
0.1026	0.2466	0.7339	0.9302	0.2729	0.0300	0.3028	1.0141
0.7201	0.4980	0.8192	0.2048	0.5850	0.0942	0.2616	0.6098
0.4128	0.0262	0.5291	0.3630	0.4039	0.0767	1.2280	0.0205
0.3506	0.4030	1.2937	1.4363	0.1813	0.0498	0.0494	0.3480
0.5211	0.6825	0.3042	0.3305	0.3711	0.2011	0.0691	0.1869
0.3616	0.1302	0.6963	0.0638	0.2863	0.1688	0.1003	0.5694
0.0393	0.1204	0.4209	1.4687	2.0352	0.2959	0.3801	0.1283
0.2379	0.2519	0.3028	1.8715	0.3476	0.4504	1.5678	0.4249
0.5356	0.7057	0.4910	0.1362	0.1134	0.6232	0.2946	0.0730
0.1894	1.9030	0.9938	0.1740	0.5146	0.7057	0.1894	0.6232

Вариант № 6

2.6955	0.4206	0.3973	1.2150	0.6486	1.2516	2.0665	4.2436
0.2298	0.117 9	4.8292	0.7232	1.0235	1.0504	0.9487	0.8018
0.0245	0.0745	6.3261	0.0104	0.0487	0.4950	0.9067	3.1645
2.4358	2.3528	1.5698	0.0255	0.0985	1.5923	1.4075	3.3244
1.2117	4.5471	1.9321	5.0140	4.3126	1.9282	0.1451	0.1156
1.2577	0.6934	0.1705	0.6579	1.8896	0.2131	1.6430	0.1335
1.5975	0.7238	1.8692	2.2481	0.5457	1.8869	0.8653	0.5498
3.0509	0.0921	0.4325	0.1880	0.2890	0.0181	0.2919	0.3110
0.2249	0.9198	1.792 5	10.432	0.1493	9.9707	2.4337	2.0033
2.2481	0.4914	1.6486	1.5437	1.9711	5.3192	1.3486	0.9360
0.5587	0.5315	0.7136	0.6315	1.6620	2.5225	0.2163	5.4054
0.6971	0.7386	0.3231	8.2395	1.1941	0.5045	2.6104	0.9785
2.2634	0.2636	1.2657	0.2961	0.0358	3.8241	0.3806	3.1873

0.8604	2.3065	1.2695	1.3249	2.9967	0.3379	1.4234	1.9167
0.3171	1.2684	0.8223	2.4738	0.3226	0.0944	0.9519	0.8971
0.1015	1.0542	5.2409	0.8576	0.7903	1.2171	0.9333	0.0978
2.5746	0.5700	6.3501	0.7412	1.6380	0.0513	0.7752	4.9274
1.6631	1.1664	0.0825	0.8577	1.1367	0.2457	1.5652	1.7897
4.0660	8.8998	1.2667	1.8386	0.1235	2.9236	0.7479	0.4034
0.6438	0.1106	2.1452	0.4093	0.2410	3.0026	0.3154	1.3355
1.1409	1.0925	0.5307	0.3784	0.1567	0.4350	1.1948	0.9300
1.0387	2.1886	3.8595	0.7918	0.6320	1.0937	0.2295	1.4157
1.2976	1.3230	0.1553	1.5433	5.9809	0.5874	0.5471	0.5954
1.1021	0.2007	0.2173	2.2181	0.4283	0.3567	0.9259	1.6835
0.9560	4.6159	5.8820	0.9519	3.1234	1.6173	1.9586	2.2181

Вариант № 7

5.7577	8.7246	8.7859	7.1359	7.0730	8.0772	9.4374	5.1495
9.2568	9.6038	5.1701	8.0135	6.6342	8.0124	6.3511	8.1545
9.9148	9.7459	5.0596	9.9636	5.5908	9.6876	8.6938	6.0363
5.9087	5.9631	6.6662	9.9114	9.2715	7.6262	6.4257	9.3834
7.1408	5.2073	6.2929	6.6968	9.8323	8.5356	7.6504	7.7708
6.0363	8.5445	6.5767	8.2134	9.6665	6.6401	6.8666	5.4878
8.3814	8.4464	8.0340	5.0156	5.2442	6.2964	9.5168	9.6113
8.0692	7.9814	8.8978	5.2563	6.3319	9.3069	6.5830	9.5539
8.1751	7.0818	6.1768	7.8523	8.4123	6.3345	7.7283	8.4026
7.4422	7.3966	7.5736	5.5456	9.0841	9.9368	9.0758	9.0215
9.5036	5.0046	5.9101	6.2301	6.0253	9.0637	7.8118	9.6688
6.2508	5.1207	6.9452	7.5965	7.7377	6.9777	5.1275	7.6015
6.5621	5.8552	9.2974	5.1136	8.8560	5.8849	7.0575	7.1327
7.1673	8.5123	5.8042	7.5204	9.6569	7.7430	7.3904	9.8234
9.8762	5.3438	8.8303	5.5370	9.1574	7.0614	7.8753	9.2098
5.6136	8.9466	6.8460	6.3069	5.9948	7.0559	7.7960	5.6459
8.9891	9.6800	7.5678	7.6683	5.8246	8.3549	7.7429	5.6111
6.5609	7.2098	6.3804	8.6872	7.4165	9.7193	9.4803	7.1663
5.2903	7.6631	6.5885	7.9059	7.0159	7.0600	8.2123	5.1588
8.1858	9.6273	7.2562	6.6716	7.3115	6.1137	8.4483	6.4285
7.2496	7.3271	9.5857	7.9619	7.5604	8.7543	5.3354	8.7698
5.2121	5.0586	9.2236	9.0093	6.0804	8.8363	9.4849	6.9632
6.9804	7.8723	9.2942	7.6074	5.1975	5.0759	8.3141	9.2578
9.3444	6.6973	7.3251	6.8559	5.0814	8.7046	8.8952	8.4090
7.5679	6.5387	5.5615	6.0583	6.6116	8.2956	7.6150	6.2691

Вариант № 8

5.8278	2.3022	2.2375	3.9127	5.3222	2.4885	4.5577	4.4103
1.7018	1.2189	7.8005	3.0188	2.6533	2.5879	2.9985	2.8208
0.5560	0.9689	8.9280	0.3624	2.9638	3.0506	2.0177	10.1891
5.5399	5.4448	4.4474	0.5670	2.8589	3.9713	5.1028	7.3123
3.9074	7.5692	4.9341	7.9484	3.5912	3.6381	3.4575	3.1785
3.9808	2.9558	1.4657	2.8793	0.7834	2.4975	3.3800	6.3145
4.4865	3.0200	4.8530	5.3222	1.1145	4.4792	4.2113	6.4721
6.2001	1.0774	2.3344	1.5391	4.929 1	1.3524	1.2069	1.6509
1.6835	3.4044	4.7524	3.2596	4.9836	5.6376	3.8790	5.7351
7.3715	1.6388	4.5499	1.2969	4.5761	2.5212	0.6717	2.1900
4.8795	4.8759	3.3019	2.6321	2.0635	6.9414	6.1448	8.2528
2.6223	0.4782	1.9179	1.9798	1.0910	4.2349	4.9143	3.5114
1.9083	11.2085	5.5376	5.0241	1.9317	3.4633	3.3621	6.3372
1.3717	8.1866	4.1222	3.4342	2.0163	3.2188	1.1105	5.3403
3.2926	4.0858	8.1262	3.4292	3.2874	6.1508	7.5419	4.5430
2.1624	5.5830	3.9977	3.9161	4.8137	2.3413	3.6177	3.7845
1.1310	3.2873	3.64 6	0.8043	5.6956	3.3672	4.0435	1.2477
1.8225	3.9935	3.155 7	1.7595	4.5776	1.1806	3.7265	1.7427
5.3910	3.9995	3.0560	6.0693	7.1576	3.7103	3.4707	1.4054
3.9951	2.6799	3.8800	3.0699	2.8483	8.9449	3.1254	2.8220
5.1990	3.8337	7.8794	1.9936	3.7916	1.0196	4.4409	2.5861
5.2513	2.2710	6.9735	4.7487	3.423 2	2.6256	3.7123	4.5142
4.0829	2.1836	1.3988	2.2545	4.2235	3.4156	2.7207	2.7391
1.5905	3.1586	1.6549	4.1021	1.700 5	4.9678	2.1200	4.4098
8.6809	2.3232	6.2734	5.2866	7.6263	0.6089	3.4632	4.6056

Вариант № 9

14.9701	22.6840	22.8435	18.5535	21.2554	18.4128	19.6913	24.9894
24.0677	24.9699	13.4424	20.8353	19.3499	19.2314	19.8912	24.8401
25.7786	25.9333	13.1551	25.9054	25.5642	22.1927	17.8532	21.8468
15.3628	15.5041	17.3322	25.7698	25.1331	17.2644	24.7437	23.4561
18.5662	13.5389	16.3615	13.3887	13.6351	16.3708	17.1158	16.1982
18.3899	21.0009	24.5374	21.2018	16.4631	24.1980	20.0938	19.7511
17.2489	20.8322	16.5130	15.6946	21.8721	16.4697	23.5971	13.2955
14.5361	25.1880	22.6039	24.3969	23.6188	25.8358	15.3662	19.5530
24.1059	19.8281	16.7068	20.2041	24.7095	13.0121	18.0575	14.3963
15.6945	22.2157	17.0996	17.4119	16.2710	13.3139	24.1732	16.3981
21.7918	21.9608	20.8886	21.3550	17.0614	15.2237	15.0909	19 9376
20.9799	20.7514	23.3684	13.0406	18.6351	22.1320	22.9590	25.1390
20.1181	15.3008	16.0597	13.6665	25.6781	13.8940	17.7996	19.7641
23.0257	20.1318	19.2151	20.4160	14.5955	23.2612	19.6763	18.5452

25.1081	18.3597	20.4758	14.4187	23.3717	25.1680	20.3106	23.9814
23.8092	18.3455	20.7376	14.2684	15.6658	23.5658	13.3316	24.6488
15.5865	21.7228	20.1316	25.5410	18.8489	18.1422	18.3497	20.7010
15.1440	18.7455	16.5891	23.9457	13.5515	13.1525	22.7611	23.4242
17.0583	19.9242	7.1301	14.6793	19.2829	25.2703	22.9745	18.6326
13.7547	25.0312	18.8663	14.5890	13.4130	19.6572	24.6608	18.1043
21.2832	19.0505	24.9228	22.5868	16.7141	15.8091	24.1651	19.7794
18.2414	18.3560	21.3520	12.5554	22.8016	20.4682	19.0453	17.8255
19.0100	15.8958	21.9656	17.3461	13.8722	17.4131	16.2998	24.0704
18.1490	13.5136	19.6765	13.197 5	14.4601	21.6167	17.1903	21.8636
24.2955	13.2117	17.0008	22.6320	15.7515	23.1275	21.5687	19.7992

Вариант № 10

16.1216	24.4289	24.6007	19.9807	20.8383	20.7107	21.2060	21.9865
25.9191	26.8907	14.4764	22.4380	27.5306	23.8998	21.4213	15.5278
27.7615	27.2885	14.1670	27.8982	27.0664	18.5924	19.2265	15.3660
16.5446	16.6987	18.6654	27.7521	14.6840	17.6301	26.6471	26.9117
19.9944	14.5804	17.6201	14.4186	17.7295	26.0593	18.4324	26.7509
19.8045	22.6164	26.4249	22.8327	23.5546	17.7367	21.6395	23.5273
18.5758	22.4347	17.7832	16.9019	25.4357	27.8232	25.4123	25.2604
15.6542	27.1255	24.3427	26.2736	26.6102	14.0130	16.5483	17.4442
25.9602	21.3533	17.9920	21.7582	17.5226	14.3381	19.4466	21.2704
16.9018	23.9246	18.4150	18.7512	18.3738	16.3948	26.0327	14.3182
23.4681	23.6501	22.4954	22.9977	20.0685	23.8345	16.2517	21.0571
22.5937	22.3480	25.1660	14.0437	27.6534	14.9628	24.7251	15.5037
22.8904	19.8291	17.2951	14.7178	15.7183	25.0506	19.1688	17.6595
25.1695	20.7663	19.5378	21.1899	21.4712	14.1642	25.8261	25.2260
16.8709	19.6446	16.4778	21.8730	27.0728	27.2142	26.5448	20.0659
21.6657	20.4723	21.6804	14.3571	21.2844	19.7680	22.9944	14.4447
24.7969	21.1693	19.7720	19.7612	19.9717	17.1186	23.6552	17.9998
27.0395	17.0252	19.7566	20.6932	27.5057	24.5120	14.9393	24.5556
25.6407	19.5451	23.3938	22.0508	25.7876	24.7418	26.5578	19.4969
16.7855	26.1644	20.1875	22.3328	15.8085	22.0426	26.0240	21.3009
16.3089	14.5531	21.4568	21.6802	15.7112	18.7526	20.5104	19.1966
18.3705	14.2280	26.9566	17.8652	24.3243	14.2127	23.2795	25.9220
14.8128	21.1901	20.5159	18.4478	22.1366	24.3730	24.9065	23.5454
22.9203	18.3085	25.3786	20.3176	18.6805	15.5724	18.5127	21.3222
20.2989	27.1040	14.5939	26.8399	22.2934	16.9634	23.2279	17.5536

Вариант № 11

6.2163	2.4557	2.3866	2.1522	4.1735	3.3904	5.2048	8.7324
1.8153	1.3002	8.3205	5.4430	3.2201	6.7355	2.7971	6.0135
0.5930	1.0334	9.5232	3.6880	0.3865	6.9035	2.0355	2.6893
5.9093	5.8078	4.7439	3.6053	0.6048	1.2873	1.4632	7.4042
4.1679	8.0739	5.2630	4.4921	8.4783	1.3834	5.3159	2.2011
4.2462	3.1528	1.5634	1.4426	3.0713	2.8075	4.8812	1.1638
4.7856	3.2213	5.1766	4.8532	5.6770	2.1118	4.1376	2.0605
6.6135	1.1493	2.4901	3.5221	1.6417	5.3590	0.7164	4.3582
1.7958	3.6313	5.0692	2.0457	3.4769	3.6632	6.5544	5.9552
5.6771	2.6544	4.8615	5.9068	4.7044	8.8030	2.1507	3.5065
2.8302	2.7604	3.1984	4.3970	3.0089	3.7455	5.6963	3.6942
3.1614	3.2540	5.1340	1.7610	10.8684	6.7596	3.5121	3.4334
3.0494	4.2360	4.8459	6.1174	7.7998	5.2420	2.3066	8.6680
3.8306	3.8807	4.0368	2.3360	4.2598	3.5862	1.2064	4.2643
0.8356	2.6640	1.3309	4.5173	4.2661	1.1845	1.9441	3.8875
1.1888	4.7778	1.8589	1.0876	2.8585	3.6578	5.7504	3.3661
7.8629	5.2577	1.4991	4.2614	4.0893	4.1772	6.0754	3.2597
4.0443	1.7481	1.6965	5.5456	3.5917	0.8579	4.8828	3.5066
8.0447	5.2010	8.1347	2.4224	1.2594	1.8768	7.6348	3.0101
3.8588	0.5101	9.1828	2.3292	3.9541	6.4740	3.0382	2.7585
4.3131	11.9557	3.6941	3.3692	9.5412	6.5609	2.4974	7.4384
3.9750	2.2613	4.9127	4.7038	3.6515	4.1387	3.3337	1.4921
3.7021	4.8152	2.4780	9.2597	4.5051	8.4047	4.7369	1.7652
5.6014	2.9217	6.6916	2.8006	1.8139	5.0653	3.2746	3.9598
4.3551	5.2990	5.6390	3.6433	2.4048	2.1265	2.9021	5.2990

Вариант № 12

3.1447	0.4907	0.4635	1.4175	1.4137	5.3050	2.2542	5.8497
0.2681	0.1375	5.6341	0.8438	1.4673	0.8089	0.1989	0.7676
0.0286	0.0869	7.3804	0.0121	1.8637	0.8444	2.1807	2.6228
2.8418	2.7450	1.8314	0.0297	3.5594	0.1074	0.5046	0.2193
0.2624	1.4602	0.1693	1.1416	1.5457	1.2118	0.7512	1.3939
2.6228	1.2255	1.9168	0.0417	2.8861	1.5139	1.3311	5.7486
0.6518	0.5775	1.0095	3.4962	1.0006	1.2858	5.2667	2.0880
0.8133	1.8577	0.3405	0.3764	1.4767	1.1154	2.5878	0.4706
1.0731	2.4110	0.1348	2.606	6.1144	2.5534	1.8260	0.4415
0.5733	1.1068	0.1557	4.4615	1.4798	1.5435	0.8726	0.9238
0.6201	1.0578	0.6414	0.3942	1.299	0.2342	0.3680	1.8006
0.8617	1.6421	0.3629	0.1102	1.0888	5.3852	3.6440	6.9777
2.0912	0.9355	0.1742	0.3455	1.4200	6.8623	1.3261	0.4997
1.9234	3.6919	2.2997	0.4441	0.0599	1.1105	0.1441	1.5580
0.8325	3.8785	1.9390	1.6606	0.2866	1.9640	0.2812	1.0850

0.3769	5.0314	1.3932	1.1106	0.9221	3.5030	0.1290	0.1811
0.9838	2.2046	11.6325	0.9593	2.6910	0.5075	1.2746	0.2535
1.8010	0.6367	6.2057	3.7185	3.0037	0.9044	7.4085	1.2760
0.7368	0.3371	2.8393	2.2362	1.9402	0.6192	0.0962	0.6383
9.6128	2.2496	1.5734	1.0466	4.7437	4.5027	1.4778	1.0802
4.9509	0.2486	0.2523	0.1141	1.4811	1.0006	2.5027	2.2851
0.7567	2.2014	3.0455	1.0038	0.6650	2.1450	0.4775	0.6854
1.1941	0.0211	2.3372	0.4329	1.3608	1.9110	1.6517	0.4161
0.0568	2.9429	1.0920	0.1184	1.0498	0.1829	0.2677	1.8869
0.1150	0.5886	6.3064	0.3075	0.8647	0.7374	0.6947	2.2851

Вариант № 13

14.0618	14.1791	7.7676	10.5631	11.6386	13.5391	8.4764	9.7201
8.3743	10.5037	9.5229	11.1217	9.3359	9.3665	2.2277	7.0484
10.5340	10.1548	9.1054	10.3622	6.5906	5.5420	1.7486	10.3314
8.3692	4.7054	13.3220	5.6860	10.7098	11.1165	14.3904	9.4375
6.1272	10.5191	16.7866	13.3519	12.6040	12.2644	5.8089	2.8829
8.3367	13.6167	9.1112	7.1809	10.2011	5.6033	8.5481	12.8088
6.0887	12.1978	11.5813	7.4271	7.7950	8.6225	5.6767	12.9074
15.8841	11.9541	10.5705	9.0859	8.6853	18.7922	8.0708	11.0593
11.4487	10.8577	7.0065	8.3784	8.5715	5.9896	5.4673	12.3446
14.9212	7.9731	10.8874	7.6751	14.4966	6.9886	9.2562	9.6526
10.9466	12.4787	9.4730	7.4662	12.7313	12.5703	8.7625	7.5382
7.7502	8.0704	8.6231	12.7223	10.6083	11.2834	8.0761	4.8506
10.8847	7.2814	10.8559	6.122 0	7.4617	11.1766	14.4267	3.8854
10.9459	13.4644	10.2680	13.6282	7.1370	8.7034	11.9385	11.0175
10.0820	9.2208	9.1373	12.3438	7.9462	11.6438	12.6844	4.2322
10.6369	9.0854	12.3522	6.1881	6.7139	9.7334	7.3661	16.3435
11.7293	2.8342	14.8570	10.8395	8.7435	13.6365	9.4994	9.7315
9.6295	5.1345	8.3611	10.0088	11.8617	7.2417	14.1516	10.0323
12.5630	10.5544	5.1526	10.5282	8.0089	2.4929	12.6341	7.9443
11.1593	8.4842	9.7842	9.5731	8.5134	9.4939	11.2119	8.0382
8.9934	10.9320	19.4835	4.0255	11.2069	16.3353	4.5955	6.5333
11.2245	14.8308	10.7805	18.1493	13.9026	6.4807	7.8532	12.0460
10.4674	14.5522	4.3714	9.6788	9.3662	8.3764	10.2995	6.5716
9.6694	6.1350	11.6352	11.9190	9.8535	15.1529	7.4821	6.5252
10.6279	9.7615	16.7412	11.6553	9.9277	8.1572	8.8164	9.8474

Вариант № 14

4.5309	2.2614	3.3193	4.4513	5.8706	1.7382	2.3600	4.2322
1.6871	2.0527	2.1679	2.1831	2.7815	-1.3861	1.0242	2.1104
2.7670	4.1610	0.7953	2.4267	3.0608	-1.6256	2.6657	2.0427
1.6846	5.8933	2.8549	2.4639	2.6861	4.6952	2.2187	-1.0828
0.5636	2.0556	3.8020	4.2695	0.3430	0.4044	-1.0585	0.0672
1.6683	3.2906	2.6005	2.1832	4.1759	1.7740	3.9044	2.7772
0.5443	2.7852	1.3975	0.2710	1.0904	0.3383	3.9537	1.7421
5.4420	1.0032	1.8426	3.0582	1.2135	1.5354	3.0296	2.9660
3.2243	2.9437	1.7857	3.6322	2.0429	0.2336	3.6723	4.9154
4.9606	2.2365	4.7483	0.3016	1.6892	2.1281	2.3263	4.7761
2.9733	1.8115	3.8656	1.8112	1.3375	1.8812	1.2691	0.5675
1.3751	2.9279	2.8041	6.8961	1.2331	1.5380	-0.0746	3.4595
2.9423	2.6340	1.2308	0.4948	3.8611	4.7133	-0.5572	3.3276
2.9729	2.0686	1.0685	0.9943	0.5610	3.4692	3.0087	4.3083
2.5410	3.6761	1.4731	3.7851	4.3141	3.8422	-0.3838	3.5989
2.8184	4.9285	0.8569	3.1417	3.6719	1.1830	5.6717	3.4770
3.3646	1.6805	1.8717	3.0883	0.5340	2.2497	2.3657	2.9288
2.3147	0.0763	3.4308	1.8517	2.9197	4.5758	2.5161	1.4865
3.7815	2.3921	1.5044	3.3219	2.5044	3.8170	1.4721	3.7393
3.0796	7.2417	1.7567	2.3667	2.7641	3.1059	1.5191	1.5352
1.9967	2.8902	3.1034	4.3182	2.2865	-0.2022	0.7666	1.1407
3.1122	-0.3142	0.7403	1.1208	-0.4872	1.4266	3.5230	1.3838
2.7337	3.3176	1.6882	-1.2535	6.5746	2.6497	0.7858	1.2410
2.3347	2.5774	5.0764	2.2469	2.3394	2.3807	0.7626	1.9082
2.8139	-0.1472	1.5786	5.6676	4.5895	2.7595	2.4237	2.7518

Вариант № 15

1.9893	-0.3185	1.1008	1.9309	0.6714	-1.5637	-0.0953	-2.2525
-0.0960	0.3250	0.2564	0.2676	0.3787	1.0995	2.3893	0.3144
0.6958	0.1720	-0.7501	0.4462	0.7302	2.9717	-0.1756	2.8229
-0.0979	1.7180	0.7602	0.4735	2.0323	0.7064	-0.0586	0.3973
-0.9200	2.9884	1.4548	1.7976	0.6847	0.9112	-2.3498	-0.5822
-0.1098	0.1741	0.5737	0.2677	0.5567	0.6364	-2.5255	0.6215
-0.9341	1.0798	-0.3084	-1.1345	-1.4413	-1.0817	2.1098	0.2937
2.6575	0.7091	0.0179	0.9094	0.6903	1.7290	-1.0367	-2.1095
1.0312	-0.5976	-0.0237	1.3303	1.8261	-0.5336	-0.0323	1.5298
2.3044	0.8253	2.1487	-1.1121	1.3058	-0.4433	-1.0851	1.5660
0.8471	0.3067	1.5014	-0.0050	1.2165	0.1648	-0.2073	0.8884
-0.3248	-0.0048	0.7230	3.7238	0.8144	-0.0945	-1.1619	1.3597
0.8244	0.8138	-0.4306	-0.9704	-0.2431	-0.3524	0.2272	0.3726
0.8468	0.5982	-0.5497	-0.6041	1.4088	-0.4290	0.0462	-0.4026

0.5300	0.1837	-0.2530	1.4424	-0.2074	1.4981	-0.2054	-1.3880
0.7335	1.3624	-0.7048	0.9705	-0.4968	-0.9219	2.1231	-1.7419
1.1340	2.2809	0.0392	0.9314	1.7702	1.8303	1.2107	0.8731
0.3641	-0.1009	1.1826	0.0245	0.2143	1.3594	1.4843	-1.6148
1.4397	-1.2773	-0.2300	1.1027	0.1646	-0.8976	-0.4657	2.8259
0.9250	0.4209	-0.0450	0.4022	-2.1274	0.8078	0.3164	0.4015
0.1309	3.9773	0.9425	1.8334	-1.2839	0.5032	2.0222	0.5118
0.9490	0.7861	-0.7903	-0.5113	0.7033	0.6936	1.4658	-0.2537
-0.0557	0.3435	-0.9171	1.2036	0.9443	0.6098	-0.7570	-0.2193
0.8417	-1.6906	0.4125	1.1069	-1.4816	-0.4232	-0.7740	-0.7710
2.2713	3.4881	2.1691	0.3822	0.2871	0.0660	0.4440	-1.2502

Вариант № 16

2.7079	-1.4882	1.0924	2.6017	0.3358	-2.8759	-0.9679	-1.9677
-1.0837	-0.3180	-0.4427	-0.4225	0.1032	2.2346	-2.8821	0.2209
0.3560	-0.5963	-2.2729	-0.0976	-3.5296	-1.8793	-1.2860	-0.3649
-1.0871	2.2147	0.4732	-0.0481	0.3461	-1.7152	-3.0217	-4.7446
-2.5818	4.5244	1.7360	2.3594	2.4111	-0.6093	-0.4958	1.8725
-1.1088	-0.5924	0.1340	-0.4223	1.4652	-1.0810	-0.8249	1.9382
-2.6075	1.0542	-1.4699	-2.9719	1.3027	-1.5499	-1.2825	0.7062
3.9227	0.3803	-0.8764	0.7443	0.5718	-1.6891	2.9511	1.5631
0.9658	-1.9956	-0.9522	1.5096	-1.3512	1.8148	1.2923	-0.2315
3.2808	0.5916	2.9977	-2.9311	1.6524	-2.5853	1.7896	-1.6411
0.6310	-0.3513	1.8208	-0.9182	-1.2863	2.4188	-1.7559	-3.4328
-1.4998	-0.9178	0.4055	5.8614	-1.8123	1.5625	-0.3337	-4.0763
0.5898	0.5706	-1.6921	-2.6735	2.3096	-2.5412	2.7677	0.6783
0.6306	0.1786	-1.9086	-2.0075	-0.5194	0.5597	1.7561	-3.8451
0.0546	-0.5750	-1.3691	1.7135	-0.6097	0.0059	0.8079	4.2290
0.4246	1.5681	-2.1907	0.8556	-4.7771	0.3521	-3.6029	-0.1789
1.1528	3.2380	-0.8376	0.7844	-3.2436	-0.2845	-1.4311	0.0215
-0.2469	-1.0925	1.2411	-0.8643	0.3696	-3.9829	0.1997	-1.3704
1.7086	-3.2315	-1.3273	1.0959	-1.0105	5.4329	-1.6785	-1.3078
0.7728	-0.1438	-0.9910	-0.1777	0.6213	-0.2141	-0.7890	-2.3110
-0.6710	6.3223	0.8046	2.4243	3.2205	1.2793	0.4186	1.3640
0.8163	0.5203	-2.3461	-1.8388	3.0348	1.1035	2.7860	-2.2855
0.3116	-3.7523	-1.0823	-5.0046	-2.5766	-5.1814	4.4941	-2.3165
-0.2203	1.0901	3.4352	-0.3373	-0.1589	-5.5009	0.3754	-0.1016
-0.1865	-1.0156	-1.2285	4.2235	0.7478	2.9269	0.2481	-2.7940

Вариант № 17

4.0618	4.1791	-1.3768	-2.8190	1.6386	-1.9291	1.2834	-7.1170
-1.6256	0.5037	0.8559	-2.5728	-0.6640	-4.5326	1.1766	2.8088
0.5340	0.1548	0.2680	-0.9140	-3.4093	-0.7437	-1.2965	2.9074
-1.6307	-5.2945	-08626	-1.6215	0.7098	-1.2374	1.6438	1.0593
-3.8727	0.5191	2.3522	-2.3249	2.6040	-1.9238	-0.2665	2.3446
-1.6632	3.6167	4.8570	-2.5337	0.2011	4.4267	3.6365	-0.3473
-3.9112	2.1978	-1.6388	2.7223	-2.2049	3.9026	-2.7582	-2.4617
5.8841	1.9541	-4.8473	-3.8779	-1.3146	-0.6337	-7.5070	-5.1493
1.4487	0.8577	-0.2157	3.6282	-1.4284	-0.1464	-0.5060	-6.1145
4.9212	-2.0269	9.4835	2.3438	4.4966	-0.0722	6.3353	1.9385
0.9466	2.4787	0.7805	-3.8118	2.7313	3.5391	-0.2798	2.6844
-2.2497	-1.9295	-5.6285	0.8395	0.6083	-0.6334	-2.9515	-2.6338
0.8847	-2.7185	1.6352	0.0088	-2.5382	-4.4579	0.3314	-0.5005
0.9459	3.4644	6.7412	0.5282	-2.86 29	1.1165	-0.5624	4.1516
0.0820	-0.7791	0.5631	-0.4268	-2.0537	2.2644	1.0175	2.6341
0.6369	-0.9145	1.1217	-5.9744	-3.2860	-4.3966	-5.7677	1.2119
1.7293	-7.1657	0.3722	8.1493	-1.2564	-1.3774	6.3435	-5.4044
-0.3704	-4.8654	-4.3139	-0.3211	1.8617	8.7922	-0.2684	-2.1467
2.5630	0.5544	3.3519	1.9190	-1.9910	-4.0103	0.0323	0.2995
1.1593	-1.5157	0.9320	1.6553	-1.4865	-3.0113	-2.0556	-2.5178
-1.0065	-2.2323	4.8308	0.5705	1.2069	2.5703	-1.9617	-1.1835
1.2245	-0.4770	4.5522	-2.9934	-3.5192	-8.2513	-3.4666	2.0460
0.4674	-0.8945	-3.8649	0.8874	-1.6235	4.3904	-1.4518	-3.4283
-0.3305	3.3220	-0.2384	-1.5235	5.1529	-4.1910	-4.3232	-3.4747
0.6279	6.7866	-0.5289	1.5813	-1.8427	-7.7722	-0.8887	-0.1525

Вариант № 18

5.4393	2.1487	2.0883	3.6518	4.5542	1.5295	4.2466	1.2105
1.5884	1.1376	7.2805	2.8175	2.4474	4.5509	3.0818	2.4566
0.5189	0.9043	8.3328	0.3382	1.7810	0.4463	1.7900	1.8478
5.1706	5.0818	4.1509	0.5292	1.2803	10.4613	5.1684	4.6892
3.6469	7.0646	4.6051	7.4185	4.6514	7.6409	3.8474	3.2053
3.7154	2.7587	1.3680	2.6873	4.2710	5.2618	1.5408	7.7026
4.1874	2.8186	4.5295	4.9674	3.6204	2.3532	5.3528	3.2773
5.7868	1.0056	2.1788	1.4365	0.6269	6.4787	2.0440	5.9147
1.5713	3.1774	4.4356	3.0423	5.7351	1.9259	3.9526	4.5867
4.9674	2.3226	4.2538	4.1163	1.8818	1.0183	3.2324	3.1379
2.4764	2.4154	2.7986	2.6328	4.9843	1.8029	3.0042	1.0365
2.7662	2.8472	1.8832	9.5098	3.0731	3.8134	7.5845	3.2006
2.6683	3.7065	4.7626	6.8248	2.0183	5.2108	3.7312	3.6550
3.3518	3.3956	3.2270	2.9666	1.0556	3.0682	3.4016	0.7504

0.7311	2.3310	3.1546	5.8935	1.7010	3.7273	2.9453	1.6422
1.0402	4.1806	3.9305	6.0406	5.0316	3.7329	2.8522	5.6647
6.8800	4.6004	1.2623	1.1264	5.3159	2.5012	3.0682	5.7408
4.2724	3.5781	4.4922	2.1852	3.7739	3.7287	2.6339	7.3541
6.6805	3.1427	4.2401	2.9170	3.4781	4.8524	2.4137	4.4321
2.6584	1.1019	3.5322	4.1448	3.2394	2.1196	6.5086	2.1042
3.5388	3.4629	1.1645	2.8552	4.9012	2.0380	1.3056	3.8286
7.0391	8.3486	1.6266	1.8607	3.8107	2.9481	1.5445	3.1950
3.3765	0.9516	1.3117	3.6213	1.4844	4.1158	3.4648	3.9420
3.2323	5.8551	4.2133	3.18979	7.1179	8.1022	2.5393	1.5872
7.1179	8.1022	2.5393	3.1950	8.0350	2.1683	1.9786	2.4505

Вариант № 19

1.7153	0.2677	0.2528	0.7731	2.7444	1.2270	0.0923	0.0735
0.1462	0.0750	3.0731	0.4602	1.2025	0.1356	1.0455	0.0849
0.0156	0.0474	4.0257	0.0066	0.3472	1.2007	0.5506	0.3499
1.5500	1.4972	0.9989	0.0162	0.1839	0.0115	0.1857	0.1979
0.7711	2.8936	1.2295	3.1907	0.0950	6.3450	1.5487	1.2748
0.8003	0.4412	0.1085	0.4187	1.2543	3.3849	0.8582	0.5956
1.0166	0.4606	1.1895	1.430 6	1.0576	1.6052	0.1376	3.4398
1.9415	0.0586	0.2752	0.1196	0.7599	0.3210	1.6612	0.6227
0.1431	0.5853	1.1406	0.5366	0.0227	2.4335	0.2422	2.0282
1.4306	0.3127	1.0491	0.9824	1.9070	0.2150	0.9058	1.2197
0.3555	0.3382	0.4541	0.4018	0.2053	0.0601	0.6057	0.5709
0.4436	0.4700	0.2056	5.2433	1.4403	0.1884	0.5232	0.0622
0.4127	0.7965	1.3150	2.7005	0.5475	0.8431	3.3351	0.5939
0.6513	0.6684	0.6037	0.5102	0.2361	1.5742	0.8071	0.7745
0.0309	0.3150	0.5769	2.0138	0.0646	0.5457	0.6708	0.0326
0.0627	1.0133	0.8957	2.1155	0.1677	0.8054	0.5029	0.1563
1.4678	0.8079	0.4716	1.8604	0.8257	0.8061	0.4022	3.1356
1.6384	0.3627	0.5458	1.9107	0.7013	1.3651	0.3377	1.1389
1.0583	0.7422	1.1700	0.2768	0.6084	0.2604	2.4560	0.2567
2.5875	0.5726	1.0423	0.4933	1.3927	0.2408	0.0988	0.8498
0.4097	0.0704	0.7233	0.9960	0.84 19	0.5039	0.1383	0.5918
0.7260	0.6952	0.0786	0.4759	0.1277	0.982 1	0.6960	0.9009
2.8727	4.0410	0.153 4	0.2007	2.9374	3.8060	0.3738	0.1460
0.6610	0.0525	0.0997	0.7603	3.7431	0.2725	0.2269	0.3481
1.0713	1.4115	0.3789	1.2464	0.6057	1.9876	1.0292	0.5892

Вариант № 20

10.2494	5.2141	8.3109	10.1221	11.7073	7.4564	5.9482	7.8932
5.6995	6.6183	6.4687	6.4929	8.1589	4.6052	5.8572	8.8115
7.4272	6.2843	4.2724	6.8828	10.9369	7.7099	10.5973	3.4826
5.6954	9.6576	7.5678	6.9422	7.7573	6.5784	9.1850	5.8980
3.9017	12.293	9.0832	9.8312	5.2002	5.8985	7.4866	14.0337
5.6694	6.2890	7.1609	6.4932	7.7078	7.6847	4.9694	3.7917
3.8709	8.2650	5.2360	3.4336	7.7567	7.2144	4.7096	4.5909
7.0656	6.3099	5.3569	9.0562	7.9796	7.6244	4.1846	4.7933
7.5095	8.8817	4.3711	8.0267	7.3739	2.4971	5.7011	0.9943
8.3834	10.8856	5.9948	7.9413	6.7355	8.3081	11.1223	6.5951
6.7036	5.6889	8.4894	5.9627	7.5023	12.3929	5.5257	12.0682
9.0504	3.1221	5.4071	8.3151	10.3432	7.4505	5.7811	6.7761
7.9274	6.8274	5.8107	6.7867	7.4030	7.8973	0.7822	4.6387
6.1947	14.5868	7.9655	9.9092	7.1239	7.2977	0.3988	7.2651
2.7643	3.5488	10.5123	6.5500	8.9829	4.9730	6.0100	5.0306
7.4153	9.6815	3.6471	1.3063	5.4563	9.1778	5.4609	2.8805
9.893 4	4.7447	5.8385	9.2470	4.8251	3.8976	10.5414	2.1083
8.7583	4.9416	3.5413	9.32 59	9.7715	9.9026	8.5508	7.8140
8.5633	6.2687	5.4567	7.8474	6.3767	8.8750	9.1475	2.3858
7.6861	5.7027	3.3738	8.8757	6.2683	3.9504	4.8929	12.0748
5.3784	5.1400	6.4049	6.7221	1.2673	7.6716	6.5995	6.7852
3.1076	10.8647	7.0070	13.5195	10.3212	5.2826	7.0259	8.6368
7.4435	10.6417	7.4225	6.7430	9.1073	7.2396	5.3554	4.2573
5.7873	3.9080	6.6585	8.5352	7.9695	4.9857	5.4305	4.2201
7.7456	6.8092	2.2204	8.3243	2.6764	6.0531	4.2267	6.8779

Вариант № 21

8 .0608	12.2144	2.3003	19.9903	9.2879	11.2173	8.8916	8.4509
12.9595	13.4453	7.2382	11.2190	7.8271	13.5627	12.1713	13.1368
13.8807	13.6442	7.0835	13.9491	12.9801	10.6766	8.9960	10.8791
8.2723	8.3483	9.3327	13.8760	8.4509	11.9623	9.2075	9.3756
9.9972	7.2902	8.8100	7.2093	11.7340	11.8250	11.2477	11.4988
9.9022	11.3082	13.2124	11.4163	11.2968	11.1740	12.5830	7.0218
11.4452	9.9145	8.6475	7.3589	12.8203	9.8860	11.0254	12.8938
10.4191	10.3553	10.6030	10.9932	8.3927	9.8783	11.1664	7.9042
13.7653	11.9499	10.7106	7.7639	8.1544	11.6969	10.8401	7.8556
13.5332	9.2962	9.6132	7.6830	9.1852	10.0937	8.9326	12.1621
7.3420	8.8150	13.3235	13.4558	7.4064	10.7284	9.2239	11.0683
8.8647	130297	9.2162	13.3754	11.4601	13.4783	10.1588	9.3402
11.7773	8.8683	10.8197	11.7636	10.1494	10.2579	13.4199	11.1467
12.7178	13.9116	12.7061	12.6302	7.2969	7.0821	12.9130	12.6130

13.3051	7.0065	8.2741	8.7221	10.3831	13.6071	13.2724	10.0329
8.7613	7.1690	9.7233	10.6352	9.8222	9.8840	11.4972	7.2223
9.1869	8.1974	13.0163	7.1591	10.2361	8.5593	11.8276	8.9999
10.0342	11.9172	8.1258	10.5285	10.5846	12.2560	7.4696	12.2778
13.8267	7.4814	12.3625	7.7518	8.5126	12.3709	13.2789	9.7484
7.8591	12.5253	9.5844	8.8297	9.7725	11.0213	13.0120	10.6504
12.5847	13.5520	10.5949	10.7356	13.0822	9.3763	10.2552	9.5983
8.4354	12.6893	10.9365	13.5364	7.2765	7.1063	11.6397	12.9610
10.8328	9.7689	7.1785	10.6422	7.1140	12.1865	12.4532	11.7727
12.3984	8.2389	9.8806	9.9858	10.5950	7.7862	9.2563	10.6611
13.5197	10.8402	10.3466	13.7528	12.1865	13.2789	8.526	12.2560

Вариант № 22

1.8955	-1.0417	0.7647	1.8212	-0.1542	0.76 31	2.404	-0.2361
-0.7586	-0.2226	-0.3099	-0.2957	0.2930	3.1459	-0.8599	2.9565
0.2422	-0.4174	-1.5910	-0.0683	1.9502	0.2628	-0.7109	-0.1306
-0.7610	1.5503	0.3312	-0.0336	0.2350	0.5234	-3.6270	-1.3774
-1.8073	3.1671	1.2152	1.6515	0.0722	0.1737	-3.8506	0.1546
-0.7761	-0.4147	0.0938	-0.2956	-2.4707	-2.0131	2.0488	-0.2624
-1.8252	0.7379	-1.0289	-2.0803	0.2422	1.5642	-1.9558	-3.3212
2.7459	0.2662	-0.6135	0.5210	1.6878	-1.3155	-0.6775	1.3107
0.6760	-1.3969	-0.6665	1.0567	1.0256	-1.2006	-2.0175	1.3567
2.2965	0.4141	2.0984	-2.0517	0.9119	-0.4265	-0.9002	0.4943
0.4417	-0.2459	1.2746	-0.6427	0.4002	-0.7567	-2.1152	1.0941
-1.0498	-0.6425	0.2838	4.1030	-0.9458	-1.0849	-0.3470	-0.1620
0.4128	0.3994	-1.1845	-1.8715	1.1567	-1.1824	-0.5774	-1.1488
0.4414	0.1250	-1.3360	-1.4052	-0.9004	1.270	-0.8977	-2.4030
0.0382	-0.4025	-0.9584	1.1994	-1.2686	-1.8097	2.0658	-2.8534
0.2972	1.0977	-1.5334	0.5989	1.6167	1.6931	0.9046	0.4747
0.800	2.2666	-0.5863	0.5491	-0.3635	1.0937	1.2527	-2.6916
-0.1728	-0.7647	0.8688	-0.6050	-0.4268	-1.7788	-1.2291	2.9603
1.1960	-2.2620	-0.9291	0.7671	-3.3440	0.3917	-0.2335	-0.1252
0.5410	-0.1006	-0.6937	-0.1244	-2.2705	0.0041	1.9374	0.0151
-0.4697	4.4256	0.5632	1.6970	0.2587	0.2464	1.2292	-0.9592
0.5714	0.3642	-1.6422	-1.2872	-0.7073	-0.1991	0.5655	-0.9155
0.2181	-2.6266	-0.7576	-3.5032	0.4349	-2.7880	-2.5220	-1.6177
2.2544	-1.8036	3.8030	-1.0017	-1.1824	-0.3470	-1.6215	0.9548
2.1243	0.8955	-0.1498	0.1398	-1.0849	-0.5774	-1.1749	-1.5998

Вариант № 23

11.5154	17.4492	17.5719	14.2719	19.3331	13.2803	13.7332	10.9757
18.5136	19.2076	10.3403	16.0271	10.4885	12.5929	19.0336	19.2226
19.8297	19.4918	10.1193	19.9272	12.6639	18.6138	13.1660	19.1078
11.8175	11.9262	13.3324	19.8229	16.8247	12.6690	15.4567	16.8052
14.2817	10.4146	12.5858	10.2990	18.1683	19.8737	18.1516	18.0431
14.1461	16.1545	18.8749	16.3090	19.0073	10.0093	11.8202	12.4602
13.2684	16.0248	12.7023	12.0727	12.5161	10.2415	13.8904	15.1931
11.1816	19.3753	17.3876	18.7668	13.1242	11.7105	18.5948	10.2273
18.5430	15.2524	12.8514	15.5416	14.3347	17.0246	11.6084	15.0408
12.0726	17.0890	13.1585	13.3937	19.7524	10.6877	17.6607	11.0740
16.7629	16.8929	16.0681	16.4269	11.2273	17.8933	13.6920	12.6139
16.1384	15.9628	17.9757	10.0312	17.9782	19.3600	15.1356	15.3366
16.3503	14.1637	12.3536	10.5127	12.0506	18.1275	15.6236	19.3377
14.8845	14.7933	15.1472	15.7046	15.4755	13.9555	10.2551	15.2031
19.6647	17.0713	15.3006	11.0913	17.7120	11.7698	14.1151	14.2655
19.3139	14.0318	14.1228	13.3947	14.5125	16.6282	19.6469	13.3432
18.3148	14.6231	14.1119	10.1519	19.1714	17.7904	18.4197	15.9238
11.9896	15.1209	16.7098	17.4092	18.4472	13.2233	11.2918	18.0186
11.6492	12.1609	14.4197	11.1231	18.9606	18.5157	11.2223	14.3327
13.1218	13.9608	15.3263	12.2275	16.4246	16.8181	17.3745	10.3177
10.5806	18.6888	19.2547	17.5085	16.8966	15.2301	15.8118	12.8570
16.3716	10.3951	14.6542	17.6727	10.6709	15.1209	17.7102	17.5387
14.4992	10.1628	10.1173	15.7447	18.9698	12.1610	11.9822	13.9264
10.4242	15.1358	19.4387	12.7608	18.5885	17.6727	16.8966	15.2149
14.8330	15.4860	14.1200	13.1770	14.6502	14.1119	16.6664	13.7119

Вариант № 24

3.4966	1.3813	1.3425	2.3476	2.1547	2.1828	2.0745	4.3874
1.0211	0.7313	4.6803	1.8113	0.4700	1.4985	2.0280	1.9071
0.3336	0.5813	5.3568	0.2174	0.6687	2.6875	2.5268	3.7887
3.3239	3.2668	2.6684	0.3402	4.4229	2.9574	0.8114	3.832
2.3444	4.5415	2.9604	2.9807	2.9277	0.9833	2.7299	0.7241
2.3885	1.7735	0.8794	4.7690	1.5733	2.9255	1.9811	0.7781
2.6919	1.8120	2.9118	1.7276	1.1449	0.2869	1.1507	1.5792
3.7201	0.6464	1.4006	3.1933	0.8230	6.7251	3.3225	1.1878
1.0101	2.0426	2.8514	0.9234	2.9902	4.9120	2.4733	3.0144
3.1933	1.4931	2.7346	1.9557	2.7457	3.3826	0.9905	2.0605
1.5920	1.5527	1.7991	2.6462	2.3274	1.5127	3.4410	4.9516
1.7783	1.8304	1.2106	1.6925	0.4030	4.1648	1.3140	2.1068
1.7153	2.3827	3.0617	6.1135	3.6869	1.2381	2.5409	3.8023

1.2097	0.6546	2.0780	2.9486	4.5251	5.3669	1.0456	1.8419
3.2042	1.1590	1.9313	2.0172	2.1706	0.6118	0.8432	1.1961
1.9755	2.4515	4.8757	0.6663	2.4261	2.3970	1.6932	2.3280
1.2974	3.3498	2.3986	2.0575	2.2359	3.1194	1.5516	4.7276
0.6786	1.9724	2.1867	2.3496	2.0824	1.3626	4.1841	2.8492
1.0935	2.3961	1.8934	0.4826	3.1508	1.3101	0.8393	1.3527
3.2346	2.3967	1.8336	1.0557	2.4497	1.8952	0.9929	2.4612
3.4174	1.6079	1.9724	3.6416	0.9543	2.6458	2.2227	2.0539
2.7466	2.3023	2.8879	3.6905	4.5757	5.2085	1.6324	2.5341
4.2946	2.0203	2.7258	1.4048	5.1653	1.3939	1.2720	1.0203
1.7089	0.7084	2.2707	1.8752	2.0779	3.7640	2.7085	1.5753
2.2749	2.2261	0.7486	2.6645	2.7634	3.1719	1.6434	2.0493

Вариант № 25

13.8185	20.9391	21.0863	17.1263	17.1381	12.4975	15.1029	12.3588
22.2164	23.0492	12.4083	19.2326	16.9753	19.3854	22.6499	19.5709
23.7956	23.3901	12.1432	23.9127	15.9221	19.2298	15.2428	14.4873
14.1810	14.3114	15.9989	23.7875	13.4179	23.2504	20.8652	22.5202
22.2516	18.3028	15.4217	18.6499	19.6204	16.9964	14.8244	12.6152
14.4872	20.5068	15.7842	16.0725	17.8614	17.7520	18.1766	18.8455
20.1155	20.2715	19.2818	19.7123	23.5977	20.4856	18.3611	13.3095
19.3660	19.1554	21.5708	12.0375	23.1998	15.9364	16.4799	13.1709
12.5862	15.1115	22.8404	23.0671	22.8088	12.0111	14.1842	14.9522
15.1967	22.3366	15.7992	22.9293	15.0194	12.2898	16.6685	18.2318
20.1897	15.2028	18.5481	20.1663	15.7490	14.0526	22.3137	12.2728
21.8020	23.8485	21.7820	21.6517	17.2016	20.4295	13.9310	18.0490
23.7029	12.8253	21.1929	13.2888	18.5706	16.7466	12.3061	18.2438
13.4728	21.4719	16.4304	15.1367	21.2545	14.1238	16.9381	17.1186
21.5739	23.2320	18.1627	18.4039	23.1767	18.5832	17.7370	23.5763
14.4608	21.7531	18.7483	23.2053	21.9777	16.9474	18.9007	22.1037
14.3876	16.9343	19.1424	13.5502	19.6460	23.1057	17.4150	16.0118
13.9790	20.0518	18.5830	13.4667	17.3999	17.5850	23.0056	19.1086
15.7461	17.3035	15.3130	20.8494	12.5090	12.1408	22.1367	21.6223
12.6967	18.3916	15.8124	18.9742	17.7996	23.3264	22.7527	17.1993
16.8382	16.9440	19.7095	12.3812	16.7529	18.8937	22.3063	18.2579
17.5477	14.6731	20.2759	15.4284	22.4266	16.0736	17.5803	16.4543
18.1451	21.0103	12.8051	21.0476	12.4741	12.1823	19.9538	22.2188
14.5930	21.2072	22.7638	16.7116	12.1954	20.8911	21.3485	20.1818
18.1629	15.6930	13.3478	14.5401	15.8680	19.9096	18.2762	15.0459

Вариант № 26

4.6061	6.9797	7.0287	5.7087	4.7270	4.7705	5.3329	7.9291
7.4054	7.6830	4.1361	6.4108	5.7127	4.1658	6.4618	5.0343
7.9318	7.7967	4.0477	7.9709	4.1196	5.6584	6.4099	7.5499
6.5236	5.3073	7.7501	5.0809	5.5822	6.0542	6.1346	6.1902
4.8291	4.4726	6.1009	6.9550	4.7079	6.2494	7.7351	7.0848
7.5067	7.4172	6.8356	5.1405	6.1944	4.1020	6.0812	7.7255
6.2166	4.8290	6.7571	6.3851	5.6491	5.6460	5.7062	7.3259
5.2614	5.3575	6.7051	5.6654	5.6447	5.9123	7.8587	4.7958
6.4272	6.5707	6.4553	5.9173	6.6839	6.3002	7.3679	4.6596
7.1902	4.0125	6.5401	6.8285	5.7678	6.3808	4.5167	5.2487
4.9414	4.2050	5.9538	5.3121	6.1305	6.1943	4.4889	4.2322
6.0588	6.2818	7.8659	5.0371	7.7019	5.1043	6.9498	6.5486
6.1203	4.4365	7.7332	7.4455	5.8616	5.2708	6.3247	5.7996
5.4933	4.3903	4.1954	5.0676	4.0469	5.8050	5.3372	4.16969
7.6134	7.6890	5.0655	7.9495	7.7754	7.6685	6.3695	5.9332
5.2664	7.6431	6.7299	4.0037	5.6480	7.3789	7.2074	5.6127
6.1827	6.7221	7.2673	4.0966	4.8910	7.5842	5.7331	5.8492
7.2606	7.2172	7.6029	4.6842	7.0034	6.5698	4.1270	6.0483
4.7280	4.9840	5.0064	5.2496	7.0691	6.7586	5.1428	4.8643
6.8098	5.5561	6.0772	5.7338	6.2979	4.2683	7.0158	5.5843
4.2751	7.4379	4.0909	7.9009	5.3578	7.5879	5.5705	7.4755
7.1573	4.6433	6.0163	4.4909	4.0607	7.4354	6.0859	4.1580
7.7440	7.0643	4.4296	7.1913	6.9637	5.8601	5.4847	4.0651
7.2510	5.4768	5.0455	4.8202	4.4492	6.6512	7.4062	6.0543
4.8467	5.2893	7.1161	6.0920	6.7272	6.6365	5.2310	5.0153

Вариант № 27

0.8985	0.1402	0.1324	0.4050	0.9989	0.0314	0.2741	0.6389
0.0766	0.3930	1.6097	0.2410	0.1075	0.0987	1.7469	0.2990
0.0081	0.0248	2.1087	0.0034	0.7544	0.4416	0.4228	0.0326
0.8119	0.7842	0.5232	0.0085	0.2868	0.8246	0.3514	0.3111
0.4039	1.5157	0.6440	1.6713	0.1237	0.2858	0.2634	0.4057
0.4192	0.2311	0.0568	0.2193	0.0338	0.4219	0.2470	0.0171
0.5325	0.2412	0.6230	0.7493	0.0878	0.4231	0.2859	0.0819
1.0169	0.0307	0.1441	0.0626	0.7688	0.1900	0.6128	0.9745
0.0749	0.3066	0.5975	0.2810	0.8582	0.3888	0.5460	1.0008
0.7493	0.1638	0.5495	0.5145	0.5543	0.2999	0.3789	0.1450
0.1862	0.1771	0.2378	0.2105	1.3553	0.0368	0.0411	0.2584
0.2323	0.2462	0.1077	2.7465	0.2146	0.3641	0.0803	0.5217
0.2162	0.4172	0.6888	1.4145	0.3803	2.1167	0.0522	0.2493
0.3411	0.3501	0.3162	0.2672	1.5047	0.0275	0.2106	0.1051

0.0162	0.1650	0.3022	1.0548	0.3462	0.4222	0.1769	0.3982
0.0328	0.5307	0.4691	1.1081	0.4325	0.7150	1.2865	1.6424
1.4375	0.6427	0.0483	0.0385	0.3673	0.1364	0.0517	0.5965
0.6298	0.0710	0.5476	0.0445	0.3186	0.1261	0.0724	0.1344
0.1819	0.6289	0.2884	0.1832	0.7295	0.2639	0.3645	0.4451
0.0963	0.0060	0.0973	0.1036	0.4410	0.5144	0.1958	0.3100
0.0497	3.3235	0.8112	0.6677	0.0669	1.9936	0.1189	0.4719
0.6570	1.7730	0.4495	0.3120	1.5386	0.1427	0.5391	0.0765
0.5540	0.8408	0.0721	1.8018	1.9606	1.0411	0.1344	0.1823
0.2980	0.1681	0.8701	0.3261	0.3173	0.4744	0.4057	0.3086
0.0119	1.2747	0.1268	1.0624	0.1126	0.3173	0.2470	0.8246

Вариант № 28

12.6670	15.3569	11.1290	17.5472	18.4392	12.8141	12.2354	11.7380
20.3650	20.5577	21.3826	17.0344	17.7522	17.7760	13.3284	20.8668
21.8126	11.4346	15.5320	14.0369	17.9853	17.6273	19.3291	20.4474
12.9993	11.1781	13.4503	14.4947	16.3730	21.3129	11.3743	16.1153
15.7099	16.6493	19.2594	13.9638	21.6312	16.7776	11.1312	18.2910
15.5607	14.3852	19.4400	21.0885	21.2665	18.7979	14.6657	19.5694
14.5952	19.1941	17.3192	20.2919	11.5374	18.5822	13.8444	14.5457
12.2998	21.1284	14.7341	20.8566	13.9303	17.5591	20.7624	18.2505
20.3973	21.4410	11.1671	18.0671	18.5072	15.5860	13.9225	15.6991
13.2800	13.1188	19.1502	18.5862	19.9852	16.2727	19.1264	17.6299
20.9080	18.7784	14.1365	21.9200	20.1462	19.6826	19.9668	17.2751
13.7678	14.6083	14.4689	21.8052	13.1886	21.2960	13.0022	12.2004
14.4366	13.8522	17.6750	11.3289	12.8141	19.9403	15.2794	12.0733
15.7681	20.4752	19.7733	17.9400	14.4339	15.3511	20.4842	21.1449
21.7276	13.9359	13.5890	13.2800	11.6386	12.9468	12.7692	21.0186
12.3500	21.8611	16.6619	20.6435	18.0088	17.0346	19.4268	18.4857
19.7761	11.0162	16.8310	17.0957	15.9491	15.5351	15.0612	19.8474
13.2557	11.2656	15.1065	14.7331	11.4666	15.5231	16.6492	13.7062
17.0230	12.8816	12.9370	18.0696	16.3163	18.3808	17.1859	16.7124
19.4832	18.7271	14.4826	11.0343	15.4350	15.8616	11.2806	11.2500
21.2453	11.7585	17.0024	11.5640	16.0854	16.8589	15.5266	16.5449
16.6330	21.1802	16.2589	12.1814	10.5210	17.0240	13.0223	21.1446
19.4822	21.2222	12.8452	11.2563	12.4852	21.2961	19.9666	11.5602
13.7452	14.4523	19.7778	20.7656	15.7852	13.5632	20.4521	11.2563
17.7852	21.6323	11.5322	14.6251	19.7723	15.1023	12.9370	11.5212

Вариант № 29

2.3585	0.3680	0.3476	1.0631	0.4889	0.4651	0.6244	0.5526
0.2011	0.1031	4.2255	0.6328	0.6100	0.6462	0.2827	7.2096
0.0214	0.0651	5.5353	0.0091	0.5675	1.0952	1.8082	3.7132
2.1313	2.0587	1.3735	0.0223	0.8956	0.9191	0.8301	0.7016
1.0602	3.9787	1.6906	4.3873	0.0426	0.4331	0.7933	2.7689
1.1005	0.6067	0.1491	0.5757	0.0862	1.3932	1.2316	2.9089
1.3978	0.6333	1.6355	1.9671	3.7735	1.6872	0.1270	0.1011
2.6696	0.0806	0.3784	0.1645	1.6534	0.1865	1.4376	0.1168
0.1968	0.8048	1.5684	0.7378	0.4775	1.6510	0.7571	0.4811
1.9671	0.4300	1.4425	1.3508	0.2528	0.0158	0.2554	0.2722
0.1306	8.7244	2.1295	1.7529	0.3247	2.1646	1.1098	1.0650
1.7247	4.6543	1.1800	0.8190	0.0888	0.7504	0.9224	0.0449
1.4542	2.2071	0.1892	4.7298	0.2306	1.1075	0.6915	0.2150
1.0449	0.4414	2.2841	0.8562	2.0182	1.1108	0.6485	2.5581
0.0313	3.3461	0.3330	2.7888	2.2528	0.4987	0.7505	2.6272
2.6221	0.2957	1.2454	1.6771	1.4552	1.0206	1.6087	0.3806
0.2823	0.0826	0.8329	0.7849	3.5578	0.7873	1.4332	0.6783
1.9805	0.2591	0.7195	0.0856	0.5634	0.0968	0.9946	1.3695
0.7528	1.1593	4.5858	0.8166	0.9983	0.9560	0.1081	0.6544
3.9500	5.5564	0.2109	0.2760	1.1576	0.6928	0.1901	0.8138
0.9088	0.0722	0.1371	1.0454	0.1756	1.3504	0.9570	1.2387
1.1354	1.1083	0.5530	4.3114	4.0389	5.2333	0.5140	0.2008
0.9643	1.8770	0.4644	1.5660	5.1467	0.3748	0.3121	0.4787
0.8365	0.3581	3.3770	0.3529	0.8329	2.7330	1.4151	0.8101
1.9150	0.3311	0.1358	1.1685	1.4730	1.9408	0.5210	1.7138

Вариант № 30

2.3311	0.9209	0.8950	1.5650	1.4365	1.4552	1.3830	1.2714
0.6807	0.4875	3.1202	1.2075	0.3133	0.9990	1.3520	2.5258
0.2224	0.3875	3.5712	0.1449	0.4458	1.7916	1.6845	2.5888
2.2159	2.1779	1.7789	0.2268	2.9486	1.9716	0.5409	0.4827
1.5629	3.0277	1.9736	3.1793	1.9518	0.6555	1.8199	0.5187
1.5923	1.1823	0.5862	1.1517	1.0489	1.9503	1.3207	1.0528
1.7946	1.2080	1.9412	2.1289	0.7633	0.1912	0.7671	0.7919
2.4800	0.4309	0.9337	0.6156	0.5487	4.4834	2.2150	2.0096
0.6734	1.3617	1.9009	1.3038	1.9934	3.2746	1.6489	1.3737
2.1289	0.9954	1.8230	1.7641	1.8304	2.2550	0.6603	3.3011
1.0613	1.0351	1.1994	1.1283	1.5516	1.0085	2.2940	1.4045
1.1855	1.2202	0.8070	4.0756	0.2686	2.7765	0.8760	2.5348
1.1435	1.5885	2.0411	2.9249	2.4579	0.8254	1.6939	1.9657
0.8065	0.4364	1.3853	1.3448	3.0167	3.5779	0.6971	0.7974

2.1361	0.7727	1.2875	0.4442	1.4470	0.4078	0.5621	1.5520
1.3170	1.6343	3.2505	1.3716	1.6174	1.5980	1.1288	3.1517
0.8649	2.2332	1.5991	1.5664	1.4906	2.0796	1.0344	1.8994
0.4524	1.3149	1.4578	0.3217	1.3883	0.9084	2.7894	0.9018
0.7290	1.5974	1.2623	0.7038	2.1005	0.8734	0.5595	1.6408
2.1564	1.5998	1.2224	2.4277	1.6331	1.2634	0.6619	1.3693
2.2782	1.0719	1.3149	2.4603	0.6362	1.7639	1.4849	1.6894
1.8310	1.5334	1.9252	0.9365	3.0505	3.4723	1.0882	0.6802
2.8630	1.3469	1.8172	1.2501	3.4435	0.9292	0.8480	1.0502
1.1393	0.4722	1.5138	1.7763	1.3853	2.5093	1.8057	1.3662
1.5166	1.4841	0.4991	1.2279	1.8422	2.1146	1.0956	1.9871

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 3

Построение доверительных интервалов математического ожидания и дисперсии в случае выборки из нормальной генеральной совокупности

Порядок выполнения работы

1. По данной выборке найти оценки математического ожидания и дисперсии.
2. Найти доверительный интервал для математического ожидания, соответствующий доверительной вероятности $\gamma = 0,9$; $\gamma = 0,95$; $\gamma = 0,99$.
3. Найти доверительный интервал для дисперсии, соответствующий доверительной вероятности $\gamma = 0,9$; $\gamma = 0,98$.
4. Составить отчет, в котором привести исходный статистический материал, использованные расчетные формулы, результаты счета.
5. Ответить устно на контрольные вопросы.

Нахождение оценок математического ожидания и дисперсии

По данной выборке находим оценки математического ожидания и дисперсии генеральной совокупности:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (1)$$

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (2)$$

или

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2, \quad (3)$$

где n - объем выборки, x_i - элементы выборки ($i = 1, 2, \dots, n$).

Построение доверительного интервала математического ожидания

Полученные на первом этапе оценки (1) – (3) называются **точечными** и являются случайными величинами, изменяющимися от выборки к выборке. Использование точечных оценок, построенных по выборкам малого объема ($n \sim 10$), может привести к существенным ошибкам. Например, среднее арифметическое \bar{x} , как оценка математического ожидания α , имеет дисперсию σ^2/n . При больших n дисперсия оценки мала, и реализация оценки \bar{x} весьма тесно концентрируется около своего математического ожидания, равного α . При малых объемах выборки дисперсия оценки \bar{x} может быть большой.

В случае использования точечных оценок, построенных по выборкам малого объема, необходимо указать, с какой степенью уверенности можно говорить о том, что отклонение оценки a^* от оцениваемого параметра a не превзойдет определенную величину.

По заданной вероятности γ (как правило, 0,9; 0,95; 0,99) определим число ε_γ , такое, что $P(a^* - a < \varepsilon_\gamma) = \gamma$, или, что то же самое,

$$P(a^* - \varepsilon_\gamma < a < a^* + \varepsilon_\gamma) = \gamma. \quad (4)$$

Интервал $(a^* - \varepsilon_\gamma; a^* + \varepsilon_\gamma)$, с вероятностью γ содержащий истинное значение оцениваемого параметра a , называется **доверительным интервалом**; границы его – случайные величины. Вероятность γ называется **доверительной вероятностью**.

Доверительный интервал может быть несимметричным относительно оцениваемого параметра.

В случае выборки из нормальной генеральной совокупности оценка \bar{x} имеет нормальное распределение с параметрами $\left(\alpha, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, где α, σ – параметры нормальной генеральной совокупности. Если параметр σ известен, то

$$P(|\bar{x} - \alpha| < \varepsilon_\gamma) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon_\gamma}{\sigma_{\bar{x}}}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon_\gamma \sqrt{n}}{\sigma}\right), \quad (5)$$

где $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ – функция Лапласа. Из равенства

$$2\Phi\left(\frac{\varepsilon_\gamma \sqrt{n}}{\sigma}\right) = \gamma, \quad (6)$$

используя таблицу А1, можно определить ε_γ . Интервал $(\bar{x} - \varepsilon_\gamma; \bar{x} + \varepsilon_\gamma)$ является доверительным интервалом для математического ожидания, соответствующим доверительной вероятности γ .

Если параметр σ не известен, то простая замена этого параметра в формуле (5) его оценкой $S = \sqrt{S^2}$ в случае малой выборки может привести к существенным ошибкам.

В этом случае можно воспользоваться случайной величиной $t = \sqrt{n-1} \cdot \frac{\bar{x} - \alpha}{S}$, где α - математическое ожидание генеральной совокупности, \bar{x} и S - оценки параметров нормальной генеральной совокупности. В курсе математической статистики доказывается, что случайная величина t в выборке из нормальной генеральной совокупности имеет распределение Стьюдента (t - распределение) с $(n-1)$ степенями свободы, распределение, не зависящее от параметров генеральной совокупности.

$$\text{Пусть число } t_{\gamma, n-1} \text{ таково, что } P(|t| < t_{\gamma, n-1}) = \gamma, \quad (7)$$

где γ - заданная доверительная вероятность.

Равенство (7) означает, что $\left| \sqrt{n-1} \frac{\bar{x} - \alpha}{S} \right| < t_{\gamma, n-1}$ с вероятностью γ . Последнее неравенство эквивалентно следующему:

$$\bar{x} - t_{\gamma, n-1} \frac{S}{\sqrt{n-1}} < \alpha < \bar{x} + t_{\gamma, n-1} \frac{S}{\sqrt{n-1}}. \quad (8)$$

Следовательно, интервал $\left(\bar{x} - t_{\gamma, n-1} \frac{S}{\sqrt{n-1}}; \bar{x} + t_{\gamma, n-1} \frac{S}{\sqrt{n-1}} \right)$ является доверительным интервалом математического ожидания, соответствующим доверительной вероятности γ .

Значения $t_{\gamma, n-1}$, зависящие от γ и числа степеней свободы $k = n - 1$, могут быть определены по таблице АЗ.

Построение доверительного интервала дисперсии

В курсе математической статистики доказано, что в выборке из нормальной генеральной совокупности с параметрами (α, σ) случайная величина $\frac{nS^2}{\sigma^2}$, где S^2 - оценка неизвестной дисперсии, равная $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \alpha)^2$, имеет распределение χ^2 с n степенями свободы. Если параметр α неизвестен, то в выражении S^2 можно заменить α на его оценку \bar{x} ; в этом случае случайная величина $\frac{nS^2}{\sigma^2}$ также имеет распределение χ^2 , но уже с $(n-1)$, а не с n степенями свободы.

Пусть числа χ_1^2 и χ_2^2 выбраны таким образом, что

$$P(\chi_1^2 < \chi^2 < \chi_2^2) = \gamma, \quad (9)$$

где γ - заданная доверительная вероятность.

Равенство (9) означает, что $\chi_1^2 < \frac{nS^2}{\sigma^2} < \chi_2^2$ с вероятностью γ . Последнее двойное неравенство эквивалентно следующему:

$$\frac{nS^2}{\chi_2^2} < \sigma^2 < \frac{nS^2}{\chi_1^2}. \quad (10)$$

Следовательно, $\left(\frac{nS^2}{\chi_2^2}; \frac{nS^2}{\chi_1^2} \right)$ является доверительным интервалом дисперсии, соответствующим доверительной вероятности γ .

Однако по заданной вероятности γ можно построить множество доверительных интервалов для дисперсии. Принято χ_1^2 и χ_2^2 выбирать так, чтобы вероятности $P(\chi^2 < \chi_1^2)$ и $P(\chi^2 > \chi_2^2)$ были равны и равны $\frac{1-\gamma}{2}$ (рис. 1).

Соответствующие значения χ_1^2 и χ_2^2 могут быть определены по таблице А2.

Замечание. При больших объемах выборок можно воспользоваться тем, что рассмотренные оценки математического ожидания и дисперсии распределены асимптотически нормально.

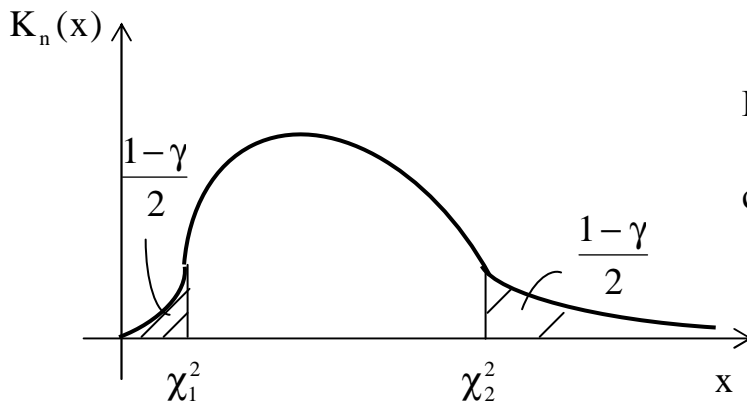


Рисунок 1. График плотности χ^2 - распределения с n степенями свободы ($n > 2$)

Пример выполнения и оформления лабораторной работы

Дана выборка объемом $n = 20$ (табл. 1) из нормальной генеральной совокупности.

Таблица 1

№ п/п	Элементы выборки	№ п/п	Элементы выборки	№ п/п	Элементы выборки	№ п/п	Элементы выборки
1	0,047	6	0,496	11	-1,7888	16	0,118
2	- 0,451	7	- 0,748	12	- 0,855	17	0,242
3	1,661	8	- 0,083	13	0,095	18	1,739
4	1,290	9	- 0,312	14	1,192	19	- 0,412
5	0,380	10	-1,372	15	- 0,059	20	- 0,426

Найдем по формулам (1) и (3) оценки математического ожидания и дисперсии, $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{20} (0,047 - 0,451 + \dots - 0,426) = 0,037$;

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{20} (0,047^2 + 0,451^2 + \dots + 0,426^2) - 0,037^2 = 0,819; \quad S = \sqrt{S^2} = 0,905.$$

Так как объем выборки невелик, для построения доверительного интервала для математического ожидания воспользуемся формулой (8):

$$\bar{x} - t_{\gamma, n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n-1}} < \alpha < \bar{x} + t_{\gamma, n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n-1}}.$$

Доверительную вероятность γ положим равной 0,95, $n = 20$. По таблице А3 по заданным γ и $k = n - 1$ определим $t_{\gamma, n-1} = 2,093$.

Доверительный интервал для математического ожидания, соответствующий доверительной вероятности $\gamma = 0,95$:

$$\left(0,037 - 2,093 \cdot \frac{0,905}{\sqrt{19}}; 0,037 + 2,093 \cdot \frac{0,905}{\sqrt{19}} \right) \text{ или } (-0,398; 0,472).$$

При построении доверительного интервала дисперсии положим $\gamma = 0,98$. Тогда $\frac{1-\gamma}{2} = 0,01$. χ_2^2 определим из условия $P(\chi^2 > \chi_2^2) = 0,01$; χ_1^2 определим из условия

$$P(\chi^2 > \chi_1^2) = 1 - \frac{1-\gamma}{2} = 0,99 \text{ (рис. 1)}.$$

По таблице А2 по заданным вероятностям P (0,01 и 0,99) и заданному числу степеней свободы $k = 19$ находим $\chi_1^2 = 7,633$, $\chi_2^2 = 36,191$.

Доверительный интервал дисперсии, соответствующий доверительной вероятности $\gamma = 0,98$, определяется по формуле (10):

$$\left(\frac{20 \cdot 0,819}{36,191}; \frac{20 \cdot 0,819}{7,633} \right) \text{ или } (0,450; 2,146).$$

Контрольные вопросы

1. Какие оценки параметров называются точечными?
2. Что такое состоятельность, эффективность и несмещенность точечных оценок?
3. В чем состоит метод моментов определения точечных оценок?
4. Что такое доверительный интервал, доверительная вероятность?
5. Что такое χ^2 -распределение?
6. Чему равны параметры χ^2 -распределения?
7. Охарактеризуйте распределение Стьюдента.
8. Почему рассмотренный способ построения доверительных интервалов применим только при выборке из нормальной генеральной совокупности?

Исходные данные для лабораторной работы 3

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	№ 7	№ 8
14.0618	13.9026	9.7201	4.5309	4.5895	1.3838	2.7815	3.3193
8.3743	9.3662	7.0484	1.6871	2.7518	2.2614	2.0608	2.1679
10.5340	9.8535	10.3314	2.7670	2.5774	2.0527	2.6861	0.7953
8.3692	9.9277	9.4375	1.6846	-0.1472	4.1610	0.3430	2.8549
6.1272	13.5391	2.8829	0.5636	2.7595	5.8933	4.1759	3.8020
8.3367	9.3665	12.8088	1.6683	4.3083	2.0556	1.0904	2.6005
6.0887	5.5420	12.9074	0.5443	3.5989	4.2906	1.2135	1.3975
15.8841	11.1165	11.0593	5.4420	3.4770	2.7852	2.0429	1.8426
11.4487	12.2644	12.3446	3.2243	2.9288	1.0032	1.6892	1.7857
14.9212	5.6033	9.6526	4.0696	1.4865	2.9437	1.3375	4.7483
10.94660	8.6225	7.5382	2.9733	3.7393	2.2365	1.2331	3.8656
7.7502	18.7922	4.8506	1.3751	1.5352	1.8115	3.8611	2.8041
10.8847	5.9896	3.8854	2.0423	1.1407	2.9279	0.5610	1.2308
10.9459	6.9886	11.0175	2.9729	4.2322	2.6340	4.3141	1.0685
10.0820	12.5703	4.2322	2.5410	2.1104	2.0686	3.6719	1.4731
10.6369	11.2834	16.3435	2.8184	2.0427	3.6761	0.5940	0.8569
11.7293	11.1766	9.7315	3.3646	-1.0828	4.9285	2.9197	1.8717
9.6295	8.7034	10.0323	2.3147	0.0672	1.6805	2.5044	3.4308
12.5630	11.6438	7.9443	3.7815	2.7772	0.0763	2.7641	1.5044
11.1593	9.7334	8.0382	3.0796	1.7421	2.3921	2.2865	1.7567
8.9934	13.6365	6.5333	1.9967	2.9660	7.2417	-0.4872	3.1034
11.2245	7.2417	12.0460	3.1122	4.9154	2.8902	6.5746	0.7403
10.4674	2.4929	6.5716	2.7337	4.7761	-0.3142	2.3394	1.6882
9.6694	9.4939	6.5252	2.3347	0.5675	3.3176	3.4595	5.0764
10.6279	16.3353	9.8474	2.8139	2.3807	5.8706	3.3276	1.5786

№ 9	№ 10	№ 11	№ 12	№ 13	№ 14	№ 15	№ 16
1.7382	4.4513	2.3600	10.2494	14.1791	7.7676	10.5631	11.6386
-1.3861	2.1831	1.0242	5.6995	10.5037	9.5229	11.1217	9.3359
-1.6256	2.4267	2.6657	7.4272	10.1548	9.1054	10.3722	6.5906
4.6952	2.4639	2.2187	5.6954	4.7054	13.3220	5.6860	10.7098
0.4044	4.2695	-1.0585	3.9017	10.5191	16.7866	13.3519	12.6040
1.7740	2.1832	3.9044	5.6694	13.6167	9.1112	7.1809	10.2011
0.3383	0.2710	3.9537	3.8709	12.1978	11.5813	7.4271	7.7950
1.5354	3.0582	3.0296	11.7073	11.9541	10.5705	9.0859	8.6853
0.2336	3.6322	3.6723	8.1589	10.8577	7.0065	8.3784	8.5715
2.1281	0.3016	2.3263	10.9369	7.9731	10.8874	7.6751	14.4966
1.8812	1.8112	1.2691	7.7573	12.4787	9.4730	7.4662	12.7312
1.5380	6.8961	-0.0746	5.2002	8.0704	8.6231	12.7223	10.6083
4.7133	0.4948	-0.5572	7.7078	7.2814	10.8569	6.1220	7.4617
3.4592	0.9943	3.0087	7.7567	13.4644	10.2680	13.6282	7.1370
3.8422	3.7851	-0.3638	7.0656	9.2208	9.1373	12.3438	7.9462
1.1830	3.1417	5.6717	7.5095	9.0854	12.3522	6.1881	6.7139
2.2497	3.0883	2.3657	8.3834	2.8342	14.8570	10.8395	8.7435
4.5758	1.8517	2.5161	6.7036	5.1345	8.3611	10.0088	11.8617
3.8170	3.3219	1.4721	9.0504	10.5544	5.1526	10.5282	8.0089
3.1059	2.3667	1.5191	7.9274	8.4842	9.7842	9.5731	8.5134
-0.2022	4.3182	0.7666	6.1947	10.9320	19.4835	4.0255	11.2069
1.4266	1.1208	3.5230	7.9796	14.8308	10.7805	18.1493	6.4807
2.6497	-1.2535	0.7858	7.3739	14.5522	4.3714	9.6788	8.3764
1.2410	2.2469	0.7626	6.7355	6.1350	11.6352	11.9190	15.1529
1.9082	5.6676	2.4237	7.5023	9.7615	16.7412	11.6553	8.1572

№ 17	№ 18	№ 19	№ 20	№ 21	№ 22	№ 23	№ 24
8.4764	10.3432	5.2141	7.4505	8.3109	5.7811	10.122	6.7761
2.2277	7.4030	6.6183	7.8973	6.4687	0.7822	6.4929	4.6387
1.7486	7.1239	6.2843	7.2977	4.2724	0.3988	6.8828	7.2651
14.3904	2.7643	9.6576	3.5488	7.5678	10.5123	6.9422	6.5500
5.8089	7.4153	12.4253	9.6815	9.0832	3.6471	9.8312	1.3063
8.5481	9.8934	6.2890	4.7447	7.1609	5.8385	6.4932	9.2470
5.6767	8.7583	8.2650	4.9416	5.2360	3.5413	3.4336	9.3259
8.0708	8.5633	7.4564	6.2687	5.9482	5.4567	7.8932	7.8474
5.4673	7.6861	4.6052	5.7027	5.8572	3.3738	8.8115	8.8757
9.2562	5.3784	7.7099	5.1400	10.5973	6.4049	3.4826	6.7221
8.7625	8.9829	6.5784	4.9739	9.1850	6.0100	5.8980	5.0306
8.0761	5.4563	5.8985	9.1778	7.4866	5.4609	14.033	2.8805
14.4267	4.8251	7.6847	3.8976	4.9694	10.541	3.7917	2.1083
11.9385	9.7715	7.2144	9.9026	4.7096	8.5508	5.5909	7.8140
12.6844	6.3767	6.3099	8.8750	5.3569	9.1475	9.0562	2.3858
7.3661	6.2683	8.8817	3.9504	4.3711	4.8923	8.0267	12.0748
9.4994	1.2673	10.8856	7.6716	5.9948	6.5995	7.9413	6.7852
14.1516	3.1076	5.6889	7.0070	8.4894	10.322	5.6527	7.0259
12.6341	7.4435	3.1221	7.4225	5.4071	9.1073	8.3151	5.3554
11.2119	5.7873	6.8284	6.6585	5.8107	7.9795	6.7867	5.4305
4.5955	7.7456	14.5868	2.2204	7.9655	2.6764	9.9092	4.2267
7.8532	10.8647	7.6244	13.5195	4.1846	5.2826	4.4933	8.6368
10.2995	10.6417	2.4971	6.7430	5.7011	7.2396	0.9943	4.2573
7.4821	3.9080	8.3081	8.5352	11.1223	4.9857	6.5951	4.2201
8.8164	6.8092	12.3929	8.3243	5.5257	6.0531	12.068	6.8779

№ 25	№ 26	№ 27	№ 28	№ 29	№ 30
2.7079	2.7860	-1.4882	0.3754	1.0924	-1.0156
-1.0837	0.3358	-0.3180	0.7478	-0.4427	-5.1814
0.3560	0.1032	-0.5963	0.2481	-2.2729	-5.5009
-1.0871	-3.5296	2.2147	-2.8759	0.4732	2.9269
-2.5818	0.3461	4.5244	2.2346	1.7360	-2.7940
-1.1088	2.4111	-0.5924	-1.8793	0.1340	-0.9679
-2.6075	1.4652	1.0542	-1.7152	-1.4699	-2.8821
3.9227	1.3027	0.3803	-0.6093	-0.8764	-1.2860
0.9658	0.5718	-1.9956	-1.0810	-0.9522	-3.0217
3.2808	-1.3521	0.5916	-1.5499	2.0077	-0.4958
0.6310	1.6524	-0.3513	-1.6891	1.8208	-0.8249
-1.4998	-1.2863	-0.9178	1.8148	0.4055	-1.2825
0.5898	-1.8123	0.5706	-2.5853	-1.6921	2.9511
0.6464	2.3096	0.1786	2.4188	-1.9086	1.2923
0.0546	-0.5194	-0.5750	1.5625	-1.3691	1.7896
0.4246	-0.6097	1.5681	-2.5412	-2.1907	-1.7559
1.1528	-4.7771	3.2380	0.5597	-0.8376	-0.3337
-0.2469	-3.2436	-1.0925	0.0059	1.2411	2.7677
1.7086	0.3696	-3.2315	0.3521	-1.3273	1.7561
0.7728	-1.0105	-0.1438	-0.2845	-0.9910	0.8079
-0.6710	0.6213	6.3223	-3.9829	0.8046	-3.6029
0.8163	3.2250	0.5200	5.4329	-2.3461	-1.4311
0.3116	3.0348	-3.7523	-0.2141	-1.0823	0.1997
-0.2203	-2.5766	1.0901	1.2793	3.4352	-1.6785
0.4186	-0.1589	4.4941	1.1035	-1.2285	-0.7890

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 4

Линейная регрессия

Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с методическими указаниями.
2. Для данного набора значений независимой переменной x и зависимой переменной y , построив точки на плоскости, выдвинуть гипотезу о порядке линейной модели.
3. Методом наименьших квадратов найти оценки неизвестных параметров и построить полученную линию регрессии.
4. Построить доверительные интервалы для оценок неизвестных параметров для доверительной вероятности $\gamma = 0,95$. Проверить гипотезу $\beta_1 = 0$.
5. Построить доверительные интервалы для предсказанных значений \hat{y}_i для доверительной вероятности $\gamma = 0,95$ и показать их на графике.
6. Проверить построенную модель на адекватность.
7. Составить отчет, в котором привести графики, результаты счета, выводы.
8. Ответить устно на контрольные вопросы.

Построение линии регрессии

Связь зависимой переменной с одной или несколькими независимыми переменными представляют в виде уравнения регрессии $\hat{y} = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Построение уравнения регрессии предполагает решение двух задач:

- а) выбор независимых переменных, существенно влияющих на зависимую величину, и определение вида уравнения регрессии;
- б) оценивание параметров (коэффициентов) уравнения.

Пусть для одной независимой переменной x по расположению точек (x_i, y_i) на плоскости выдвинута гипотеза о линейной зависимости между переменными x , y , т. е. y_i - исход i -ого опыта, можно представить в виде:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

где n - число опытов, ε_i - случайные добавки, при учете которых любой индивидуальный y_i получает возможность не попасть на линию регрессии, β_0, β_1 - неизвестные параметры. Предполагается, что ε_i распределены нормально с параметрами $(0, \sigma)$ и независимы. Начнем с предположения, что модель установлена, но на последующих стадиях будем проверять, так ли это на самом деле. Модель (1) линейна относительно неизвестных параметров, относительно неизвестной функции модель (1) первого порядка.

В соответствии с методом наименьших квадратов оценки параметров β_0, β_1 находятся из условия обращения в минимум величины

$$S = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2 \quad (2)$$

Дифференцируя равенство (2) по β_0, β_1 и приравнявая полученные частные производные нулю, для нахождения оценок b_0, b_1 получим так называемую нормальную систему:

$$\begin{cases} n b_0 + b_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i, \\ b_0 \sum_{i=1}^n x_i + b_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \end{cases} \quad (3)$$

Решив систему (3), найдем оценки b_0, b_1 неизвестных параметров β_0, β_1 :

$$b_1 = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}, \quad b_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - b_1 \sum_{i=1}^n x_i}{n}. \quad (4)$$

Замечание. Для линейной модели второго порядка

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

нормальная система для нахождения оценок b_0, b_1, b_2 неизвестных параметров $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ будет иметь вид

$$\begin{cases} b_0 n + b_1 \sum_{i=1}^n x_i + b_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i, \\ b_0 \sum_{i=1}^n x_i + b_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + b_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ b_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + b_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 + b_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i. \end{cases} \quad (5)$$

Если ввести следующие обозначения

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

то система (5) может быть записана в виде

$$X^T X B = X^T Y. \quad (6)$$

Для модели $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_r \cdot x_{ri} + \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n$, где x_{ki} - значение k -й независимой переменной ($k = 1, 2, \dots, r$), в i -м опыте, нормальная система также будет иметь вид (6), если

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \dots & x_{r1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \dots & x_{r2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{rn} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \dots \\ b_r \end{pmatrix}.$$

Построение доверительных интервалов для коэффициентов регрессии

Для построения доверительных интервалов для β_0, β_1 необходимо знать законы распределения их оценок v_0, v_1 . Если ε_i распределены нормально с параметрами $(0, \sigma)$ и независимы, то случайные величины $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ также распределены нормально и независимы. После преобразования формул (4) получим

$$v_1 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad v_0 = \bar{y} - v_1 \bar{x},$$

Оценки v_0, v_1 также имеют нормальное распределение, как линейные комбинации нормально распределенных случайных величин. Можно показать, что

$$Mv_1 = \beta_1, \quad Dv_1 = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad (7)$$

где $\sigma^2 = D(\varepsilon_i)$ - ошибка опыта. Случайная величина $\frac{v_1 - Mv_1}{\sqrt{Dv_1}}$ распределена нормально с параметрами $(0, 1)$. Но σ^2 неизвестно, поэтому в (7) заменим σ^2 его оценкой S^2 . Тогда

$$\text{Оц}Dv_1 = \frac{S^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (8)$$

Замена неслучайной величины Dv_1 ее оценкой, являющейся случайной величиной, приводит к тому, что величина $\frac{v_1 - \beta_1}{\sqrt{\text{Оц}Dv_1}}$ только асимптотически нормальна ($n > 30$). Для малых n величина $\frac{v_1 - \beta_1}{\sqrt{\text{Оц}Dv_1}}$ имеет t -распределение, число степеней свободы определяется способом нахождения $\text{Оц}Dv_1$, точнее способом нахождения $\text{Оц}\sigma^2 = S^2$.

Лучшим способом является нахождение $\text{Оц}\sigma^2 = S^2$ по параллельным опытам (опытам, поставленным в одной точке). В этом случае

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{u=1}^{n_i} (y_{iu} - \bar{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^k n_i - k}, \quad (9)$$

где y_{iu} - u -е значение Y в точке X_i , n_i - число повторных наблюдений в точке X_i , k - число точек, в которых проводятся повторные опыты.

Тогда величина $\frac{B_1 - \beta_1}{\sqrt{\text{Оц}D_{B_1}}}$ имеет t -распределение с $m = \sum_{i=1}^k n_i - k$ степенями свободы. Доверительный интервал для β_1 , соответствующий доверительной вероятности γ , имеет вид

$$\left(B_1 - \frac{t_{m,\gamma} S}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}; B_1 + \frac{t_{m,\gamma} S}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} \right),$$

где $t_{m,\gamma}$ - значение t , при котором $P(|t| < t_{m,\gamma}) = \gamma$.

Замечание. Если параллельных опытов нет, то оценка S^2 может быть найдена следующим образом. Пусть \hat{y}_i - предсказанное значение y данного x_i , когда B_0, B_1 определены, т. е. $\hat{y}_i = B_0 + B_1 x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

В качестве оценки S^2 может быть принято следующее отношение:

$$\text{Оц}\sigma^2 = S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - 2}. \quad (10)$$

Сумма $\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$ имеет $m = n - 2$ степени свободы, т. к. по данным испытаний определяются два коэффициента. Величина $\frac{B_1 - \beta_1}{\sqrt{\text{Оц}D_{B_1}}}$ в этом случае имеет t -распределение с $m = n - 2$ степенями свободы.

Доверительный интервал для β_1 можно использовать для проверки гипотезы $H_0 : \beta_1 = \beta_{10}$. Если доверительный интервал, соответствующий доверительной вероятности γ , содержит значение β_{10} , то гипотеза H_0 не отвергается на уровне значимости $\alpha = 1 - \gamma$. В частности доверительный интервал может быть использован для проверки гипотезы $H_0 : \beta_1 = 0$. Если гипотеза $\beta_1 = 0$ отвергается, то параметр β_1 называется значимым. Аналогичными рассуждениями можно получить доверительный интервал для β_0 :

$$\left(B_0 - t_{m,\gamma} \cdot S \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}; B_0 + t_{m,\gamma} \cdot S \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} \right),$$

где m определяется способом нахождения S^2 .

Интерес для практики представляет доверительный интервал для линии регрессии. Для его построения необходимо знать оценку дисперсии \hat{y}_i .

$$\text{Оц}D\hat{y}_i = S^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right), \quad \text{где } S^2 \text{ определяется по формуле (9) или (10).}$$

Доверительный интервал для \hat{y}_i имеет вид

$$\hat{y}_i \pm t_{m,\gamma} \cdot S \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}. \quad (11)$$

Доверительная зона (11) определяет местоположение линии регрессии, а не возможных значений зависимой переменной. Доверительный интервал для значений y_i определяется по формулам

$$\hat{y}_i \pm t_{m,\gamma} \cdot S \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}.$$


Проверка модели на адекватность

Проверить модель на адекватность можно сравнивая S_R^2 -дисперсию, характеризующую разброс значений y_i около линии регрессии (10), и $S^2(y)$ – дисперсию, характеризующую ошибку опыта (9).

Для проверки используется отношение $F = \frac{S_R^2}{S^2(y)}$, имеющее в случае адекватности модели F-распределение с $(n-2), \left(\sum_{i=1}^n n_i - k\right)$ степенями свободы. Если

$F = \frac{S_R^2}{S^2(y)} < F_\alpha$, где F_α - критическое значение, соответствующее уровню значимости α , то нет оснований сомневаться в адекватности модели. В этом случае S_R^2 так же, как и $S^2(y)$, может служить оценкой неизвестной $De_i = \sigma^2$. Если же $F = \frac{S_R^2}{S^2(y)} > F_\alpha$, то гипотеза об адекватности модели отвергается на уровне значимости α ($\alpha = 0,05; 0,01$).

Замечание 1. Проверить модель на адекватность можно, расщепляя сумму квадратов $\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$ на сумму квадратов, связанную с чистой ошибкой опыта, и на сумму квадратов, связанную с неадекватностью.

$SS = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$ относительно регрессии с $m_r = n - 2$; степенями свободы		SS связанный с чистой ошибкой опыта с $m = \sum_{i=1}^k n_i - k$ степенями свободы.	$- S^2(y) = \frac{SS}{m}$
		SS связанная с неадекватностью (по разности) с $(m_r - m)$ степенями свободы.	$- MS^2 = \frac{SS}{m_r - m}$

Отношение $F = \frac{MS^2}{S^2(y)}$ имеет F-распределение с $(m_r - m)$, m степенями свободы, если модель корректна. Критическая область выбирается аналогично предыдущему варианту.

Замечание 2. Если нет возможности оценить чистую ошибку опыта по параллельным опытам, то проверить модель на адекватность можно следующим образом. Построить линейную модель первого порядка и найти остаточную сумму квадратов $Q_0 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$ с числом степеней свободы $n - 2$. Затем построить линейную зависимость второго порядка и найти остаточную сумму квадратов $Q_1 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$ с числом степеней свободы $n - 3$. Тогда сумма квадратов $Q_2 = Q_0 - Q_1$ будет иметь $(n - 2) - (n - 3) = 1$ степень свободы. В качестве критерия проверки гипотезы об адекватности рассматривается отношение $F = \frac{Q_2/1}{Q_1/(n-3)}$, имеющее F-распределение с 1, $n - 3$ степенями свободы, если справедлива гипотеза о несущественности криволинейности.

Заключение

При использовании аппарата математической статистики, в частности регрессионного анализа, надо иметь в виду, что, во-первых, никакие статистические методы не улучшают плохих наблюдений и, во-вторых, глубоко ошибочным является весьма распространенное убеждение о том, что в результате статистической обработки данных выводится функциональная зависимость.

Интерпретация полученного уравнения регрессии во многом зависит от априорных знаний о специфике явления, для математического описания которого привлечен регрессионный анализ. В связи с этим повышается роль экспериментатора (исследователя), обязанного вникнуть в механизм явления, собрать все сведения о круге факторов, оказывающих влияние на зависимую переменную и обеспечить представительный числовой материал.

Статистическая зависимость, как бы ни была она сильна, никогда не может установить причинной связи: идеи о причинной связи должны приходить извне статистики, в конечном счете – из некоторой другой теории. Статистическая зависимость любого сорта логически не влечет причинной.

Контрольные вопросы

1. Что называется регрессией y по x ?
2. Что означает линейность модели и как определяется ее порядок ?
3. В чем заключается метод наименьших квадратов отыскания оценок параметров модели?
4. Что такое доверительный интервал, доверительная вероятность?
5. Что такое t-распределение?
6. Как определяется оценка σ^2 по параллельным опытам?
7. В чем заключается идея проверки модели на адекватность?

Варианты заданий к лабораторной работе 4

№ 1		№ 2		№ 3		№ 4	
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
-5,000	12,9581	-5,0000	16,4581	-5,0000	19,2581	-5	18,5582
-4,6000	11,8515	-4,6000	14,9515	-4,6000	17,4315	-4,6	16,8115
-4,2000	11,2448	-4,2000	13,9448	-4,2000	16,1043	-4,2	15,5643
-3,8000	12,8458	-3,8000	15,1458	-3,8000	16,9858	-3,8	16,5258
-3,4000	9,2468	-3,4000	11,1468	-3,4000	12,6669	-3,4	12,2869
-1,0000	7,3688	-3,0000	10,7237	-3,0000	11,9237	-3,0	11,6237
-0,6000	7,1851	-2,6000	9,7417	-2,6000	10,6217	-2,6	10,4017
-0,2000	6,6600	-2,2000	9,1820	-2,2000	9,7420	-2,2	9,602
0,2000	6,8112	-1,8000	8,7949	-1,8000	9,0349	-1,8	8,9749
0,6000	7,9497	-1,4000	8,6887	-1,4000	8,6087	-1,4	8,6287
-3,0000	9,2236	-1,0000	6,8688	-1,0000	6,4688	-1	6,5688
-2,6000	8,6417	-0,6000	6,2851	-0,6000	5,5651	-0,6	5,7451
-2,2000	8,4820	-0,2000	5,36	-0,2000	4,3200	-0,2	4,5800
-1,8000	8,4949	0,2000	5,1112	0,7000	3,7513	0,2	4,0913
-1,4000	8,7887	0,6000	5,8497	0,6000	4,1698	0,6	4,5898
1,0000	5,6117	1,0000	3,1117	1,0000	1,1117	1,0	1,6117
-3,4000	9,8963	-3,4000	11,7964	-3,4000	13,3164	-3,4	12,9364
-3,4000	10,3336	-3,4000	12,2336	-3,4000	13,7536	-3,4	13,3736
-1,4000	8,7137	-1,4000	8,6137	-1,4000	8,5337	-1,4	8,5537
-1,4000	7,2163	-1,4000	7,1163	-1,4000	7,0363	-1,4	7,0563

№ 5		№ 6		№ 7		№ 8	
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
-5,0000	14,3581	-5,0000	-0,3418	-5,0000	17,1581	-5,0000	15,0581
-4,6000	13,0915	-4,6000	-0,5285	-4,6000	15,5715	-4,6000	13,7115
-4,2000	12,3248	-4,2000	-0,2152	-4,2000	14,4848	-4,2000	12,8646
-3,8000	13,7658	-3,8000	2,3058	-3,8000	15,6058	-3,8000	14,2258
-3,4000	10,0068	-3,4000	-0,3731	-3,4000	11,5269	-3,4000	10,3868
-3,0000	9,8236	-3,0000	0,5237	-3,0000	11,0237	-3,0000	10,1237
-2,6000	9,0817	-2,6000	0,8617	-2,6000	9,9617	-2,6000	9,3017
-2,2000	8,7620	-2,2000	1,6220	-1,0000	6,7688	-2,2000	8,9020
-1,8000	8,6149	-1,8000	2,5549	-0,6000	6,1051	-1,8000	8,6749
-1,4000	8,7487	-1,4000	3,7687	-0,2000	5,1000	-1,4000	8,7287
-1,0000	7,1688	-1,0000	3,2688	0,2000	4,7712	-1,0000	7,0686
-0,6000	6,8251	-0,6000	4,0051	0,6000	5,4298	-0,6000	6,6451
-0,2000	6,1400	-0,2000	4,4000	1,0000	2,6117	-0,2000	5,8800
0,2000	6,1312	0,2000	5,4712	-3,4000	12,1764	0,2000	5,7912
0,6000	7,1097	0,6000	7,5297	-2,2000	9,3220	0,6000	6,6897
1,0000	4,6117	1,0000	6,1117	-1,8000	8,8549	1,0000	4,1117
-3,4000	10,6564	-3,4000	0,2764	-1,4000	8,6687	-3,4000	11,0364
-3,4000	11,0936	-3,4000	0,7136	-3,4000	12,6136	-3,4000	11,4736
-1,4000	8,6737	-1,4000	3,637	-1,4000	8,5937	-1,4000	8,6537
-1,4000	7,1763	-1,4000	2,1963	-1,4000	7,0963	-1,4000	7,1563

№ 9		№ 10		№ 11		№ 12	
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
-5,0000	14,3581	-5,0000	13,6581	-5,0000	12,9581	-5,0000	12,2581
-4,6000	13,0915	-4,6000	12,4715	-4,6000	11,8515	-4,6000	11,2315
-4,2000	12,3248	-4,2000	11,7848	-4,2000	11,2448	-4,2000	10,7048
-3,8000	13,7658	-3,8000	13,3058	-3,8000	12,8458	-3,8000	12,3858
-3,4000	10,0068	-3,4000	9,6268	-3,4000	9,2468	-3,4000	8,8668
-3,0000	9,8236	-3,0000	9,5236	-3,0000	9,2236	-3,0000	8,9236
-2,6000	9,0817	-2,6000	8,8617	-2,6000	8,6417	-2,6000	8,4217
-2,2000	8,7620	-2,2000	8,6220	-2,2000	8,4820	-2,2000	8,3420
-1,8000	8,6149	-1,8000	8,5540	-1,8000	8,4949	-1,8000	8,4349
-1,4000	8,7487	-1,4000	8,7687	-1,4000	8,7887	-1,4000	8,8087
-1,0000	7,1688	-1,0000	7,2688	-1,0000	7,3688	-1,0000	7,4688
-0,6000	6,8251	-0,6000	7,0051	-0,6000	7,1851	-0,6000	7,3651
-0,2000	6,1400	-0,2000	6,4000	-0,2000	6,6600	-0,2000	6,9200
0,2000	6,1312	0,2000	6,4712	0,2000	6,8112	0,2000	7,1512
0,6000	7,1097	0,6000	7,5297	0,6000	7,9497	0,6000	8,3697
1,0000	4,6117	1,0000	5,1117	1,0000	5,6117	1,0000	6,1117
-3,4000	10,6564	-3,4000	10,2764	-3,4000	9,8963	-3,4000	9,5163
-3,4000	11,0936	-3,4000	10,7136	-3,4000	1,3336	-3,4000	9,9536
-1,4000	8,6737	-1,4000	8,6937	-1,4000	8,7137	-1,4000	8,7337
-1,4000	7,1763	-1,4000	7,1963	-1,4000	7,2163	-1,4000	7,2363

№ 13		№ 14		№ 15		№ 16	
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
-5,0000	2,4582	-5,0000	1,7582	-5,000	1,0582	-5,0000	0,3582
-4,6000	1,9515	-4,6000	1,3315	-4,6000	0,7115	-4,6000	0,0915
-4,2000	1,9448	-4,2000	1,4048	-4,2000	0,8648	-4,2000	0,3248
-3,8000	4,1458	-3,8000	3,6858	-3,8000	3,3358	-3,8000	2,7658
-3,4000	1,1469	-3,4000	0,7669	-3,4000	0,3869	-3,4000	0,0069
-3,0000	1,7237	-3,000	1,4237	-3,0000	1,1237	-3,0000	0,8237
-2,6000	1,7417	-2,6000	1,5217	-2,6000	1,3017	-2,6000	1,0817
-2,2000	2,1820	-2,2000	2,0420	-2,2000	1,9020	-2,2000	1,7620
-1,8000	2,7949	-1,8000	2,7349	-1,8000	2,6749	-1,8000	2,6149
-1,4000	3,6887	-1,4000	3,7087	-1,4000	3,7287	-1,4000	3,7487
-1,0000	2,8688	-1,0000	2,9688	-1,0000	3,0688	-1,0000	3,1688
-0,6000	3,2851	-0,6000	3,4651	-0,6000	3,6451	-0,6000	3,8251
-0,2000	3,3600	-0,2000	3,6200	-0,2000	3,8800	-0,2000	4,1400
0,2000	4,1113	0,2000	4,4513	0,2000	4,7913	0,2000	5,1312
0,6000	5,8497	0,6000	6,2697	0,6000	6,6897	0,6000	7,1097
1,0000	4,1117	1,0000	4,6117	1,0000	5,1117	1,0000	5,6117
-3,4000	1,7964	-3,4000	1,4164	-3,4000	1,0364	-3,4000	0,6564
-3,4000	2,2336	-3,4000	1,8536	-3,4000	1,4736	-3,4000	1,0936
-1,4000	3,6137	-1,4000	3,6337	-1,4000	3,6537	-1,4000	3,6737
-1,4000	2,1163	-1,4000	2,1363	-1,4000	2,1563	-1,4000	2,1763

№ 17		№ 18		№ 19		№ 20	
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
-5,0000	15,7581	-5,0000	13,6812	-5,0000	-1,7418	-5,0000	12,2615
-4,6000	14,3315	-4,6000	12,1972	-4,6000	-1,7684	-4,6000	12,7295
-4,2000	13,4048	-4,2000	12,8132	-4,2000	-1,2952	-4,2000	11,0975
-3,8000	14,6858	-3,8000	11,1292	-3,8000	4,3858	-3,8000	11,7655
-3,4000	10,7668	-3,4000	11,9452	-3,4000	-1,1331	-3,4000	11,0335
-3,0000	10,4237	-1,0000	8,2712	-3,0000	-0,0763	-1,0000	7,0415
-2,6000	9,5217	-0,6000	8,2572	-2,6000	0,4217	-0,6000	6,1095
-2,2000	9,0420	-3,0000	17,6212	-2,2000	1,3420	-0,2000	7,1775
-1,8000	8,7349	-2,6000	11,0772	-1,8000	2,4349	0,2000	5,0455
-1,4000	8,7087	-2,2000	8,9932	-1,4000	3,8087	0,6000	4,5135
-1,0000	6,9688	-1,8000	8,4092	-1,0000	3,4688	-3,0000	9,1015
-0,6000	6,4651	-1,4000	9,8252	-0,6000	4,3651	-2,6000	10,5695
-0,2000	5,6200	1,0000	4,9212	-0,2000	4,9200	-2,2000	9,5375
0,2000	5,4512	-3,4000	15,8452	0,2000	6,1512	-1,8000	8,0055
0,6000	6,2697	-3,4000	14,4992	0,6000	8,3697	-1,4000	8,6055
1,0000	3,6117	-1,4000	10,5252	1,0000	7,1117	1,0000	5,3815
-3,4000	11,4164	-1,4000	10,3592	-3,4000	-0,4836	-3,4000	12,4255
-3,4000	11,8536	-0,2000	6,9812	-3,4000	-0,0464	-3,4000	15,8795
-1,4000	8,6337	0,2000	5,3812	-1,4000	3,7337	-1,4000	9,0735
-1,4000	7,1363	0,6000	7,9532	-1,4000	2,2363	-1,4000	8,8395

21		№ 22		№ 23		№ 24	
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
-5,0000	-3,1418	-5,0000	-3,8418	-5,0000	16,0342	-5,0000	-5,2418
-4,6000	-3,0084	-4,6000	-3,6284	-4,6000	14,4262	-4,6000	-4,8684
-4,2000	-2,3752	-4,2000	-2,9152	-4,2000	14,8182	-4,2000	-3,9952
-3,8000	0,4658	-3,8000	0,0058	-3,8000	14,2102	-3,8000	-0,9142
-3,4000	-1,8931	-3,4000	-2,2731	-3,4000	14,9342	-3,4000	-3,0331
-3,0000	-0,6763	-3,0000	-0,9763	-1,0000	8,5542	-3,0000	-1,5763
-2,6000	-0,0183	-2,6000	-0,2383	-0,6000	8,8462	-2,6000	-0,6783
-2,2000	1,0620	-2,2000	0,9220	-0,2000	9,2382	-2,2000	0,6420
-1,8000	2,3149	-1,8000	2,2549	0,2000	8,5302	-1,8000	2,1349
-1,4000	3,8487	-1,4000	3,8687	0,6000	7,1222	-1,4000	3,9087
-1,0000	3,6688	-1,0000	3,7688	-3,0000	11,1942	-1,0000	3,9688
-0,6000	4,7251	-0,6000	4,9051	-2,6000	12,4862	-0,6000	5,2651
-0,2000	5,4400	-0,2000	5,7000	-2,2000	11,2782	-0,2000	6,2200
0,2000	6,8312	0,2000	7,1712	-1,8000	11,6702	0,2000	7,8512
0,6000	9,2097	0,6000	9,6297	-1,4000	12,0622	0,6000	10,4697
1,0000	8,1117	1,0000	8,6117	1,0000	7,8142	1,0000	9,6117
-3,4000	-1,2436	-3,4000	-1,6236	-3,4000	12,6282	-3,4000	-2,3836
-3,4000	-0,8064	-3,4000	-1,1864	-3,4000	14,8822	-3,4000	-1,9454
-1,4000	3,7737	-1,4000	3,7937	-1,4000	10,0082	-1,4000	3,8337
-1,4000	2,2763	-1,4000	2,2963	-1,4000	11,2422	-1,4000	2,3363

№ 25					
X	Y	X	Y	X	Y
-5,0000	-15,5342	3,4000	-11,8282	-2,2000	-12,6782
-4,6000	-15,9262	-3,4000	-15,6822	-1,8000	-10,1702
-4,2000	-14,2182	-1,4000	-8,9082	-1,4000	-11,5622
-3,8000	-14,8102	-1,4000	-12,3422	1,0000	-5,7142
-3,4000	-12,9022	0,6000	-8,3222	-0,2000	-9,1382
-1,0000	-10,6542	-3,0000	-13,7942	0,2000	-7,6302
-0,6000	-8,9462	-2,6000	-11,4862		

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Таблица А1

Функция Лапласа $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0040	0080	0120	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0,398	0438	0178	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0,2	0,0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	0,1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	0,1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	0,1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	0,2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2485	2517	2549
0,7	0,2580	2611	2642	2673	2703	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	0,2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0,9	0,3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	0,3413	3437	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1,1	0,3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	0,3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	0,4032	4049	4049	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	0,4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	0,4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1,6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4525	4633
1,8	0,4641	4649	4656	4664	4571	4678	4686	4693	4699	4706
1,9	0,4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
2,0	0,47725	47778	47831	47882	47932	47981	48230	48077	48124	48169
2,1	0,48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	0,48610	48645	48679	48713	48746	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	0,48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49135	49158
2,4	0,49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	0,49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	0,49534	49547	49560	49573	49585	49597	49609	49621	49632	49643
2,7	0,49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	0,49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	0,49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	0,49865	49903	49931	49952	49966	49977	49984	49989	49993	49995
4,0	0,999 68		4,5		0,499 997		5,0		0,499 99997	

χ^2 – распределение

Число степеней свободы k	χ^2_α как функции k и α . $\alpha = P(\chi^2 > \chi^2_\alpha)$															
	$\alpha =$ 0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	0,000 16	0,000 6	0,003 9	0,016	0,064	0,148	0,455	1,07	1,64	2,7	3,8	5,4	6,6	7,9	9,5	10,83
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,41	3,22	4,6	5,9	7,9	9,2	10,6	12,4	13,8
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,67	4,64	6,3	7,8	9,8	11,3	13,8	14,8	16,3
4	0,30	0,43	0,71	1,06	0,65	2,19	3,36	4,9	6,0	7,8	9,5	11,7	13,3	14,9	16,9	16,5
5	0,55	0,75	1,14	1,61	2,34	3,00	4,35	6,1	7,3	9,2	11,1	13,4	15,1	16,8	18,9	20,5
6	0,87	1,13	1,63	2,20	3,07	3,83	5,35	7,2	8,6	10,6	12,6	15,0	16,8	18,5	20,7	22,5
7	1,24	1,56	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,4	9,8	12,0	14,1	16,6	18,5	20,3	22,6	24,3
8	1,65	2,03	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,5	11,0	13,4	15,5	18,2	20,1	22,0	24,3	26,1
9	2,09	2,53	3,32	4,17	5,38	6,39	8,34	10,7	12,2	14,7	16,9	19,7	21,7	23,6	26,1	27,9
10	2,56	3,06	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34	11,8	13,4	16,0	18,3	21,2	23,2	25,2	27,7	29,6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
11	3,1	3,6	4,6	5,6	7,0	8,1	10,3	12,9	14,6	17,3	19,7	22,6	24,7	26,8	29,4	31,3
12	3,6	4,2	5,2	6,3	7,8	9,0	11,3	14,0	15,8	18,5	21,0	24,1	26,2	28,3	30,9	32,9
13	4,1	4,8	5,9	7,0	8,6	9,9	12,3	15,1	17,0	19,8	22,4	25,5	27,7	29,8	32,5	34,5
14	4,7	5,4	6,6	7,8	9,5	10,8	13,3	16,2	18,2	21,1	23,7	26,9	29,1	31,3	34,0	36,1
15	5,2	6,0	7,3	8,5	10,3	11,7	14,3	17,3	19,3	22,3	25,0	28,8	30,6	32,8	35,6	37,1
16	5,8	6,6	8,0	9,3	11,2	12,6	15,3	18,4	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	34,3	37,1	39,3
17	6,4	7,3	8,7	10,1	12,0	13,5	16,3	19,6	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4	35,7	38,6	40,3
18	7,0	7,9	9,4	10,9	12,9	14,4	17,3	20,6	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	37,2	40,1	42,3
19	7,6	8,6	10,1	11,7	13,7	15,4	18,3	21,7	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2	38,6	41,6	43,8
20	8,3	9,2	10,9	12,4	14,6	16,3	19,3	22,8	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6	40,0	43,0	45,3
21	8,9	9,9	11,6	13,2	15,4	17,2	20,3	23,9	26,2	29,6	32,7	36,3	38,9	41,4	44,5	46,8
22	9,5	10,6	12,3	14,0	16,3	18,1	21,3	24,9	27,3	30,8	33,9	37,7	40,3	42,8	45,9	48,3
23	10,2	11,3	13,1	14,8	17,2	19,0	22,3	26,0	28,4	32,0	35,2	39,0	41,6	44,2	47,8	49,7
24	10,9	12,0	13,8	15,7	18,1	19,9	23,3	27,1	29,6	33,2	36,4	40,3	43,0	45,6	48,7	51,2
25	11,5	12,7	14,6	16,5	18,9	20,9	24,3	28,2	30,7	34,4	37,7	41,6	44,3	46,9	50,1	52,6
26	12,2	13,4	15,4	17,3	19,8	21,8	25,3	29,2	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6	48,3	51,6	54,1
27	12,9	14,1	16,2	18,1	20,7	22,7	26,3	30,3	32,9	36,7	40,1	44,1	47,0	49,6	52,9	55,5
28	13,6	14,8	16,9	18,9	21,6	23,6	27,3	31,4	34,0	37,9	41,3	45,4	48,3	51,0	54,4	56,9
29	14,3	15,6	17,7	19,8	22,5	24,6	28,3	32,5	35,1	39,1	42,6	46,7	49,6	52,3	55,7	58,3
30	15,0	16,8	18,5	20,6	23,4	25,5	29,3	33,5	36,3	40,3	43,8	48,0	50,9	53,7	57,1	59,7

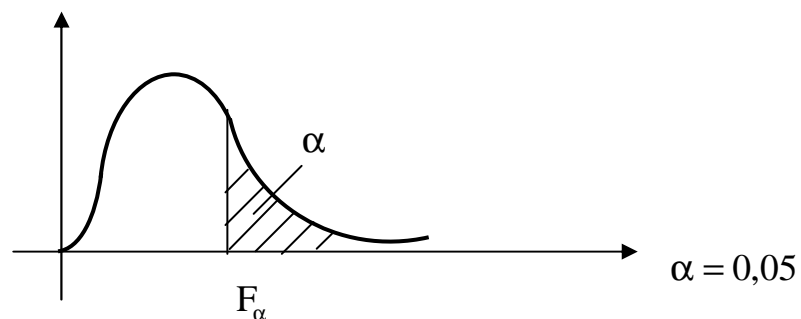
Двусторонние границы t – распределения: значения t_γ , для которых

$$P(|t| < t_\gamma) = \gamma.$$

	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,936	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,519
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,336	1,886	2,920	1,303	6,965	9,925	31,598
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,941
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,890	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,487
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,313
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,640	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,962	1,067	1,330	1,734	2,103	2,552	2,878	3,922
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,797	3,745
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
60	0,126	0,254	0,387	0,527	0,679	0,848	1,046	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	0,126	0,235	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

F - распределение



Степень свободы для знаменателя m_2	Степень свободы числителя m_1									
	1	2	3	4	5	6	8	12	24	-
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	238,9	243,9	249,0	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,46	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54

Продолжение табл. А4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,50	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,42	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	1,01
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,00	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,72	2,57	2,46	2,30	2,13	1,93	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	1,91	1,05
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	1,90	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79	1,51
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,02	1,83	1,61	1,25
-	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,52	1,00

$\alpha = 0,01$

Степень свободы для знаме- нателя m_2	Степень свободы для числителя m_1									
	1	2	3	4	5	6	8	12	24	-
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5981	6106	6234	6366
2	98,49	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,42	99,46	99,50
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,49	27,05	26,60	26,12
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,80	14,37	13,93	13,46
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,29	9,89	9,47	9,02
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,10	7,72	7,31	6,88
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,84	6,47	6,07	5,65
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,03	5,67	5,28	4,86
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,47	5,11	4,73	4,31
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,06	4,71	4,33	3,91

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
11	9,65	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,74	4,40	4,02	3,60
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,50	4,16	3,78	3,36
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,30	3,96	3,59	3,16
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,14	3,80	3,43	3,00
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,00	3,67	3,29	2,87
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	3,89	3,55	3,18	2,75
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,79	3,45	3,08	2,65
18	8,28	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,71	3,37	3,00	2,57
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,63	3,30	2,92	2,49
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,56	3,23	2,86	2,42
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,51	3,17	2,80	2,36
22	7,94	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,45	3,12	2,75	2,31
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,41	3,07	2,70	2,26
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,36	3,03	2,66	2,21
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,86	3,63	3,32	2,99	2,62	2,17
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,29	2,96	2,58	2,13
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,26	2,93	2,55	2,10
28	7,64	5,45	4,57	4,07	2,75	3,53	3,23	2,90	2,52	2,06
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,20	2,87	2,49	2,03
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,17	2,84	2,47	2,01
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	2,99	2,66	2,29	1,80
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,82	2,50	2,12	1,60
120	6,85 6,64	4,79 4,60	3,95 3,78	3,48 3,32	3,17 3,02	2,96 2,80	2,66 2,51	2,34 2,18	1,95 1,79	1,38 1,00

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Афифи А., Эйзен С. Статистический анализ. Подход с использованием ЭВМ. – М.: Мир, 1982. – 488 с.
2. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высш. школа, 1972.
3. Гурский Е. Н. Теория вероятностей с элементами математической статистики. - М.: Высш. школа, 1971.
4. Драйпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. – М.: Статистика, 1973. – 392 с.
5. Иванов-Мусатов О. С. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Наука, 1979.
6. Коваленко И. Н., Филиппов А. А. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высш. школа, 1973.
7. Калихман И. Л., Четыркин Е. М. Вероятность и статистика. – М.: Финансы и статистика, 1982. – 320 с.
8. Карасев А. И. Основы математической статистики. – М.: Росвузиздат, 1962. – 368 с.
9. Коломаев В. А. и др. Теория вероятности и математическая статистика. – М.: Высш. шк., 1991. – 400 с.
10. Справочник по теории вероятностей и математической статистике // В. С. Королук, Н. Н. Портенко и др. - М.: Наука, 1985.
11. Пугачев В. С. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Наука, 1979.
12. Свешников А. А. Основы теории ошибок. - Л.: Изд-во ЛГУ, 1972.
13. Математическая статистика: Метод. указания/ Сост.: Н. С. Кац, М. Н. Соколовский, В. Д. Цветкова. – Омск: Изд. ОмПИ, 1992.
14. Математическая статистика: Метод. указания к лабораторным работам Сост. Н. С. Кац. Омск: Изд. ОмПИ, 1991.
15. Линейная регрессия. Корреляционный анализ: Методические указания к лабораторным работам / Сост.: Н. С. Кац, Г. Н. Бояркин; ОмПИ. - Омск, 1992.
16. Шторм Р. Теория вероятностей. Математическая статистика. Статистический контроль качества. – М.: Мир, 1970. – 368 с.

Редактор Г. М. Кляут
ИД 06039 от 12.10.01

Подписано в печать 31.03.05. Бумага офсетная. Формат 60x84 1/16.

Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ. л. 4,25 Уч.-изд. л. 4,25

Тираж 200 экз. Заказ

Издательство ОмГТУ. 644050, г. Омск, пр-т Мира, 11
Типография ОмГТУ

Для заметок