

Министерство образования Российской Федерации  
Омский государственный технический университет

**ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ № 4 - 8**  
**ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОМУ ПРАКТИКУМУ**

**Для студентов дневной и вечерней форм обучения**

Омск-2003

Составитель: Цветкова Валентина Дмитриевна, старший преподаватель

Редактор Г. М. Кляут

ИД 06039 от 12.10.01

Подписано в печать 07.03.03. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.

Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ. л. 2,0. Уч.- изд. л. 2,0.

Тираж 200 экз. Заказ

---

Издательство ОмГТУ. 644050, г. Омск, пр-т Мира, 11

Типография ОмГТУ

## Лабораторная работа № 4

### Приближенное вычисление определенных интегралов

Пусть требуется найти определенный интеграл  $J = \int_a^b f(x) dx$ , где  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ .

В большинстве случаев решать эту задачу приходится приближенно численными методами, которые основаны на замене подынтегральной функции  $f(x)$  интерполяционным многочленом. Для достижения необходимой точности вычислений интервал интегрирования  $[a, b]$  делится на более мелкие части  $[x_k, x_{k+1}]$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) и на каждом из этих участков производится соответствующая замена. Тогда весь интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  представляется в виде линейной комбинации нескольких значений  $f(x)$ :

$$\int_a^b f(x) dx = c_0 f(x) + c_1 f(x_1) + \dots + c_n f(x_n) + \dots$$

При фиксированном  $n$

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^n c_k f(x_k) + R_n(x)$$

или

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n c_k f(x_k) \quad (1)$$

Формулы вида (1) называются квадратурными.

$R_n(x) = \left| J - \sum_{k=0}^n c_k f(x_k) \right|$  называется остаточным членом.

Значения  $x_k$  называются узлами или сеткой,  $n$  – число разбиений интервала интегрирования.

Если  $[a, b]$  делится на равные части, то  $h = \frac{b-a}{n}$  называется шагом сетки.

Приближенное значение интеграла будет зависеть от  $h$ , поэтому будем обозначать его  $J(h)$ .

Функция  $f(x)$  на участке  $[x_k, x_{k+1}]$  заменяется многочленом нулевой степени, т. е.

постоянной для всех величиной  $f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$ , тогда  $J_k(h) =$

$$= \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \approx f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)(x_{k+1} - x_k). \text{ Геометрически это означает замену графика}$$

$y = f(x)$  на участке  $[x_k, x_{k+1}]$  прямой  $y = f\left[\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right]$ .

Интеграл, как площадь криволинейной трапеции, будет приближенно равен площади прямоугольника.

**Формула прямоугольников:**

$$J(h) = \int_a^b f(x) dx \cong h \cdot \sum_{k=1}^n f(x_k). \quad (2)$$

Остаточный член  $R(h) \approx -\frac{h^2}{24}(b-a) \max_{a < \xi < b} |f'(\xi)|$ .

На каждом из участков разбиения  $[x_k, x_{k+1}]$   $f(x)$  заменяется многочленом первой степени. Геометрическая кривая  $y = f(x)$  заменяется секущей и интеграл берется приближенно равным площади трапеции с основаниями  $f(x)$  и  $f(x_{k+1})$  и высотой  $(x_{k+1} - x_k)$ .

**Формула трапеции:**

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left( \frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(x_n) \right). \quad (3)$$

Остаточный член  $R_n(h) \approx -\frac{h^2}{12}(b-a) \cdot \max_{a < \xi < B} |f''(\xi)|$ .

Интервал интегрирования делится на четное число участков, на каждой паре участков с узлами  $x_{k-1}, x_k, x_{k+1}$  функция  $f(x)$  заменяется многочленом второй степени, т. е. кривая  $y = f(x)$  заменяется квадратичной параболой.

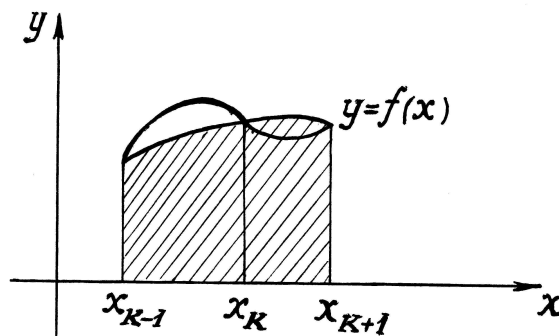


Рис. 1

**Формула метода Симпсона:**

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]. \quad (4)$$

Остаточный член  $R_n(h) \approx -\frac{h^4}{180}(b-a) \cdot \max_{a < \xi < b} |f^{(4)}(\xi)|$ .

### Оценка погрешности и точность вычисления

Погрешность приближенного вычисления интегралов состоит из остаточного члена квадратурной формулы и различных погрешностей округления.

На практике для оценки остаточного члена вычисляют два значения интеграла.  $J(h)$  и  $J(2h)$  при разбиении интервала интегрирования на  $n$  частей и применяют правило Рунге:

$$R(h) \approx \frac{J(h) - J(2h)}{3} \quad \text{для формул прямоугольников и трапеций,}$$

$$R(h) \approx \frac{J(h) - J(2h)}{15} \quad \text{для формулы Симпсона.} \quad (5)$$

Здесь  $R(h)$  - остаточный член (погрешность) более точного значения интеграла  $J(h)$ .

Чтобы погасить погрешность округления, промежуточные вычисления проводят с одним запасным знаком.

При одном и том же числе разбиений наибольшую точность дает метод Симпсона.

Пусть  $\varepsilon$  - заданная точность вычислений, тогда выбирают  $n$  таким, чтобы

$$h = \sqrt{\varepsilon} \quad \text{- для формул прямоугольников и трапеций,}$$

$$h = \sqrt[4]{\varepsilon} \quad \text{- для формулы Симпсона.} \quad (6)$$

Причём для формул Симпсона  $n/2$  должно быть обязательно целым, т. е.  $n = 8, 12, 16$  и т. п.

**Пример.** Вычислить интеграл  $\int_{0.5}^{2.5} \ln(x) dx$  с точностью  $\varepsilon = 10^{-4}$  методом Симпсона.

**Решение.** Вычисление интеграла проводить по следующему плану

1. Выбрать шаг интегрирования. Здесь можно взять  $n = 16$  и  $h = 0,125$ .
2. Определить узлы сетки:

$$x_0 = a, \quad x_n = b, \quad x_{k+1} = x_k + h \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

3. Для каждого  $x_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) вычислить значение подынтегральной функции и записать в один из трех столбцов бланка расчета в зависимости от номера  $k$  (табл. 1).

4. Вычислить значение интеграла  $J(h)$  по формуле (4).

5. Для оценки погрешности вычислить  $J(2h)$ .

Заметим, что для этого нужно использовать значение функции только в четных узлах.

6. Определить значение  $R(h) = \frac{J(h) - J(2h)}{15}$ .

7. Если  $R(h) < \varepsilon$ , то записать в качестве ответа  $J(h)$ .

В противном случае следует повысить точность вычислений одним из двух способов

1. Правило Рунге: если известны два значения интеграла  $J(h)$  и  $J(2h)$ , то очень хорошую точность можно получить, если к  $J(h)$  прибавить величину погрешности, найденную по формуле Рунге:

$$\int_a^d f(x) dx \approx J(h) + \frac{J(h) - J(2h)}{3} \quad \text{- для методов прямоугольников и трапеций,}$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx J(h) + \frac{J(h) - J(2h)}{15} \quad \text{- для метода Симпсона.} \quad (7)$$

2. Способ двойного пересчета: увеличим число разбиений  $n$  вдвое по сравнению с тем, при котором вычисляли  $J(h)$ , и найдем новое значение интеграла  $J(h/2)$ , если потребуется, то будем уменьшать шаг сетки до тех пор, пока не будут выполняться неравенства

$$|J(h) - J(2h)| < \varepsilon \quad \text{или} \quad R(h) < \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  - заданная точность.

Таблица 1

$\int_{0,5}^{2,5} \ln(x) dx \approx J(h); \quad h = \frac{2,5 - 0,5}{16} = 0,125; \quad \varepsilon = 10^{-4}$				
$J(h) \approx \frac{h}{3} \left[ f(x_0) + f(x_n) + 2 \cdot \sum_{k=2,4,\dots,n-2} f(x_k) + 4 \cdot \sum_{k=1,3,\dots,n-1} f(x_k) \right]$				
Номера узлов $k$	Узлы $x_k$	$f(x_k) = \ln(x_k)$		
		$k=0; k=16$	$k$ - четные	$k$ - нечетные
0	0,5	0) - 0,69315		
1	0,625			- 0,47000
2	0,750		1) - 0,28768	
3	0,875			- 0,13353
4	1,000		2) 0,00000	
5	1,125			0,11778
6	1,250		3) 0,22315	
7	1,375			0,31845
8	1,500		4) 0,40546	
9	1,625			0,48551
10	1,750		5) 0,55962	
11	1,875			0,62861
12	2,000		6) 0,69315	
13	2,125			0,75377
14	2,250		7) 0,81093	
15	2,375			0,86500
16	2,500	8) 0,91629		
Суммы $n=16$		0,22314	2,40463	2,56559
$n=8$		0,22314		
Интегралы		$J(h) = 0,63728$		$J(2h) = 0,63704$
Погрешность		$R(h) \approx -0,000016$		
Ответ		$\int_{0,5}^{2,5} \ln(x) dx \approx 0,6373$		

### Задания к лабораторной работе № 4

N	F(x)	a	b	ε
1	2	3	4	5
1	$\cos^3 x \cdot \cos 3x$	0	1,6	$10^{-4}$
2	$\sin^{0,4} x \cdot \sin 0,4x$	0	1,6	$10^{-4}$
3	$\sqrt{\sin x} \cdot \cos 0,5x$	0	1,6	$10^{-4}$
4	$\cos 3x / (1 + 0,7 \cos x)$	0	1,6	$10^{-4}$
5	$1 / (0,5 \sin x + 3 \cos x)^2$	0	1,6	$10^{-4}$
6	$1 / (1 - 0,49 \sin^2 x)$	0	1,6	$10^{-4}$
7	$x \cdot \sin(ex) / (1 + \cos^2 ex)$	0	3	$10^{-3}$
8	$\sin^2 x / (9 + 0,3 \cos x)$	0	3	$10^{-3}$
9	$1 / (10 + 6 \sin(x + e))$	0	1,6	$10^{-4}$
10	$1 / (5 - 4 \sin x) + x$	0	1,6	$10^{-4}$
11	$\sin^2 / (13 - 12 \cos x)$	0	3	$10^{-3}$
12	$x^4 \ln(x + \sqrt{x^2 - 0,36})$	1,25	2,45	$10^{-4}$
13	$\ln(x + \sqrt{x^2 - 0,25}) / 2x^2$	0,5	1,7	$10^{-4}$
14	$\ln \sin x - \frac{1}{x^2}$	0,32	1,52	$10^{-4}$
15	$\cos \ln x + \frac{1}{x^3}$	1,16	2,72	$10^{-4}$
16	$x \cdot e^x / (1 + x)^2$	0,3	1,1	$10^{-4}$
17	$x \cdot e^{0,4x} / (1 + 0,4x)^2$	0,3	1,5	$10^{-4}$
18	$1 / (3,28 + 0,73 \cdot e^{-1,3x})$	0,3	1,5	$10^{-4}$
19	$\frac{1}{x^4} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{2,73}$	1,7	2,5	$10^{-4}$
20	$\left( \arccos \frac{x}{1,2} \right)^2 + \frac{1,44}{x^2}$	0,2	1,0	$10^{-4}$
21	$\sqrt{9 - x^2} / x^2$	1,7	2,9	$10^{-4}$
22	$\sqrt{1,1 + 0,7x} / \sqrt{0,93 + 1,3x}$	0,7	1,9	$10^{-4}$
23	$x^3 / (\sqrt{2,5 + x^2})^3$	1,3	2,9	$10^{-4}$
24	$x^5 / (\sqrt{0,36 + x^2})^5$	0,05	1,65	$10^{-4}$
25	$\ln(1,3x) / x^{1,3}$	0,1	1,7	$10^{-4}$
26	$\ln(1,3x) / x^{1,3}$	01	1,7	$10^{-4}$

N	F(x)	a	b	$\epsilon$
27	$x^{0,2} \cdot \ln(0,7x)$	2/3	3/5	$10^{-4}$
28	$\ln(x + \sqrt{x^2 + 1,21})/x^3$	2,3	3,5	$10^{-4}$
29	$\ln(x + \sqrt{x^2 2,25})/x^2$	2,3	3,1	$10^{-4}$
30	$\frac{1}{x^2} \arcsin \frac{x}{9}$	1,5	3,1	$10^{-4}$
31	$\frac{1}{x^3} \arcsin \frac{x}{1,7}$	0,3	1,5	$10^{-4}$
32	$\cos x \cdot \sqrt{1 - 0,64 \sin^2 x}$	1,35	2,95	$10^{-4}$
33	$\sin x / (\cos x (1 + \cos x))$	0,45	1.25	$10^{-4}$
34	$1 / (9 \cos x^2 + 4 \sin^2 x)$	0	1,6	$10^{-4}$
35	$1 / (9 \cos x^2 - 4 \sin^2 x)$	0	1,6	$10^{-4}$
36	$\cos x / (\sin x + (1 + \sin x))$	0,45	1,65	$10^{-4}$
37	$\cos x / (\sin x + (1 + \cos x))$	0,25	1,45	$10^{-4}$
38	$\lg(x + 2)/x$	1,2	2	$10^{-4}$
39	$\operatorname{tg} x^2 / (x^2 + 1)$	0,2	1	$10^{-4}$
40	$\operatorname{tg}(x^2 + 0,5) / (1 + 2x^2)$	0,18	0,98	$10^{-4}$
41	$\sqrt{x + 1} \cdot \cos(x^2)$	0,2	1,8	$10^{-4}$
42	$\lg(x^2 + 2) / (x + 1)$	1,4	2,2	$10^{-4}$
43	$(x^2 + 1) \sin(x - 0,5)$	0,8	1,6	$10^{-4}$
44	$x^2 \cos x$	0,6	1,4	$10^{-4}$
45	$\lg(x^2 + 3) / 2x$	1,2	2	$10^{-4}$
46	$\lg(x^2 + 0,8) / (x - 1)$	2,5	3,3	$10^{-4}$
47	$\operatorname{tg}(x^2) / (x + 1)$	0,5	1,2	$10^{-4}$
48	$\sin(x^2 + 1) / 2\sqrt{x}$	1,3	2,1	$10^{-4}$
49	$(x + 1) \cos(x^2)$	0,2	1,0	$10^{-4}$
50	$\sin(x^2 - 0,4) / (x + 2)$	0,8	1,2	$10^{-4}$
51	$\sqrt{x + 1} \cdot \lg(x + 3)$	0,15	0,63	$10^{-4}$
52	$\lg(1 + x^2) / (2x - 1)$	1,2	2,8	$10^{-4}$
53	$(\sqrt{x} + 1) \operatorname{tg} 2x$	0,6	0,72	$10^{-4}$
54	$\cos x / (x^2 + 1)$	0,8	1,2	$10^{-4}$



## Контрольные вопросы к лабораторной работе № 4

1. Геометрическая интерпретация методов Симпсона, трапеций и метода прямоугольников.
2. Какой метод позволяет вычислить определенный интеграл точнее (с большей точностью при одинаковом шаге  $h$ ): метод прямоугольников или метод Симпсона?
3. Как увеличить точность приближенного вычисления определенного интеграла?
4. Геометрическая интерпретация метода Симпсона, трапеций, прямоугольников при шаге  $h$  и  $2h$ .

## Лабораторная работа № 5

### Приближенное вычисление дифференциальных уравнений

Обширный класс задач в различных областях науки и техники приводит к дифференциальным уравнениям, которые в большинстве случаев решаются только приближенными и численными методами. Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной

$$y' = f(x, y), \quad (1)$$

Общим решением такого уравнения является семейство функций  $y = \psi(x, c)$ , зависящее от произвольного постоянного. Чтобы иметь возможность вычислить значение функции в какой-либо точке  $x$ , необходимо выделить из этого семейства частное решение. Это делается с помощью задания начального условия вида

$$y|_{x=x_0} = y_0. \quad (2)$$

Нахождение решения, удовлетворяющего такому условию, называют задачей Коши.

Таким образом, задача численного решения дифференциального уравнения первого порядка ставится так: требуется построить таблицу значений функции  $y = \psi(x)$ , удовлетворяющей уравнению (1) и начальному условию (2) на заданном промежутке  $[a, b]$  с шагом  $h$ . Простейшим из численных методов интегрирования дифференциальных уравнений является метод Эйлера. Обычно он применяется только для прикидочных расчетов, но идея, положенная в его основу, является исходной для многих других численных методов.

**Метод Эйлера** основан на замене искомой функции многочленом первой степени, причем речь идет о нахождении значений функции в соседних узлах, т. е. на линейной экстраполяции. Выберем шаг настолько малым, чтобы для всех  $x$  между  $x_0$  и  $x_1 = x_0 + h$  значения функции  $y$  мало отличались от линейной функции. Тогда на указанном интервале  $y = y_0 + (x - x_0) \cdot y'_0 = y_0 + (x - x_0) \cdot f(x_0, y_0)$ , где  $y_0 = f(x_0, y_0)$  есть значение производной  $y'$  в точке  $x = x_0$ . Таким образом, кривая заменяется на этом интервале отрезком прямой (касательная к кривой в начале участка). Для точки  $x_1 = x_0 + h$  получим

$$y|_{x=x_1} = y_1 = y_0 + h, \quad y'_0 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0),$$

$$x_2 = x_1 + h, \quad y_2 = y_1 + h, \quad y'_1 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1).$$

В общем виде этот процесс вычислений по методу Эйлера можно записать в виде последовательности таких формул:

$$\left. \begin{aligned} \Delta y_k &= y'_k \cdot h = f(x_k, y_k) \cdot h \\ y_{k+1} &= y_k + \Delta y_k. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Геометрический смысл метода Эйлера (рис.1):

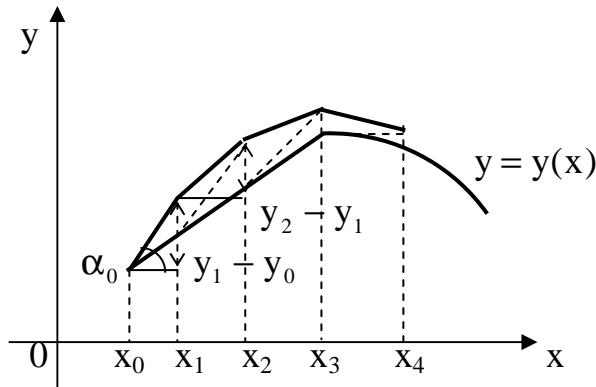


Рисунок 1

Интегральная кривая здесь заменяется ломаной, звенья которой имеют постоянную проекцию  $h$ . Первое звено касается искомой интегральной кривой в точке  $(x_0, y_0)$ .

**Повышение точности**, как показывает практика, может быть получено с помощью уменьшения шага интегрирования. Но в большинстве случаев стараются решать уравнения более точными методами. Одним из них является метод Рунге-Кутты. Этот метод также очень часто используется для нахождения значений функции в нескольких начальных точках (это требуется в других еще более эффективных методах), благодаря тому его преимуществу, что он совсем не использует предыдущей информации. Каждый шаг в методе Рунге-Кутты делается как бы заново, и для вычисления значения функции в точке  $(x_n + 1)$  используется лишь ее значение в точке  $x_n$ .

Основным **недостатком** этого метода является его трудоемкость. Для получения следующего значения функции требуется несколько раз вычислять значение производной  $y'$ , т. е. обращаться к правой части дифференциального уравнения. Существуют несколько методов Рунге-Кутты различных порядков. Наиболее распространенным является метод четвертого порядка. Выбираем шаг  $h$  и введем следующие обозначения:

$$x_i = x_0 + ih \quad \text{и} \quad y_i = y(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Для получения значения функции  $y_{i+1} = y(x_{i+1})$  по методу Рунге-Кутты выполняется следующая последовательность операций:

$$\left. \begin{aligned} R_1^{(i)} &= hf(x_i, y_i) \\ R_2^{(i)} &= hf(x_i + h/2, y_i + R_1^{(i)}/2) \\ R_3^{(i)} &= hf(x_i + h/2, y_i + R_2^{(i)}/2) \\ R_4^{(i)} &= hf(x_i + h, y_i + R_3^{(i)}) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

После этого приращение функции находится по формуле

$$\Delta y_i = \frac{1}{6}(R_1^{(i)} + 2R_2^{(i)} + 2R_3^{(i)} + R_4^{(i)}), \quad \text{а} \quad y_{i+1} = y_i + \Delta y_i. \quad (6)$$

**Геометрический смысл** легко проследить по формулам (5), из которых видно, что каждый шаг расчета представляет собой, в сущности, шаг по методу Эйлера. Сначала следует шаг  $h/2$  из точки  $M_0(x_i, y_i)$  под углом  $\alpha_1$ ,  $y_1' = \operatorname{tg} \alpha_1 = R_1^{(i)}/h$ , приходим в точку  $M_1(x_i + h/2, y_i + R_1^{(i)}/2)$ . В этой точке вычисляем направление  $\operatorname{tg} \alpha_2 = R_2^{(i)}/h$  и, делая шаг в этом направлении, снова из точки  $M_0$  попадем в точку  $M_2(x_i + h/2, y_i + R_2^{(i)})$ . Затем по направлению  $\operatorname{tg} \alpha_3 = R_3^{(i)}/h$  снова из точки  $M_0$  делается шаг на величину  $h$ , который приводит в точку  $M_3(x_i + h/2, y_i + R_3^{(i)}/2)$ , в которой вычисляется направление  $\operatorname{tg} \alpha_4 = R_4^{(i)}/h$ . Полученные четыре тангенса усредняются с весами  $1/6, 2/6, 2/6, 1/6$  по формуле (6) и по окончательному направлению делаем окончательный шаг из  $(x_i, y_i)$  в  $(x_{i+1}, y_{i+1})$ .

### Оценка погрешности и точность вычислений

Оценить остаточный член метода Рунге-Кутты очень сложно, следует только отметить: если  $f(x, y)$  непрерывна и ограничена со своими производными до четвертого порядка (и эти производные не очень велики), то с уменьшением шага сетки приближенное решение сходится к точному равномерно и остаточный член примерно равен  $h^4$ .

Если  $\epsilon$  - заданная точность вычислений, то в качестве начального значения шага нужно взять  $h_{\max} \approx \sqrt[4]{\epsilon}$ . Эффективная оценка погрешности метода Рунге-Кутты затруднительна. Поэтому для определения правильности выбора шага  $h$  в практике обычно на каждом этапе из двух шагов применяют «двойной пересчет». А именно из текущего верного значения  $y(x_i)$  вычисляют величину  $y(x_i + 2h)$  двумя способами: один раз с шагом  $h$ , а другой - с двойным шагом  $H = 2h$ . Если расхождение полученных значений не превышает допустимой погрешности, то шаг  $h$  для данного этапа выбран правильно, и полученное с его помощью значение можно принять за  $y(x_i + 2h)$ . В противном случае шаг уменьшают в два раза.

### Замечания по технике вычислений

1. При расчете следует использовать все возможности ЭКВМ, чтобы избежать лишних записей.

2. Все промежуточные вычисления следует располагать в бланке расчета по образцу (табл.1).

Таблица 1

(i)	(x)	y	$R = f(x, y)$	$\Delta y$
1	$x_i$	$y_i$	$R_1^{(i)} = f(x_i, y_i)H$	$R_1^{(i)}$
2	$x_i + H/2$	$y_i + R_1^{(i)}/2$	$R_2^{(i)} = f(x_i + H/2, y_i + R_1^{(i)}/2) \cdot H$	$2 \cdot R_2^{(i)}$
3	$x_i + H/2$	$y_i + R_2^{(i)}/2$	$R_3^{(i)} = f(x_i + H/2, y_i + R_2^{(i)}/2) \cdot H$	$2 \cdot R_3^{(i)}$
4	$x_i + H$	$y_i + R_3^{(i)}$	$R_4^{(i)} = f(x_i + H, y_i + R_3^{(i)}) \cdot H$	$R_4^{(i)}$
$\Delta y_i = 1/6 [R_1^{(i)} + 2R_2^{(i)} + 2R_3^{(i)} + R_4^{(i)}]$				
i + 1	$y_i + \Delta y_i$			

3. Такого рода вычислительную схему легко запрограммировать для работы на ЭЦВМ.

4. Метод Рунге-Кутты обладает значительной точностью;

5. Дает возможность применять «переменный шаг».

**Пример.** Методом Рунге-Кутты найти на отрезке  $[0; 0,5]$  решение дифференциального уравнения  $y' = x + y$ ;  $y|_{x=0} = 1$  с точностью  $\epsilon = 10^{-4}$ .

### Этапы решения

1. Выбираем шаг  $h \approx \sqrt[4]{\epsilon} = 0,1$ .

В промежуточных результатах сохраняем 5 знаков после запятой, чтобы в результате получить 4 верных знака.

2. Результаты вычислений заносим в бланк расчета. (табл. 2).

3. По найденным значениям  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots$ , как по координатам точек, строим ломаную – приближения интегральной кривой (рис. 1).

#### Порядок заполнения таблицы

1. Полагаем  $H = h_{нач}$ .

2. Записываем в первой строке таблицы 2 данные значения  $x_0, y_0$ , в данном – примере  $(0; 1)$ .

3. Вычисляем  $f(x_0, y_0)$ , умножаем на  $H$  и заносим в таблицу в качестве  $R_1^{(i)}$ , это же значение заносим в последний столбец табл. 2.

4. Записываем во второй строке табл. 2  $x_0 + H/2$ ;  $y_0 + R_1^{(0)}/2$ .

5. Вычисляем  $f(x_0 + H/2; y_0 + R_1^{(0)}/2)$ , умножаем на  $H$  и заносим в табл. 2 в качестве  $R_2^{(0)}$ , значение  $2 \cdot R_2^{(0)}$  заносим в последний столбец.

6. Записываем в третьей строке  $x_0 + H/2$ ;  $y_0 + R_2^{(0)}/2$ .

7. Вычисляем  $f(x_0 + H/2; y_0 + y_0 + R_2^{(0)}/2)$ , умножаем на  $H$  и заносим в таблицу в качестве  $R_3^{(0)}$ , значение  $2 \cdot R_2^{(0)}$  заносим в последний столбец.

8. Записываем в четвертой строке  $x_0 + H, y_0 + R_3^{(0)}$ .

9. Вычисляем  $f(x_0 + H; y_0 + R_3^{(0)})$ , умножаем на  $H$  и заносим в табл. 2 в качестве  $R_4^{(0)}$  в последний столбец.

10. Вычисляем сумму последнего столбца, делим на 6 и записываем в новой строке в качестве  $\Delta y_0$ .

11. Вычисляем  $y_1 = y_0 + \Delta y_0, x_1 = x_0 + H$  и записываем в первую строку следующего шага.

12. Вычислив таким образом два шага, берем в качестве  $H = 2 \cdot h_{нач}$ , проделываем пп. с 2 - 10.

13. Сравниваем  $y_2$ , полученное при  $H = h_{нач}$ , и  $y$ , полученное при  $H = 2 \cdot h_{нач}$ , если они совпадут с точностью до  $\epsilon$ , то  $H$  можно оставить равным  $h_{нач}$ , если нет, то в качестве  $H$  нужно взять  $H = h_{нач}/2$  и проделать вычисления (пп. 1 - 10) для того же значения  $x$ .

Таблица 2

		$H = h_{нач};$	$y' = x + y;$	$y _{x=0} = 1;$	$\epsilon = 0,0001$
$i$		$X$	$y$	$R^{(i)} = (x + y) \cdot H$	$\Delta y$
0	1	0	1	0,10000	0,10000
	2	0,05	1,05	0,11000	0,22000
	3	0,05	1,055	0,11050	0,22100
	4	0,1	1,11050	0,12105	0,12105
	$\Delta y_0$				0,11034
1	1	0,1	1,11034	0,12103	0,12103
	2	0,15	1,17086	0,13209	0,26417
	3	0,15	1,17636	0,13264	0,26526
	4	0,2	1,24298	0,14430	0,14430
	$\Delta y_1$				0,13246
		<b>0,2</b>	<b>1,24280</b>		
		$H = 2 \cdot h_{нач}$	Проверка		
0	1	0	1	0,20000	0,20000
	2	0,1	1,10000	0,24000	0,48000
	3	0,1	1,12000	0,24400	0,48800
	4	0,2	1,24400	0,28880	0,28880
	$\Delta y_0$				0,24280
		<b>0,2</b>	<b>1,24280</b>		
		$H = h_{н} = 1$			
2	1	0,2	1,24800	0,14428	0,14428

2	0,25	1,31494	0,15649	0,31299
3	0,25	1,32105	0,15710	0,31421
4	0,3	1,3990	0,16999	0,16999
$\Delta y_2$				0,15691
3 1	0,3	1,39971	0,16997	0,16997
2	0,35	1,48470	0,18347	0,36694
3	0,35	1,49144	0,18414	0,36829
4	0,4	1,58385	0,19838	0,19838
$\Delta y_3$				0,18393
	<b>0,4</b>	<b>1,58364</b>		
	$H = 2h_H = 0,2$	Проверка		
1	0,2	1,24280	0,28856	0,28856
2	0,3	1,38708	0,33416	0,67483
3	0,3	1,41151	0,34230	0,68460
4	0,4	1,58510	0,39702	0,39702
$\Delta y_2$				0,34084
	<b>0,4</b>	<b>1,58364</b>		
	$H = h_H = 0,1$			
4 1	0,4	1,58364	0,19836	0,19836
2	0,45	1,68382	0,21328	0,42656
3	0,45	1,69282	0,21403	0,42806
4	0,5	1,79767	0,22974	0,22977
$\Delta y_3$				0,21379
5	<b>0,5</b>	<b>1,79743</b>		
	$H = h_H / 2 = 0,05$	Проверка		
1	0,4	1,58364	0,09918	0,09918
2	0,426	1,63323	0,10291	0,20582
3	0,425	1,63510	0,10300	0,20600
4	0,45	1,68664	0,10683	0,10683
$\Delta y$				0,10297
1	0,45	1,68661	0,10683	0,10683
2	0,475	1,74002	0,11075	0,22150
3	0,475	1,74198	0,11085	0,22170
4	0,5	1,79746	0,11483	0,11487
$\Delta y$				0,11082
5	<b>0,5</b>	<b>1,79743</b>		

Таблица 3

X	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
Y	1	1,11034	1,24280	1,39970	1,5836	1,7974

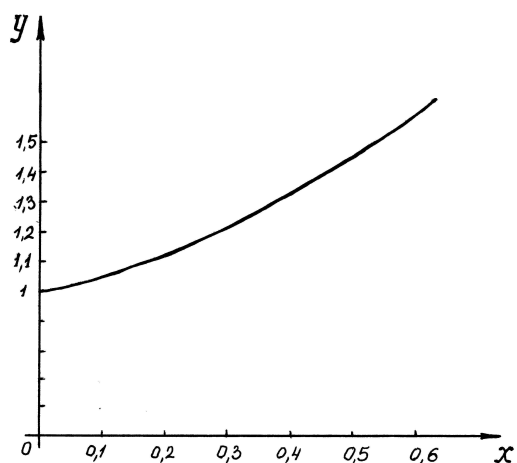


Рисунок 2

### Задания к лабораторной работе № 5

Составить таблицу дифференциального уравнения  $y' = f(x, y)$  с начальными условиями  $x = x_0$ ;  $y = y_0$  на отрезке  $[a, b]$  с точностью  $\epsilon = 10^{-4}$ . Построить график решения.

Таблица 4

№	Уравнения	$x_0$	$y_0$	a	b	$\epsilon$
1.	$y' = x + \sin \frac{y}{x}$	4	11	4	5,1	$10^{-4}$
2.	$y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{10}}$	1,6	2,9	1,6	2,7	$10^{-4}$
3	$y' = x + \cos \frac{y}{\pi}$	1,7	5,3	1,7	2,6	$10^{-3}$
4	$y' = x + \cos \frac{x}{3}$	0,6	0,8	0,6	1,4	$10^{-3}$
5	$y' = x + \cos \frac{y}{3}$	1,6	4,6	1,6	2,4	$10^{-3}$
6	$y' = x + \cos \frac{y}{e}$	1,4	2,2	1,4	2,2	$10^{-3}$
7	$y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{7}}$	0,5	0,6	0,5	1,3	$10^{-3}$
8	$y' = x + \cos \frac{\sqrt{7}}{5} y$	0,8	1	0,8	1,6	$10^{-3}$
9	$y' = x + \cos \frac{y}{2,25}$	1,4	2,2	1,4	2,0	$10^{-3}$
10	$y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{5}}$	1,8	2,6	1,8	2,6	$10^{-4}$

№	Уравнения	$x_0$	$y_0$	a	b	$\epsilon$
11	$y' = \sqrt{1 + x^3 + y}$	0,8	3,8	0,8	1,9	$10^{-3}$
12	$y' = \frac{x}{2} + \frac{e^2}{x + y}$	1,8	4,5	1,8	2,5	$10^{-4}$
13	$y' = x + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{7}{y}}$	3	6,1	3	4,4	$2 \cdot 10^{-4}$
14	$y' = \sqrt[3]{3 + y^2}$	0,3	0,2	0,3	1,1	$10^{-4}$
15	$y' = \sqrt[3]{x^2 + 3y}$	3	5	3	5,7	$3 \cdot 10^{-4}$
16	$x' = \frac{\cos y}{1 + x^2}$	0	0	0	0,8	$10^{-4}$
17	$x' = \frac{\cos 1,4y}{1,4 + x^2}$	0	0	0	0,8	$10^{-4}$
18	$x' = \frac{\cos 1,8y}{1,8 + x^2}$	0	0	0	0,8	$10^{-4}$
19	$x' = \frac{\cos 2,2y}{2,2 + x^2}$	0	0	0	0,8	$10^{-4}$
20	$x' = \frac{\cos 2,6y}{2,6 + x^2}$	0	0	0	0,8	$10^{-4}$
21	$x' = \frac{\cos 3y}{3 + x^2}$	0	0	0	0,8	$10^{-4}$
22	$x' = e^{-y}(x^2 + 1)$	0	0	0	0,8	$10^{-4}$
23	$x' = e^{-1,4y}(x^2 + 1,4)$	0	0	0	0,8	$10^{-4}$
24	$x' = e^{-1,8y}(x^2 + 1,8)$	0	0	0	0,8	$10^{-4}$
25	$x' = e^{-2,2y}(x^2 + 2,2)$	0	0	0	0,8	$10^{-4}$
26	$x' = e^{-2,6y}(x^2 + 2,6)$	0	0	0	0,8	$10^{-4}$
27	$x' = e^{-3y}(x^2 + 3)$	0	0	0	0,8	$10^{-4}$
28	$x' = \cos(y + x) + y - x$	0	0	0	0,8	$10^{-4}$
29	$x' = \cos(1,4y + x) + y - x$	0	0	0	0,8	$10^{-4}$
30	$x' = \cos(1,8y + x) + y - x$	0	0	0	0,8	$10^{-4}$
31	$x' = \cos(2,2y + x) + y - x$	0	0	0	0,8	$10^{-4}$
32	$x' = \cos(2,6y + x) + y - x$	0	0	0	0,8	$10^{-4}$
33	$x' = \cos(3y + x) + y - x$	0	0	0	0,8	$10^{-4}$
34	$x' = 1 - \sin(y + x) + \frac{x}{2 + y}$	0	0	0	0,6	$10^{-4}$



## Контрольные вопросы

1. Что является решением дифференциального уравнения?
2. Сущность методов Эйлера и Рунге-Кутты.
3. Геометрическая интерпретация методов.
4. Достоинства и недостатки каждого из методов.
5. Каким образом достигается точность вычислений в методе Рунге-Кутты?
6. Погрешность методов Эйлера и Рунге-Кутты.

## Лабораторная работа № 6

### Решение нелинейных систем методом итераций

Рассмотрим применение этого метода при  $n = 2$

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Система (1) приводится к виду

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2) \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2), \end{cases} \quad (2)$$

при этом для обеспечения сходимости метода требуется, чтобы в той области  $D$  плоскости  $(x_1, x_2)$ , в которой ищется решение, выполнялось условие

$\|\Phi(x_1, x_2)\| \leq \alpha < 1$  для некоторой константы  $\alpha$ , где

$$\Phi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} -$$

матрица частных производных функций  $\varphi_1, \varphi_2$ , а  $\|\Phi\|$  - ее норма.

Начальное приближение  $\bar{x}^{(0)} = (x_1^0, x_2^0)$  выбирается произвольно. Далее строится последовательность векторов  $\bar{x}^{(k)} = (x_1^k, x_2^k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , по формулам

$$\begin{aligned} x_1^{k+1} &= \varphi_1(x_1^k, x_2^k), \\ x_2^{k+1} &= \varphi_2(x_1^k, x_2^k), \end{aligned}$$

которая сходится к решению системы (1).

**Пример.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sin(x_1 - 0,6) - x_2 = 1,6 \\ 3x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

с точностью до  $\varepsilon = 0,01$ .

Перепишем данную систему в виде

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3} = \varphi_1(x_1, x_2) \\ x_2 = \sin(x_1 - 0,6) - 1,6 = \varphi_2(x_1, x_2). \end{cases}$$

Решение ищем в области D

$$\begin{cases} -2,6 \leq x_1 \leq -0,1 \\ -2,6 \leq x_2 \leq -1,6. \end{cases}$$

Заметим, что

$$\Phi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \cos(x_1 - 0,6) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\|\Phi\| = \max\left(\frac{1}{3}, |\cos(x_1 - 0,6)|\right) < 1$$

при  $x_1 \in [-2,6; -0,1]$ .

В качестве начального приближения выберем  $\bar{x}^0 = (-0,5; -2)$ . Все вычисления приведены в табл. 1.

Таблица 1

k	$x_1^k$	$x_2^k$	$\varphi_1(\bar{x}^k)$	$\varphi_2(\bar{x}^k)$
0	-0,500	-2,000	-0,333	-2,491
1	-0,333	-2,491	-0,497	-2,403
2	-0,497	-2,403	-0,468	-2,490
3	-0,468	-2,490	-0,497	-2,476
4	-0,497	-2,476	0,492	-2,490
5	-0,492	-2,490	-0,497	-2,487
6	-0,497	-2,487	-0,496	-2,490
7	-0,496	-2,490		

Процесс вычислений закончен на 7-м шаге, так как

$$\max(|x_4^7 - x_4^6|, |x_2^7 - x_2^6|) = 0,003 < 0,01.$$

**Ответ:**  $x_1 \approx -0,496$ ,  $x_2 \approx -2,490$ .

### Варианты заданий

1 
$$\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1,2 \\ 2x + \cos y = 2 \end{cases}$$

2 
$$\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0,5 \\ x - \cos y = 3 \end{cases}$$

3 
$$\begin{cases} \sin x + 2y = 2 \\ \cos(y-1) + x = 0,7 \end{cases}$$

4 
$$\begin{cases} \cos x + y = 1,5 \\ 2x - \sin(y-0,5) = 1 \end{cases}$$

5 
$$\begin{cases} \sin(x+0,5) - y = 1 \\ \cos(y-2) + x = 0 \end{cases}$$

6 
$$\begin{cases} \cos(x+0,5) + y = 0,8 \\ \sin y + 2x = 1,6 \end{cases}$$

7	$\begin{cases} \sin(x-1)=1,3-y \\ x-\sin(y+1)=0,8 \end{cases}$	8	$\begin{cases} 2y-\cos(x+1)=0 \\ x-\sin y=0,4 \end{cases}$
9	$\begin{cases} \cos(x+0,5)-y=2 \\ \sin y-2x=1 \end{cases}$	10	$\begin{cases} \sin(x+2)-y=1,5 \\ x+\cos(y-2)=0,5 \end{cases}$
11	$\begin{cases} \sin(y+1)-x=1,2 \\ 2y+\cos x=2 \end{cases}$	12	$\begin{cases} \cos(y-1)+x=0,5 \\ y-\cos x=3 \end{cases}$
13	$\begin{cases} \sin y+2x=2 \\ \cos(x-1)+y=0,7 \end{cases}$	14	$\begin{cases} \cos y+x=1,5 \\ 2y-\sin(x-0,5)=1 \end{cases}$
15	$\begin{cases} \sin(y+0,5)-x=1 \\ \cos(x-2)+y=0 \end{cases}$	16	$\begin{cases} \cos(y+0,5)+x=0,8 \\ \sin x-2y=1,6 \end{cases}$
17	$\begin{cases} \sin(y-1)+x=1,3 \\ y-\sin(x+1)=0,8 \end{cases}$	18	$\begin{cases} 2x-\cos(y+1)=0 \\ y+\sin x=-0,4 \end{cases}$
19	$\begin{cases} \cos(y+1)-x=1,5 \\ \sin x-2y=1 \end{cases}$	20	$\begin{cases} \sin(y+2)-x=1,5 \\ y+\cos(x-2)=0,5 \end{cases}$
21	$\begin{cases} \sin(x+1)-y=1 \\ 2x+\cos y=2 \end{cases}$	22	$\begin{cases} \cos(x+1)+y=0,8 \\ x-\cos y=2 \end{cases}$
23	$\begin{cases} \sin x+2y=1,6 \\ \cos(y-1)+x=1 \end{cases}$	24	$\begin{cases} \cos x+y=1,2 \\ 2x-\sin(y-0,5)=2 \end{cases}$
25	$\begin{cases} \sin(x+0,5)-y=1,2 \\ \cos(y-2)+x=0 \end{cases}$	26	$\begin{cases} \cos(x+0,5)+y=1 \\ \sin y-2x=2 \end{cases}$
27	$\begin{cases} \sin(x-1)+y=1,5 \\ x-\sin(y+1)=1 \end{cases}$	28	$\begin{cases} \sin(y+2)-x=1,5 \\ y+\cos(x-2)=0,5 \end{cases}$
29	$\begin{cases} \cos(y-1)+x=0,8 \\ y-\cos x=2 \end{cases}$	30	$\begin{cases} \cos(x-1)+y=1 \\ \sin y+2x=1,6 \end{cases}$

### Порядок выполнения работы

1. Исходную систему привести к виду (2).
2. Проверить условие сходимости метода итераций.
3. Выбрать начальное приближение.
4. Составить программу на языке программирования (любом).
5. В программе предусмотреть проверку правильности полученных результатов, которую рекомендуется осуществить путем подстановки найденного вектора решений в исходную систему и распечаткой свободных членов уравнений системы.
6. Все вычисления проводить с точностью 0,001 и 0,01.

## Лабораторная работа № 7

### Решение нелинейных систем методом Ньютона

Рассмотрим применение метода Ньютона к решению систем уравнений при  $n=2$ :

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Пусть требуется найти приближенное решение данной системы уравнений в области  $D$ :

$$\begin{aligned} a_1 < x_1 < b_1 \\ a_2 < x_2 < b_2 \end{aligned}$$

Предполагается, что решение в  $D$  существует, единственно, и функции  $f_1$  и  $f_2$  имеют в  $D$  непрерывные вторые частные производные, а матрица

$$F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

невырождена, т.е

$$\det F(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}, \quad (x_1, x_2) \in D.$$

В этом случае существует обратная матрица

$$F^{-1}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

где  $a_{11} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$ ,  $a_{12} = -\frac{1}{\alpha} \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$ ,  $a_{21} = -\frac{1}{\alpha} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$ ,

$$a_{22} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \quad \alpha = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_1}. \quad (2)$$

Для применения метода Ньютона в рассматриваемом случае выбирается начальное приближение  $\bar{x}^{(0)} = (x_1^0, x_2^0)$ , после чего дальнейшие приближения вычисляются по формуле

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} - F^{-1}(\bar{x}^{(k)}) \cdot f(\bar{x}^{(k)}), \quad (3)$$

где

$$f(\bar{x}^{(k)}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \\ f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \end{pmatrix}.$$

Применяя координатную форму записи вместо (2), будем иметь

$$\begin{aligned} x_1^{k+1} &= x_1^k - a_{11}f_1(x_1^k, x_2^k) - a_{12}f_2(x_1^k, x_2^k) \\ x_2^{k+1} &= x_2^k - a_{21}f_1(x_1^k, x_2^k) - a_{22}f_2(x_1^k, x_2^k). \end{aligned} \tag{4}$$

Получаемая последовательность векторов  $\bar{x}^{-k}$  сходится к точному решению системы  $x^* \in D$ .

Практически определение области  $D$  следует производить графически подобно тому, как осуществляется отделение решений систем уравнений.

**Пример.** Найти приближенное решение системы уравнений

$$\begin{cases} \sin(2x_1 - x_2) - 1,2x_1 = 0,4 \\ 0,8x_1^2 + 1,5x_2^2 = 1 \end{cases}$$

с точностью до 0,001.

Определение корней производим графически (рис. 1). Для построения графиков функций составляем таблицу значений  $(x_1, x_2)$ , удовлетворяющих первому уравнению (табл. 2).

Таблица 2

$x_1$	$x_2 = 2x_1 - \arcsin(1,2x_1 + 0,4)$
0,5	-0,570
0,4	-0,276
0,2	-0,290
0,0	-0,410
-0,2	-0,560
-0,4	0,720
-0,6	-0,870
-0,8	-1,010
-1,0	-0,070

Второе уравнение определяет эллипс в плоскости  $(x_1, x_2)$ .

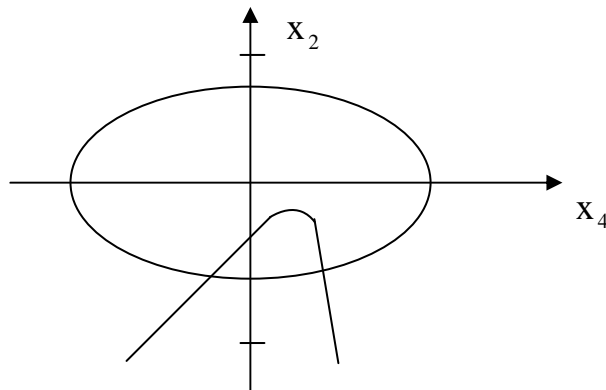


Рисунок 1

Из рис. 1 видно, что система имеет два решения. Найдем одно из них, лежащее в области  $D$   $\begin{cases} 0,4 \leq x_1 \leq 1 \\ -0,81 \leq x_2 \leq -0,41. \end{cases}$  Пусть  $x_1^0 = 0,4$ ,  $x_2^0 = -0,75$ .

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= 2 \cos(2x_1 - x_2) - 1,2 & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= 1,6x_1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= -\cos(2x_1 - x_2) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} &= 3x_2. \end{aligned}$$

Решение системы уравнений в соответствии с формулами (2) и (3) приведено в табл. 3.

**Ответ:**  $x^* \in (0,4912; -0,7335)$ .

Таблица 3

k	0	1	2	3	4
$\bar{x}_k$	(0,4; -0,75)	(0,5; -0,733)	(0,4940; -0,7083)	(0,4913; -0,7339)	(0,4912; -0,7335)
$f_1(\bar{x}_k)$	0,1198	-0,0131	-0,007	-0,0002	
$f_2(\bar{x}_k)$	-0,0282	0,059	-0,0523	0,0010	
$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$	-0,1584	-1,523	-0,4502	-1,4904	
$\frac{\partial f_1}{\partial x_2}$	-0,0208	0,1615	0,1251	0,1452	
$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}$	0,64	0,8	0,7904	0,7861	
$\frac{\partial f_2}{\partial x_2}$	-2,25	-2,199	-2,1249	-2,2017	
$\alpha$	2,6197	3,2199	2,9827	3,1673	
$a_{11}$	0,8589	-0,683	-0,7124	0,695	
$a_{12}$	0,0079	-0,05	-0,042	-0,0458	
$a_{21}$	-0,244	-0,248	-0,265	-0,248	
$a_{22}$	-0,4422	-0,473	-0,4862	-0,47056	

### Варианты заданий

1.  $\begin{cases} \operatorname{tg}(xy + 0,4) = x^2 \\ 0,6x^2 + 2y^2 = 1, x > 0, y > 0 \end{cases}$
2.  $\begin{cases} \sin(x + y) = 1,5x - 0,1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$
3.  $\begin{cases} \sin(x + y) = -1,6y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1, x > 0, y > 0 \end{cases}$
4.  $\begin{cases} \operatorname{tg}(xy + 0,4) = x^2 \\ 0,8x^2 + 2y^2 = 1, \end{cases}$
5.  $\begin{cases} \operatorname{tg}(xy + 0,1) = x^2 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$
6.  $\begin{cases} \sin(x + y) = 1,2x - 6,1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

$$7. \begin{cases} \sin(x+y) - 1,2x = 0,2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \operatorname{tg}(xy + 0,3) = x^2 \\ 0,9x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \sin(x+y) - 1,3x = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} \operatorname{tg} xy = x^2 \\ 0,8x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} \sin(x+y) - 1,5x = 0,1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} \operatorname{tg} xy = x^2 \\ 0,7x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} \sin(x+y) = 0,1 + 1,2x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} \operatorname{tg}(xy + 0,2) = x^2 \\ 0,6x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} \operatorname{tg}(xy) = x^2 \\ 0,5x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} \sin(x+y) = 1,2x - 0,2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \operatorname{tg}(xy + 0,1) = x^2 \\ 0,9x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \sin(x+y) - 1,4x = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} \operatorname{tg}(xy + 0,1) = x^2 \\ 0,5x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} \sin(x+y) = 1,1x - 0,1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} \operatorname{tg}(x-y) - xy = 0 \\ x^2 - 2xy = 1 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} \sin(x-y) - xy = -1 \\ x^2 - y^2 = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} \operatorname{tg}(xy + 0,2) = x^2 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} \sin(x+y) - 1,5x = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} \operatorname{tg}(xy) = x^2 \\ 0,6x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} \sin(x+y) - 1,2x = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

### Порядок выполнения работы

1. Проверить условие применимости метода Ньютона.
2. Выбрать начальное приближение решения.
3. Составить программу на языке программирования (любом).
4. В программе предусмотреть проверку правильности полученных результатов.
5. Все вычисления провести с точностью 0,001 и 0,01.

## Лабораторная работа № 8

### Метод сеток для численного решения дифференциальных уравнений с частными производными

#### Общие положения

Метод сеток или метод конечных разностей является одним из самых распространенных в настоящее время методов численного решения уравнений с частными производными. В его основе лежит идея замены производных конечно-разностными отношениями. Пусть в плоскости  $ХОУ$  имеется некоторая область  $G$  с границей  $\Gamma$ .

Построим на плоскости два семейства параллельных прямых:

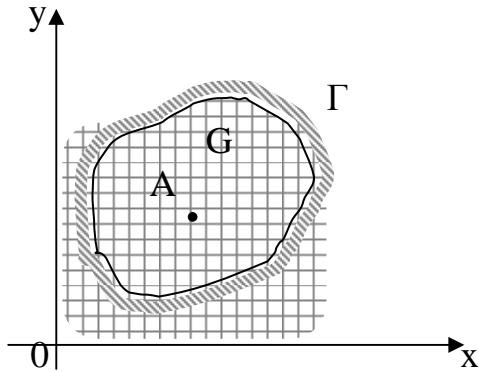


Рис.1

$$\begin{aligned} x &= x_0 + ih \\ (i &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \\ y &= y_0 + kl \\ (k &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned}$$

Точки пересечения этих прямых назовем **узлами**. Два узла называются соседними, если они удалены друг от друга в направлении осей  $OX$  и  $OY$  на расстоянии, равном шагу сетки  $h$  или  $l$  соответственно; выделим узлы, принадлежащие области  $G+\Gamma$ , а также некоторые узлы, не принадлежащие этой области, но расположенные на расстоянии, меньше чем шаг от границы. Узлы, у которых четыре соседних узла принадлежат выделенному множеству узлов, называются **внутренними** (рис.1, узел  $A$ ). Оставшиеся из выделенных узлов называются **граничными**. Значение искомой функции  $u = u(x, y)$  в узлах сетки будем обозначать через  $u_{i,k} = u(x_0 + ih, y_0 + kl)$ .

В каждом внутреннем узле  $(x_0 + ih, y_0 + kl)$  заменим частные производные разностными отношениями:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ik} = \frac{u_{i+1,k} - u_{i-1,k}}{2h}; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{ik} = \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k-1}}{2l}, \quad (1)$$

а в граничных точках

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ik} = \frac{u_{i+1,k} - u_{ik}}{h}; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{ik} = \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{l}. \quad (2)$$

Аналогично заменяются частные производные второго порядка, например:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{ik} &\approx \frac{u_{i+1,k} - 2u_{ik} + u_{i-1,k}}{h^2} \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{ik} &\approx \frac{u_{i,k+1} - 2u_{ik} + u_{i,k-1}}{l^2} \end{aligned} \quad (3)$$



## Метод сеток для уравнений эллиптического типа

В данной лабораторной работе мы рассмотрим численное решение так называемой первой краевой задачи, или задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (4)$$

которая ставится следующим образом: найти функцию  $u = u(x, y)$ , удовлетворяющую внутри некоторой области  $G$  уравнению (4), а на границе  $\Gamma$  - условию  $u|_{\Gamma} = \zeta \xi(x, y)$ , где  $\xi(x, y)$  - заданная непрерывная функция. Выбрав шаги  $h$  и  $l$  по  $x$  и  $y$  соответственно, строим сетку

$$\begin{aligned} x_i &= x_0 + ih & (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \\ y_k &= y_0 + kl & (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned}$$

и заменяем в каждом внутреннем узле  $(x_i, y_i)$  производные  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  и  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  конечно-разностными отношениями (3), а уравнение (1) – конечно-разностными уравнениями

$$\frac{u_{i+1,k} - 2u_{ik} + u_{i-1,k}}{h^2} + \frac{u_{i,k+1} - 2u_{ik} + u_{i,k-1}}{l^2} = f_{ik}, \quad (5)$$

где  $f_{ik} = f(x_i, y_k)$ . Уравнения (5) вместе со значениями  $u_{ik}$  в граничных узлах образуют систему линейных алгебраических уравнений относительно значений функции  $u(x, y)$  в узлах  $(x_i, y_k)$ . Наиболее простой вид эта система имеет в прямоугольной области и при  $l = h$ . В этом случае уравнения (5) записываются следующим образом:

$$u_{i+1,k} + u_{i-1,k} + u_{i,k+1} + u_{i,k-1} - 4u_{ik} = h^2 \cdot f_{ik}, \quad (6)$$

а значения в граничных узлах в точности равны значениям граничной функции. При  $f(x, y) = 0$  уравнение (3) называется уравнением Лапласа, а соответствующие конечно-разностные уравнения имеют вид

$$u_{ik} = \frac{1}{4}(u_{i+1,k} + u_{i-1,k} + u_{i,k+1} + u_{i,k-1}). \quad (7)$$

При составлении уравнений (6) и (7) была использована схема узлов (рис. 2).

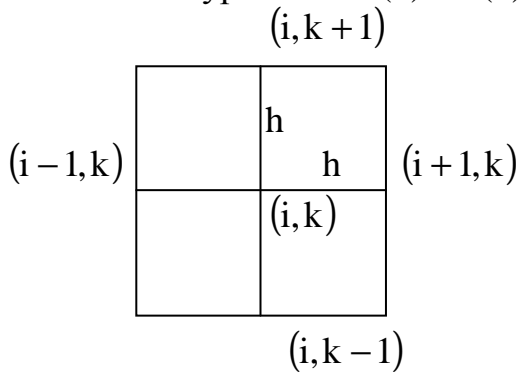


Рис.2

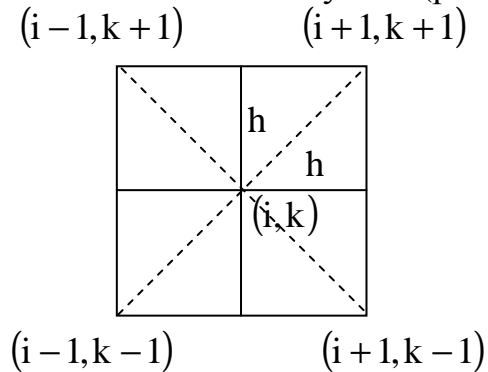


Рис.3

Иногда бывает удобнее использовать схему узлов, показанную на рис.3. В этом

случае уравнению Пуассона соответствуют следующие конечно-разностные уравнения:

$$u_{ik} = \frac{1}{4} (u_{i-1,k-1} + u_{i+1,k-1} + u_{i-1,k+1} + u_{i+1,k+1}) + \frac{h}{2} f_{ik}.$$

Погрешность замены дифференциального уравнения разностным, т. е. остаточный член  $R_{ik}$  для уравнения Лапласа, оценивается неравенством

$$|R_{ik}| \leq \frac{h^2}{6} M_4, \quad \text{где} \quad M_4 = \max_G \left\{ \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right|, \left| \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right| \right\}.$$

Заметим, что погрешность приближенного решения, полученного разностным методом, будет складываться из трех погрешностей.

1. Погрешность замены дифференциального уравнения разностным
2. Погрешность аппроксимации краевых условий
3. Погрешность, полученная в результате того, что система разностных уравнений решается приближенным методом.

**Пример.** В качестве примера рассмотрим численное решение уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -1 \quad \text{в квадрате с вершинами} \quad A(0,0), B(0,1), C(1,1), D(1,0) \quad \text{с краевыми}$$

условиями, указанными на рис.4. Найти решение этой задачи методом сеток с шагом, равным  $1/4$ .

**Решение.** В данном случае в силу симметрии граничных условий  $u_{11} = u_{31}$ ;

$u_{12} = u_{32}$ ;  $u_{13} = u_{33}$ . Это сокращает число неизвестных функций во внутренних узлах до шести. Таким образом, в узлах (3.1), (3.2), (3.3.) конечно-разностные уравнения писать не нужно. В остальных шести внутренних узлах: (1.1), (2.1), (1.2), (2.2), (1.3), (2.3) - получаем соответственно шесть уравнений:

$$\begin{cases} u_{01} + u_{21} + u_{10} + u_{12} - 4u_{11} = 0 & u_{11} + u_{31} + u_{20} + u_{22} - 4u_{21} = 0 \\ u_{02} + u_{22} + u_{11} + u_{13} - 4u_{12} = 0 & u_{12} + u_{32} + u_{21} + u_{23} - 4u_{22} = 0 \\ u_{03} + u_{23} + u_{12} + u_{14} - 4u_{13} = 0 & u_{13} + u_{33} + u_{22} + u_{24} - 4u_{23} = 0 \end{cases}$$

В эти уравнения входят еще 12 значений функции в граничных точках. Эти значения берут из краевых условий

$$u_{i0} = 0 (i = 1, 2, 3), \quad u_{0j} = 0 (j = 1, 2, 3),$$

$$u_{14} = u_{24} = u_{34} = 10\,000.$$

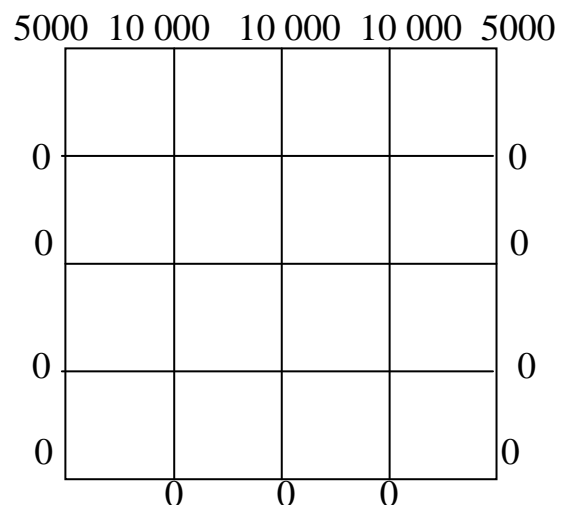


Рис. 4

Учитывая эти условия, окончательно получаем систему

$$\begin{cases} u_{21} + u_{12} - 4u_{11} = 0 \\ u_{22} + u_{22} + u_{13} - 4u_{12} \\ u_{23} + u_{12} - 4u_{13} = -10\ 000 \end{cases} \quad \begin{cases} 2u_{11} + u_{22} - 4u_{21} = 0 \\ 2u_{12} + u_{21} + u_{23} - 4u_{21} = 0 \\ 2u_{13} + u_{22} - 4u_{23} = -10\ 000. \end{cases}$$

Заметим, что непосредственное решение системы конечно-разностных уравнений методом последовательного исключения при большом числе узлов оказывается слишком громоздким. Тогда более удобны итерационные методы решения, которые учитывают специальный вид таких систем и оказываются удобными для реализации на ЭВМ.

### Метод сеток для уравнения гиперболического типа

Рассмотрим задачу: найти функцию, удовлетворяющую уравнению  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , а также начальным условиям  $u(x,0) = f(x)$ ,  $u_t(x,0) = \Phi(x)$ , ( $0 \leq x \leq S$ ) и краевым условиям  $u(0,t) = \varphi(t)$ ,  $u(s,t) = \psi(t)$ . Так как введение переменной  $\tau = \alpha t$  приводит уравнение (1) к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (8)$$

в дальнейшем можно принять  $a = 1$ . Построим в полуполосе  $t \geq 0, 0 \leq x \leq s$  два семейства параллельных прямых

$$\begin{aligned} x &= ih \quad (i = 0, 1, 2, \dots, h), \\ t &= jl \quad (j = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Заменим производные в уравнении (1) разностными отношениями. Тогда получим

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{l^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2}. \quad (9)$$

Обозначая  $\alpha = l/h$ , получим разностное уравнение

$$u_{i,j+1} = 2u_{ij} - u_{i,j-1} + \alpha^2 (u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}) \quad (10)$$

Доказано, что при  $\alpha = 1$  это разностное уравнение устойчиво. В частности, при  $\alpha = 1$  уравнение (10) имеет более простой вид

$$u_{i,j+1} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - u_{i,j-1}. \quad (11)$$

Оценка погрешности приближенного решения, полученного из уравнения (4) в полосе  $0 \leq x \leq s, 0 \leq t \leq T$  имеет вид

$$|\tilde{u} - u| \leq \frac{h^2}{12} [(M_4 h + 2M_3) T + T^2 M_4],$$

где  $\tilde{u}$  – точное решение,

$$M_k = \max \left\{ \left| \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \right|, \left| \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right| \right\} \quad (k = 3, 4).$$

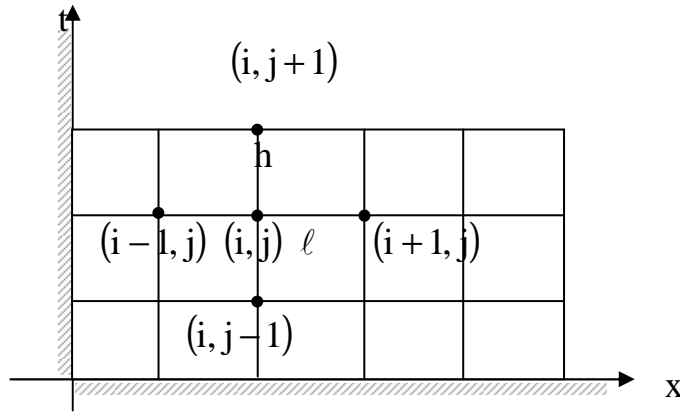


Рисунок 5

**Замечание.** Для получения уравнения (6) была использована схема узлов, (рис. 5). Эта схема является явной, так как уравнение (6) позволяет найти значения функции  $u(x, t)$  на слое  $t_{j+1}$ , если известны значения на двух предыдущих слоях. Для того чтобы знать значения решений задачи (1)-(3), необходимо знать значения решений на 2-х начальных слоях. Их можно найти из начальных условий одним из следующих способов.

**Первый способ.** Заменяем в начальных условиях (2) производную  $u'_t(x, 0)$  разностным соотношением

$$\frac{u_{i1} - u_{i0}}{1} = \phi(x_i) = \phi_i;$$
 для определения значений  $u(x, t)$  на слоях  $j=0, j=1$ , получаем  $u_{i0} = f_i, u_{i1} = f_i + 1\phi_i$ .

**Второй способ.** Заменяем производную  $u'_t(x, 0)$  разностным соотношением  $\frac{u_{i1} - u_{i-1}}{2l}$ , где  $u_{i-1}$  - значения функции  $u(x, t)$  на слое  $j=-1$ . Тогда из начальных условий (2)

$$u_{i-} = f_i, \quad \frac{u_{i1} - u_{i-1}}{2l} = \phi_i. \quad (12)$$

Напишем разностное уравнение (7) для слоя  $j=0$ :

$$u_{i1} = u_{i+1,0} + u_{i-1} - u_{i-1}. \quad (13)$$

Исключив из уравнений (12), (13) значения  $u_{i-1}$ , получим

$$u_{i0} = f_i, \quad u_{i1} = \frac{1}{2}(f_{i+1} + f_{i-1}) + 1\phi_i.$$

**Третий способ.** Если функция  $f(x)$  имеет конечную 2-ю производную, то значения  $u_{i1}$  можно определить с помощью формулы Тейлора

$$u_{i1} \cong u_{i0} + 1 \frac{\partial u_{i0}}{\partial t} + \frac{1^2}{2} \frac{\partial^2 u_{i0}}{\partial t^2}. \quad (14)$$

Используя уравнение (8) и начальные условия (2), можем записать

$$u_{i0} f_i, \quad \frac{\partial u_{i0}}{\partial t} = \phi_i, \quad \frac{\partial^2 u_{i0}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_i''.$$

Тогда по формуле (14) получим

$$u_{i1} \approx f_i + 1\phi_i + \frac{1^2}{2}f_i'' \quad (15)$$

**Пример.** Методом сеток найти решения задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = 0,2x(1-x)\sin \pi x, & u'_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases}$$

**Решение.** Возьмем квадратную сетку с шагом  $h = 0,05$ . Значения  $u(x,t)$  на 2-х начальных слоях найдем вторым способом. Так как  $\phi(x) = 0$  и  $f(x) = 0,2\sin \pi(1-x)x$ , Имеет место  $u_{i0} = f_i$ :

$$u_{i1} = \frac{1}{2}(f_{i+1} + f_{i-1}) \quad (i = 0,1, 2, \dots, 10). \quad (16)$$

Решение задачи удобно оформить в таблицу, порядок заполнения которой следующий.

1. Вычисляем значения  $u_{i0} = f(x_i)$  при  $x_i = ih$  и записываем первую строку (она соответствует значению  $t_0 = 0$ ). В силу симметрии задачи заполняем таблицу при  $0 \leq x \leq 0,5$ . В первом столбце (он соответствует значению  $x_0 = 0$  записываем краевые значения.

2. По формуле (16) находим  $u_{i1}$ , используя значения  $u_{i0}$  из первой строки. Результаты записываем во вторую строку.

3. Вычисляем значения  $u_{ij}$  на последующих слоях по формуле (11). При  $j=1$  последовательно получаем

$$u_{12} = u_{21} + u_{01} - u_{10} = 0,0065 + 0 - 0,0015 = 0,0050,$$

$$u_{22} = u_{31} + u_{11} - u_{22} = 0,0122 + 0,0028 - 0,0056 = 0,0094,$$

... ..

$$u_{1,0,2} = u_{1,1,1} + u_{01} - u_{10,0} = 0,0478 + 0,0478 - 0,0500 = 0,0456.$$

Вычисления при  $j = 2, 3, \dots, 10$  проводятся аналогично. В последней строке таблицы 1 приведены значения точного решения при  $t = 0,5$ .

Таблица 1

$x_i$	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
0	0	0,0015	0,0056	0,0116	0,0188	0,0265	0,0340	0,0405	0,0457	0,0489	0,0500
0,05	0	0,0028	0,0065	0,0122	0,0190	0,0264	0,0335	0,0398	0,0447	0,0478	0,0489
0,10	0	0,0050	0,0094	0,0139	0,0198	0,0260	0,0322	0,0377	0,0419	0,0447	0,0456
0,15	0	0,0066	0,0124	0,0170	0,0209	0,0256	0,0302	0,0343	0,0377	0,0397	0,0405
0,20	0	0,0074	0,0142	0,0194	0,0228	0,0251	0,0277	0,0302	0,0321	0,0335	0,0338
0,25	0	0,0076	0,0144	0,0200	0,0236	0,0249	0,0251	0,0255	0,0260	0,0262	0,02265
0,30	0	0,0070	0,0134	0,01866	0,0221	0,0236	0,0227	0,0209	0,0196	0,0190	0,0186
0,35	0	0,0058	0,0112	0,0156	0,0186	0,0199	0,0194	0,0168	0,0139	0,0120	0,0115
0,40	0	0,0042	0,0079	0,0112	0,0133	0,0144	0,0140	0,0124	0,0092	0,0064	0,0054
0,45	0	0,0021	0,0042	0,0057	0,0070	0,0074	0,0074	0,0064	0,0042	0,0025	0,0013
0,50	0	-0,0001	0,0001	0,0000	0,0002	0,0000	0,0002	0,0001	-0,0002	-0,0002	0,0002
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

### Задание

1. Применяя метод сеток, найти решение уравнения Лапласа в точках  $\rho, g, r, s$  квадрата при краевых условиях, указанных на рис.б.

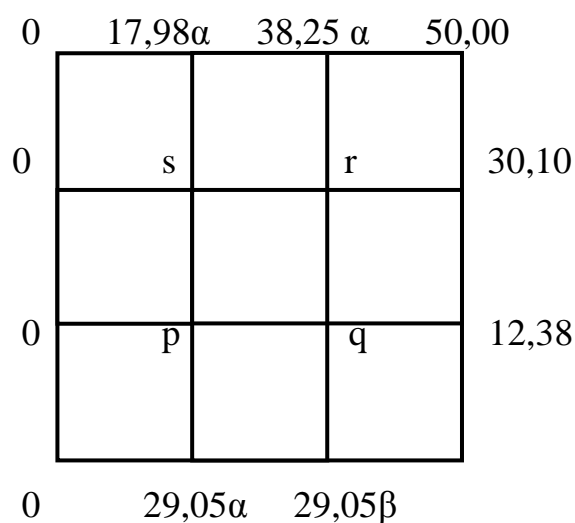


Рисунок б

- |                     |                |                      |                |
|---------------------|----------------|----------------------|----------------|
| 1. $\alpha = 0,9$ , | $\beta = 1,01$ | 9. $\alpha = 1,0$ ,  | $\beta = 1,04$ |
| 2. $\alpha = 0,9$ , | $\beta = 1,02$ | 10. $\alpha = 1,0$ , | $\beta = 1,05$ |
| 3. $\alpha = 0,9$ , | $\beta = 1,03$ | 11. $\alpha = 1,1$ , | $\beta = 1,01$ |
| 4. $\alpha = 0,9$ , | $\beta = 1,04$ | 12. $\alpha = 1,1$ , | $\beta = 1,02$ |
| 5. $\alpha = 0,9$ , | $\beta = 1,05$ | 13. $\alpha = 1,1$ , | $\beta = 1,03$ |
| 6. $\alpha = 1,0$ , | $\beta = 1,01$ | 14. $\alpha = 1,1$ , | $\beta = 1,04$ |
| 7. $\alpha = 1,0$ , | $\beta = 1,02$ | 15. $\alpha = 1,1$ , | $\beta = 1,05$ |
| 8. $\alpha = 1,0$ , | $\beta = 1,03$ |                      |                |

2. Применяя метод сеток с шагом  $h = 0,1$ , найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x,0) = f(x), \quad u'_t(x,0) = \phi(x)$$

$$u(0,t) = \varphi(t), \quad u(1,t) = \psi(t)$$

при  $0 \leq t \leq 0,5$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .

1.  $f(x) = (ax^2 + 1,1) \sin \pi x$ ,  $\phi(x) = 0$ ,  $\varphi(t) = \psi(t) = 0$

$a = 1,1$

2.  $a = 1,2$

3.  $a = 1,3$

4.  $a = 1,4$

5.  $a = 1,5$

6.  $f(x)$  – задана таблицей

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
f(x)	0	0,0145	0,0511	0,0921a	0,1114	$\frac{0,1825}{a}$	0,1902	$\frac{0,148}{a}$	0,1028	0,0502	0

7.  $a = 0,975$

8.  $a = 1$

9.  $a = 1,025$

10.  $a = 1,5$

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырский П. И. Вычислительные методы.- М.: Наука, 1976.- Ч.1. - 304 с.
2. Бомсов Е.А. Численные методы.- М.: Наука,1982. - 234 с.
3. Воробьева Г. Н., Данилов Л. Н. Практикум по численным методам. - М.: Высш. школа, 1979. – 189 с.
4. Вычислительная техника в инженерных и экономических расчетах /А. В.Петров, В. Е.Алексеев, М. А.Титов и др. М.: Высш. школа, 1984. - 320 с.
5. Численные методы решения линейных и нелинейных уравнений и систем /. О. А. Митковская, Г. А. Нудельман .- Омск: Изд-во ОмПИ, 1985. - 31 с.
6. Методические указания к лабораторным работам по вычислительному практикуму / Г. Н. Бояркин, Т. А. Федянина, В. Д. Цветкова. Омск: Изд-во ОмПИ, 1981.- Ч.1. - 30 с.