Министерство образования и науки Российской Федерации

Омский государственный технический университет

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

И КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ ПО ИНТЕГРАЛЬНОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ

Для студентов заочного отделения экономических специальностей.

Омск-2004

Составители: Фирдман Александр Исаевич, доцент
Батехина Наталья Викторовна, доцент

Печатается по решению
Редакционно-издательского совета
Омского государственного технического университета

Редактор Г. М. Кляут
ИД 06039 от 12.10.01
Сводный темплан 2004г.
Подписано в печать 05.04.04 . Бумага офсетная.Формат 60x84/16
Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ. л. 4,0 Уч.-изд. л. 4,0
Тираж 100 экз. Заказ 303

Издательство ОмГТУ. 644050, Омск, пр-т Мира, 11
Типография ОмГТУ

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$, если $F'(x)=f(x)$. Так, для функции $f(x)=x^2$ первообразной будет функция $F(x)=x^3/3$, так как $\left(\dfrac{x^3}{3}\right)'=x^2$. Но первообразными будут также функции $\dfrac{x^3}{3}+1,\ \dfrac{x^3}{3}-5,\ ...,\ \dfrac{x^3}{3}+C$, так как производные от этих функций совпадают с x^2. Таким образом, если функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, то она имеет бесконечно много первообразных вида $F(x)+C$, где $C=\mathrm{const}$. Множество всех первообразных для $f(x)$ иначе называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$. Итак, $\int f(x)dx=F(x)+C$. Например,

$$\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+C,\quad \int \sin x\,dx=-\cos x+C,\quad \int e^x dx=e^x+C,\quad \int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C.$$

Теорема существования: всякая непрерывная в промежутке $[a,\ в]$ функция $f(x)$ имеет на этом промежутке первообразную $F(x)$.

Свойства неопределенного интеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$.   2. $\int df(x)=f(x)+C$.   3. $d\left[\int f(x)dx\right]=f(x)dx$.

4. $\int c\cdot f(x)dx=c\int f(x)dx,\quad c=\mathrm{const}$.   5. $\int[f(x)+\varphi(x)]dx=\int f(x)dx+\int\varphi(x)dx$.

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int u^\alpha du=\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ (\alpha\neq-1)$.

2. $\int\dfrac{du}{u}=\ln|u|+C$.

3. $\int a^\alpha du=\dfrac{a^u}{\ln a}+C$.

4. $\int e^u du=e^u+C$.

5. $\int\dfrac{du}{\cos^2 u}=\mathrm{tg}\,u+C$.

6. $\int\dfrac{du}{\sin^2 u}=-\mathrm{ctg}\,u+C$.

7. $\int\dfrac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\arcsin\dfrac{u}{a}+C$.

8. $\int\dfrac{du}{a^2+u^2}=\dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{u}{a}+C$.

9. $\int \sin u\, du = -\cos u + C$.

11. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$.

10. $\int \cos u du = \sin u + C$.

12. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$.

Фактически 10 первых табличных интегралов могут быть получены из таблицы производных, читаемой справа налево. Здесь u может быть как независимой переменной, так и дифференцируемой функцией от x: $u = u(x)$, C – произвольное число.

Кроме этих 12 интегралов желательно знать наизусть несколько легко вычисляемых интегралов.

1. $\int du = u + C$.

4. $\int \operatorname{ctg} u\, du = \ln|\sin u| + C$.

2. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$.

5. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + C$.

3. $\int \operatorname{tg} u\, du = -\ln|\cos u| + C$.

6. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$.

При вычислении интегралов они сводятся к одному или нескольким табличным с помощью методов интегрирования. При этом произвольная постоянная ставится после последнего взятого интеграла.

Методы и приемы интегрирования

Один из наиболее часто используемых приемов интегрирования основан на следующем замечании: переменная u в таблице интегралов может быть как независимой, так и являться функцией аргумента x: $u = u(x)$.

Примеры

1. $\int \frac{xdx}{\sqrt{9 - x^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{\sqrt{3^2 - (x^2)^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{3} + C$.

Здесь в качестве переменной интегрирования выступает функция $u = x^2$. Так как $d(x^2) = 2dx$, сделаем поправку на 1/2.

2. $\int e^{5\cos x}\sin x dx$.

Применим формулу (4) из таблицы интегралов. Так как $d(5\cos x) = -5\sin x dx$, сделаем поправку на минус 1/5.

Тогда $\int e^{5\cos x}\sin x dx = -\frac{1}{5}\int e^{5\cos x}(-5\sin x)dx = -\frac{1}{5}\int e^{5\cos x} d(5\cos x) =$

$$= -\frac{1}{5}e^{5\cos x} + C.$$

3. $\int \operatorname{tg}17x dx = 1/17\int \operatorname{tg}17x(17dx) = \quad |d(17x) = 17dx| \quad = 1/17\int \operatorname{tg}17x d(17x) =$

$$= 1/17 \cdot (-\ln|\cos 17x|) + C = -1/17\ln|\cos 17x| + C.$$

4. $\int \frac{\sqrt{1+\ln 2x}}{x}dx$. Применим формулу (1) из таблицы интегралов.

Так как $d(1+\ln 2x) = \frac{dx}{x}$, получим

$$\int \frac{\sqrt{1+\ln 2x}}{x}dx = \int (1+\ln 2x)^{1/2}\cdot\frac{dx}{x} = \int (1+\ln 2x)^{1/2} d(1+\ln 2x) = \frac{2(1+\ln 2x)^{3/2}}{3} + C.$$

Решить самостоятельно:

1. $\int \frac{\ln^3 2x dx}{x}$; Ответ: $\frac{\ln^4 2x}{8} + C.$

2. $\int \frac{e^{-x}dx}{(5+e^{-x})^3}$; Ответ: $\frac{1}{2(5+e^{-x})^2} + C.$

3. $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$; Ответ: $\sqrt{x^2+2x+5} + C.$

4. $\int \frac{\cos 2x dx}{\sqrt[3]{7-3\sin 2x}}$; Ответ: $-1/4\sqrt[3]{(7-3\sin 2x)^2} + C.$

5. $\int \frac{(1+\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$; Ответ: $\frac{(1+\arcsin x)^3}{3} + C.$

6. $\int \frac{\sqrt[3]{(3-5\operatorname{tg}x/2)^4}dx}{\cos^2 x/2}$; Ответ: $-\frac{6}{35}\sqrt[3]{\left(3-5\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^7} + C.$

7. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx;$ Ответ: $2e^{\sqrt{x}} + C.$

8. $\int 2^{5x}dx;$ Ответ: $\frac{2^{5x}}{5\ln 2} + C.$

9. $\int \frac{kdx}{ax + в};$ Ответ: $\frac{k}{a}\ln|ax + в| + C.$

10. $\int \frac{xdx}{4 + x^2};$ Ответ: $\frac{1}{2}\ln(4 + x^2) + C.$

11. $\int \frac{dx}{4 + x^2};$ Ответ: $\frac{1}{2}\text{arctg}\frac{x}{2} + C.$

12. $\int \frac{xdx}{9 - 4x^4};$ Ответ: $-\frac{1}{24}\ln\left|\frac{2x^2 - 3}{2x^2 + 3}\right| + C.$

13. $\int \sin\frac{x}{3}dx;$ Ответ: $-3\cos\frac{x}{3} + C.$

14. $\int \cos x \cdot 3^{\sin x}dx;$ Ответ: $\frac{3^{\sin x}}{\ln 3} + C.$

15. $\int x \cdot \sin\frac{1 - x^2}{3}dx;$ Ответ: $\frac{3}{2}\cos\left(\frac{1 - x^2}{3}\right) + C.$

С помощью этого же приема вычисляются интегралы вида

$$\int \frac{mdx}{ax^2 + bx + c}; \qquad \int \frac{mdx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Эти интегралы сводятся к табличным интегралам 9-12 путем выделения полного квадрата в квадратном трехчлене.

Примеры

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2 - (\sqrt{2})^2}} = \ln\left|x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 2}\right| + C.$

2. $$\int\frac{dx}{x^2+5x+9}=\int\frac{dx}{\left(x^2+2x\cdot 5/2+25/4\right)-25/4+9}=\int\frac{d(x+5/2)}{(x+5/2)^2+\sqrt{11}/2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{11}/2}\operatorname{arctg}\frac{(x+5/2)}{\sqrt{11}/2}=\frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{2x+5}{\sqrt{11}}+C.$$

3. Интегралы $\int\frac{(mx+n)dx}{ax^2+вx^2+c}$; $\int\frac{(mx+n)dx}{\sqrt{ax^2+вx+c}}$. В числителе - линейная функция, в знаменателе - квадратный трехчлен или корень квадратный из квадратного трехчлена. Чтобы такой интеграл привести к последней группе формул, надо в числителе выделить дифференциал квадратного трехчлена; разбить интеграл на сумму интегралов; первый интеграл будет типа $\int\frac{dv}{v}$ или $\int\frac{dv}{\sqrt{v}}$, а второй – 1-го типа.

Примеры

1. $$\int\frac{3x\,dx}{2x^2+2x+5}= \quad \left|d\left(2x^2+2x+5\right)=(4x+2)dx\right| \quad =\frac{3}{4}\int\frac{[(4x+2)-2]dx}{2x^2+2x+5}=$$

$$=\frac{3}{4}\left[\int\frac{(4x+2)\,dx}{2x^2+2x+5}-\int\frac{2dx}{2x^2+2x+5}\right]=\frac{3}{4}\left[\int\frac{d\left(2x^2+2x+5\right)}{2x^2+2x+5}-2\cdot\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+5/2}\right]=$$

$$=\frac{3}{4}\left[\ln\left|2x^2+2x+5\right|-\int\frac{d(x+1/2)}{(x+1/2)^2+(3/2)^2}\right]=$$

$$=\frac{3}{4}\left[\ln\left|2x^2+2x+5\right|-\frac{1}{3/2}\operatorname{arctg}\frac{x+1/2}{3/2}\right]=\frac{3}{4}\ln\left|2x^2+2x+5\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{3}+C.$$

2. $$\int\frac{(5x+3)dx}{\sqrt{-x^2-2x+8}}=\int\frac{-5[(-2x-2)+2-6/5]}{2\sqrt{-x^2-2x+8}}dx\ \Bigg|\ d\left(-x^2-2x+8\right)=(-2x-2)dx \quad =$$

$$=-\frac{5}{2}\left[\int\frac{(-2x-2)dx}{\sqrt{-x^2-2x+8}}+\frac{4}{5}\int\frac{dx}{\sqrt{8-(x^2+2x)}}\right]=$$

$$=-\frac{5}{2}\left[\int\frac{d\left(-x^2-2x+8\right)}{\sqrt{-x^2-2x+8}}+\frac{4}{5}\int\frac{dx}{\sqrt{8-\left(x^2+2x+1-1\right)}}\right]=$$

$$=-\frac{5}{2}\left[2\sqrt{-x^2-2x+8}+\frac{4}{5}\int\frac{dx}{\sqrt{9-(x+1)^2}}\right]=$$

$$=-5\sqrt{-x^2-2x+8}-2\arcsin\frac{x+1}{3}+C.$$

Интегрирование рациональных дробей

Рациональной дробью $R(x)$ называется отношение двух многочленов, т. е. $R(x)=\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\dfrac{в_0x^m+в_1x^{m-1}+...+в_m}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n}$. Если $m<n$, то дробь $R(x)$ называется правильной; если же $m\ge n$, то эта дробь неправильная. Приведем примеры. Следующие дроби правильные:

$R_1(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$, $m=0$, $n=2$; $\quad R_2(x)=\dfrac{2x+3}{x^2+5x-1}$, $m=1$, $n=2$.

Следующие дроби неправильные:

$R_3(x)=\dfrac{x^4-2x^3+1}{x^2+2x+5}$, $m=4$, $n=2$; $\quad R_4(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+1}$, $m=2$, $n=2$.

Если дробь $R(x)$ неправильная, т. е. $m\ge n$, то, разделив числитель на знаменатель, можно выделить целую часть – многочлен x в степени $m-n$. Другими словами, всякую неправильную дробь $R(x)$ можно представить в виде $R(x)=S_{m-n}(x)+R_1(x)$, где $S_{m-n}(x)$- многочлен $(m-n)$-й степени и $R_1(x)$ - правильная дробь.

Пример. Выделить целую часть дроби $R(x)=\dfrac{x^5-4x^3+5x^2-7}{x^3-2x^2+4x+1}$.

$$\begin{array}{l|l}
x^5-4x^3+5x^2-7 & x^3-2x^2+4x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^5-2x^4+4x^3+x^2} & x^2+2x-4 \quad \text{(частное)} \\
\quad -\ 2x^4-8x^3+4x^2-7 & \\
\quad \underline{\ \ 2x^4-4x^3+8x^2+2x} & \\
\qquad -\ -4x^3-4x^2-2x-7 & \\
\qquad \underline{\ \ -4x^3+8x^2-16x-4} & \\
\qquad\qquad -12x^2+14x-3 \quad \text{(остаток)} &
\end{array}$$

$$R(x)=\frac{x^5-4x^3+5x^2-7}{x^3-2x^2+4x+1}=(x^2+2x-4)+\frac{-12x^2+14x-3}{x^3-2x^2+4x+1}.$$

Определение. Следующие рациональные дроби называются **простейшими дробями** первого, второго, третьего типов:

$$R_1(x) = \frac{A}{x - x_0}, \quad R_2(x) = \frac{A}{(x - x_0)^k}, \quad R_3(x) = \frac{Ax + B}{x^2 + px + q}.$$

Здесь A, B, x_0, k, p, q - заданные константы, причем k - натуральное число. Квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ имеет только комплексные корни.

Теорема о разложении рациональной дроби. Правильная рациональная дробь
$R(x) = \dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ разлагается в сумму простейших дробей 1-3 типов в зависимости от корней знаменателя $P_n(x)$. При этом возможны следующие случаи:

а) если знаменатель $P_n(x)$ имеет простой вещественный корень $x = x_0$, то в разложении ему соответствует дробь первого вида: $A/(x - x_0)$;

б) если $x = x_0$ - вещественный корень кратностью k знаменателя $P_n(x)$, то в разложении ему соответствует сумма k дробей 1-2 типов:

$$\frac{A}{x - x_0} + \frac{B}{(x - x_0)^2} + \ldots + \frac{C}{(x - x_0)^k};$$

в) если $x_{1,2} = (\alpha \pm \beta i)$ - простые комплексные корни $P_n(x)$, то в разложении им соответствует дробь третьего вида $\dfrac{Ax + B}{x^2 + px + q}$, причем x_1 и x_2 - суть корни трехчлена $x^2 + px + q$.

Разложение дроби на простейшие рекомендуется проводить по следующей схеме.

1. Найти все корни знаменателя $P_n(x)$ и определить их кратность.

2. Разложить знаменатель $P_n(x)$ на множители.

3. Написать сумму простейших дробей, соответствующих корням знаменателя $P_n(x)$.

Пример. Написать разложение дроби $R(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 3}{x^3 - 2x^2 + x}$.

Здесь $P_3(x) = x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x - 1)^2$. Таким образом, $x_1 = 0$ - простой корень, ему соответствует дробь A/x, $x_2 = 1$ - двукратный корень, ему соответствует сумма $\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{(x-1)^2}$; $\quad \dfrac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{(x-1)^2}$.

Пример. Написать разложение дроби $R(x)=\dfrac{1}{x^3+1}$.

Здесь $P_3(x)=x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$. Корни знаменателя: $x_1=-1$ - простой вещественный, $x_{2,3}=\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ - комплексные;

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$$

Нахождение неопределенных коэффициентов

Коэффициенты A, B, C, . . . разложения можно находить двумя способами.

Первый способ. Приведем правую часть равенства

$$\frac{2x^2-3x+3}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2} \tag{1}$$

к общему знаменателю: $\dfrac{2x^2-3x+3}{x(x-1)^2}=\dfrac{A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx}{x(x-1)^2}$.

Отсюда следует, что $2x^2-3x+3=A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx$. Придавая аргументу значения $x=0$, $x=1$, $x=-1$, получим систему трех уравнений с тремя неизвестными: A, B, C.

$$\begin{matrix} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{matrix} \qquad \begin{cases} 3=A \\ 2=C \\ 8=4A+2B-C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3 \\ C=2 \\ B=-1. \end{cases}$$

Разложение дроби имеет вид $\dfrac{2x^2-3x+3}{x(x-1)^2}=\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{(x-1)^2}$.

Замечание. В качестве значений x удобно брать корни знаменателя.

Второй способ. После приведения равенства (1) к целому виду $2x^2-3x+3=A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx$ получим равенство двух многочленов второй степени $2x^2-3x+3=(A+B)x^2+(-2A-B+C)x+A$. Приравнивая коэффициенты при x^2, x и свободные члены, получим

$$\begin{array}{c|l} x^2 & A+B=2 \\ x^1 & -2A-B+C=-3 \\ x^0 & A=3 \end{array} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} B=-1 \\ C=2 \\ A=3 \end{cases}$$

Упражнение. Разложите на простейшие следующие дроби:

$$R_1(x)=\frac{1}{x^3-1}; \quad R_2(x)=\frac{x^2-x+2}{2x^2+x^3}; \quad R_3(x)=\frac{3x+5}{x^4+x^3+x^2+x}.$$

Разложив данную правильную рациональную дробь на простейшие, можно взять интеграл от обеих частей полученного равенства. Таким образом, интегрирование всякой рациональной дроби сводится в конечном счете к интегралам

$$J_1=\int\frac{A}{x-x_0}dx, \quad J_2=\int\frac{A}{(x-x_0)^k}dx, \quad J_3=\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx.$$

Пример. Найти интеграл $J=\int\frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}dx$. Разделив числитель на знаменатель, получим $\frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}=x+1+\frac{2}{x^3-x^2+x-1}$.

Поэтому $J=\int xdx+\int dx+2\int\frac{dx}{x^3-x^2+x-1}=\frac{x^2}{2}+x+2J_1$. Разложим знаменатель на множители: $x^3-x^2+x-1=(x-1)(x^2+1)$. Корню $x_1=1$ соответствует дробь $\frac{A}{x-1}$, корням $x_{2,3}=\pm i$ соответствует дробь $\frac{Bx+C}{x^2+1}$,

т. е. $\frac{1}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$ или $1=A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)$.

При $x=1$ $1=2A$, $A=1/2$, при $x=0$ $1=A-C$, $C=-1/2$, при $x=-1$, $1=2A+2B-2C$, $B=-1/2$.

$$J_1=\int\frac{dx}{(x-1)(x^2+1)}=\int\frac{1/2}{x-1}dx+\int\frac{(-1/2)x-1/2}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{x\,dx}{x^2+1}-$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}x+C.$$

$$J=\frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\mathrm{arctg}x+C.$$

Примеры для самостоятельного решения

Найти следующие интегралы:

$$J_1 = \int \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}. \qquad \text{Ответ: } J_1 = \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|2x+1| + C.$$

$$J_2 = \int \frac{(x^3+1)dx}{x^3 - x^2}. \qquad \text{Ответ: } J_2 = x + \frac{1}{x} + 2\ln|x-1| - \ln|x| + C.$$

$$J_3 = \int \frac{xdx}{x^3 - 1}. \qquad \text{Ответ: } J_3 = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x^2 + x + 1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Интегрирование по частям

Если $u = u(x)$ и $V = V(x)$ - дифференцируемые функции, то справедлива следующая формула интегрирования по частям: $\int udv = u \cdot v - \int vdu$. При нахождении $\int f(x)dx$ подынтегральное выражение $f(x)dx$ разбивают на два сомножителя (u и dv) таким образом, чтобы вновь образованный интеграл $\int vdu$ был табличным или сводился к табличному.

Основные классы функций, интегрируемых по частям

1. Интегралы вида $J_1 = \int P_n(x)\cos\alpha x\,dx$, $J_2 = \int P_n(x)\sin\alpha x\,dx$, $J_3 = \int P_n(x)e^{\alpha x}dx$. Здесь $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$ - многочлен n-й степени. Во всех случаях в качестве функции u(x) берется многочлен $P_n(x)$.

Пример. Найти $\int x\cos 3xdx$. Здесь $u = x$, $dv = \cos 3x\,dx$.

$$J = \int x\cos 3xdx = \left| \begin{array}{ll} u = x, & dv = \cos 3x\,dx \\ du = dx, & v = 1/3\sin 3x \end{array} \right. = \frac{1}{3}x\sin 3x - \frac{1}{3}\int \sin 3xdx =$$

$$= \frac{1}{3}x\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + C.$$

В общем случае, если многочлен k-й степени, формулу интегрирования по частям следует применить k раз.

Пример. $J=\int\left(x^2-1\right)e^{2x}dx=\left|\begin{array}{l}x^2-1=u,\quad dv=e^{2x}dx,\\ =du=2xdx,\ v=1/2\cdot e^{2x}\end{array}\right.$

$$=\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)e^{2x}-\int xe^{2x}dx==1/2\left(x^2-1\right)e^{2x}-J_1.$$

$$J_1=\int xe^{2x}dx=\left|\begin{array}{l}u=x,\quad dv=e^{2x}dx\\ du=dx,\ v=1/2\cdot e^{2x}\end{array}\right. =\frac{1}{2}x\cdot e^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}x\cdot e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x};$$

$$J=\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)\cdot e^{2x}-\frac{1}{2}x\cdot e^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}+C.$$

2. Интегралы, содержащие обратные тригонометрические функции или логарифмы: $J_1=\int P_n(x)\arcsin\alpha x\ dx,\quad J_2=\int P_n(x)\mathrm{arctg}\,\alpha x\ dx,\quad J_3=\int P_n(x)\ln x\ dx.$ Здесь в качестве функции u(x) следует взять обратную тригонометрическую функцию или логарифм.

Пример. $J=\int x\cdot\mathrm{arctg}x dx=\left|u=\mathrm{arctg}\,x,\ du=\frac{dx}{1+x^2},\ v=\frac{x^2}{2},\ dv=x\,dx\right.=$

$$=\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\ x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{1+x^2}= =\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}x-\frac{1}{2}J_1.$$

$$J_1=\int\frac{\left(x^2+1\right)-1}{x^2+1}dx=\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\int dx-\int\frac{dx}{x^2+1}=x-\mathrm{arctg}x;$$

$$J=\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}x+C.$$

Примеры для самостоятельного решения

1. $\int(x+2)^2\sin 5x\,dx.$ Ответ: $C-\frac{1}{5}(x+2)^2\cos 5x+\frac{2}{25}(x+2)\sin 5x+\frac{2}{125}\cos 5x.$
2. $\int x\ln 3x\ dx.$ Ответ: $\frac{x^2}{2}\ln 3x-\frac{x^2}{4}+C.$
3. $\int x^3 2^{3x}dx.$ Ответ: $\frac{2^{3x}}{3\ln 2}\left(x^3-\frac{x^2}{\ln 2}+\frac{2x}{3(\ln 2)^2}-\frac{2}{9(\ln 2)^3}\right)+C.$
4. $\int(x+1)\cos^2\frac{x}{3}dx.$ Ответ: $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}(x+1)\sin\frac{2x}{3}+\frac{9}{8}\cos\frac{2x}{3}+C.$

Интегрирование тригонометрических функций

Рассмотрим интеграл вида $J=\int f(\cos x, \sin x)\,dx$, где f - рациональная функция относительно cos x и sin x. Такой интеграл с помощью так называемой универсальной тригонометрической подстановки $\operatorname{tg}(x/2)=t$ приводится к интегралу от рациональной дроби относительно t. Замена переменных выполняется по следующим формулам:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t,\ dx=\frac{2dt}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2}.$$

Пример. Найти интеграл $J=\int\frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$.

После замены переменных получим

$$J=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{8-4\frac{2t}{1+t^2}+7\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{2dt}{t^2-8t+15}=2\int\frac{dt}{(t-4)^2-1}=$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-4-1}{t-4+1}\right|+C=\ln\left|\frac{t-5}{t-3}\right|+C$$

Так как $t=\operatorname{tg}(x/2)$, $J=\ln\left|\frac{\operatorname{tg}(x/2)-5}{\operatorname{tg}(x/2)-3}\right|+C$. Подстановка $\operatorname{tg}(x/2)=t$ из-за универсальности приводит, как правило, к сложным рациональным дробям, поэтому эту подстановку используют только в крайних случаях. Многие интегралы можно найти проще. Рассмотрим примеры.

1. Интегралы $J_1=\int\cos\alpha x\cdot\cos\beta x\,dx$, $J_2=\int\sin\alpha x\cdot\sin\beta x\,dx$,

$$J_3=\int\sin\alpha x\cdot\cos\beta x dx.$$

Здесь достаточно использовать школьные формулы:

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=(1/2)\cdot[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)],$$
$$\sin\alpha\sin\beta=(1/2)\cdot[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)],$$
$$\sin\alpha\cos\beta=(1/2)\cdot[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)].$$

Пример. $J=\int \sin 3x\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\int(\sin x+\sin 5x)dx=\frac{1}{2}\int \sin x dx+\frac{1}{2}\int \sin 5x\,dx=$

$$=-\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{10}\cos 5x+C.$$

2. Интеграл $J=\int f(\cos x,\sin x)dx,$ где подынтегральная функция четная относительно синуса и косинуса, т. е. $f(-\cos x,-\sin x)=f(\cos x,\ \sin x)$. Для рационализации применяется подстановка $\operatorname{tg} x=t$,

тогда
$$\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}};$$

$$\sin x=\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2x}}=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}};\ dx=\frac{dt}{1+t^2}.$$

Эта же подстановка приводит к цели, если $J=\int f(\operatorname{tg}x)\,dx$.

Примеры

1. $J=\int\frac{dx}{2-\sin^2x}=\left|\operatorname{tg}x=t\right|=\int\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{2-\frac{t^2}{1+t^2}}=$

$$=\int\frac{dt}{t^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}+C.$$

2. $\int\frac{1}{\sin^2x+2\sin x\cdot\cos x-5\cos^2x}dx=\left|\begin{array}{l}\operatorname{tg}x=t,\quad \sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}};\\ \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ dx=\frac{dt}{1+t^2}\end{array}\right.=$

$$=\int\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2}+2\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}-5\frac{1}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{t^2+2t-5}=\int\frac{d(t+1)}{(t+1)^2-\left(\sqrt{6}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{t+1-\sqrt{6}}{t+1+\sqrt{6}}\right|=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}x+1-\sqrt{6}}{\operatorname{tg}x+1+\sqrt{6}}\right|+C.$$

3. Интеграл вида $J=\int \sin^m x\cdot\cos^n x dx$. Здесь возможны следующие случаи:

а) если m и n – четные и неотрицательные числа , то для вычисления интеграла используются формулы понижения степени:

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2};\quad \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}.$$

Пример. Найти интеграл $J=\int \cos^4 x dx$.

$$\cos^4 x=\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x\right)=\frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{8}(3+4\cos 2x+\cos 4x);$$

$$J=\frac{1}{8}\int\left(3+4\cos^2 x+\cos 4x\right)dx=\frac{1}{8}\left(3x+2\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C;$$

б) если одно из чисел m и n - нечетное натуральное число, то используем формулы $\sin^2 x=1-\cos^2 x$, $\cos^2 x=1-\sin^2 x$.

Пример. Найти интеграл $J=\int \sin^3 x\cdot\cos^2 x\ dx$.

$$\sin^3 x\cdot\cos^2 x=\sin^2 x\cdot\cos^2 x\cdot\sin x=\left(1-\cos^2 x\right)\cos^2 x\cdot\sin x=\left(\cos^2 x-\cos^4 x\right)\sin x.$$

$$J=\int\left(\cos^2 x-\cos^4 x\right)\sin x dx=\left|\begin{array}{l} \\ \cos x=t,\ -\sin x dx=dt\end{array}\right.==$$

$$=-\int\left(t^2-t^4\right)dt=-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+C=\frac{1}{5}\cos^5 x-\frac{1}{3}\cos^3 x+C.$$

4. Интегралы вида $J=\int \sec^n x\ dx$, $J=\int \operatorname{cosec}^m x\ dx$, где n и m – нечетные положительные числа, можно найти по частям следующим образом.

Пример.

$$J=\int \sec^3 x\ dx=\left|\begin{array}{l} \\ u=\sec x,\quad dv=\sec^2 x\ dx,\ du=\sec x\cdot \operatorname{tg} x\ dx,\ v=\operatorname{tg} x\end{array}\right.=$$

$$=\sec x\cdot\operatorname{tg} x-\int \sec x\cdot\operatorname{tg}^2 x\ dx==\sec x\cdot\operatorname{tg} x-\int \sec x\left(\sec^2 x-1\right)dx.$$

Итак, $\int \sec^3 x\, dx = \sec x \cdot \mathrm{tg}\, x - \int \sec^3 x\, dx + \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$.

Отсюда $2\int \sec^3 x dx = \sec x \mathrm{tg} x + \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2}\sec x \cdot \mathrm{tg} x + \frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

Примеры для самостоятельного решения

1. $\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx;$ Ответ: $\frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$

2. $\int \sin^3 x\sqrt{\cos x}\, dx;$ Ответ: $2\sqrt{\cos^3 x}\left(\frac{1}{7}\cos^2 x - \frac{1}{3}\right) + C.$

3. $\int \sin 4x \cdot \sin 6x\, dx$; Ответ: $\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{20}\sin 10x + C$.

4. $\int \frac{dx}{5+4\sin x};$ Ответ: $\frac{2}{3}\mathrm{arctg}\frac{5\mathrm{tg}\frac{x}{2}+4}{3} + C$.

Интегрирование иррациональных функций

1. Тригонометрические подстановки.

Если интеграл имеет вид $J_1 = \int f\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx$, то $x = a\sin t;\ dx = a\cos t;$

$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} = a\sqrt{1-\sin^2 t} = a\cdot\cos t$.

Если интеграл имеет вид $J_2 = \int f\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right)dx$, то $x = a\mathrm{tg}\ t,\ dx = a\ \sec^2 t\ dt,$

$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2\mathrm{tg}^2 t} = a\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t} = a\cdot\sec\ t$.

Если интеграл имеет вид $J_3 = \int f\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx$, то $x = a\sec\ t,\ dx = a\sec\ t\cdot \mathrm{tg}\ t\cdot dt$,

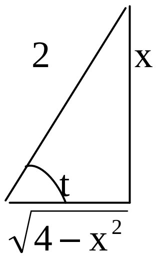
$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2\sec^2 t - a^2} = a\sqrt{\sec^2 t - 1} = a\,\mathrm{tg} t.$

Примеры

$$1.\quad J=\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}dx=\left|\begin{array}{l}x=2\sin t\\ dx=2\cos t\ dt\end{array}\right.=\int\frac{2\cos t}{2\sin t}2\cos t\ dt=2\int\frac{\cos^2 t}{\sin t}dt=$$

$$=2\int\frac{1-\sin^2 t}{\sin t}dt=2\int(\operatorname{cosec} t-\sin t)dt=2\left[\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|+\cos t\right]+C.$$

Возврат к старой переменной x проще выполнить с помощью треугольника.



$$\sin t=x/2,\quad \cos t=\frac{\sqrt{4-x^2}}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{t}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}}=\frac{1-\cos t}{\sin t};$$

$$\operatorname{tg}\frac{t}{2}=\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x};$$

$$J=2\ln\left|\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}\right|+\sqrt{4-x^2}+C.$$

$$2.\quad \int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-2}}=\left|\begin{array}{l}x=\sqrt{2}\cdot\sec t,\\ dx=\sqrt{2}\cdot\sec t\cdot\operatorname{tg}\ t\ dt\end{array}\right.=\int\frac{\sqrt{2}\sec t\cdot\operatorname{tg}\ t\cdot dt}{\left(\sqrt{2}\cdot\sec t\right)^3\sqrt{2\sec^2 t-2}}=$$

$$=\int\frac{\sqrt{2}\sec t\cdot\operatorname{tg}\ t\cdot dt}{\left(\sqrt{2}\cdot\sec t\right)^3\sqrt{2\sec^2 t-2}}=\int\frac{\sqrt{2}\cdot\sec t\cdot\operatorname{tg}\ t\ dt}{2\sqrt{2}\cdot\sec^3 t\cdot\sqrt{2}\operatorname{tg}\ t}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{dt}{\sec^2\ t}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\int\cos^2 t\ dt=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)=\frac{1}{4\sqrt{2}}(t+\sin\ t\ \cos t)=J.$$

Из подстановки $x=\sqrt{2}\sec t\Rightarrow\ \dfrac{x}{\sqrt{2}}=\sec t\Rightarrow\cos t=\sqrt{2}/x,$

$$\sin t=\sqrt{1-\cos^2 t}=\sqrt{1-\frac{2}{x^2}};\quad t=\arccos\frac{\sqrt{2}}{x}.$$

Тогда

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-2}}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{x}+\frac{\sqrt{2}}{x}\cdot\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}\right)=\ \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{x}+\frac{\sqrt{2}\sqrt{x^2-2}}{x^2}\right)+C.$$

2. Интегралы вида $J_1=\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{p}{q}}, \ldots, x^{\frac{r}{e}}\right)dx$, содержащие дробные степени x, приводятся к интегралам от рациональных функций с помощью подстановки $x=t^k$, где k - наименьший общий знаменатель дробных показателей x.

Интегралы вида $J_2=\int R\left(x, (ax+в)^{\frac{m}{n}}, (ax+в)^{\frac{p}{q}}, \ldots, (ax+в)^{\frac{r}{e}}\right)dx$, содержащие дробные степени линейного двучлена $ax+в$, приводятся к интегралам от иррациональных функций с помощью подстановки $ax+в=t^k$, где k - наименьший общий знаменатель дробных показателей $ax+в$.

Примеры

1. $$\int\frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+1)}=\int\frac{6t^5dt}{\sqrt{t^6}(\sqrt[3]{t^6}+1)}.$$

Так как x имеет дробные показатели $\left(x^{\frac{1}{2}} \text{ и } x^{\frac{1}{3}}\right)$, применим подстановку

$x=t^6$; $dx=6\,t^5\,dt$.

Тогда $$\int\frac{6t^5dt}{t^3\left(t^2+1\right)}=6\int\frac{t^2dt}{t^2+1}=6\int\frac{\left(t^2+1\right)-1}{t^2+1}dt=$$

$$=6\left[\int\frac{t^2+1}{t^2+1}dt-\int\frac{dt}{t^2+1}\right]=6\left[\int dt-\int\frac{dt}{t^2+1}\right]=6\left(t-\operatorname{arctg}t\right),$$

вернемся к x: $x=t^6\Rightarrow t=\sqrt[6]{x}$ $\quad 6\sqrt[6]{x}-6\cdot\operatorname{arc\,tg}\sqrt[6]{x}+C.$

2. $$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}.$$

Здесь $(2x+1)^{2/3}$ и $(2x+1)^{1/2}$. Применим подстановку $2x+1=t^6$; $dx=3t^5dt$.

Тогда $$\int\frac{3t^5dt}{\sqrt[3]{\left(t^6\right)^2}-\sqrt{t^6}}=3\int\frac{t^5dt}{t^4-t^3}=3\int\frac{t^2dt}{t-1}=3\int\left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt=$$

$$=3\left(\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right)=|\,2x+1\,|=\,t^6.$$

Следовательно, $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)}-\sqrt{2x+1}} = \frac{3}{2}\sqrt[6]{(2x+1)^2} + 3\sqrt[6]{2x+1} + 3\ln\left|\sqrt[6]{2x+1}-1\right| + C.$

Примеры для самостоятельного решения

1. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$. Ответ: $C - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

2. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}dx}{x}$. Ответ: $\sqrt{x^2-1} - \arccos\frac{1}{x} + C$.

3. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}$. Ответ: $\frac{6}{5}\left(\sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt[12]{x^5} + 2\ln\left|\sqrt[12]{x^5}-1\right|\right) + C$.

4. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}dx$. Ответ: $2\sqrt{1+\ln x} - \ln\left|\frac{1+\sqrt{1+\ln x}}{1-\sqrt{1+\ln x}}\right| + C$.

Определенный интеграл и его приложения

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,\ b]$. Разобьем этот отрезок произвольно на n частей точками $x_0 = a,\ x_1,\ x_2, ..., x_n = b$. В каждом из образовавшихся отрезков $[x_{i-1}, x_i]$возьмем произвольную точку $\overline{x}_i$ и вычислим значение функции $f(\overline{x}_i)$. Обозначив длину соответствующего отрезка $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, составим сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\cdot\Delta x_i$, которая называется **интегральной** суммой функции $f(x)$ на отрезке $[a,\ b]$.

Определение. Предел интегральной суммы при условии, что число частичных отрезков неограниченно увеличивается, а длина наибольшего из них стремится к нулю, **называется определенным интегралом** от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$,

$$\text{т. е. } \int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta x_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\cdot\Delta x_i .$$

Заметим, чтобы существовал предел, т. е. **чтобы существовал определенный** интеграл, достаточно, чтобы подынтегральная функция $f(x)$ была на отрезке интегрирования $[a, b]$ **непрерывной.**

Свойства определенного интеграла

1. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$.

2. $\int\limits_a^b [\ c_1f_1(x) \pm c_2f_2(x)\ ]dx = c_1\int\limits_a^b f_1(x)dx \pm c_2\int\limits_a^b f_2(x)dx,\ (c_1 \text{ и } c_2 - \text{постоянные})$.

3. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$, где $a \le c \le b$.

4. Если $(\forall x \in [a, b]) f(x) \le \varphi(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b \varphi(x)dx$.

5. Теорема **об оценке** определенного интеграла. Если m - наименьшее, M – наибольшее значения $f(x)$ на $[a, b]$, то $m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

6. Теорема **о среднем** значении $f(x)$ на $[a, b]$. Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то на этом отрезке существует такая точка $c\ (a \le c \le b)$, что $\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

7. **Геометрический смысл** определенного интеграла: если $\forall x \in [a, b]\ \ f(x) \ge 0$, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$, отрезком $[a, b]$ оси OX и прямыми $x = a,\ x = b$.

Задание: попробуйте самостоятельно дать геометрическую интерпретацию свойств 3 - 6 определенного интеграла.

Формула Ньютона-Лейбница

Чтобы вычислить определенный интеграл на отрезке $[a, b]$ от непрерывной на этом отрезке функции $f(x)$, надо найти первообразную этой функции с помощью неопределенного интеграла, а затем вычислить разность значений этой первообразной на верхнем и нижнем пределах интегрирования, т. е. следует воспользоваться формулой Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Пример. Вычислить $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

$$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} = \arcsin(\ln x)\Big|_1^{\sqrt{e}} = \arcsin\left(\ln\sqrt{e}\right) - \arcsin(\ln 1) = \arcsin\frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}$$

Пример. Вычислить $\int_0^3 x \cdot \operatorname{arctg} x\, dx$. Применяем формулу определенного интегрирования по частям: $\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$.

$$\int_0^3 x \cdot \operatorname{arctg} x dx = \left| u = \operatorname{arctg} x;\ du = \frac{dx}{1+x^2};\ dv = xdx;\ v = \frac{1}{2}x^2 \right. =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x\Big|_0^3 - \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = \left(\frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\right)\Big|_0^3 =$$

$$= \frac{9}{2}\operatorname{arctg} 3 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 3 = 5\operatorname{arctg} 3 - \frac{3}{2}.$$

Пример. Вычислить $J = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}dx$. Найдем первообразную подынтегральной функции с помощью тригонометрической подстановки:

$x = R\sin t,\ dt = R\cos t dt$. Найдем новые границы: $x_1 = 0;\quad 0 = R\sin t \quad \Rightarrow\ t_1 = 0.$

$x_2 = R;\ \ R = R\sin t \Rightarrow\ \sin t = 1;\ t_2 = \frac{\pi}{2}.$

$$J = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{R^2 - R^2\sin t}\ R\cos t\ dt \int_0^{\pi/2} R^2\cos^2 t\ dt = R^2\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}dt =$$

$$= \frac{1}{2}R^2\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}R^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi - 0 - \frac{1}{2}\sin 0\right) = \frac{\pi R^2}{4}.$$

Несобственные интегралы

В задачах, связанных с понятием определенного интеграла, речь идет о **непрерывных** функциях, заданных в **конечном** замкнутом промежутке $[a,\ b]$. Нарушение одного из этих требований: функция $f(x)$ терпит разрыв внутри отрезка интегрирования $[a, b]$ или на одном из его концов или промежуток интегрирования бесконечен $(]-\infty, a], [a, +\infty[,]-\infty, +\infty[)$ - приводит к понятию **несобственных интегралов**.

Определение 1. Если $f(x)$ непрерывна в интервале $[a, +\infty[$, то несобственным интегралом 1-го рода называют интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx$. При этом, несобственный интеграл сходится, если предел существует и конечен. Если этот предел не существует или бесконечен, то несобственный интеграл расходится.

Аналогично $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx,\qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_{-t}^{+t} f(x)dx.$

Пример. Вычислить $\int\limits_{e^2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{e^2}^{b}(\ln x)^{-3}d(\ln x) = \lim\limits_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2\ln^2 x}\right)\Bigg|_{e^2}^{b} =$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{\ln^2 b} - \frac{1}{\ln^2 e^2}\right] = -\frac{1}{2}\left[0 - \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{8}\ .$$

Следовательно, интеграл сходится.

Пример. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5} = \lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_{-t}^{t}\frac{dx}{(x+1)^2+2^2} = \frac{1}{2}\lim\limits_{t\to\infty}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}\Bigg|_{-t}^{t} =$

$= \frac{1}{2}\lim\limits_{t\to\infty}\left[\operatorname{arctg}\frac{t+1}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1-t}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{2}$. Интеграл сходится.

Пример.

$\int\limits_0^{+\infty}\cos x\,dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\sin x\Big|_0^b = \lim\limits_{b\to+\infty}(\sin b - \sin 0) = \lim\limits_{x\to+\infty}\sin b$, предел не существует, следовательно, интеграл расходится.

Определение 2. Если $f(x)$ терпит бесконечный разрыв в точке $x = a$ или $x = b$, или $x = c(a < c < b)$, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется несобственным интегралом II-го рода. Вычисляют такие интегралы следующим образом:

а) $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx,$ если $x = a$ – точка разрыва;

б) $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx,$ если $x = b$ – точка разрыва;

c) $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon_1\to 0}\int\limits_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim\limits_{\varepsilon_2\to 0}\int\limits_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx,$ если $x = c$ - точки разрыва.

Пример. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon} =$

$= \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left[\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0\right] = \frac{\pi}{2}$. Интеграл сходится.

Пример. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\ln x} = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{1+\varepsilon}^{2}\frac{dx}{x\ln x} = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\ln\ln x\Big|_{1+\varepsilon}^{2} = \ln\ln 2 - \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\ln\left|\ln(1+\varepsilon)\right| =$

$= \ln\ln 2 - \ln\ln 1$, предел не существует, т. е. данный интеграл расходится.

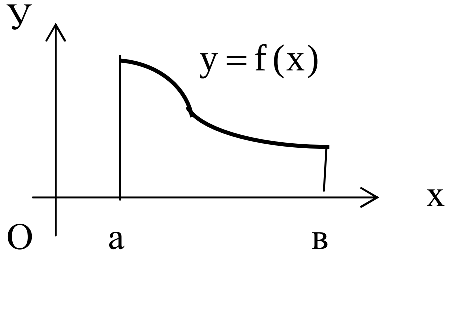
Пример. $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = 2\int\limits_0^1\frac{dx}{x^2} = 2\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^1\frac{dx}{x^2} = 2\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_\varepsilon^1 = \infty.$ Интеграл расходится.

Приложения определенного интеграла

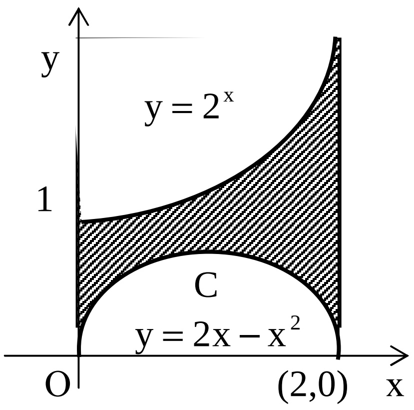
1. Площадь плоской фигуры.

На основании свойства 7 определенного интеграла (см. его геометрический смысл) площадь криволинейной трапеции вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_0^b f(x)dx \text{ или } S = \int\limits_a^b y dx.$$



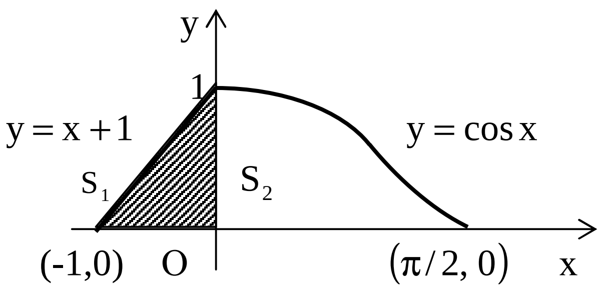
Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями



$y = 2^x; y = 2x - x^2;\ x = 0;\ x = 2.$ Для построения параболы $y = 2x - x^2$ приведем ее уравнение к каноническому виду: $(x-1)^2 = -(y-1)$. Вершина параболы: C (1, 1).

$$S = S_1 - S_2 = \int_0^2 \left[2^x - \left(2x - x^2\right)\right]dx = \frac{3}{\ln 2} - \frac{4}{3}.$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

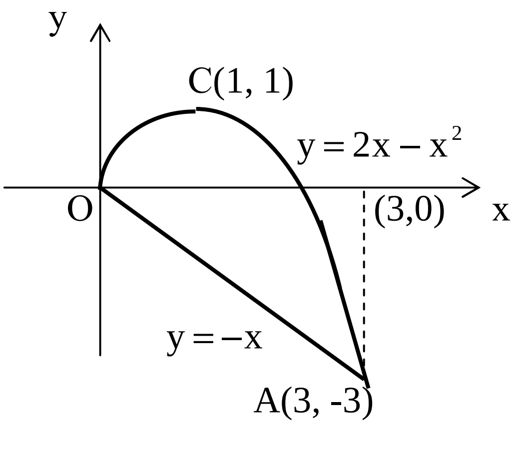


$y = x + 1;\ y = \cos x;\ y = 0.$

$$S = S_1 + S_2 = \int_{-1}^{0}(x+1)dx + \int_0^{\pi/2}\cos x dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + x\right]\Bigg|_{-1}^{0} + \sin x\Bigg|_0^{\pi/2} = 3/2.$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x;$



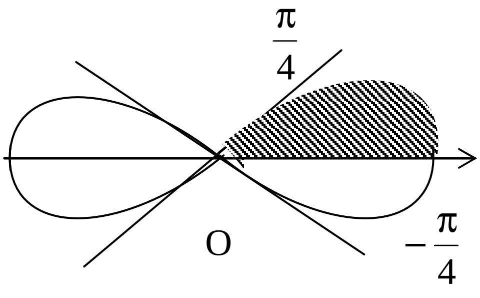
$y = 2x - x^2$. Для определения пределов интегрирования найдем точки пересечения параболы $y = 2x - x^2$ и прямой $y = -x$:

$$\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 3x = 0 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = -3 \end{cases}$$

$$S = \int_0^3 \left[\left(2x - x^2\right) - (-x)\right]dx = \int_0^3 \left(3x - x^2\right)dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{27}{2} - 9 = 4{,}5.$$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли

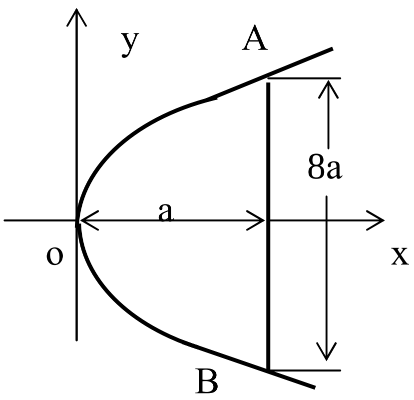


$\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$. Формула для вычисления площади плоской фигуры в полярной системе координат: $S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^2\, d\varphi$;

$\frac{1}{4}S = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi/4} a^2\cos\ 2\varphi\, d\varphi = \frac{a^2}{4}$; $S = a^2$.

2. Площадь поверхности вращения, образованной вращением дуги линии $y = f(x)$ от $x = a$ до $x = b$ вычисляется по формуле $Q = 2\pi\int\limits_{a}^{b} f(x)\sqrt{1 + \left(f_x^{/}\right)^2}dx$.

Пример. Размеры параболического зеркала AOB указаны на чертеже. Найти



площадь поверхности этого зеркала. Уравнение параболы AOB в общем виде: $y = 2px$, точка A (a, 4a), $y^2 = 2px \Rightarrow 16a^2 = 2pa \Rightarrow p = 8a$.

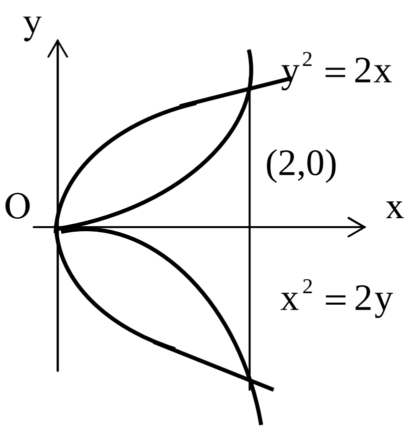
Уравнение AOB: $y^2 = 16ax \Rightarrow y = 4\sqrt{ax}$; $y' = 2\sqrt{\frac{a}{x}}$;

$$Q = 2\pi\int\limits_{0}^{a} 4\sqrt{ax}\cdot\sqrt{1 + \frac{4a}{x}}dx = 8\pi\sqrt{a}\int\limits_{0}^{a}\sqrt{x + 4a}dx =$$

$$= \frac{16}{3}\pi a^2\left(5\sqrt{5} - 8\right).$$

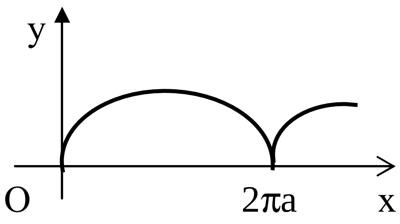
3. Объем тела вращения, образованного вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$ и прямыми $x = a$ до $x = b$, вокруг оси OX, вычисляется по формуле $V = \pi\int\limits_{a}^{b} f^2(x)dx$.

Пример . Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX части плоскости, ограниченной параболами $y^2 = 2x$ и $x^2 = 2y$.



$$V = V_{\left(y^2=2x\right)} - V_{\left(x^2=2y\right)} = \pi\int\limits_{0}^{2} 2x dx - \pi\int\limits_{0}^{2}\frac{x^4}{4}dx = \frac{12\pi}{5}$$

Пример 7. Найти объем тела, образованного вращением одной «арки» циклоиды вокруг ее основания

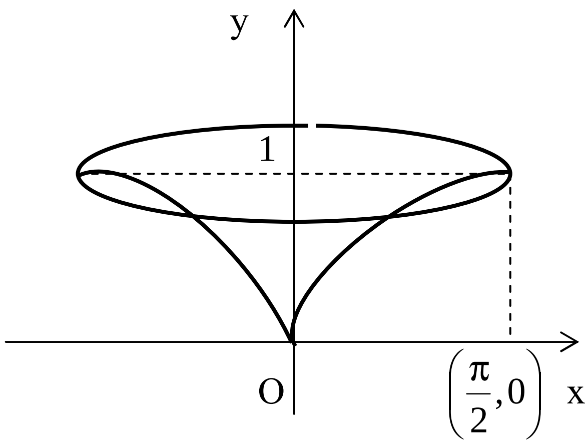


$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \le x \le 2\pi a \Rightarrow 0 \le t \le 2\pi.$$

$$V = \pi \int_0^{2\pi a} y^2 dx = \pi \int_0^{2\pi} y^2(t) dx(t) = \pi \int_0^{2\pi} a^3 (1 - \cos t)^3 dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t\right) dt = 5a^3\pi^2 .$$

Пример. Найти объем тела, образованного вращением дуги синусоиды $y = \sin x$, заключенной между началом координат и ближайшей вершиной, вокруг оси OY.



$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$; $0 \le y \le 1$;

Интегрируем по частям дважды:

$$V = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2(y) dy = \pi \int_0^1 \arcsin^2 y dy =$$

$$= \pi \left[y \cdot \arcsin^2 y + 2\sqrt{1 - y^2} \arcsin y - 2y \right] \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi a^3}{4} - 2\pi.$$

Упражнения

1. Вычислить определенные интегралы

а) $\int_{-1}^{2} x^2 dx$; б) $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx$; в) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$; г) $\int_0^1 x^2 \sqrt{1 - x^2} dx$; д) $\int_0^1 x \cdot e^{-x} dx$.

2. Вычислить несобственные интегралы

а) $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}$; в) $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1 + x^2}$; г) $\int_0^{\pi/4} \operatorname{ctg} x dx$; д) $\int_{0,5}^{1} \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^2}}$.

3. Вычислить площади фигур, ограниченных данными линиями:

а) $y = e^x$; $y = e^{-x}$; $x = 1$. б) $x = a\cos t$; $y = b\sin t$. в) $\rho = a\varphi$, $(0 \le \varphi \le 2\pi)$.

Ответ: а) $S = (e - 1)^2 / e$. б) $S = \pi ab$. в) $S = 4\pi^3 a^2 / 3$.

4. Найти площадь сферического пояса: дуга окружности с центром в начале координат и радиусом r вращается вокруг оси OX, высота пояса H.

Ответ: $Q = 2\pi r H$.

5. Вычислить объем тела, образованного вращением площадки, ограниченной линиями оси OX:

а) $y = \sin x,\ 0 \le x \le \pi,\ y = 0.$ Ответ: $V = \dfrac{\pi^2}{2}$.

б) $y = x \cdot e^x,\ x = 1,\ y = 0$. Ответ: $V = \pi \cdot (e^2 - 1)/4$.

в) $y = \arcsin x,\ x = 0,\ x = 1, y = 0$. Ответ: $V = \pi(\pi^2/4 - 2)$.

Контрольные работы

Вариант 1

1. Найти неопределенные интегралы

1) $\displaystyle\int 5\left(x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$. 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 - 6x + 2}}$. 3) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1 + x^2} dx$. 4) $\displaystyle\int 4x \ln x\, dx$.

5) $\displaystyle\int \frac{(x-1)dx}{x^3 - x^2 + x}$. 6) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3 + x^2 + x + 1}$. 7) $\displaystyle\int \frac{\cos x\, dx}{1 + \cos x}$. 8) $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x+1}}$.

2. Вычислить определенные интегралы

$$1)\ \int_0^1 1 + x dx. \qquad 2)\ \int_1^e 3x^2 e^{x^3} dx.$$

3. Вычислить несобственные интегралы

$$1)\ \int_0^\infty x \sin x\, dx. \qquad 2)\ \int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{tg} x\, dx}{1 - \operatorname{ctg}^2 x}.$$

4. Построить фигуру, ограниченную следующими линиями $y = 2^x$, $x = 0$, $x = 2$, и вычислить ее площадь.

Вариант 2

1. Найти неопределенные интегралы

1) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{x} dx$. 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 2x + x^2}}$. 3) $\displaystyle\int e^{2x} \cos e^{2x} dx$. 4) $\displaystyle\int \operatorname{arctg} 4x\ dx$.

5) $\int \frac{(1-x)dx}{x^3-2x^2+4x}$. 6) $\int \frac{dx}{x^3-x^2+4x}$. 7) $\int \frac{dx}{2\sin x+\cos x+2}$. 8) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$.

2. Вычислить определенные интегралы

$$1)\ \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}.\quad 2)\ \int_{1}^{e} \frac{\ln^2 x}{x}dx.$$

3. Вычислить несобственные интегралы

$$1)\ \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x+x^3}.\qquad 2)\ \int_{1}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

4. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, $y=0$, где $y\ge 0$, вокруг оси OX.

Вариант 3

1. Найти неопределенные интегралы

1) $\int \frac{x^4+2\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}}dx$. 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+7}}$. 3) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$. 4) $\int \arcsin 2x\ dx$.

5) $\int \frac{(x+1)dx}{x^3-x^2}$. 6) $\int \frac{dx}{x^3+3x^2+4x+2}$. 7) $\int \frac{dx}{\cos^2 x(3\operatorname{tg} x+1)}dx$. 8) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$.

2. Вычислить определенные интегралы

$$1)\ \int_{-13}^{2} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}dx.\quad 2)\ \int_{-13}^{2} 5x^4e^{x^5}dx.$$

3. Вычислить несобственные интегралы

$$1)\ \int_{-\infty}^{2} xe^x dx.\qquad 2)\ \int_{0}^{1/2} \frac{dx}{x\ln^2 x}.$$

4. Построить фигуру, ограниченную следующими линиями: $xy=4$, $x+y=5$, и вычислить ее площадь.

В а р и а н т 4

1. Найти неопределенные интегралы

1) $\int \frac{(1-x)^3}{\sqrt{x}} dx$. 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+8x}} dx$. 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x}$. 4) $\int (x^2-1) \sin x \, dx$.

5) $\int \frac{(x+2x)\, dx}{x^3+2x^2-3x}$. 6) $\int \frac{x\, dx}{x^3+x^2-2}$. 7) $\int \sin^4 x \, dx$. 8) $\int \frac{(x+1)\, dx}{x\sqrt{x-2}}$.

2. Вычислить определенные интегралы

1) $\int_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} dx$. 2) $\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx$.

3. Вычислить несобственные интегралы

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$. 2) $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

4. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4x$, $x = 3$, вокруг оси OX.

В а р и а н т 5

1. Найти неопределенные интегралы

1) $\int \frac{4x-7x^2}{\sqrt[3]{2}} dx$. 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-4x-1}}$. 3) $\int \frac{x\, dx}{x^3-4x^2-2x-4}$. 4) $\int (x^2+1) \cos x \, dx$.

5) $\int \frac{(x-1)dx}{x^3-6x^2+8x}$. 6) $\int \frac{dx}{x \ln^5 x}$. 7) $\int \mathrm{tg}^3 x \, dx$. 8) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

2. Вычислить определенные интегралы

1) $\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$. 2) $\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{arctg}^2 x}{1+x^2} dx$.

3. Вычислить несобственные интегралы

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$. 2) $\int_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{1+2\cos x}} dx$.

4. Построить фигуру, ограниченную следующими линиями $y = x^2 + 1,\ y = 3x$, и вычислить ее площадь.

В а р и а н т 6

1. Найти неопределенные интегралы

1) $\int\left(7\sqrt[5]{x^2} + 3\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)dx$. 2) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 + 10x + 5}}$. 3) $\int\frac{dx}{\operatorname{tg} x \cos^2 x}$.

4) $\int(5 - x)\sin 3x\,dx$. 5) $\int\frac{x^2dx}{x^3 - x^2 - x + 1}$. 6) $\int\frac{(x+1)dx}{x^3 + 4x^2 + 5x}$.

7) $\int\frac{dx}{\sin^6 x}$. 8) $\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{x(x+1)}$.

2. Вычислить определенные интегралы

1) $\int\limits_0^1\left(e^x - 1\right)^4 e^x\,dx$. 2) $\int\limits_e^{e^3}\frac{dx}{x\ln^3 x}$.

3. Вычислить несобственные интегралы

1) $\int\limits_0^{\infty}\frac{x^2dx}{\left(1 + x^3\right)^2}$. 2) $\int\limits_0^1\frac{dx}{(2 - x)\sqrt{1 - x}}$.

4. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, вокруг оси OX.

В а р и а н т 7

1.Найти неопределенные интегралы

1) $\int\left(3\sqrt[5]{x^2} - \frac{1}{x}\right)^2 dx$. 2) $\int\frac{(1+1)dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 12}}$. 3) $\int x^2 e^{x^3}dx$. 4) $\int\left(\frac{1}{2} - x\right)\cos 4x\,dx$.

5) $\int\frac{x\,dx}{x^3 - x^2 - 4x + 4}$. 6) $\int\frac{\sqrt{x}dx}{x+1}$. 7) $\int\frac{(x-1)dx}{x^3 - 4x^2 + 5x}$. 8) $\int\frac{dx}{1 - \cos x}$.

2. Вычислить определенные интегралы

$$1)\ \int_0^2 \frac{3dx}{4-x}. \qquad 2)\ \int_1^2 x\log_2 x\ dx.$$

3. Вычислить несобственные интегралы

$$1)\ \int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}. \quad 2)\ \int_1^2 \frac{x^2\ dx}{(x-1)\sqrt{x-1}}.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3,\ x = 0,\ y = 0$.

Вариант 8

1. Найти неопределенные интегралы

$$1)\ \int 105(x+1)^2\sqrt{x}\,dx. \quad 2)\ \int \frac{dx}{\sqrt{2+2x-x^2}}. \qquad 3)\ \int x^3\cos x^4\ dx.$$

$$4)\ \int 2\,\mathrm{arctg}\ 4x\ dx. \qquad 5)\ \int \frac{(x^2+1)dx}{x^3+x^2-6x}. \qquad 6)\ \int \frac{dx}{x^3+3x^2+3x}.$$

$$7)\ \int \frac{dx}{1+\sin x}. \qquad 8)\ \int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}.$$

2. Вычислить определенные интегралы

$$1)\ \int_0^1 \frac{x\ dx}{(x^2+1)^2}. \quad 2)\ \int_0^1 x\,e^{-x}dx.$$

3. Вычислить несобственные интегралы

$$1)\ \int_1^\infty \frac{\ln x}{x^3}dx. \quad 2)\ \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\mathrm{tg}x-1}}.$$

4. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = e^x,\ x = 0,\ y = 0$, вокруг оси ОУ.

Вариант 9

1. Найти неопределенные интегралы

$$1)\ \int \left(4\sqrt[3]{x}-5x\sqrt{x}\right)dx. \quad 2)\ \int \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}. \qquad 3)\ \int \frac{x^3\ln x^2}{2}dx.$$

$$4)\ \int x\sin(x^2-5)dx. \qquad 5)\ \int \frac{(x^2-1)dx}{x^3-x^2-6x}. \qquad 6)\ \int \frac{(x-3)dx}{x^3-3x^2+3}.$$

7) $\int \frac{(1-\cos x\,dx)}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$. 8) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$.

2. Вычислить определенные интегралы

1) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$. 2) $\int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx$.

3. Вычислить несобственные интегралы

1) $\int_0^\infty x e^{-x^2} dx$. 2) $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $y^2 = x$.

Вариант 10

1. Найти неопределенные интегралы

1) $\int \left(\frac{5}{x} - 7\sqrt[4]{x^3} + 2 \right) dx$. 2) $\int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{25+6x-x^2}}$. 3) $\int \frac{\arccos^4 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

4) $\int (3x-5)\sin\frac{x}{2} dx$. 5) $\int \frac{(x^2+1)dx}{x^3-x}$. 6) $\int \frac{(x^2-3)dx}{x^3+6x^2+10x}$.

7) $\int \frac{(1+\sin x)dx}{1+\cos x}$. 8) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x}-1\right)}$.

2. Вычислить определенные интегралы

1) $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx$. 2) $\int_0^1 20x^3 e^{x^4} dx$.

3. Вычислить несобственные интегралы

1) $\int_1^\infty \frac{x^2 dx}{1+x^6}$. 2) $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$.

4. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = e^x$, $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, вокруг оси OX.

В а р и а н т 11

1. Найти неопределенные интегралы

1) $\int \frac{4x-7x\sqrt[3]{x}+2}{x}dx$. 2) $\int \frac{(2x+1)dx}{\sqrt{24-2x-x^2}}$. 3) $\int \frac{ctg^3 x+1}{\sin^2 x}dx$.

4) $\int \left(\frac{x}{3}+4\right)\cos\frac{4}{9}x\,dx$. 5) $\int \frac{(x+3)}{x^3-4x}$. 6) $\int \cos^2 3x\,dx$.

7) $\int \frac{x\,dx}{x^3-x^2+2x-2}$. 8) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$.

2. Вычислить определенные интегралы

1) $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$. 2) $\int_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx$.

3. Вычислить несобственные интегралы

1) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. 2) $\int_1^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $xy=4,\ x+y=8$.

В а р и а н т 12

1. Найти неопределенные интегралы

1) $\int \left(\frac{5}{\sqrt{x}}+\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}-6x^2\right)dx$. 2) $\int \frac{(2-4x)dx}{\sqrt{13-6x-x^2}}$. 3) $\int \sin x\,5^{\cos x}\,dx$.

4) $\int \frac{x}{5}\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$. 5) $\int \frac{(x-4)dx}{x^3-9x}$. 6) $\int \sin^2 3x\,dx$.

7) $\int \frac{x^2dx}{x^3-2x^2+3x-6}$. 8) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$.

2. Вычислить определенные интегралы

1) $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$. 2) $\int_1^2 (2x-1)e^{(x^2-x+1)}dx$.

3. Вычислить несобственные интегралы

$$1)\ \int_1^{\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)\operatorname{arctg}x}. \qquad 2)\ \int_0^1\frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}.$$

4. Вычислить объем тела образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=x^3$, $y=1$, $x=0$, вокруг оси ОХ.

Вариант 13

1. Найти определенные интегралы

$$1)\ \int\left(\frac{11}{6}\sqrt[6]{x^5}-\frac{\sqrt[3]{x}}{x}+5\right)dx. \quad 2)\ \int\frac{(1-2x)dx}{\sqrt{8x-x^2-12}}. \quad 3)\ \int\frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}.$$

$$4)\ \int\cos^5 2x\sin 2x\,dx. \quad 5)\ \int 4\operatorname{arcctg}4x\,dx. \quad 6)\ \int\frac{(x+5)dx}{x^3-16x}.$$

$$7)\ \int\frac{dx}{x^3+2x^2+2x+4}. \quad 8)\ \int\left(\operatorname{tg}^2x+\operatorname{tg}^4x\right)dx.$$

2. Вычислить определенные интегралы

$$1)\ \int_2^3\frac{dx}{2x^2+3x-2}. \qquad 2)\ \int_0^{\pi/4}(x+1)\sin 2x\,dx.$$

3. Вычислить несобственные интегралы

$$1)\ \int_{-\infty}^0\frac{e^{3x}dx}{e^{3x}+1}. \qquad 2)\ \int_{-1}^1\frac{\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=-x^2$, $x+y+2=0$.

Вариант 14

1. Найти неопределенные интегралы

$$1)\ \int\left(3x^2-7x\sqrt[3]{x}-\frac{5}{x}\right)dx. \quad 2)\ \int\frac{x\,dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}. \quad 3)\ \int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-16}}.$$

$$4)\ \int\frac{(x+2)dx}{x^3-x^2-x+1}. \quad 5)\ \int\cos 5x\,e^{5x}\,dx. \quad 6)\ \int 4x\arcsin 3x\,dx.$$

7) $\int \frac{x\,dx}{x^3+x^2+4x+4}$.   8) $\int \cos x \sin 3x\,dx$.

2. Вычислить определенные интегралы

1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$.   2) $\int\limits_1^e \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

3. Вычислить несобственные интегралы

1) $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1}dx$.   2) $\int\limits_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}dx$.

4. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=x^3, y=1, x=0$, вокруг оси OX.

В а р и а н т 15

1. Найти неопределенные интегралы

1) $\int\left(14\sqrt[5]{x^2}-\frac{16}{\sqrt{3x}}+\frac{1}{2x}\right)dx$. 2) $\int \frac{(7-4x)dx}{\sqrt{20+8x-x^2}}$.   3) $\int \frac{x^2dx}{\left(x^3+2\right)^2}$.

4) $\int\left(4x^2-3\right)\cos 5x\,dx$.   5) $\int \frac{x\,dx}{x^3-x^2-x-1}$.   6) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}dx}{x^4}$.

7) $\int \frac{\left(x^2+1\right)dx}{x^3-x^2+4x-4}$.   8) $\int \cos 2x \cos 3x\,dx$.

2. Вычислить определенные интегралы

1) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x+x^2}$.   2) $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

3. Вычислить несобственные интегралы

1) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$.   2) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\ln x$, $y=2\ln x$, $x=e$.

Вариант 16

1. Найти неопределенные интегралы

1) $\int\left(\frac{4}{x}-\frac{4}{\sqrt[5]{x}}+5x\sqrt{x}\right)dx$. 2) $\int\frac{(3-2x)dx}{\sqrt{21+4x-x^2}}$. 3) $\int\frac{x^5dx}{\sqrt{x^6+5}}$.

4) $\int(1-x^2)\sin 2x\ dx$. 5) $\int\frac{x\ dx}{2x^3+3x^2-1}$. 6) $\int\frac{\sqrt{25-x^2}}{x^2}dx$.

7) $\int\frac{(x+1)dx}{x^3+4x+5x}$. 8) $\int\sin 2x\ \sin 5x\ dx$.

2. Вычислить определенные интегралы

1) $\int\limits_1^2 e^x dx$. 2) $\int\limits_0^{\pi/2}\sin^3 x\cos x\, dx$.

3. Вычислить несобственные интегралы

1) $\int\limits_1^{\infty}\frac{x^2dx}{1+x^6}$. 2) $\int\limits_0^1\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

4. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $x^2-y^2=4$, $y=2$, $y=0$, вокруг оси OX.

Вариант 17

1. Найти неопределенные интегралы

1) $\int\frac{4\left(\sqrt[3]{x}+4\right)^2}{\sqrt[3]{x}}dx$. 2) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-24}}$. 3) $\int\frac{3\sqrt{\ln x}}{x}dx$.

4) $\int(4x^2+3x)\cos\frac{x}{2}dx$. 5) $\int\frac{x\,dx}{x^3-7x+6}$. 6) $\int\frac{x^2-2x+3}{x^3+2x}dx$.

7) $\int\frac{dx}{\cos\ 2x}$. 8) $\int\frac{dx}{\sqrt{(36+x^2)^3}}$.

2. Вычислить определенные интегралы

$$1)\ \int_0^2 \left(3x^2-1\right)dx. \qquad 2)\ \int_0^1 \frac{\sqrt{\operatorname{arctg}\ x}}{1+x^2}dx.$$

3. Вычислить несобственные интегралы

$$1)\ \int_1^\infty \frac{dx}{x+4x^2}. \qquad 2)\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=e^x$, $y=e^{2x}$, $x=\ln 3$.

Вариант 18

1. Найти неопределенные интегралы

$$1)\ \int\left(\sqrt[3]{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2 dx. \qquad 2)\ \int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+10x+16}}. \qquad 3)\ \int\frac{e^{5x}dx}{5+e^{5x}}.$$

$$4)\ \int\left(2x-8x^2\cos 2x\,dx\right). \quad 5)\ \int\frac{(x-1)^2 dx}{x^3-x^2-2x}. \qquad 6)\ \int\frac{\sin^3 x}{\cos x}dx.$$

$$7)\ \int\frac{\sqrt{\left(x^2+x-1\right)}}{x^3+3x}dx. \qquad 8)\ \int\frac{\sqrt{\left(9-x^2\right)^3}}{x^6}dx.$$

2. Вычислить определенные интегралы

$$1)\ \int_e^{e^2}\frac{dx}{x\ln^2 x}. \qquad 2)\ \int_0^1\frac{\cos(\arcsin\ x)}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

3. Вычислить несобственные интегралы

$$1)\ \int_1^\infty\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}. \qquad 2)\ \int_0^3\frac{dx}{(x-2)^2}.$$

4. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями, $y=\dfrac{4}{x}$, $x=1, x=4$, $y=0$ вокруг оси OX.

В а р и а н т 19

1. Найти неопределенные интегралы

1) $\int 35\left(2\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3 dx$. 2) $\int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{x^2-8x+13}}$. 3) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

4) $\int \frac{7+\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$. 5) $\int (x+4)e^{x/2}dx$. 6) $\int \frac{(x+5)dx}{2x^3+x^2}$.

7) $\int \frac{x^2+2x-1}{x^4+4x}dx$. 8) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$.

2. Вычислить определенные интегралы

1) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{x\,dx}{\cos^2 x^2}$. 2) $\int\limits_0^1 \arcsin x\,dx$.

3. Вычислить несобственные интегралы

1) $\int\limits_1^{\infty} \frac{\ln x}{x}dx$. 2) $\int\limits_{-2}^{2} \frac{x\,dx}{x^2-1}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=e^x$, $y=1-x$, $x=1$.

В а р и а н т 20

1. Найти неопределенные интегралы

1) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}}+5\right)^3 dx$. 2) $\int \frac{(2x+7)dx}{\sqrt{x^2+10x+9}}$. 3) $\int \frac{3\sqrt{\operatorname{tg}x}-5}{\cos^2 x}dx$.

4) $\int (5-2x)e^{4x}dx$. 5) $\int \frac{dx}{x^3-x^2-20x}$. 6) $\int \frac{(x^2-x-1)dx}{x^3+5x}$.

7) $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$. 8) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-4)^3}}$.

2. Вычислить определенные интегралы

$$1)\ \int_4^9 \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}-1}. \qquad 2)\ \int_2^{\sqrt[4]{e}} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$$

3. Вычислить несобственные интегралы

$$1)\ \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)^2}. \qquad 2)\ \int_0^1 x^3 \ln x\,dx.$$

4. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{4}{x}$, $x=1$, $x=4$, $y=0$, вокруг оси OX.

Вариант 21

1. Найти неопределенные интегралы

$$1)\ \int\left(3x-\frac{2}{x}\right)^2 dx. \qquad 2)\ \int\frac{(3x+4)dx}{\sqrt{x^2-2x+14}}. \qquad 3)\ \int\frac{\sin 4x\,dx}{2-\cos 4x}.$$

$$4)\ \int(x^2-1)e^{\pi/3}dx. \qquad 5)\ \int\frac{dx}{x^3-x^2-6x}. \qquad 6)\ \int\frac{(x^2-2)dx}{x^3-x^2-6x}.$$

$$7)\ \int\sin^2 x\cos^2 x\,dx. \qquad 8)\ x^2\sqrt{4-x^2}\,dx.$$

2. Вычислить определенные интегралы

$$1)\ \int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x}. \qquad 2)\ \int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{tg}\,x\,dx}{\cos^2 x}.$$

3.Вычислить несобственные интегралы

$$1)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}. \qquad 2)\ \int_0^1 x^2 \ln x\,dx.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=(x+1)^2$, $y=0$, $x=0$.

В а р и а н т 22

1. Найти неопределенные интегралы

1) $\int 7\left(x^3-\frac{1}{x^4}\right)^2 dx$. 2) $\int \frac{(5-2x)dx}{\sqrt{x^2+8x+17}}$. 3) $\int \frac{8\cos 2x\ dx}{\sqrt{8+4\sin 2x}}$.

4) $\int (2x^2+x)e^x dx$. 5) $\int \frac{dx}{x^3-x^2-2x}$. 6) $\int \frac{(x^2-2)dx}{x^3-x^2+2x-2}$.

7) $\int \sin^3 x\cos^2 x\, dx$. 8) $\int \frac{e^{2x}\,dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$.

2. Вычислить определенные интегралы

1) $\int_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$. 2) $\int_0^{\pi/4} \frac{\sqrt{tgx}\,dx}{\sin^2 x}$.

3. Вычислить несобственные интегралы

1) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(4+x)^3}$. 2) $\int_{1/2}^{1} \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

4. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{1}{1+x^2}$, $x=1$, $x=-1$, $y=0$, вокруг оси OX.

В а р и а н т 23

1. Найти неопределенные интегралы

1) $\int \frac{3(x-1)^2}{x\sqrt{x}}dx$. 2) $\int \frac{dx}{x^3-2x^2-x+2}$. 3) $\int \frac{3dx}{x\sqrt[4]{\ln x-4}}$.

4) $\int (1-x)^2\, e^{x/2}\, dx$. 5) $\int \frac{(x^2+4)dx}{x^3-2x^2+2x-4}$. 6) $\int \frac{(8-5x)dx}{\sqrt{x^2-14x+9}}$.

7) $\cos^3 x\,dx$. 8) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}dx$.

2. Вычислить определенные интегралы

$$1)\ \int_1^2 \frac{dx}{x+x^3}. \qquad 2)\ \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\cos x\ dx}{4+\sin^2 x}.$$

3. Вычислить несобственные интегралы

$$1)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}. \qquad 2)\ \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2,\ \ x + y = 2$.

Вариант 24

1. Найти неопределенные интегралы

$$1)\ \int \frac{9(2x^2+5)^2}{2\sqrt{x}}. \qquad 2)\ \int \frac{xdx}{\sqrt{16x^2-8x+2}}. \qquad 3)\ \int \frac{e^x dx}{e^x\sqrt{1+e^x}}.$$

$$4)\int \frac{15(\arcsin\ 5x+2)^2}{\sqrt{1-25x^2}}dx. \quad 5)\ \int \frac{dx}{x^3-2x^2-3x}. \qquad 6)\ \int tg^4 x\, dx.$$

$$7)\ \int (3x^2-2x+1)\sin\frac{x}{4}dx. \qquad 8)\ \int \frac{(x-1)dx}{x^3+2x^2+x+2}.$$

2.Вычислить определенные интегралы

$$1)\ \int_0^{1/2} \frac{x^3dx}{x^2-3x+2}. \quad 2)\ \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x\, dx}{5-2\cos x}.$$

3. Вычислить несобственные интегралы

$$1)\ \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}. \qquad 2)\ \int_0^{\pi/2} ctg\ x\ \ dx.$$

4. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = \dfrac{1}{1+x}$, $x = 1,\ x = -1,\ y = 0$, вокруг оси OX.

Вариант 25

1. Найти неопределенные интегралы

1) $\int \frac{\sqrt[3]{x^7} - x\sqrt[3]{x} + 2x^2}{x^2\sqrt[3]{x}}$.   2) $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.   3) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^8+4}}$.

4) $\int (4x - 9x^2)\sin 2x\, dx$.   5) $\int \sin^5 x\, dx$.   6) $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1+2x}}$.

7) $\int \frac{x\, dx}{2x^3 - 9x^2 - 17x - 6}$.   8 $\int \frac{(x-4)\, dx}{x^3 - x^2 + 3x - 3}$.

2. Вычислить определенные интегралы

1) $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$.   2) $\int\limits_1^e \frac{(\ln x - 1)^2}{x}dx$.

3. Вычислить несобственные интегралы

1) $\int\limits_0^\infty \frac{x\, dx}{(1+x)^3}$.   2) $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x + 1$, $y = \cos x$, $y = 0$.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Обыкновенным дифференциальным уравнением (ДУ) называется уравнение вида $F(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n)}) = 0$, где F – известная функция, x – независимая переменная, $y = y(x)$ - неизвестная функция.

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной, входящей в данное уравнение.

Решением ДУ называется функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Решить уравнение – значит найти все его решения.

Если искомая неизвестная функция зависит от одной переменной, то ДУ называют **обыкновенным**; в противном случае – ДУ **в частных производных**. Далее будем рассматривать только обыкновенные ДУ.

Процесс отыскания решения ДУ называется **интегрированием,** а график решения ДУ – **интегральной кривой.**

Дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнение вида $F(x,y,y')=0$ называется ДУ первого порядка. Левая часть этого уравнения содержит независимую переменную x, неизвестную функцию $y(x)$, ее производную $y'(x)$. Если это уравнение решить относительно y', то получим **нормальную форму** ДУ первого порядка: $y'=f(x, y)$. Интегрируем его и находим решения.

Пример. Условие, что при $x=x_0$ функция y должна быть равна заданному числу y_0, т. е. $y=y_0$, называется **начальным условием**. Начальное условие записывается в виде $y(x_0)=y_0$ или $y\Big|_{x=x_0}=y_0$.

ДУ 1-го порядка вместе с начальными условиями называется начальной задачей или задачей Коши: $\begin{cases} y'=f(x, y) \\ y\Big|_{x=x_0}=y_0 \end{cases}$.

Общим решением ДУ первого порядка называется функция $y=f(x,c)$, содержащая одну произвольную постоянную и удовлетворяющую условиям

1. Функция $f(x, c)$ является решением ДУ при каждом фиксированном значении c.
2. Каково бы ни было начальное условие, можно найти такое значение постоянной $c=c_0$, что функция $y=f(x,C_0)$будет удовлетворять данному начальному условию.

Частным решением ДУ первого порядка называется любая функция $y=f(x, c_0)$, полученная из общего решения $y=f(x,c)$ при конкретном значении постоянной $c=c_0$.

Уравнения, интегрируемые в квадратурах

Рассмотрим ДУ $y'=\frac{\sin x}{x}$. Его решением является функция $y=\int\frac{\sin x}{x}dx+C$. Но этот интеграл относится к разряду «неберущихся», т.е. у функции $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ нет первообразной в классе элементарных функций. Иначе говоря, первообразная существует и даже задается табличным образом, т.е. ее значение можно вычислить приближенно. Но ведь и для функции $y=\sin x$ точные значения можно вычислить только в некоторых точках $(0,\ \pi/6,\ \pi)$. Но если считают, что функция $f(x)=\sin x$ является решением ДУ $y'=\cos x$, то разумно предположить, что и функция $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ является решением ДУ $y'=\frac{\sin x}{x}$. Ведь для уравнения $x^2-2=0$ решениями являются числа $x = \pm\sqrt{2} = \pm 1{,}414\ 213\ 56\ldots$, т. е. точное решение тоже выписать невозможно.

Исходя из этих соображений было введено следующее определение.

Определение. ДУ называется интегрируемым в квадратурах, если его решение может быть представлено в виде конечного числа интегралов от известных функций.

Далеко не все ДУ даже 1-го порядка интегрируемы в квадратурах. Еще сложнее обстоит дело с ДУ высших порядков. Ниже будут рассмотрены пять типов ДУ 1-го порядка, интегрируемых в квадратурах, и некоторые ДУ высших порядков, которые сводятся к ДУ 1-го порядка.

С геометрической точки зрения $y = f(x,\ c)$ есть семейство интегральных кривых на плоскости ХОУ; частное решение $y = f(x,\ c_0)$ - одна кривая из этого семейства, проходящая через точку $(x_0,\ y_0)$.

Задача отыскания решения ДУ 1-го порядка, удовлетворяющего заданному начальному условию, называется **задачей Коши**.

Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение первого порядка $P(x)\,dx + Q(y)\,dy = 0$ называется уравнением с разделяющимися переменными. В нем одно слагаемое зависит только от x, а другое – только от y. Дифференциальные уравнения вида $P(x)_1 \cdot Q_1(y)dx + P(x) \cdot Q_2(y)dy = 0$ приводятся к ДУ с разделяющимися переменными.

Пример 1. Решить уравнение $x\ dx - y\ dy = 0$.

Это уравнение с разделяющимися переменными. Проинтегрируем его почленно: $\int x\ dx - \int y\ dy = c_1$ или $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = c_1$. Обозначим $2c_1 = c$, тогда $x^2 - y^2 = c$ - общий интеграл дифференциального уравнения. Выразим y: $y = \pm\sqrt{x^2 - c}$, получим общее решение ДУ.

Пример 2. Решить уравнение: $(y + xy)\,dx + (x - xy)\,dy = 0$.

Это ДУ, приводящееся к уравнению с разделяющимися переменными. Преобразуем левую часть уравнения: $y(1 + x)\,dx + x(1 - y)\,dy = 0$, разделив обе части уравнения на $xy \neq 0$: $\frac{1+x}{x}dx + \frac{1-y}{y}dy = 0$. Проинтегрируем почленно: $\int \frac{1+x}{x}dx + \int \frac{1-y}{y}dy = c$, получим $\ln|x| + x + \ln y - y = c$. Решением данного ДУ является общий интеграл $\ln|xy| + x - y = c$. Это уравнение имеет решения $x = 0,\ y = 0$, которые не входят в общий интеграл. Они являются **особыми решениями ДУ**.

Однородные уравнения

Уравнение вида $y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ называется однородным. Однородные уравнения преобразуются к уравнениям с разделяющимися переменными при помощи подстановки $y/x=u$ или $y=xu$, тогда $y'=u+xu'$.

Пример 1. Решить уравнение $\left(x^2-y^2\right)dx+2xy\cdot dy=0$.
Данное уравнение однородное, т. к. все одночлены входят в уравнение во второй степени. Разделим почленно все члены уравнения на x^2, получим

$$\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)dx+2\left(\frac{y}{x}\right)dy=0,\ \left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)+2\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx}=0,\ \left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)+2\left(\frac{y}{x}\right)y'=0.$$

Произведем замену переменной: $y/x=u,\ y=u\cdot x,\ y'=u'x+u$,
$\left(1-u^2\right)+2u\left(u'x+u\right)=0,\ 1+u^2+2uu'x=0$. Это уравнение с разделяющимися переменными: $\frac{dx}{x}+\frac{2u\,du}{1+u^2}=0$. Интегрируем $\int\frac{dx}{x}+\int\frac{2u\,du}{1+u^2}=c$,

$\ln|x|+\ln\left|1+u^2\right|=c,\ \ln|x|\left(1+u^2\right)=c,\quad e^c=|x|\left(1+u^2\right)$. Обозначим $e^c=c_1$ и, заменяя u на y/x, получим общий интеграл уравнения $x^2+y^2=c_1x$.

Пример 2. Решить уравнение $(x+y-2)dx-(x-y+4)dy=0$. Данное уравнение приводится к однородному. Приведем его к виду $y'=\frac{x+y-2}{x-y+4}$. Пусть $x=u+a$, $y=v+b$, тогда $dx=du,\ dy=dv$. Подставим в уравнение и получим

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dv}=\frac{u+a+v+b-2}{u+a-v-b+4}=\frac{u+v+(a+b-2)}{u-v+(a-b+4)}.$$

Подберем a и b так, чтобы выполнялось $\begin{cases}a+b-2=0,\\ a-b+4.\end{cases}$

Решая систему, получим $a=3,\ b=-1$. Заданное уравнение примет вид $\frac{dv}{du}=\frac{u+v}{u-v}$, где $u=x-3,\ v=y+1$. Оно однородное. Введем замену $v=t\cdot u,\ v'=t'u+t$, подставим в уравнение и получим

$$t'u+t=\frac{u+tu}{u-tu},\qquad t'u=\frac{1+t}{1-t}-t,\qquad t'u=\frac{1+t^2}{1-t},$$

$$\frac{(1-t)dt}{1+t^2}=\int\frac{du}{u},\qquad \int\frac{dt}{1+t^2}-\int\frac{tdt}{1+t^2}=\int\frac{du}{u},\qquad \operatorname{arctg}t-\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)=\ln|u|+\ln c,$$

$$\operatorname{arctg}t=\ln c\left|u\sqrt{1+t^2}\right|,\qquad \operatorname{arctg}\frac{y+1}{x-3}=\ln c\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}.$$

Линейные уравнения

Дифференциальное уравнение называется **линейным,** если его можно записать в виде $y'+p(x)y=g(x)$, где $p(x)$ и $g(x)$ - заданные функции, в том числе и постоянные. Особенность ДУ: искомая функция и ее производная входят в уравнение в первой степени в виде слагаемых. Рассмотрим решение линейных ДУ первой порядка – метод Бернулли.

Метод Бернулли заключается в том, что ДУ решается с помощью подстановки $y=u\cdot v$, где $u=u(x)$, $y'=u'v+uv'$.

Пример. Решить уравнение $y'+2xy=2x$.
Полагаем $y=u\cdot v$, $y'=u'v+uv'$. Тогда $u'v+uv'+2xy\cdot uv=2x$. Перегруппируем слагаемые $u'v+(uv'+2xuv)=2x$, $u'v+u(v'+2xv)=2x$. Приравняем к нулю выражение, стоящее в скобках, и решим уравнение $v'+2xv=0$. Оно с разделяющимися переменными: $\dfrac{dv}{v}=-2x\,dx$, $v=e^{-x^2}$.
Теперь решим уравнение $u'v+u\cdot 0=2x$, $u'e^{-x^2}=2x$,

$$\frac{du}{dx}=2x\cdot e^{x^2},\ du=\int 2x\cdot e^{x^2}dx,\quad u=e^{x^2}+C.$$

Общее решение данного уравнения: $y=uv=\left(e^{x^2}+c\right)\cdot e^{-x^2}=1+c\cdot e^{-x^2}$.

Уравнение Бернулли

Уравнение вида $y'+P(x)y=G(x)y^n$, $n\in R$, $n\neq 0$, $n\neq 1$ называется уравнением Бернулли. Это уравнение можно решать как линейное, используя замену $y=uv$, а также можно свести его к линейному следующим образом: разделим обе части уравнения на $y^n\neq 0$. Получим $\dfrac{y'}{y^n}+\dfrac{P(x)}{y^{n-1}}=G(x)$. Обозначим $\dfrac{1}{y^{n-1}}=t$,

тогда $y^{1-n}=t$; $(1-n)y^{-n}y'=t'$, $\dfrac{(1-n)y'}{y^n}=t'$; $\dfrac{y'}{y^n}=\dfrac{dt}{(1-n)dx}$.

Данное уравнение примет вид $\dfrac{1}{1-n}t'+P(x)t=G(x)$. Последнее уравнение линейное относительно t. Решение его известно.

Уравнение в полных дифференциалах

Уравнение вида $P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$ называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ есть полный дифференциал некоторой функции $f(x, y)$, т.е. $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=df(x, y)$, и его решение имеет вид $f(x, y)=C$.

Для того чтобы выражение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ было полным дифференциалом функции двух переменных $f(x, y)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, причем $P(x, y), Q(x, y)$ и их частные производные - непрерывные функции своих аргументов в некоторой области Д.

Пример. $(3y^2-x)dx+(2y^3+6xy)dy=0$.

Покажем, что данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Учитывая, что $\frac{df}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$ и полагая, что $P(x, y)=\frac{\partial f}{\partial x}$, $Q(x, y)=\frac{\partial f}{\partial y}$, получим $P(x, y)=3y^2-x$, $Q(x, y)=2y^3+6xy$.

$\frac{\partial P}{\partial y}=6y$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=6y$, т. е. левая часть данного уравнения есть полный дифференциал некоторой функции $f(x,y)$. Тогда $\frac{\partial f}{\partial x}=3y^2-x$, $\frac{\partial f}{\partial y}=2y^3+6xy$. Интегрируя первое равенство по x при условия, что y фиксировано, получим $f(x,y)=\int(3y^2-x)dx=3y^2x-\frac{x^2}{2}+\varphi(y)$, т.е. $f(x, y)=3y^2x-\frac{x^2}{2}+\varphi(y)$.

Продифференцируем последнее равенство по y при условии, что x фиксировано: $\frac{\partial f}{\partial x}=6yx+\varphi'(y)$ с другой стороны, $\frac{\partial f}{\partial y}=2y^3+6xy$.

Приравнивая правые части, получим $6yx+\varphi'(y)=2y^3+6xy$, $\varphi'(y)=2y^3$.

Интегрируем при условии, что y – переменная, а x – фиксированная величина.

$$\varphi(y)=\int 2y^3dy=\frac{y^4}{2}+C, \text{ т. е. } f(x, y)=3y^2x-\frac{x^2}{2}+\frac{y^4}{2}+C.$$

Общим интегралом данного уравнения является $3xy^2-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^4+C_1=C_2$.

Обозначим $C_2-C_1=C$, тогда $3xy^2-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^4=C$.

Дифференциальные уравнения высших порядков

Дифференциальные уравнения выше первого порядка называются ДУ высших порядков. В общем виде его можно записать как $F(x, y, y', ..., y^n)=0$. Будем рассматривать ДУ второго порядка, т. е. $F(x, y, y', y'')=0$.

Решением ДУ называется всякая функция $y=\varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Общим решением ДУ называется функция $y=\varphi(x;\ C_1;\ C_2)$, где C_1 и C_2 не зависящие от x произвольные постоянные, удовлетворяющие условиям:

1. $\varphi(x;\ C_1;\ C_2)$ является решением ДУ для каждых фиксированных значений C_1 и C_2.

2. Каковы бы ни были начальные условия $\left.y\right|_{x=x_0}=y_0;\ \left.y'\right|_{x=x_0}=y_1$, существуют единственные значения постоянных C_1 и C_2, такие, что функция φ является решением ДУ и удовлетворяет начальным условиям.

Всякое решение, получаемое из общего решения ДУ при конкретных C_1 и C_2, называется **частным** решением ДУ.

Задача нахождения решения ДУ, удовлетворяющего заданным начальным условиям, называется **задачей Коши**.

Уравнения, допускающие понижение порядка

В некоторых случаях, если в ДУ чего-то «не хватает», его порядок можно понизить. Если при этом получится ДУ, интегрируемое в квадратурах, то найти решение ДУ 2-го порядка можно.

Рассмотрим три типа уравнений, допускающих понижение порядка.

1. Уравнение вида $y''=f(x)$ решается непосредственным двукратным интегрированием обеих частей уравнения:

$$y'=\int f(x)dx=\varphi(x)+C,\ \text{т. е. }\ y'=\varphi(x)+C,$$

$$y=\int(\varphi(x)+C_1)dx=\varphi_1(x)+C_1x+C_2,\quad y=\varphi_1(x)+C_1(x)+C_2.$$

Пример. Найти частное решение ДУ $y''=\cos 3x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=1,\ y'(0)=1$. Последовательно интегрируя два раза данное уравнение, получим $y'=\int\cos 3x\,dx$; $y'=\dfrac{\sin 3x}{3}+C_1$;

$$y=\int\left(\frac{1}{3}\sin 3x+C_1\right)dx=-\frac{1}{9}\cos 3x+C_1x+C_2,\quad y=C_2+C_1x-\frac{1}{9}\cos 3x.$$

Используем начальные условия:

$$\begin{cases} y=C_2+C_1x-\dfrac{\cos 3x}{9} \\ y'=1/3\cdot\sin\ 3x+C_1 \end{cases},\qquad \begin{cases} 1=C_2+C_1\cdot 0-\dfrac{\cos 0}{9} \\ 1=1/3\cdot\sin 0+C_1 \end{cases}.$$

Из второго уравнения получим $C_1 = 1$. Из первого уравнения $1 = C_2 - 1/9;\ C_2 = 10/9$. Следовательно, искомое частное решение имеет вид $y = 10/9 + x - (\cos 3x)/9$.

2. Уравнение вида $y'' = f(x, y')$ **не содержит явно искомой функции y**. Решается заменой неизвестной функции. Пусть $y' = z$, где $z = z(x)$ - новая неизвестная функция. Тогда $y'' = z' = \dfrac{dz}{dx}$.

Пример. $y'' - \dfrac{y'}{x} = 0,\ \ y' = z(x),\ y'' = z'(x) = \dfrac{dz}{dx}$.

$$\frac{dP}{dx} = \frac{z}{x};\quad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x};\quad \int\frac{dz}{z} = \int\frac{dx}{x};\ \ \ln|z| = \ln|x| + \ln|C_1|.$$

$$\ln|z| = \ln|x \cdot C_1|;\quad z = xC_1,\ \text{но}\ z = y'.$$

Тогда $y' = C_1 x$. $\qquad y = \int C_1\ x\,dx = C_1\dfrac{x^2}{2} + C_2$.

$y = 1/2\,C_1 x^2 + C_2$ - общее решение данного ДУ.

3. Уравнение вида $y'' = f(y, y')$ **не содержит независимой переменной x**. Решается введением новой функции, зависящей от y, т.е. $y' = \dfrac{dy}{dx} = P$, где $P = P(y)$. Тогда дифференцируя, получим $y'' = P'_y \cdot y'_x = \dfrac{dP}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dP}{dy}\cdot P = P\cdot\dfrac{dP}{dy}$.

Пример 1. Найти решение уравнения $y''y^3 + 1 = 0$, удовлетворяющее условиям $y(1) = -1;\ y'(1) = -1$. Введем замену $y' = P(y)$, $\ y'' = P'y' = P'\cdot P$.

Подставим в уравнение: $P\cdot P'y^3 + 1 = 0;\ y^3 P\cdot\dfrac{dP}{dy} = -1$.

Разделим переменные. $PdP = -\dfrac{dy}{y^3};\ \dfrac{P^2}{2} = \dfrac{1}{2y^2} + \dfrac{C_1}{2}$, тогда $P^2 = \dfrac{1}{y^2} + C_1;\ y'^2 = \dfrac{1}{y^2} + C_1$

Найдем C_1. $(-1)^2 = \dfrac{1}{\left(-1^2\right)} + C_1;\ \ 1 = 1 + C_1;\ C_1 = 0,$

т. е. $y'^2 = \dfrac{1}{y^2}$, или $y' = \sqrt{\dfrac{1}{y^2}} = \dfrac{1}{y}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y};\ y\,dy = dx;\ \int y\,dy = \int dx,\ \frac{y^2}{2} = x + \frac{C_2}{2};$$

$y^2 = 2x + C_2$. Найдем C_2 используя начальное условие: $(-1)^2 = 2\cdot 1 + C_2$, $\ C_2 = -1$.
$y^2 = 2x - 1$- решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям.

Пример 2. $y''(1+y)=y'^2+y'$.

Введем замену $y'=P(y)$, $y''=P'\,y'=P'\cdot P$. Тогда уравнение запишется в виде $P'\cdot P(1+y)=P^2+P$ или $P'(1+y)=1+P$. Разделим переменные:

$$\frac{dP}{1+P}=\frac{dy}{1+y};\quad \int\frac{dP}{1+P}=\int\frac{dy}{1+y};\quad \ln|1+P|=\ln|1+y|+\ln C_1;\ 1+P=C_1(1+y)$$

или $y'=C_1(1+y)-1$; $\frac{dy}{dx}=C_1(1+y)-1$; $\frac{dy}{C_1(1+y)-1}=dx$; $\int\frac{dy}{C_1(1+y)-1}=\int dx$;

$$\frac{1}{C_1}\cdot\ln|C_1(1+y)-1|=x+C_2;\qquad \ln|C_1(1+y)-1|=C_1(x+C_2).$$

Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

Уравнение вида $\alpha_0(x)y^{(n)}+\alpha_1(x)y^{(n-1)}+...+\alpha_n(x)y=f(x)$, где $\alpha_0\neq 0$; $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, ..., $\alpha_n(x)$, $g(x)$- заданные функции аргумента x, непрерывные на некотором интервале $(a,\ b)$, называется **линейным ДУ n-го порядка**.

$\alpha_0(x),\alpha_1(x),...,\alpha_n(x)$ - называются коэффициентами, $g(x)$ - свободным членом.

Если свободный член $g(x)=0$, то уравнение $\alpha_0(x)y^{(n)}+\alpha_1(x)y^{(n-1)}+...+\alpha_n(x)y=0$ - называется **однородным.**

Если $\alpha_0(x)=1$, то уравнение $y^{(n)}+\alpha_1(x)y^{(n-1)}+...+\alpha_n(x)y=g(x)$ называется **приведенным**.

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

Уравнение вида $y''+\alpha_1(x)y'+\alpha_2(x)y=f(x)$ называется **линейным ДУ второго порядка**.

Уравнение $y''+\alpha_1(x)y'+\alpha_2(x)y=0$ называется **линейным однородным** ДУ второго порядка.

Общее решение однородного уравнения имеет вид $y_{o.o.}=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$, где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются частными решениями однородного уравнения, C_1 и C_2- произвольные постоянные.

Определитель $W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ называется **определителем Вронского.**

Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - два линейно независимых решения однородного ДУ на $(a,\ b)$, то определитель Вронского на этом интервале отличен от нуля. Такие решения линейного однородного ДУ образуют **фундаментальную систему решений** этого уравнения.

Пример. $x^2y''-4xy'+6y=0$ - линейное однородное ДУ второго порядка. Тогда его решение задается формулой $y=C_1y_1+C_2y_2$.

Будем искать частные решения в виде $y=x^n$.

$x^2(x^n)''-4x(x^n)'+6x^n=0$

$n(n-1)\cdot x^2\cdot x^{n-2} - 4x\cdot n\cdot x^{n-1}+6\cdot x^n=0$

$n(n-1)\cdot x^n - 4\cdot n\cdot x^n+6\cdot x^n=0$; разделим на $x^n\neq 0$.

Получим $n(n-1)-4n+6=0$; $n^2-5n+6=0$; $n_1=3, n_2=2$, т.е. $y_1=x^3$; $y_2=x^2$.

Проверим, образуют ли y_1 и y_2 фундаментальную систему решений.

$W(x)=\begin{vmatrix} x^3 & x^2 \\ 3x^2 & 2x \end{vmatrix}=2x^4-3x^4=-x^4\neq 0$. Следовательно y_1 и y_2 образуют фундаментальную систему решений и $y=C_1y_1+C_2y_2$, т.е. $y=C_2x^3+C_2x^2$. Рассмотренное уравнение можно записать в общем виде. Оно называется **уравнением Эйлера**. Частное решение ищется в виде $y=x^n$**.**

Нахождение фундаментальной системы решений уравнений с постоянными коэффициентами: $y''+\alpha y'+\alpha y=f(x)$

Можно доказать, что все решения линейного однородного ДУ задаются формулой $y=y_{о.о.}+V(x)$, где $y_{о.о.}$- общее решение соответствующего однородного уравнения, $V(x)$- какое-нибудь частное решение линейного неоднородного уравнения.

Для отыскания $y_{о.о.}$составим однородное уравнение $\alpha_0y''+\alpha_1y'+\alpha_2y=0$ и соответствующее ему характеристическое уравнение $\alpha_0\lambda^2+\alpha_1\lambda+\alpha_2=0$. Пусть λ_1 и λ_2- корни характеристического уравнения. Тогда возможны случаи:

1) $\lambda_1\neq\lambda_2$ - вещественные различные корни,

2) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_0$ - совпадающие вещественные корни,

3) - невещественные сопряженные корни $\lambda_{1.2}=\alpha\pm i\omega$, $\omega\neq 0$.

Тогда общее решение линейного однородного ДУ с постоянными коэффициентами можно записать соответственно в виде

1) $y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$,

2) $y=C_1e^{\lambda_0x}+C_2\cdot x\cdot e^{\lambda_0x}$,

3) $y=C_1e^{\alpha x}\cos\omega x+C_2\cdot e^{\alpha x}\sin\omega x$.

Указанное правило верно для линейных однородных ДУ любого порядка с постоянными коэффициентами.

Пример 1. $y''+3y'+2y=0$.

Составим характеристическое уравнение $\lambda^2+3\lambda+2=0$, где $\lambda_1=-2;\ \lambda_2=-1$ - два различных вещественных корня, тогда $y_{o.o}=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$.

Пример 2. $y''+4y'+4y=0$.

Составим характеристическое уравнение $\lambda^2+4\lambda+4=0,\ (\lambda+2)^2=0;\ \lambda_1=\lambda_2=-2$ - совпадающие корни, и $y_{o.o}=C_1e^{-2x}+C_2\cdot x\cdot e^{-2x}$.

Пример 3. $y''-2y'+10y=0$.

$$\lambda_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-40}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-36}}{2}=\frac{2\pm6\sqrt{-1}}{2}=1\pm3i.$$

Тогда $y_{o.o}=C_1e^x\cos 3x\ +\ C_2\cdot e^x\sin 3x$.

Понятие комплексного числа

Рассмотрим решение уравнений.

1. $x^2-4=0$. $x^2=4;\ x_{1,2}=\pm\sqrt{4};\ x_{1,2}=\pm2$.

$x_1=2,\ x_2=-2$ - два вещественных корня данного уравнения.

2. $x^2+4=0$. $x^2=-4;\ x_{1,2}=\pm\sqrt{-4};\ x_{1,2}=\pm2\sqrt{-1}$. Решить данное уравнение на множестве действительных чисел нельзя.

Обозначим $i=\sqrt{-1},\ i^2=-1$, тогда $x_{1,2}=\pm\sqrt{i^2}$, т.е. $x_1=2i;\ x_2=-2i$. Числа $2i$ и $-2i$ называются чисто мнимыми числами.

3. Решим уравнение $x^2-4x+13=0$: $Д=16-4\cdot13=16-52=-36$, тогда

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{-36}}{2}=\frac{4\pm6\sqrt{-1}}{2}=\frac{4\pm6\sqrt{i^2}}{2}=\frac{4\pm6i}{2}=2\pm3i.$$

Числа $2+3i$ и $2-3i$ называются комплексными сопряженными числами. В общем виде комплексное число можно записать как $x+iy$ или $\alpha+\beta i$.

Нахождение частных решений линейного неоднородного уравнения 2-го порядка методом вариаций (методом Лагранжа)

Рассмотрим уравнение $y''+py'+qy=f(x)$, где p, q - некоторые числа. Общее решение этого уравнения имеет вид $y=y_{o.o}+v$,где $y_{o.o.}$ - общее решение соответствующего однородного уравнения, а v – частное решение неоднородного уравуравнения.

Пусть найдено $y_{о.о.} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, где функции $y_1(x), y_2(x)$ образуют фундаментальную систему решений однородного уравнения. Лагранж предложил искать частное решение неоднородного уравнения $v(x)$ в виде

$$v(x) = z_1(x)\,y_1(x) + z_2(x)\,y_2(x),$$

где $z_1(x), z_2(x)$ - неизвестные функции, выбираемые таким образом, чтобы функция $v(x)$ являлась решением неоднородного уравнения, т. е. частное решение ищется в том же виде, что и общее $y_{о.о.}$, но произвольные постоянные C_1 и C_2 «варьируют», заменяя их на функции $z_1(x)$, $z_2(x)$. Для того чтобы таким образом введенная функция $v(x)$ являлась решением неоднородного уравнения, нужно, чтобы производные функций $z_1(x)$ и $z_2(x)$ удовлетворяли следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} z_1' y_1 + z_2' y_2 = 0, \\ z_1' y_1' + z_2' y_2' = f(x). \end{cases}$$

Определителем этой системы является вронскиан. Поэтому система имеет единственное решение $\{z_1'(x), z_2'(x)\}$. Интегрируя $z_1'(x), z_2'(x)$, находим $z_1(x), z_2(x)$, затем частное решение неоднородного уравнения $v(x)$ и общее решение неоднородного уравнения $y(x)$.

Этот метод пригоден и для нахождения частных решений линейных уравнений n-го порядка.

Решение ищется в виде $v(x) = z_1(x)\,y_1(x) + z_2(x)\,y_2(x) + \ldots + z_n(x)\,y_n(x)$, а функции z_1', z_2', ..., z_n' удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} z_1' y_1 + z_z' y_2 + \ldots + z_n' y_n = 0, \\ z_1' y_1' + z_2' y_2' + \ldots + z_n' y_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_1' y_1^{(n-1)} + z_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + z_n' y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

Метод Лагранжа универсален, т. е. годится для правых частей $f(x)$ произвольного вида. Но для нахождения функций $z_1(x)$, $z_2(x)$ требуется вычислять интегралы. Ниже будет рассмотрен метод, позволяющий обходиться без интегрирования, но пригодный лишь для функций $f(x)$ специального вида.

Пример. Найти общее решение неоднородного уравнения $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$.

Сначала находим общее решение однородного уравнения $y'' + 4y = 0$. Для этого составляем характеристическое уравнение $\lambda^2 + 4 = 0$ и находим его корни $\lambda_{1,2} = \pm 2i$. Тогда $y_1 = \cos 2x, y_2 = \sin 2x$ и $y_{о.о.} = c_1 \cos 2x + c_2 \cos 2x$. Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $v(x) = z_1(x)\cos 2x + z_2(x)\sin 2x$, где z_1' и z_2' удовлетворяют системе уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} z_1' \cos 2x + z_2' \sin 2x = 0, \\ -2z_1' \sin 2x + 2z_2' \cos 2x = \dfrac{1}{\cos 2x} \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} 2\sin 2x \\ + \\ \cos 2x \end{array}\right.$$

$$2z_2'\left(\sin^2 2x + \cos^2 2x\right) = 1.$$

Отсюда $z_2' = \frac{1}{2}$, $z_1' = -z_2' \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = -\frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{\cos 2x}$, $z_2 = \int \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}x$,

$$z_1 = -\frac{1}{2}\int \frac{\sin 2x}{\cos 2x} dx = \frac{1}{4}\int \frac{d(\cos 2x)}{\cos 2x} = \frac{1}{4}\ln|\cos 2x|.$$

При вычислении интегралов считаем произвольные постоянные равными нулю. Функция $v(x) = \frac{1}{4}\ln|\cos 2x|\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x$, а общее решение неоднородного уравнения имеет вид $y_{o.o.} = c_1\cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4}\ln|\cos 2x|\cos 2x + \frac{1}{2}x \cdot \sin 2x$.

Интегрирование линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

Рассмотрим уравнение $y'' + py' + qy = f(x)$, где p и q - некоторые числа. Общее решение этого уравнения имеет вид $y = y_{o.o.} + V$, где $y_{o.o.}$ - общее решение соответствующего однородного уравнения, а V - частное решение неоднородного уравнения.

Если функция f(x), стоящая в правой части уравнения, имеет так называемый «специальный вид»: $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$ или $f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x\right)$, то среди решений ДУ содержится функция такого же вида.

1. Пусть $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, где $P_n(x)$ - многочлен n-й степени, $\alpha \in R$. В этом случае частное решение $V(x)$ имеет вид $V(x) = X^r Q_n(x)e^{\alpha x}$, где r - число, равное кратности α, как корня характеристического уравнения $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ (число r показывает, сколько раз число α является корнем характеристического уравнения $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$). $Q_n(x) = A_0X^n + A_1X^{n-1} + \ldots + A_n$ - многочлен n-й степени, записанный с неопределенными коэффициентами A_0, A_1, ..., A_n.

1. Если α не является корнем характеристического уравнения, то

$$V(x) = Q_n(x)e^{\alpha x}.$$

2. Если α является корнем характеристического уравнения один раз, то

$$V(x) = X \cdot Q_n(x)e^{\alpha x}.$$

3. Если α является двукратным корнем характеристического уравнения, то $V(x)=X^2 \cdot Q_n(x)e^{\alpha x}$.

Пример 1. $y'' - 3y' + 2y = x^2 - 1$.

Общее решение имеет вид $y = y_{o.o} + V$.

1. Найдем $y_{o.o}$. Для этого составим однородное уравнение: $y'' - 3y' + 2y = 0$. Соответствующее ему характеристическое уравнение $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = 1$. Следовательно $y_{o.o} = C_1e^{2x} + C_2e^x$.

2. Найдем V – частное решение неоднородного уравнения. Правую часть ДУ $f(x) = x^2 - 1$ запишем в виде $f(x) = P_2(x)e^{0\cdot x} = A_0X^2 + A_1X + A$. Причем $\alpha = 0$, не является корнем характеристического уравнения. Частное решение $V(x)$ будем искать **методом неопределенных коэффициентов:**

$V(x) = X^0\left(A_0X^2 + A_1X + A_2\right)e^{0\cdot x} = AX^2 + BX + C$.

Подставим в данное уравнение $\left.\begin{array}{l} y = AX^2 + BX + C \\ y' = 2AX + B \\ y'' = 2A \end{array}\right)$ и получим

$$2A - 3(2AX + B) + 2\left(AX^2 + BX + C\right) = X^2 - 1.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях X и получим систему.

$$\begin{array}{l|l} X^2 & 2A = 1 \\ X^1 & -6A + 2B = 0 \\ X^0 & 2A - 3B + 2C = -1 \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}1\\1\\1\end{array}}\right) \begin{array}{l} A = 1/2, \\ B = 3A = 3/2, \\ C = 1/2(-1 - 2A + 3B) = 1/2(-1 - 1 + 9/2) = 5/4. \end{array}$$

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{5}{4} \quad \text{и} \quad y = C_1e^{2x} + C_2e^x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}.$$

Пример 2. α является однократным корнем характеристического уравнения. $y'' - 3y' + 2y = 5 + e^x$. Решение ДУ: $y = y_{o.o.} + V$.

1) Найдем $y_{0.0.}$. $y_{0.0.} = C_1y_1 + C_2y_2$.

$y'' - 3y' + 2y = 0$ - однородное уравнение.

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ - характеристическое уравнение.

$\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = 1$; $y_{o.o.} = C_1e^{2x} + C_2e^x$.

2) $f(x) = 5 + e^x = P_0(x) + e^{\alpha x} = 5 + e^{1\cdot x}$.

Число $\alpha = 1$ является корнем характеристического уравнения один раз, т.е. $r = 1$. Частное решение ДУ имеет вид

$$V(x) = A + X^1 \cdot B \cdot e^{1\cdot x} = A + XBe^x.$$

2. Пусть правая часть ДУ $f(x)$ имеет «специальный» вид: $f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right)$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ - многочлены степеней

n и m соответственно. В этом случае решение следует искать в виде $V(x)=X^r e^{\alpha x}\left(M_\ell(x)\cos\beta x+N_\ell(x)\sin\,\beta x\right)$, где число r – число, равное кратности числа $\alpha+\beta i$, как корня характеристического многочлена, $M_\ell(x)$ и $N_\ell(x)$- многочлены ℓ-ой степени с неопределенными коэффициентами и $\ell=\max(n,m)$. После подстановки функции $V(x)$ и ее производных $V'(x)$ и $V''(x)$ в уравнение приравнивают многочлены, стоящие при одноименных функциях в левой и правой частях ДУ.

Пример. $y''-2y'-3y=e^x\cos 2x$.

$$y=y_{o.o.}+V,\ \ y_{o.o}=C_1y_1+C_2y_2.$$

1. Решаем однородное ДУ.

$y''-2y'-3y=0,\ \ \lambda^2-2\lambda-3=0.$

$\lambda_1=3,\ \lambda_2=-1$, тогда $y_{o.o}=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}$.

2. Запишем правую часть в виде

$$f(x)=e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x+Q_n(x)\sin\beta x\right)=e^{1\cdot x}\left(1\cdot\cos 2x+0\cdot\sin 2x\right).$$

Составим число $\alpha+\beta i=1+2i;$ оно не является корнем характеристического уравнения. Следовательно $r=0$ и частное решение будем искать с виде

$$V(x)=X^0\cdot e^{1\cdot x}\left(A\cos 2x+B\sin 2x\right)=e^x\left(A\cos 2x+B\sin 2x\right).$$

$$V'=e^x\left(A\cos 2x+B\sin 2x\right)+e^x\left(-2A\sin 2x+2B\cos 2x\right)=$$

$$=e^x\left((A+2B)\cos 2x+(B-2A)\sin 2x\right).$$

$$V''=e^x\left((A+2B)\cos 2x+(B-2A)\sin 2x\right)+e^x\left((-2A-4B)\sin 2x+(2B-4A)\cos 2x\right).$$

Подставим полученные выражения в уравнение.

$$\text{Получим}\quad \begin{array}{r|l} -3 & V(x)=e^x\left(A\cos 2x+B\sin 2x\right),\\ -2 & V'(x)=e^x\left((A+2B)\cos 2x+(B-2A)\sin 2x\right),\\ 1 & V''(x)=e^x\left((4B-3A)\cos 2x+(-4A-3B)\sin 2x\right),\end{array}$$

$$V''(x)-2V'(x)-3V(x)=$$

$$=e^x\left((-3A-2A-4B+4B-3A)\cos 2x+(-3B-2B-2A+4A-4A-3B)\sin\ 2x\right)=$$

$$=e^x\left(-8A\cos 2x-8B\sin 2x\right)=e^x\cos 2x.$$

Следовательно,

$$-8Ae^x\cos 2x=e^x\cos 2x,\quad A=-\frac{1}{8}.$$

Таким образом, $V(x) = -\frac{1}{8}e^{x}\cos 2x$.

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{8}e^{x}\cos 2x .$$

З А Д А Ч И

Задачи 1-5. Определить тип уравнений: с разделяющимися переменными и приводящиеся к ним, однородные и приводящиеся к однородным, линейные уравнения, уравнения Бернулли, уравнения в полных дифференциалах. Найти общее решение или общий интеграл. Там, где указано, решить задачу Коши.

Задача 6. Уравнения, допускающие понижение порядка.

Задача 7. Однородные линейные ДУ.

Задача 8. Неоднородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами с правыми частями специального вида.

З а д а ч а 1

1. $xy\,dx + (x+1)\,dy = 0$.
2. $(x^2-1)y' + 2x\,y^2 = 0, \quad y(0) = 1$.
3. $\sqrt{y^2+1}\,dx = xy\,dy$.
4. $y'\operatorname{ctg}x + y = 2, \quad y(0) = -1$.
5. $2x^2 y\,y' + y^2 = 2$.
6. $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$, $y(2) = 0$.
7. $y' - x\,y^2 = 2x\,y$.
8. $xy' + y = y^2$, $y(1) = 0{,}5$.
9. $e^{-s}(1 + ds/dt) = 1$.
10. $(x+2y)y' = 1$, $y(0) = -1$.
11. $x\frac{dx}{dt} + t = 1$.
12. $(1+y^2)dx = x\,y\,dy$, $y(2) = 1$.
13. $y' = \cos(y-x)$.
14. $y' = 2\sqrt{y}\ln x$, $y(e) = 1$.
15. $y' = \frac{y-1}{x+1}$.
16. $(1+x^2)y' + y\sqrt{1+x^2} = xy$, $y(0) = 1$.
17. $(y^2 + xy^2)dx + (x^2 - y\,x^2)dy = 0$.
18. $x + xy + yy'(1+x) = 0$, $y(0) = 0$.
19. $\sin x\,\sin x\,dx + \cos x\cos y\,dy = 0$.
20. $x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}\,y' = 0$, $y(0) = 0$.
21. $(xy^2 + x)dx + (y - x^2 y)dy = 0$.
22. $xyy' = 1 - x^2$, $y(1) = 0$.
23. $y'\operatorname{tg}x - y = a$.
24. $\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$, $y(0) = 1$.
25. $xy' = \frac{y}{\ln x}$.

З а д а ч а 2

1. $xy' - 2y = 2x^4,\ y(0) = 0$.
2. $(2x+1)y' = 4x + 2y$.
3. $y' + e\,tgx = \sec x,\ y(0) = 1$.
4. $x(y' - y)e^x$.
5. $x^2y' + xy + 1 = 0, y(1) = 2$.
6. $y = x(y' - x\cos x)$.
7. $y' = 2x(x^2 + y), y(0) = 1$.
8. $(xy' - 1)\ln x = 2y$.
9. $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}$, $y(1) = 0$.
10. $(x + y^2 dy = y\,dx)$.
11. $y' = \dfrac{y}{3x - y^2}$, $y(0) = 1$.
12. $x^2y' - y = x^2e^{x-1/x}$.
13. $y'\sin x - y\cos x = 1,\ y(\pi/2) = 0$.
14. $y' + y/x = x^2$.
15. $dy = (x^2 + 2x - 2y)dx,\ y(0) = 0$.
16. $y' = \dfrac{1}{2x - y^2}$.
17. $y' = \dfrac{y}{2y\ln y + y - x}$, $y(0) = 1$.
18. $x(y' - y) = (1 + x^2 e^x)$.
19. $y' + \dfrac{1}{x^2 + y^2} = 0,\ y(0) = 0$.
20. $(x+1)dy - [2y + (x+1)^4]dx = 0$.
21. $xy' - y = x^2\ \cos x,\ y(\pi) = \pi$.
22. $y' + 2xu = xe^{-x^2}$.
23. $y' + \left(\dfrac{n}{x}\right)y = \dfrac{a}{x^n}$, $y(1) = 0$.
24. $y'\cos x + y = 1 - \sin x$.
25. $y' - y = e^x$.

З а д а ч а 3

1. $(x + 2y)dx - x\ dy = 0$.
2. $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$.
3. $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0$.
4. $2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$.
5. $y^2 + x^2y' = x\,y\,y'$.
6. $(x^2 + y^2)y' = 2xy$.
7. $xy' - y + x\ \ tg(y/x)$.
8. $xy' = y - x\ e^{y/x}$.
9. $xy' - y = (x+y)\ln\dfrac{x+y}{x}$.
10. $xy' = y\cos\ln\dfrac{y}{x}$.
11. $(y + \sqrt{xy})dx = xdy$.
12. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$.
13. $(2x - 4y + 6) + (x + y - 3)dy = 0$.
14. $.(2x + y + 1)dx - (4x + 2y - 3)dy = 0$
15. $x - y - 1 + (y - x + 2)y' = 0$.
16. $(x + 4y)y' = 2x + 3y - 5$.
17. $(y+2)dx = (2x + y - 4)dy$.
18. $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$.
19. $(4y^2 + x^2)y' = xy$.
20. $xy' = y + x(1 + e^{y/x})$.
21. $xy' = y\cos(\ln y/x)$.
22. $(x^2 + y^2 dx - xydy = 0)$.
23. $y' = e^{y/x} + y/x$.
24. $yy' = 2y - x$.
25. $(x^2 + y^2)dx = 2\ x\,y\ dx$.

Задача 4

1. $y'x + y = -x y^2$.
2. $y' - x\ y = x^3 y^3$.
3. $xdy = \left(x^5 y^2 - 2y\right)dx$.
4. $yy' - 4x - y^2\sqrt{x} = 0$.
5. $y' + 2xy = 2x^3 y^3$.
6. $y' + \dfrac{y}{x+1} + y^2 = 0$.
7. $xdx = \left(x^2 / y - y^3\right)dy$.
8. $x\,y' + y = y^2 \ln x$.
9. $y' - y\,\mathrm{tg}\,x + y^2 \cos x = 0$.
10. $y' + \dfrac{2y}{x} = 3x^2 y^{4/3}$.
11. $y' - \dfrac{y}{x-1} = \dfrac{y^2}{x-1}$.
12. $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$.
13. $4xy' + 3y = -e^x x^4 y^5$.
14. $y' + y = e^{x/2}\sqrt{y}$.
15. $y' + \dfrac{3x^2 y}{x^3 + 1} = y^2\left(x^3 + 1\right)\sin x$.
16. $ydx + \left(x + x^2 y^2\right)dy = 0$.
17. $y' - 2y\ \mathrm{tg}\ x + y^2 \sin^2 x = 0$.
18. $y' + 4x^3 y^3 + 2xy = 0$.
19. $x\,y' + x\,y^2 = y$.
20. $2x^2 y' = y^3 + x\,y$.
21. $y' + 2y = y^2 e^x$.
22. $y' = y^4 \cos x + y\ \mathrm{tg}\ x$.
23. $x\,y' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0$.
24. $xy' - 4y = 2x^2\sqrt{y}$.
25. $y' + y = xy^3$.

Задача 5

1. $2x\,y\,dx + \left(x^2 - y^2 dy\right) = 0$.
2. $\left(2 - 9xy^2\right)x\,dx + \left(4y^2 - 6x^3\right)y\,dy = 0$.
3. $e^{-y}dx - \left(2y + xe^{-y}\right)dy = 0$.
4. $\dfrac{y}{x}dx + \left(y^3 + \ln x\right)dy = 0$.
5. $\dfrac{3x^2 + y^2}{y^2}dx - \dfrac{2x^3 + 5y}{y^3}dy = 0$.
6. $2x\left(1 + \sqrt{x^2 - y}\right)dx - \sqrt{x^2 - y}\,dy = 0$.
7. $\left(1 + y^2 x in 2x\right)dx - 2y\cos x^2 dy = 0$.
8. $3x^2\left(1 + \ln y\right)dx = \left(2y - x^3 / y\right)dy$.
9. $\left(\dfrac{x}{\sin y} + 2\right)dx + \dfrac{\left(x^2 + 1\right)\cos y}{\left(\cos 2y - 1\right)}dy = 0$.
10. $\left(x + \sin y\right)dx + \left(x\cos y + \sin y\right)dy = 0$.
11. $\left(y + e^x \sin y\right)dx + \left(x + e^x \cos y\right)dy = 0$.
12. $(x\,y + \sin y)dx + (0{,}5x^2 + x\cos y)\,dy = 0$.
13. $\left(x^2 + y^2 + y\right)dx + \left(2x\,y + x + e^y\right)dy = 0$.
14. $\left(2xye^x + \ln y\right)dx + \left(e^{x^2} + x / y\right)dy = 0$.
15. $\left(y + x\ln y\right)dx + \left(x^2 / 2y + x + 1\right)dy = 0$.
16. $\left(x^2 + \sin y\right)dx + \left(1 + x\cos y\right)dy = 0$.
17. $\left(3x^2 y + \sin x\right)dx + \left(x^3 - \cos y\right)dy = 0$.
18. $\left(e^{x+y} + 3x^2\right)dx + \left(e^{x+y} + 4y^3\right)dy = 0$.

19. $\left(2xy+3y^2\right)dx+\left(x^2+6xy-3y^2\right)dy=0$.

20. $\left(3xy^2-x^2\right)dx+\left(3x^2y-6y^2-1\right)dy=0$.

21. $(\ln y-2x)dx+\left(\dfrac{x}{y}-2y\right)dy=0$.

22. $\left(\sin\dfrac{2x}{y}+x\right)dx+\left(y-\dfrac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy=0$.

23. $(x+y)-(y-x)y'=0$.

24. $e^y dx+\left(xe^y-2y\right)dy=0$

25. $\left(x^3+3xy^2\right)dx+\left(y^3+3x^2y\right)dy=0$.

З а д а ч а 6

Решить дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.

1. $y^{/v}=x$.
2. $y'''=x+\cos x$.
3. $y''(x+2)^5=1$.
4. $xy''=y'$.
5. $xy''+y'=0$.
6. $xy''=\left(1+2x^2\right)y'$.
7. $xy''=y'+x^2$.
8. $3y''=\left(1+y'^2\right)^{3/2}$.
9. $y''+2y(y')^3=0$.
10. $yy''+y'^2=0$.
11. $2yy''=(y')^2$.
12. $y''=\sqrt{1+y'^2}$.
13. $x\ln xy''=y'$.
14. $xy''=y'\ln y'/x$.
15. $y'''=\sqrt{1-y''^2}$.
16. $xy'''-y''=0$.
17. $y''=\sqrt{1-y'^2}$.
18. $y''=\sqrt{1+y'}$.
19. $y'''+y''^2=0$.
20. $y''=y'(1+y')$.
21. $yy''+y'^2=0$.
22. $yy''=y'+y'^2$.
23. $yy''=1+y'^2$.
24. $2yy''=1+y'^2$.
25. $2xy''=y'$.

З а д а ч а 7

Проинтегрировать следующие однородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами.

1. $y''+4y'+3y=0$.
2. $2y''-5y'+2y=0$.
3. $y''+2y'+10y=0$.
4. $y'''-8y=0$.
5. $4y''+4y'+y=0$.
6. $y'^{v}-y=0$
7. $y^{v/}+64=0$.
8. $y'''-3y'+2y=0$.
9. $y''-4y'+5y=0$.
10. $y''+y'-2y=0$.
11. $y''-2y'+y=0$.
12. $y''+6y'+13y=0$.
13. $y'''+y'=0$.
14. $y'''+2y''+10y'=0$.

15. $y''' - 3y' - 2y = 0$.

16. $y'^{v} + 10'' + 9y = 0$.

17. $y'^{v} + 18y'' + 81y = 0$.

18. $y''' + y'' = 0$.

19. $y'' - y' - 2y = 0$.

20. $y'' + 25y = 0$.

21. $y'' - 4y' + 4y = 0$.

22. $y'' + 5y' + 6y = 0$.

23. $y'' - 10y' + 25y = 0$.

24. $y'' - 2y' + 10y = 0$.

25. $y'^{v} - 16y = 0$.

Задача 8

Решить следующие линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида методом подбора частных решений по виду правой части, где указано, решить задачу Коши.

1. $y'' + 2y' = 4e^{x}(\sin x + \cos x)$.
2. $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x}\sin 6x$.
3. $y'' + 2y' = 2e^{x}(\sin x + \cos x)$.
4. $y'' - 4y' + 3y = -e^{3x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 9$.
5. $y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x$.
6. $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
7. $y'' + 2y' = e^{x}(\sin x + \cos x)$.
8. $y'' - 2y' + 10y = 10x^{2} + 18x + 6$.
9. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 4x$.
10. $y'' + y = 2\cos 5x + 3\sin 5x$.
11. $y'' + 2y' + 5y = -2\sin x$
12. $y'' + 2y' = 6e^{x}(\sin x + \cos x)$
13. $y'' + 2y' = 10e^{x}(\sin x + \cos x)$.
14. $y'' + 6y' + 13y = e\cos^{-3x} 5x$.
15. $y'' + 2y' + 5y = -\cos x$.
16. $y'' + 2y' + 5y = -17\sin 2x$.
17. $y'' + 9y' = x\cos 3x$.
18. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 4x$.
19. $y'' + 2y' = 3e^{x}(\sin x + \cos x)$.
20. $y'' - 4y' + 8y = e^{x}(3\sin x + 5\cos x)$.
21. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 8x$.
22. $y''' - 2y'' - 3y = (8x - 14)e^{-x}$.
23. $y'' - 8y' + 17y = x^{2}e^{2x}$.
24. $y''' + 6y'' + 9y = (16x + 24)e^{x}$.
25. $y'' - 4y' + 8y = e^{x}(-\sin x + 2\cos x)$.

Задача 9

Проинтегрировать методом вариации постоянных следующие уравнения:

1. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.
2. $y'' - y' = \dfrac{1}{e^{x} + 1}$.
3. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos^{3} x}$.
4. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^{x}}{x^{2} + 1}$.
5. $y'' + y = \dfrac{2}{\sin^{3} x}$.
6. $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{2}{e^{x}\sin x}$.
7. $y'' - y' = e^{2x}\cos e^{x}$.
8. $y''' + y'' = \dfrac{x - 1}{x^{2}}$.
9. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x$.
10. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin^{2} x}$.

11. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}$.

12. $2y'' + y' - y = 2e^x$.

13. $y'' + a^2 y = e^x$.

14. $y'' - 7y' + 6y = \sin x$.

15. $y'' + 2y' + 5y = -\frac{17}{5}\cos 2x$.

16. $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$.

17. $y'' - 3y' + 2y = 10e^{-x}$.

18. $y'' - 3y' + 2y = 2e^x \cos\frac{x}{2}$.

19. $2y'' + 5y' = 29\cos x$.

20. $2y'' + 5y' = 29x \sin x$.

21. $y'' + y = \cos x \cos 2x$.

22. $5y'' - 6y' + 5y = e^{3/5x}\cos x$.

23. $5y'' - 6y' + 5y = e^{3/5x}\sin\frac{4}{5}x$.

24. $y'' - y' = \frac{e^x}{1 + e^x}$.

25. $y'' - y' = e^{2x}\cos e^x$.

Библиографический список

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1985. 855 с.

2. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука, 1980.

3. Бугров Я. С., Никольский С. М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М.: Наука, 1982.

4. Практикум по курсу «Высшая математика» / Н. И. Васильева, Е. А. Воробьева, О. А. Колозова, Р. С. Кичигина, Н. А. Воронцова. Омск, Изд-во ОмГТУ, 2002. 78 с.

5. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Метод. указания к типовому расчету / Сост.: Г. Е. Квасова, И. Д. Макарова; ОмПИ. Омск, 1992. 40 с.

6. . Неопределенный интеграл. Метод. указания к практическим занятиям / Сост. Р.Л. Долганов, Е. В. Гарифуллина, А. И. Фирдман, Н. Г. Марьина; ОмГТУ. Омск, 2002. 36 с.

7. Неопределенный и определенный интегралы: Метод. указания для студентов-заочников ОмГТУ / Сост.: Л. В. Бельгарт, О. А. Колозова, И. Д. Макарова, С. Е. Макаров; ОмГТУ. Омск, 1998. 76 с.