Министерство образования Российской Федерации
Омский государственный технический университет

ПРАКТИКУМ ПО КУРСУ
«Высшая математика»

Омск - 2002

Составители: Васильева Н.И., Воробьева Е.А., Колозова О.А.
Кичигина Р.С., Воронцова Н.А.

Методические указания содержат необходимые формулы и теоремы, которые иллюстрируются геометрическим материалом и многочисленными примерами по каждой теме. Примеры и задачи, предназначенные для самостоятельного решения, снабжены ответами. Составлены в соответствии с программами первого и второго семестра.

1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Матрицы и определители

Матрицей порядка $m \times n$ называется прямоугольная таблица, состоящая из элементов произвольной природы и содержащая m строк и n столбцов. Элементы матрицы обозначаются a_{ij}, причём индекс i означает номер строки, а j- номер столбца, на пересечении которых стоит этот элемент. Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, то есть $m = n$, называется квадратной порядка n. Общий вид этих матриц:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Примеры

$$Д = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ -1 & 7 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad К = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 0 \\ -7 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Здесь A- числовая матрица размерами 3x4, К- числовая квадратная матрица третьего порядка, 2 - функциональная квадратная матрица второго порядка.

Квадратная матрица (1) имеет главную диагональ, которую образуют элементы $b_{11}, b_{22}, ..., b_{nn}$, и побочную диагональ, которую образуют элементы $b_{n1}, b_{n,n-1}, ..., b_{1n}$. Рассмотрим еще несколько примеров:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & x_{22} & x_{23} \\ 0 & 0 & x_{33} \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} \\ 0 & y_{22} & y_{23} & y_{23} \\ 0 & 0 & y_{33} & y_{34} \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

У матрицы X все элементы, стоящие под главной диагональю, равны нулю; такая матрица называется треугольной. Матрица Y называется трапециевидной, а матрица E - единичной.

Каждой квадратной матрице A порядка n можно поставить в соответствие определенное вещественное число, которое называется определителем матрицы A (иначе детерминантом матрицы A) и обозначается $\det A$ или Δ. В отличие от матрицы, её определитель записывается в прямых скобках.
По определению определитель

$$\Delta = |a_{11}| a_{11}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{33}a_{21}a_{12}. \quad (3)$$

Правило вычисления определителя третьего порядка схематично можно изобразить в следующей форме:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Оно называется правилом треугольников или правилом Саруса.

Примеры. Вычислить следующие определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

Решение.

$$\Delta_1 = 3 \cdot 4 - 2(-7) = 12 + 14 = 26.$$

$$\Delta_2 = \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

$$\Delta_3 = 2 \cdot (-2) \cdot 5 + 1 \cdot 4 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 \cdot 0 - 1 \cdot (-2) \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \cdot 0 - 5 \cdot 3 \cdot 4 = -78.$$

Рассмотрим основные свойства определителей на примере определителей третьего порядка.

1. Величина определителя не изменится, если поменять местами строки и столбцы с одинаковыми номерами:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, строки и столбцы определителя равноправны: все свойства, справедливые для строк, будут справедливы и для столбцов определителя.

2. При перестановке двух строк (или столбцов) величина определителя изменится на противоположную:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

3. Если все элементы некоторой строки (или столбца) имеют общий множитель, то его можно вынести за знак определителя. Это свойство упрощает вычисление определителей. Например:

$$\Delta=\begin{vmatrix}\underline{-3} & \underline{-6} & \underline{12}\\ 2 & 1 & -4\\ 7 & 2 & 8\end{vmatrix}=(-3)\begin{vmatrix}1 & 2 & -4\\ 2 & 1 & -4\\ 7 & 2 & 8\end{vmatrix}=(-3)(-4)\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 7 & 2 & 2\end{vmatrix}=12\cdot(-15)=180.$$

4. Определитель равен нулю в каждом из следующих случаев:

а) если все элементы какой-либо строки (или столбца) равны нулю;

б) если две строки (или два столбца) равны между собой;

в) если две строки (или два столбца) пропорциональны.

Примеры.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -3 & 5\\ 0 & 0 & 0\\ 7 & 4 & 2\end{vmatrix}=0,\qquad \Delta=\begin{vmatrix}3 & 3 & 1\\ 2 & 2 & 0\\ -7 & -7 & 4\end{vmatrix}=0,\qquad \Delta=\begin{vmatrix}2 & 1 & -3\\ 6 & 3 & -9\\ 1 & 2 & -5\end{vmatrix}=0.$$

Пусть дан определитель третьего порядка (3). Возьмем элемент a_{12} и вычеркнем первую строку и второй столбец, на пересечении которых он стоит. Тогда получим определитель второго порядка $M_{12}=\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}$, который называется <u>минором</u> элемента a_{12}. Если дан определитель n-го порядка, то <u>минором элемента</u> a_{ij} называется определитель порядка $(n-1)$, полученный из данного вычеркиванием $i-$й строки и j- го столбца. <u>Алгебраическое</u> <u>дополнение</u> A_{ij} элемента a_{ij}- это его минор M_{ij}, если сумма индексов $i+j$ четная, и -M_{ij}, если эта сумма нечетная.

$$A_{ij}=\begin{cases}M_{ij}, \text{если} \quad i+j \quad \text{четная;}\\ -M_{ij}, \text{если} \quad i+j \quad \text{нечетно.}\end{cases}$$

Пример.

$$\Delta=\begin{vmatrix}-3 & 5 & 1\\ 2 & 0 & -4\\ 7 & -2 & 1\end{vmatrix},\quad M_{11}=\begin{vmatrix}0 & -4\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-8,\quad M_{23}=\begin{vmatrix}-3 & 5\\ 7 & -2\end{vmatrix}=-29, A_{11}=\begin{vmatrix}0 & -4\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-8,$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix}-3 & 5\\ 7 & -2\end{vmatrix}=29.$$

5. Всякий определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (или столбца) на их алгебраические дополнения (теорема разложения определителя).

Таким образом, определитель третьего порядка можно разложить шестью способами, например: $\Delta=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$; $\Delta=A_{13}a_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33};\ldots$

6. Пусть дан определитель третьего порядка (3). Возьмем какую-либо строку, например первую, и назовем ее <u>базисной.</u> Умножим все элементы базисной строки на произвольное вещественное число k и прибавим к соответствующим элементам другой строки. Тогда получим новый определитель, который будет равен исходному, т.е.

$$\begin{vmatrix} \underline{a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}} & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} & a_{23}+ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Обратите внимание, что базисная строка при этом не изменяется.

Вычисление определителей

Определитель третьего порядка можно вычислить тремя способами:

а) по формуле (3), то есть по правилу треугольников;

б) с помощью пятого свойства, т.е. по теореме разложения определителя;

в) на основании шестого свойства, которое позволяет в какой-либо строке или столбце сделать все элементы, кроме одного, равными нулю.

Пример. Вычислить следующие определители :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -6 & 12 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -7 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Разложим определитель Δ_1 по элементам первой строки, но предварительно вынесем из этой строки множитель 3 за знак определителя.

$$\Delta_1 = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \left(1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \right) = 3 \cdot 37 = 111.$$

Теперь вычислим Δ_1 «приведением его к нулям» . В качестве базисной возьмем первую строку, умножим её на (-2) и прибавим ко второй строке; затем умножим ее на (-5) и прибавим к третьей строке и разложим определитель по элементам 1-го столбца. Тогда получим.

$$\Delta_1 = 3 \cdot \begin{vmatrix} \underline{1 \quad -2 \quad 4} & & \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 \quad -5 \\ \\ \\ \end{matrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & -11 \\ 0 & 12 & -19 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \begin{vmatrix} 5 & -11 \\ 12 & -19 \end{vmatrix} = 3(-95+132) = 111.$$

Третий способ («приведение определителя к нулям») является наиболее экономичным, им рекомендуется вычислять определители четвертого и более высокого порядков. Определитель Δ_2 вычислить самостоятельно.

Ранг матрицы

Матрица A <u>имеет ранг, равный</u> r, если среди её определителей есть хотя бы один определитель порядка r, отличный от нуля, а все определители более высоких порядков равны нулю. Рассмотрим примеры.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 1 \\ 3 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$ Очевидно, что ранг матрицы

A равен нулю: $r(A)=0$. Матрица A имеет ранг, равный единице: $r(B)=1$. Матрица C имеет определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2$, который отличен от нуля, а все определители третьего порядка равны нулю (проверить самостоятельно).

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & -7 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, $r(c)=2$.

Системы линейных уравнений

Уравнение называется <u>линейным</u>, если оно содержит неизвестные в первой степени. Так, например, $ax=b$ есть линейное уравнение с одним неизвестным; $ax+by=c$ - линейное уравнение с двумя неизвестными. Рассмотрим систему, содержащую m уравнений с n неизвестными: $x_1, x_2, ..., x_n$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{4}$$

<u>Решением</u> системы (4) называется совокупность n чисел : $x_1=\bar{x}_1, x_2=\bar{x}_2, ..., x_n=\bar{x}_n$, которые обращают каждое из уравнений этой системы в тождества. Рассмотрим примеры.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 5, \\ x_1 + 4x_2 = -3; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 5, \\ 2x_1 - 3x_2 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 5, \\ 4x_1 - 6x_2 = 10. \end{cases}$$

Здесь первая система имеет решение $x_1=1, \quad x_2=-1$ (проверьте); вторая система не имеет решений (почему?); третья система имеет бесконечно много решений (почему?).

Система (4) называется <u>совместной</u>, если она имеет хотя бы одно решение: $x_1=\bar{x}_1, x_2=\bar{x}_2, ..., x_n=\bar{x}_n$, и <u>несовместной,</u> если она не имеет ни одного решения. Если система (4) совместна и имеет единственное решение, то она называется <u>определенной;</u> если же решений бесконечно много, то система (4) называется <u>неопределенной</u>. При работе с системой (4) принципиальным является вопрос о ее совместности.

Пусть дана система (4), образуем две матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Матрица A называется <u>матрицей коэффициентов</u> (или основной матрицей), а B –

расширенной матрицей системы (4).

<u>Теорема Кронекера-Капелли</u>. Для того чтобы система (4) была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы A её коэффициентов был равен рангу расширенной матрицы B, то есть $r(A)=r(B)$.

Теорема утверждает, что если $r(A)=r(B)$, то система (4) имеет хотя бы одно решение и наоборот: если система (4) совместна, то рангу матриц A и B равны.

Пример. Определить будет ли совместной система уравнений

$$\begin{cases} 2x - y + z = 5, \\ x + y - 3z = -6, \\ x - 2y + 4z = 11. \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 & -6 \\ 1 & -2 & 4 & 11 \end{array}\right)$$

Здесь $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0, \quad \Delta_2 = \det A = 0$ (проверьте).

Следовательно, $r(A) = 2$. У матрицы B все определители третьего порядка равны нулю (проверьте), следовательно, $r(B)=2$. Таким образом, данная система совместна.

Пусть доказано, что система (4) совместна. Тогда необходимо ответить на следующие вопросы: сколько решений имеет система? Как найти все её решения? Возможны следующие случаи:

а) если система (4) совместна, то есть $r(A)=r(b)=r$ и число неизвестных равно рангу матриц A и B $(r=n)$, то она имеет единственное решение;

б) если же система (4) совместна, но $r<n$, то она имеет бесконечно много решений.

Так, в предыдущем примере $r=2$ и $n=3$, следовательно, система имеет бесконечно много решений.

Формулы Крамера

Рассмотрим частный случай системы (4), когда число уравнений совпадает с числом неизвестных. Пусть для определенности $m=n=3$, то есть система имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \qquad \Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Определитель $\Delta = \det A$ называется <u>основным</u> определителем данной системы. Следующие три определителя называются <u>вспомогательными</u>:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

<u>Теорема Крамера</u>. Если основной определитель $\Delta \neq 0$, то данная система имеет единственное решение, которое находится по формулам

$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$. Эти формулы называются <u>формулами Крамера.</u>

Пример. Следующие системы решить по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 14, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 8. \end{cases} \tag{5}$$

Решим первую систему. Здесь $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

Пояснение: из второй строки отняли первую, а затем из третьей строки отняли первую. Так как $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение. Вычислим вспомогательные определители.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 14 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 12 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(12-6) = -6;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & 14 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} -3 \; -2 \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 8 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 16 = 15;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 14 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -9;$$

$x_1 = \frac{-6}{-3} = 2; \quad x_2 = \frac{15}{-3} = -5; \quad x_3 = \frac{-9}{-3} = 3.$Вторую систему решите самостоятельно.

Ответ: $x_1 = 2, x_2 = -5, x_3 = 3$.

Замечание. *Для того чтобы убедиться в правильности решения, необходимо сделать проверку.*

Метод Гаусса

Существует общий метод решения системы из m уравнений с n неизвестными, который называется методом <u>последовательного исключения</u> неизвестных или <u>методом Гаусса.</u> Поясним его на примере системы (5). Здесь в первом уравнении коэффициент при x_1 равен единице, поэтому назовем первое уравнение базисным. Умножим базисное уравнение на -2 и сложим со вторым уравнением; затем умножим его на -3 и сложим с третьим уравнением. Система запишется в следующем виде:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 8. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ -7x_2 + 4x_3 = -2, \\ -5x_2 + 4x_3 = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ -7x_2 + 4x_3 = -2, . \\ 2x_2 = 4. \end{cases}$$

Здесь из третьего уравнения вычли второе. Таким образом, система приведена к «треугольной форме». Тогда из третьего уравнения следует, что $x_2 = 2;$ из второго уравнения $x_3 = \dfrac{-2+7x_2}{4} = \dfrac{-2+7\cdot 2}{4} = 3.$ Наконец, из первого уравнения $x_1 = 2 - 2x_2 + x_3 = 2 - 2\cdot 2 + 3 = 5 - 4 = 1$. **Ответ:** $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3.$

Последовательное исключение неизвестных проще и короче проводить с помощью <u>элементарных преобразований</u> расширенной матрицы данной системы. К ним относятся:

а) перестановка местами каких-либо строк матрицы;

б) умножение или деление (сокращение) какой-либо строки матрицы на число, отличное от нуля;

в) умножение какой-либо строки матрицы на число k и прибавление к другой строке.

Очевидно, что элементарные преобразования не изменяют ранга расширенной матрицы, другими словами, не нарушают равносильности исходной системы. После ряда таких преобразований исходная матрица будет приведена к одному из следующих видов:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & b_3 \end{array}\right) \quad \text{или} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \end{array}\right).$$

В первом случае система имеет единственное решение, во втором – либо бесконечно много решений, если $b_3 = 0$, либо не имеет решений, если $b_3 \neq 0$.

Примеры. Следующие системы решить методом Гаусса:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 13x_3 = -6. \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = -26, \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -17. \end{cases}$$

Решение :

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -3 \\ \hline 1 & 3 & -5 & 0 \\ 3 & 1 & -13 & -6 \end{array}\right)\begin{array}{c} -1 \quad -3 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & 3 \\ \hline 0 & 7 & -4 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ -2 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{array}\right).$$

Пояснения. В качестве базисной взяли первую строку, отняли ее от второй строки; затем умножили базисную строку на (-3) и прибавили к третьей строке. В полученной матрице за базис взяли вторую строку, умножили её на (-2) и прибавили к третьей. Результирующей матрице соответствует система уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -3 \quad \Rightarrow x_1 = -3 + 2x_2 + 3x_3 = -3 + 2\cdot 1 + 3\cdot 1 = 2, \\ 5x_2 - 2x_3 = 3 \quad \Rightarrow x_3 = \dfrac{3-5x_2}{-2} = \dfrac{3-5\cdot 1}{-2} = \dfrac{3-5}{-2} = 1, \\ -3x_2 = -3 \quad \Rightarrow x_2 = 1. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1.$

Теперь решим вторую систему. Здесь в качестве базисной возьмем также первую строку и исключим сначала x_3 :

$$B=\begin{array}{c}\\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 9 \\ 3 & -5 & 4 & -26 \\ 5 & -2 & 3 & -17 \end{array}\right)\end{array}\begin{array}{cc} 4 & 3 \\ & \\ & \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 9 \\ 11 & 7 & 0 & 10 \\ 11 & 7 & 0 & 10 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ (-1) \\ \\ \end{array}.$$

Теперь в качестве базисной возьмем вторую строку, умножим ее на (-1) и прибавим к третьей, тогда

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 9 \\ 11 & 7 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=9, \\ 11x_1+7x_2=10. \end{cases}$$

Эта система имеет бесконечно много решений. Например, из второго уравнения $x_1=\dfrac{10-7x_2}{11}$, из первого уравнения находим

$$x_3=2x_1+3x_2-9=\frac{20-14x_2}{11}+3x_2-9=\frac{19x_2-79}{11}.$$

Ответ: $x_1=-\dfrac{7}{11}x_2+\dfrac{10}{11};\quad x_3=\dfrac{19}{11}x_2-\dfrac{79}{11};\quad x_2\in R.$

Системы линейных однородных уравнений

Если в исходной системе все свободные члены равны нулю, то система называется однородный. Такая система всегда совместна, так как она имеет нулевое решение: $x_1=0,\quad x_2=0,\quad x_3=0$.

Примеры. Решить системы методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=0, \\ 5x_1-x_2+2x_3=0, \\ x_1+2x_2+x_3=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_1+4x_2+2x_3=0, \\ x_1-x_2+4x_3=0, \\ 5x_1+2x_2+10x_3=0. \end{cases}$$

Решение :

В первой системе в качестве базисной возьмем первую строку и исключим сначала x_2, а затем x_3.

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ & \\ & \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ 1 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=0 \quad \Rightarrow x_2=0, \\ 7x_1+5x_3=0 \quad \Rightarrow x_3=0, \\ 4x_1=0 \quad \Rightarrow x_1=0. \end{cases}$$

Ответ: $x_1=x_2=x_3=0.$

Во второй системе в качестве базисной возьмем вторую строку и исключим сначала x_1, а затем из третьего уравнения вычтем первое

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ \hline 5 & 2 & 10 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -3\ -5 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 7 & -10 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & -10 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} -1 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 7 & -10 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Таким образом, получили систему уравнений

$$\begin{cases} 7x_2-10x_3=0 \quad \Rightarrow x_2=\dfrac{10}{7}x_3, \\ x_1-x_2+4x_3=0 \quad \Rightarrow x_1=x_2-4x_3=\dfrac{10}{7}x_3-4x_3=-\dfrac{18}{7}x_3. \end{cases}$$

Ответ: $x_1=-\dfrac{18}{7}x_3;\quad x_2=\dfrac{10}{7}x_3;\quad x_3\in R$.

Упражнения. Вычислите определители:

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 4. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -7 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & -8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$.

Для проверки полученного результата вычисления производите двумя способами: по правилу Сарруса и по теореме разложения, применяя свойства определителей.

Вычислите определители 1У порядка:

6. $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 1 \end{vmatrix}$; 7. $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & 9 \end{vmatrix}$; 8. $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$.

Ответ: $\Delta=54$. **Ответ:** $\Delta=20$. **Ответ:** $\Delta=0$.

Решите системы уравнений по формулам Крамера и выполните проверку:

9. $\begin{cases} 2x+y=5, \\ x+3z=16, \\ 5y-z=10; \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x+2y-z=2, \\ 2x-3y+2z=2, \\ 3x+y+z=8. \end{cases}$

Решить системы методом Гаусса:

11. $\begin{cases} x_1-x_3+x_4=3, \\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=2, \\ 5x_1-3x_4=-6, \\ x_1+x_2+x_3+x_4=2; \end{cases}$ 12. $\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3+x_4=0, \\ 2x_1+3x_2-x_4=0, \\ x_1+5x_2-3x_3=7, \\ 3x_2+2x_3+x_4=2. \end{cases}$

Ответ: (0,1,-1,2). **Ответ:** (-1,1,-1,1).

Выяснить, совместна или несовместна каждая система и в случае совместности решить их:

13. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 5x_1 - 5x_2 + 8x_3 - 7x_4 = 3. \end{cases}$ **Ответ:** Система несовместна ;

14. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ 5x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$ **Ответ:** Система совместна, имеет бесконечно много решений (с-1; 2-с; с), где $c \in R$.

Исследовать и решить однородные системы уравнений:

15. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$ **Ответ:** (0,0,0);

16. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 0. \end{cases}$ **Ответ:** (5c,11c,7c), где $c \in R$;

17. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases}$ **Отве** $\begin{cases} x_1 = -\frac{4}{3}(c_1 + c_2) \\ x_2 = \frac{1}{3}(c_2 - 5c_1) \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$ где $c_1 \in R, c_2 \in R$.

2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Величины подразделяются на скалярные и векторные. Скалярная величина вполне определяется своим численным значением. Примерами таких величин являются время, масса, длина, площадь, объем. Векторная величина помимо своего численного значения имеет направление. Примеры: скорость, сила, ускорение. Геометрически вектор изображается направленным отрезком (рис.1) и обозначается $\overline{AB} = \vec{a}$.

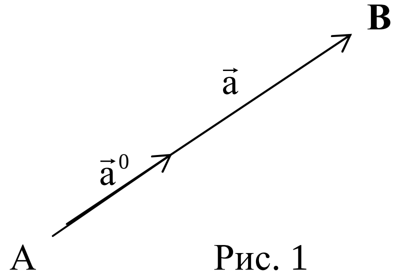


Рис. 1

Здесь точка A – начало вектора $\vec{a}$, точка B – конец этого вектора. Длина отрезка AB называется длиной или модулем этого вектора и обозначается $|\overrightarrow{AB}| = |\vec{a}|$. которые лежат два или более вектора, на параллельных прямых(или на одной прямой), называются коллинеарными. Так, коллинеарными будут векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{СД}$, а также векторы $\overrightarrow{АД}$, $\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{MC}$. Обозначение: $\overrightarrow{AB} \| \overrightarrow{BM} \| \overrightarrow{MC}$ (рис.2).

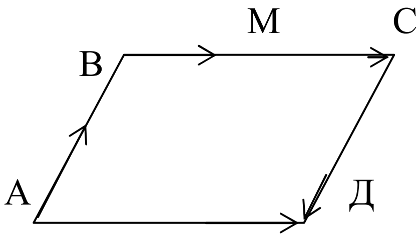


Рис. 2

Три или более векторов, которые лежат в параллельных плоскостях (или в одной плоскости), называются компланарными. На рис. 2 все векторы компланарные. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются равными, то есть $\vec{a} = \vec{b}$ если 1) они коллинеарны; 2) сонаправлены; 3) имеют равные длины.

На рис. 2 $\overrightarrow{АД} = \overrightarrow{BC}$. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{СД}$, для которых $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{СД}$, называются противоположными.

К линейным операциям над векторами относятся сложение, вычитание и умножение вектора на число. Правило сложения нескольких векторов изображенное на рис. 3 называется правилом многоугольника. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$

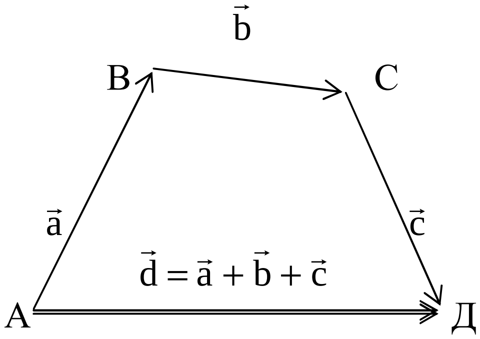


Рис. 3

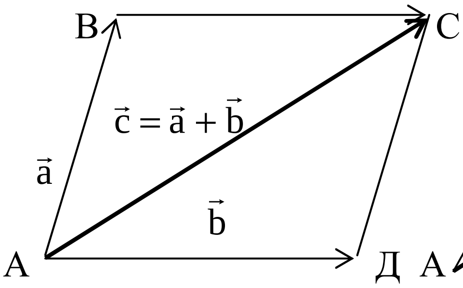


Рис. 4

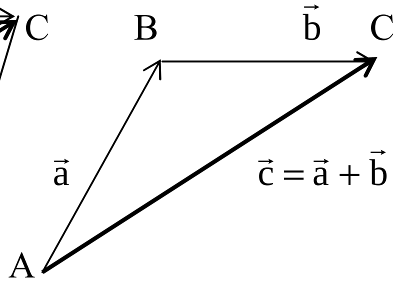


Рис. 5

складываем по правилу параллелограмма (рис. 4)или по правилутреугольника (рис. 5). Три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ можно складывать по правилу параллелепипеда (рис. 6). Правило вычитания двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ изображено на рис. 7.

При вычитании векторов надо отнести оба вектора к общему началу O и соединить их концы. Тогда вектор-разность $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ направлен в конец уменьшаемого вектора $\vec{a}$. Из рис.8 следует, что в параллелограмме, построенном на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, одна из диагоналей есть вектор-сумма $\vec{a} + \vec{b}$, вторая – вектор-разность $\vec{a} - \vec{b}$.

При умножении вектора $\vec{a}$ на число «к» его модуль изменяется в $|к|$ раз. При этом вектор $\vec{b} = к \cdot \vec{a}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$, сонаправлен с ним, если $к > 0$, и противоположно направлен, если $к < 0$ (рис. 9).

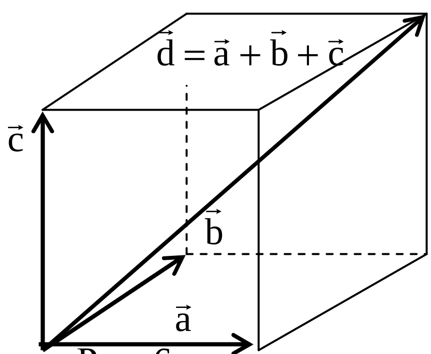


Рис. 6

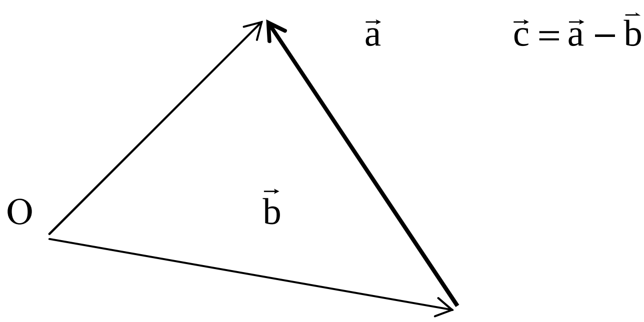


Рис. 7

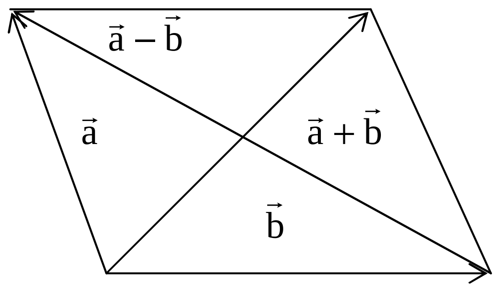


Рис. 8

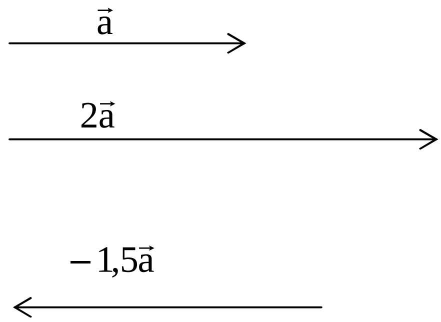


Рис. 9

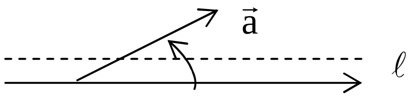
Единичным вектором или ортом вектора $\vec a$ называется вектор $\vec a^{\,0}$, который удовлетворяет следующим условиям :

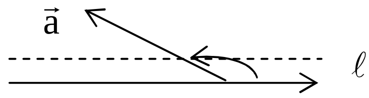
$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \vec a^{\,0} \parallel \vec a \\ 2)\ \vec a^{\,0} \uparrow\uparrow \vec a \end{array}\right\} \Rightarrow \vec a^{\,0} \text{ и } \vec a \text{ сонаправлены.}$$

3) $\left|\vec a^{\,0}\right| = 1.$

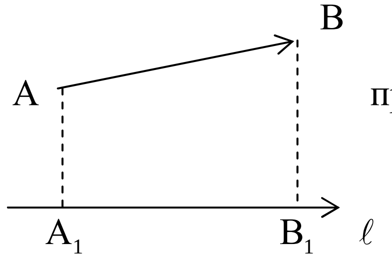
Так как векторы $\vec a^{\,0} \uparrow\uparrow \vec a$, то $\dfrac{\vec a}{\vec a^{\,0}} = \dfrac{|\vec a|}{\left|\vec a^{\,0}\right|} = \dfrac{|\vec a|}{1} = |\vec a| \Rightarrow 1)\ \vec a = |\vec a| \cdot a^0;\ \vec a^{\,0} = \dfrac{\vec a}{|\vec a|}$.

Осью ℓ называют прямую с указанным на ней положительным направлением: $\longrightarrow \ell$. Углом между осью и вектором называется угол, на который надо повернуть против хода часовой стрелки положительное направление оси до совмещения с положительным направлением вектора.

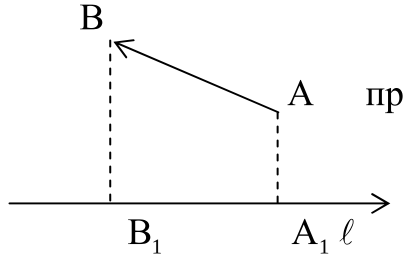




Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось ℓ называется длина отрезка A_1B_1 (от проекции начала вектора до проекции конца), взятая со знаком плюс, если направления оси и отрезка A_1B_1 совпадают, и со знаком минус, если - A_1B_1 противоположны.

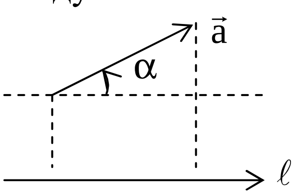


$пр_e\overrightarrow{AB} = +\left|A_1B_1\right|$



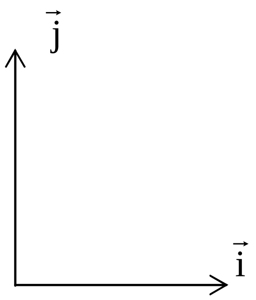
$пр_e\overrightarrow{AB} = +\left|A_1B_1\right|$

Теорема. Проекция вектора на ось равна длине вектора умноженной на косинус угла между осью и вектором:



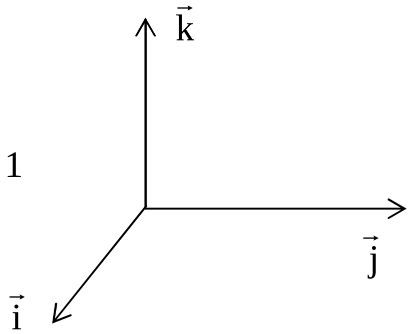
$пр_e\vec a = |\vec a|\cos\alpha$

Координаты вектора



$\vec{i} \perp \vec{j}$

$|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$



$\vec{i} \perp \vec{j},\ \vec{i} \perp \vec{k},\ \vec{j} \perp \vec{k}$

$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$

Рис. 10 Рис. 11

На рис.10 изображен <u>декартов прямоугольный базис</u> на плоскости, который образуют два взаимно перпендикулярных вектора $\vec{i}$ и $\vec{j}$. Модули этих векторов равны единице масштаба. В трехмерном пространстве <u>базис</u> образуют три вектора $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (рис.11). Базис определяет систему координат. Если направить оси координат OX, OУ, OZ по базисным векторам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то получим декартову прямоугольную <u>систему координат</u> XYZ в пространстве. На плоскости получим систему XOY. Всякий вектор $\vec{a}$ в пространстве можно представить в виде $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, где $x = пр_{ox}\vec{a}$, $y = пр_{oy}\vec{a}$, $z = пр_{oz}\vec{a}$. Это равенство называется <u>разложением вектора</u> $\vec{a}$ по базису $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; числа x, y, z называются <u>координатами</u> вектора $\vec{a}$. Пишут $\vec{a}$=(x,y,z). Длина вектора $\vec{a}$ определяется по формуле $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими коодинатами $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$.

Тогда $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2)$, $k \cdot \vec{a} = (kx_1, ky_1, kz_1)$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{в}$ коллинеарны, то координаты пропорциональны, то есть: $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2}$. .

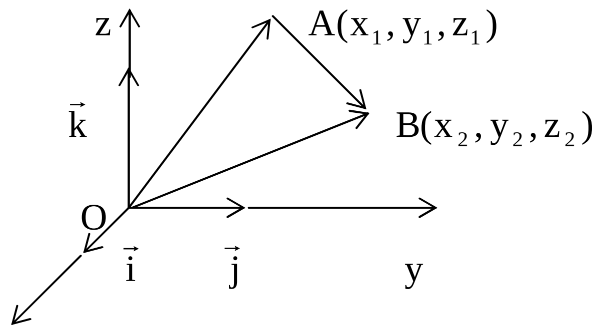


Рис.12

Пусть дан вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, где $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ (рис.12). Тогда $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} =$
$= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$,
или $\overrightarrow{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)}$;

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)_2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Обозначим $\alpha = \widehat{\vec{a}, OX}$, $\beta = \widehat{\vec{a}, OY}, \gamma = \widehat{\vec{a}, OZ}$. Косинусы углов, образованных вектором

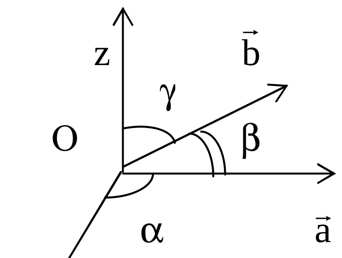


Рис.13

и осями координат, т.е. $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ называются направляющими косинусами вектора (рис. 13). Если $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$, то $\cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\vec{a}|}$, $\cos\beta = \dfrac{a_y}{|\vec{a}|}$, $\cos\gamma = \dfrac{a_z}{|\vec{a}|}$.
Свойство направляющих косинусов: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Пример 1. Найти длину вектора $\overrightarrow{AB}$, где A(1,-3,5) и B(4,1,17).

Решение. $\overrightarrow{AB} = (4-1; 1+3; 17-5) = (3,4,12)$, $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{9+16+144} = \sqrt{169} = 13.$

Пример 2. Найти орт вектора $\vec{a} = (12; -15; -16)$.

Решение. $\vec{a}^0 = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$; $|\vec{a}| = \sqrt{12^2 + (-15)^2 + (-16)^2} = \sqrt{144+225+256} = \sqrt{625} = 25.$

Тогда $\vec{a}^0 = \dfrac{\bar{a}}{25}$, $\vec{a}^0 = \left(\dfrac{12}{25}; -\dfrac{15}{25}; -\dfrac{16}{25}\right)$.

Пример 3. Найти направляющие косинусы вектора $\vec{a}(6; 3; -2)$.

Решение. $|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{36+9+4} = 7$, $\cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\vec{a}|} = \dfrac{6}{7}$, $\cos\beta = \dfrac{a_y}{|\vec{a}|} = \dfrac{3}{7}$,

$\cos\gamma = \dfrac{a_z}{|\vec{a}|} = \dfrac{-2}{7}$.

Замечание. *Проверьте, что координаты орта вектора совпадают с направляющими косинусами вектора.*

У П Р А Ж Н Е Н И Я

1.Даны две координаты вектора $a_x = 4$, $a_y = -12$. Определить третью координату, если $|\vec{a}| = 13$. Ответ: $a_z = \pm 3$.

2. Может ли вектор составлять с осями координат углы:
а) $\alpha = 45^0$, $\beta = 60^0$, $\gamma = 120^0$. Ответ: да.
б) $\alpha = 45^0$, $\beta = 135^0$, $\gamma = 60^0$. Ответ: нет.
Использовать свойство направляющих косинусов.

Скалярное произведение двух векторов

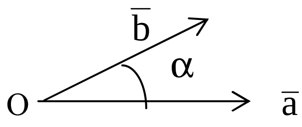


Рис. 14

Отнесем векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ к общему началу O и обозначим $\alpha = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ (рис.14).

Определение. Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha,\quad \vec{a}\neq 0,\quad \vec{b}\geq\neq 0.$$

Основные свойства скалярного произведения

1. Скалярное произведение коммутативно (перестановочно): $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.

2. $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$, если α - острый угол, и $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$, если α - тупой угол.

3. $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, если $\vec{a}\perp\vec{b}$.

Определение. Скалярное умножение вектора самого на себя называется скалярным квадратом вектора.

4. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины:
$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$, или $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2 \Rightarrow |\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}$.

5. $k\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})=k\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot k\vec{b}$, k- const.

6. $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot \text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} \quad\Rightarrow\quad \text{пр}_{a}\vec{в}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{в}}{|\vec{a}|}$.

7.Скалярное произведение имеет распределительное свойство
$(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

Если векторы заданы в прямоугольной системе координат:
$\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ и $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$, то скалярное произведение можно вычислить по следующей формуле: $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2$.

Пример. Даны векторы $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ и $\vec{b}=2\vec{k}-5\vec{j}$. Вычислить $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Решение. $\vec{a}(2;-1;3)$; $\vec{b}(0;-5;2)$; $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2=2\cdot 0+(-1)\cdot(-5)+$
$+3\cdot 2=5+6=11.$

Приложения скалярного произведения

1. Из определения скалярного произведения следует, что $\cos\alpha=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$.

Пример. Найти угол между векторами $\vec{a}=(2{,}2-1)$ и $\vec{b}=(4{,}6{,}12)$.

Решение. $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot 4+2\cdot 6+(-1)\cdot 12=8,\ |\vec{a}|=\sqrt{4+4+1}=3,\ |\vec{b}|=\sqrt{16+36+144}=14$.

$$\cos\alpha=\frac{8}{3\cdot 14}=\frac{4}{21},\quad \alpha=\arccos\frac{4}{21}.$$

2. Из шестого свойства следует, что $\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$.

Пример. В треугольнике с вершинами A(1,-3,0), B(3,5,1), C(2,-7,0) найти угол при вершине A и проекцию стороны AB на сторону AC.

Решение.
$\overrightarrow{AB}=(3-1{,}5+3{,}1-0)=(2{,}8{,}1),\quad |\overrightarrow{AB}|=\sqrt{4+64+1}=\sqrt{69}$.

$\overrightarrow{AC}=(2-1,-7+3,0-0)=(1,-4,0), \quad \left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{1+16+0}=\sqrt{17}$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\cdot 1+8(-4)+1\cdot 0=-30$.

$$\cos A=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{-30}{\sqrt{69}\cdot\sqrt{17}}=\frac{-30}{34{,}2}\approx -0{,}88. \ \widehat{A}=\pi-\arccos 0{,}88.$$

$$\text{пр}_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{-30}{\sqrt{17}}\approx -7{,}5.$$

3. В механике с помощью скалярного произведения определяется работа постоянной силы $\vec{F}$, под действием которой материальная точка перемещается на вектор $\vec{S}$. Если при этом $\widehat{\left(\vec{F},\vec{S}\right)}=\alpha$, то $A=\left|\vec{F}\right|\cdot\left|\vec{S}\right|\cdot\cos\alpha$, то есть $A=\vec{F}\cdot\vec{S}$.

Пример. На тело в точке O(2,-1,3) действуют силы $\vec{F}_1=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{F}_2=\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k}$, $\vec{F}_3=5\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$. Под действием этих сил тело переместилось по прямой в точку $M(1,4,-7)$. Найти работу равнодействующей этих сил.

Решение. Так как $\vec{R}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3$, то $\vec{R}=8\vec{i}+3\vec{j}-10\vec{k}$. Вектор-путь $\vec{S}=\overrightarrow{OM}=\vec{i}+5\vec{j}-10\vec{k}$.Работа A силы $\vec{R}$ рассматривается по формуле $A=\vec{R}\cdot\vec{S}=8(-1)+3\cdot 5-10(-10)=107$ ед. работы.

Пример. Даны вершины четырехугольника: A(1; -2; 2), B(1; 4; 0), C(-4; 1, 1) и Д(-5; -5; 3). Доказать, что его диагонали AC и BД взаимно перпендикулярны.

Решение. Введем векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BД}$ и докажем, что они перпендикулярны.

$\overrightarrow{AC}$(-4-1; 1-(-2); 1-2)= (-5,3; -1) , $\overrightarrow{BД}$(-5-1; -5-4; 3-0)=(-6,-9; 3),

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BД}=(-5)\cdot(-6)+3\cdot(-9)+(-1)\cdot 3=30-27-3=0 \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BД}.$$

Пример. Дан вектор $\vec{a}=6\vec{p}-\vec{q}$, где $\left|\vec{p}\right|=2\sqrt{2}$; $\left|\vec{q}\right|=3$, $\vec{p}\,\hat{}\,\vec{q}=\pi/4$. Найти длину вектора $\vec{a}$.

Решение. Так как вектор $\vec{a}$ задан не в декартовом (а в произвольном) базисе, то длину вектора $\vec{a}$ находим по формуле $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\vec{a}^2}$ (свойство 4 скалярного умножения).

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\vec{a}^2}=\sqrt{\left(6\vec{p}-\vec{q}\right)^2}=\sqrt{36\vec{p}-12\vec{p}\cdot\vec{q}+\vec{q}^2}=\sqrt{36\cdot\left|\vec{p}\right|^2-12\cdot\left|\vec{p}\right|\cdot\left|\vec{q}\right|\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\left|\vec{q}\right|^2}=$$

$$=\sqrt{36\cdot\left(2\sqrt{2}\right)^2-12\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+9}=\sqrt{288-72+9}=\sqrt{225}=15.$$

У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Даны вершины треугольника : A(3; 2; -3), B(5; 1; -1), C(1; -2; 1).Определить его внешний угол при вершине A. Ответ: $\cos\alpha=-4/9$.

2. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k},\ \vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k},\ \vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$. Вычислить $\text{пр}_{\vec{c}}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$. Обозначить $\vec{a} + \vec{b} = \vec{d}$ и найти $\text{пр}_{\vec{c}}\vec{d}$,используя свойство 6. Ответ: - 4.

3. Даны векторы $\vec{p} = \alpha \cdot \vec{a} + 17\vec{b}$ и $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$, где $\left|\vec{a}\right| = 2, \left|\vec{b}\right| = 5,\quad \vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b} = \dfrac{2\pi}{3}$.
Определить при каком значении α векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ взаимно перпендикулярны. Ответ: $\alpha = 40$. (Использовать свойства 3 и 7).

Ориентация тройки векторов

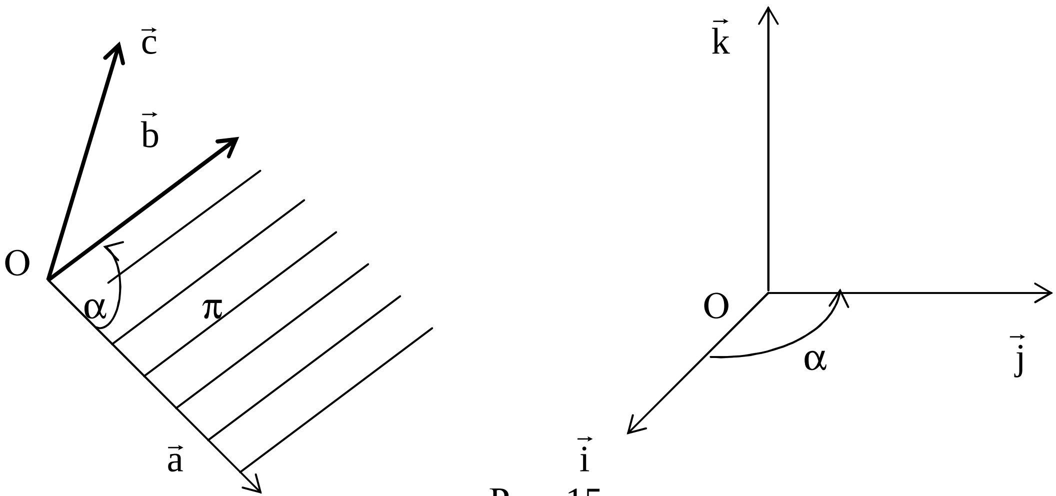


Рис. 15

Пусть векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ некомпланарны. Отнесем их к общему началу O и построим на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ плоскость π. Если смотреть с конца вектора $\vec{c}$, то кратчайший поворот α от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ происходит <u>против</u> часовой стрелки (рис. 15). В этом случае говорят, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку. На рис. 16 изображена <u>левая</u> тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

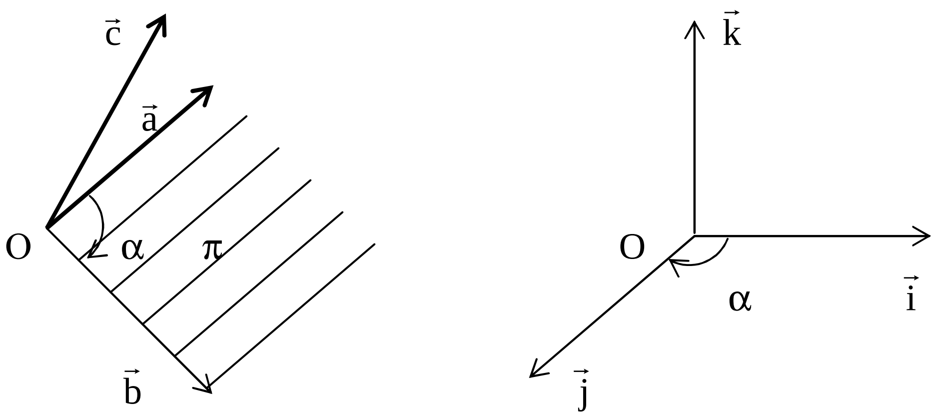


Рис. 16

Система координат XYZ называется <u>правой</u> , если базисные векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ образуют правую тройку, и <u>левой</u> , если векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ образуют левую тройку.

Векторное произведение двух векторов

Отнесем векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ к общему началу O и построим на них параллелограмм (рис.17). Пусть $\vec{c}$ - третий вектор, ортогональной к $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

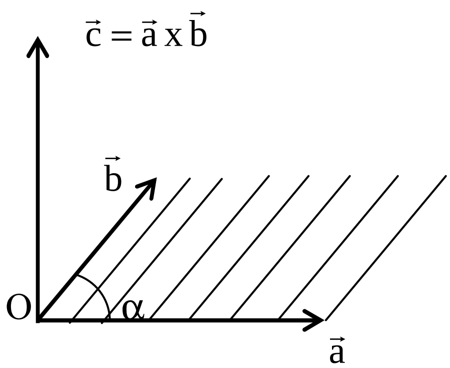


Рис. 17

Определение. Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c}$, который имеет следующие свойства:

а) вектор $\vec{c}$ ортогонален к перемножаемым векторам, т.е. $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$;

б) вектор $\vec{c}$ направлен таким образом, что тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ правая;

в) длина вектора $\vec{c}$ численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. $|\vec{c}| = S_{\square}$.

В отличие от скалярного произведения $\vec{a} \cdot \vec{b}$, векторное произведение обозначается символом $\vec{a} \times \vec{b}$.

Свойства векторного произведения

1. Векторное произведение антикоммутативно: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$.
2. $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, если векторы коллинеарны: $\vec{a} \| \vec{b}$.
3. $k(\vec{a} \times \vec{b}) = k\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times k\vec{b}, \quad k = \text{const}$.
4. Распределительное свойство: $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ в правой системе XYZ, то векторное произведение вычисляется по формуле:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k}.$$

Если векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ образуют правую тройку, то можно доказать, что $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$.

Пример. Найти вектор $\vec{a} = (2\vec{i} + \vec{k}) \times \vec{j} - (2\vec{k} - \vec{j}) \times \vec{i}$ в правом базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Решение. По свойствам 3 и 4 $\vec{a} = 2(\vec{i} \times \vec{j}) + (\vec{k} \times \vec{j}) - 2(\vec{k} \times \vec{i}) + (\vec{j} \times \vec{i})$. Так как $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \quad \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$, то $\vec{a} = 2\vec{k} - \vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

Приложения векторного произведения

1. Векторное произведение широко используется для нахождения площадей. Действительно, из определения следует, что $S_{\square} = |\vec{a} \times \vec{b}|$, тогда $S_{\triangle} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$.

Пример 1. Найти площадь треугольника с вершинами A (1,-3,0), B (3,5,1), C (2,-7,0).

Решение. Здесь $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + 8\vec{j} + \vec{k}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{i} - 4\vec{j}$. Тогда

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}\vec{k} = 4\vec{i} + \vec{j} - 16\vec{k}.$$

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 1 + 256} = \frac{\sqrt{273}}{2} \text{ кв. ед.}$$

2. В механике с помощью векторного произведения находится момент силы (рис.18).

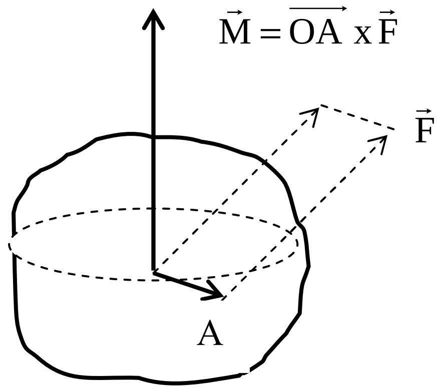


Рис. 18

Пусть на тело в точке A действует сила $\vec{F}$. Тогда моментом силы $\vec{F}$ относительно заданной точки O называется вектор $\vec{M}$, равный векторному произведению вектора-плеча $\overrightarrow{OA}$ на вектор силы $\vec{F}$, т.е. $\vec{M} = \overrightarrow{OA} \times \vec{F}$.

Пример 2. Сила $\vec{F} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$ приложена к точке A(2, 1, 7). Найти величину момента силы относительно точки O(1, 4, 2).

Решение. Здесь $\overrightarrow{OA} = \vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ и $\vec{F} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$.

$$\vec{M} = \overrightarrow{OA} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 5 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 22\vec{i} + 14\vec{j} + 4\vec{k}. \qquad \left|\vec{M}\right| = \sqrt{484 + 196 + 16} = \sqrt{696}.$$

Пример 3. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол 45^0. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{p}$ и $\vec{q}$, где $\vec{p} = \vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{q} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ и $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 5$.

Решение. $S = \frac{1}{2}|\vec{p} \times \vec{q}| = \frac{1}{2}\left|(\vec{a} - 2\vec{b}) \times (3\vec{a} + 2\vec{b})\right| = \frac{1}{2}\left|3\vec{a} \times \vec{a} - 6\vec{b} \times \vec{a} + 2\vec{a} \times \vec{b} - 4\vec{b} \times \vec{b}\right| =$

$$= \frac{1}{2}\left|3 \cdot \vec{0} + 6\vec{a} \times \vec{b} + 2\vec{a} \times \vec{b} - 4 \cdot \vec{0}\right| = \frac{1}{2}\left|8\vec{a} \times \vec{b}\right| = 4|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin 45^0 = 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 50 \cdot \sqrt{2}.$$

У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Вычислить площадь треугольника с вершинами A(7,3,4), B(1,0,6), C(4,5,-2). Ответ: 24,5.

2. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, вычислить $\left|\left(3\vec{a} - \vec{b}\right) \times \left(\vec{a} - 2\vec{b}\right)\right|$. Ответ: 60.

Смешанное произведение трех векторов

Пусть даны три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Умножим $\vec{a}$ на $\vec{b}$ векторно , в результате получим вектор $\vec{a} \times \vec{b}$. Полученный вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ умножим на $\vec{c}$ скалярно. В результате получим число, которое называется <u>смешанным произведением</u> трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Это произведение обозначается символом $(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})$ или $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Основные свойства смешанного произведения:

1. $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right) = -\left(\vec{b}\vec{a}\vec{c}\right)$;
2. $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$ = 0, если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны;
3. модуль смешанного произведения равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right) = \begin{cases} V \quad \text{параллелепипеда, если } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \quad \text{правая} \quad \text{тройка}, \\ -V \text{ параллелепипеда, если} \quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \quad \text{левая} \quad \text{тройка}. \end{cases}$$

Если известны координаты перемножаемых векторов $\vec{a} = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, $\vec{b} = (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$, $\vec{c} = (\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$, то смешанное произведение вычисляется по формуле: $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.

Приложения смешанного произведения векторов

Из третьего свойства следует, что объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, выражается формулой $V_{\text{пар.}} = \left|\left(ab\vec{c}\right)\right|$ (рис. 19). Так как объем пирамиды, построенной на этих векторах, составляет 1/6 объема параллелепипеда, то $V_{\text{пир.}} = \frac{1}{6}\left|\left(ab\vec{c}\right)\right|$ (рис. 20) .

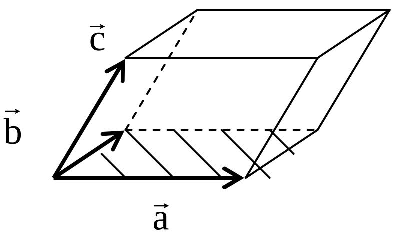


Рис. 19

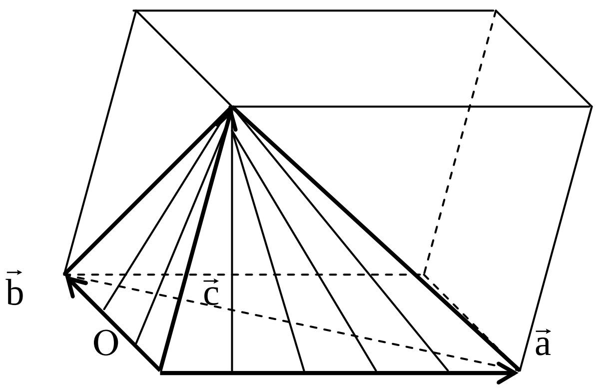


Рис.20

Пример. Найти объем пирамиды с вершинами О(0, 0, 0), А(3, 4, -1), В (2, 3, 5), С (6, 0, -3).

Решение. Здесь $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$, $\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$, $\overrightarrow{OC} = 6\vec{i} - 3\vec{k}$.

$$\left(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}\right) = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 135, \quad V_{\text{пир.}} = \frac{1}{6} \cdot 135 = \frac{135}{6} = 22{,}5 \quad \text{куб.ед.}$$

Задачи для самостоятельного решения

Даны четыре точки: А(1, 1, 1), В (2, 1, 2), С (-3, 3, -3), Д (0, 4, 5). Требуется найти:

1) длину вектора $\overrightarrow{AC}$. Ответ: 6;

2) угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Ответ: $\cos\varphi = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$;

3) площадь треугольника, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Ответ: $\sqrt{2}$ кв.ед;

4) проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на направление вектора $\overrightarrow{AC}$. Ответ: $-4/3$;

5) высоту треугольника АВС, опущенную из вершины С. Ответ: 2;

6) объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AД}$.
Ответ: 10 куб. ед.;

7) высоту пирамиды АВСД, опущенную из вершины Д. Ответ: $5/\sqrt{2}$.

3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Всякой линии L на плоскости XOY соответствует некоторое уравнение F(x,y)=0 с двумя переменными x и y . Это уравнение линии L.

Прямая линия на плоскости

Прямая линия ℓ задается уравнением первой степени относительно x и y.

$$\ell : Ax + By + C = 0. \qquad (6)$$

Это общее уравнение прямой ℓ. Здесь коэффициенты А и В есть координаты нормального вектора $\vec{N} = (A, B)$ (рис. 21).

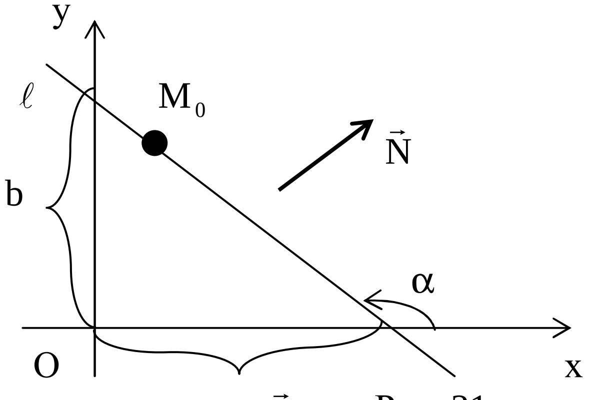


Рис. 21

Существуют другие виды уравнения прямой ℓ. Так, решив уравнения (6) относительно y , получим (если $B \neq 0$):

$$\ell : y = kx + b, \quad k = -\frac{A}{B}, \quad b = -\frac{C}{B}.$$

Это уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Здесь $k = tg\alpha$ - угловой коэффициент прямой, b – величина отрезка, отсекаемого прямой на оси OY (рис. 21).Если $C \neq 0$, то уравнение (6) можно записать в форме $\ell : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Здесь a и b - величины отрезков, которые прямая ℓ отсекает на осях OX и OY (рис. 21).

Если прямая проходит через две заданные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, то ее уравнение имеет вид $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

Пример. Прямая ℓ проходит через точки $M_1(-1{,}4)$ и $M_2(5{,}2)$. Написать ее уравнение, найти угловой коэффициент и отрезки, которые она отсекает на осях координат.

Решение. $\frac{x+1}{5+1} = \frac{y-4}{2-4}$, $\frac{x+1}{6} = \frac{y-4}{-2}$, $-2x - 2 = 6y - 24$, $x + 3y - 11 = 0$ - общее уравнение прямой. Отсюда следует, что $3y = -x + 11$ или $y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$ - уравнение прямой с угловым коэффициентом. Здесь $k = -\frac{1}{3}$. Из уравнения

$x + 3y - 11 = 0 \Rightarrow x + 3y = 11$, $\frac{x}{11} + \frac{3y}{11} = 1$, $\frac{x}{11} + \frac{y}{11/3} = 1$. Итак, a=11, b=$\frac{11}{3}$.

Если прямые $\ell_1 : y = k_1 x + b_1$ и $\ell_2 : y = k_2 x + b_2$ пересекаются в точке M (рис. 22), то угол поворота от ℓ_1 и ℓ_2 определяется по формуле

$$tg\Theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}. \qquad (7)$$

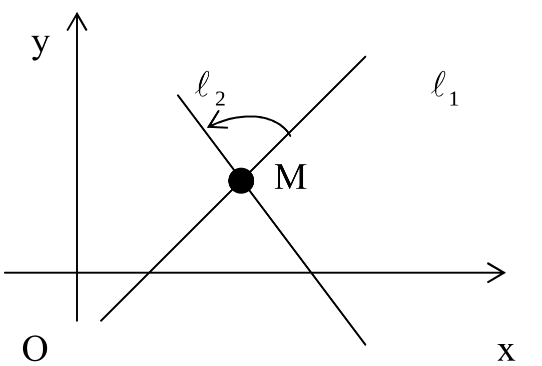


Рис. 22

В частности, если $\ell_1 \parallel \ell_2$, то $\Theta = 0$, $tg\Theta = 0$ и $k_1 = k_2$. Если же $\ell_1 \perp \ell_2$, то $\Theta = 90$, $tg\Theta = \infty$. Из формулы (7) следует, что $1 + k_1 \cdot k_2 = 0$ или $k_2 = -1/k_1$.

Пример. Найти угол между прямыми $\ell_1 : x + 2y + 6 = 0$ и $\ell_2 : 3x + y - 2 = 0$.

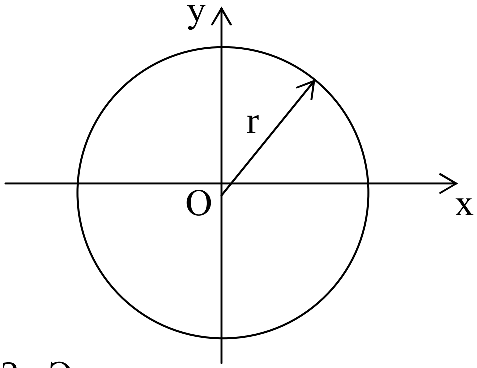
Решение. Так как $\ell_1 : y = -1/2x - 3$, то $k_1 = -1/2$.

Так как $\ell_1 : y = -3x + 2$, то $k_2 = -3$. $tg\Theta = \frac{-3 + 1/2}{1 + (-3) \cdot (-1/2)} = -1$, $\Theta = 135^0$.

Кривые второго порядка

Так называются линии, которые описываются уравнениями второй степени относительно x и y. К ним относятся окружность, эллипс, гипербола и парабола.

1. Окружность



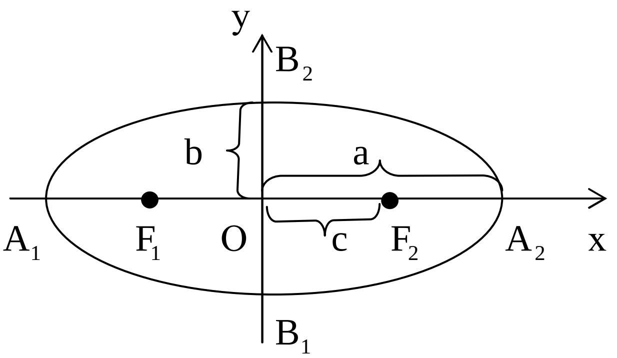
$x^2 + y^2 = r^2$ - каноническое уравнение,

x, y – текущие координаты окружности,

O – центр окружности,

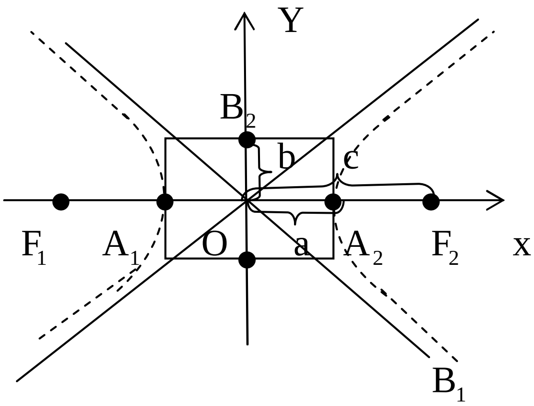
r – радиус окружности.

2. Эллипс



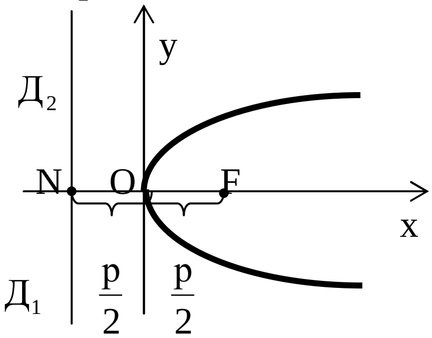
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ - каноническое уравнение , a – большая полуось эллипса, b – малая полуось. $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ - фокусы эллипса. Величины a, b, c связаны формулой $b^2 = a^2 - c^2$.

3. Гипербола



$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$-каноническое уравнение, a – действительная полуось, b - мнимая полуось, $F_1(-C,0)$, $F_2(C,0)$ - фокусы гиперболы, $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ - уравнения асимптот; величины a, b, c связаны формулой $b^2 = c^2 - a^2$.

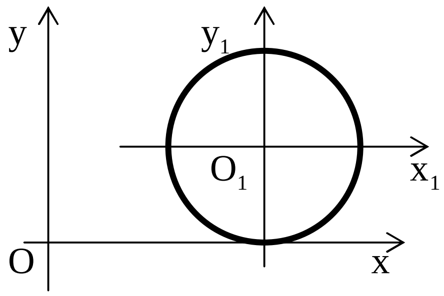
4. Парабола



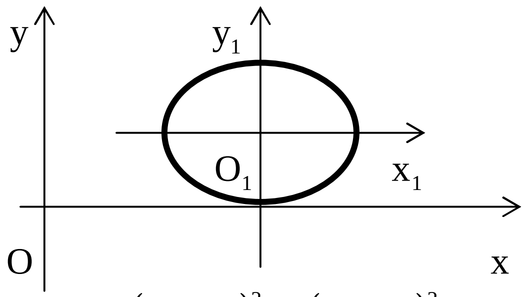
$y^2 = 2px$ - каноническое уравнение, $|NF| = p$ - параметр параболы, O – вершина параболы, $F(p/2, 0)$- фокус параболы. Прямая $Д_1Д_2$ - директриса. Уравнение $Д_1Д_2 : x = -p/2$.

Если изменить расположение кривой относите-льно системы координат, то изменится и урав-нение кривой, которое уже не будет каноническим. При этом возможны следующие случаи:

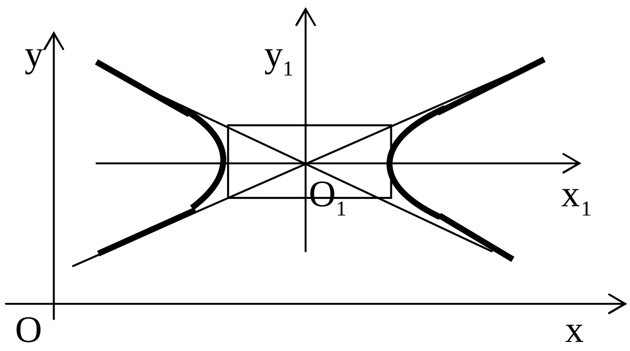
Центр кривой перенесен в точку $O_1(x_0, y_0)$ без изменения направления осей симметрии. Уравнения полученных кривых называют нормальными.



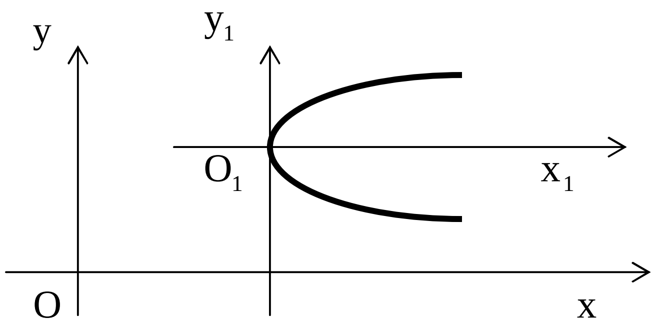
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$



$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$



$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$



$$(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$$

Полярная система координат

Она задается полярной осью ρ ,на которой указаны начало отсчета O и единица масштаба (рис.23).

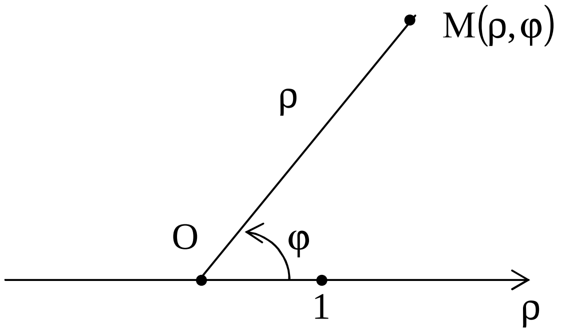


Рис. 23

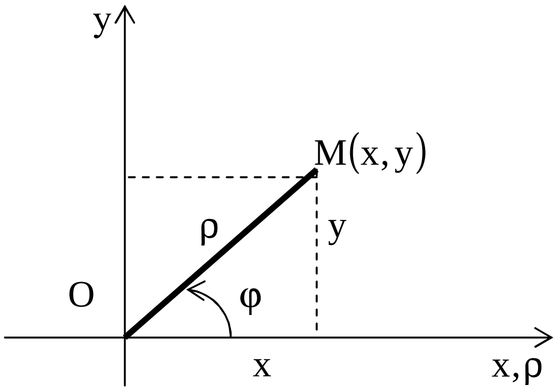


Рис. 24

В полярной системе всякая точка M имеет две координаты: расстояние ρ от полюса O до точки M, то есть $\rho=\left|\overrightarrow{OM}\right|$, и угол φ, который образует радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ с осью ρ. Числа ρ и φ называются полярными координатами точки M. Они изменяются в границах $0 \le \rho < +\infty$, $-\infty < \varphi < +\infty$.

Если полярную систему координат естественным образом совместить с декартовой системой XOY (рис. 24), то $x=\rho\cdot\cos\varphi$, $y=\rho\cdot\sin\varphi$. Это формулы, с помощью которых можно перейти от декартовых координат к полярным. Из этих формул следует, что $x^2+y^2=\rho^2$. Таким образом, полярные координаты выгодны в тех случаях, когда уравнение линии $L:F(x,y)=0$ содержит выражение x^2+y^2.

Пример. Уравнение кривой $L:(x^2+y^2)=a^2(x^2-y^2)$ записать в полярных координатах.

Здесь $\left(x^2+y^2\right)^2=\rho^4$, $x^2-y^2=\rho^2\left(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\right)=\rho^2\cos2\varphi$.

Поэтому $\rho^4=a^2\cdot\rho^2\cdot\cos2\varphi$, или $\rho^2=a^2\cdot\cos2\varphi$. Эта кривая называется лемнискатой Бернулли (рис. 25).

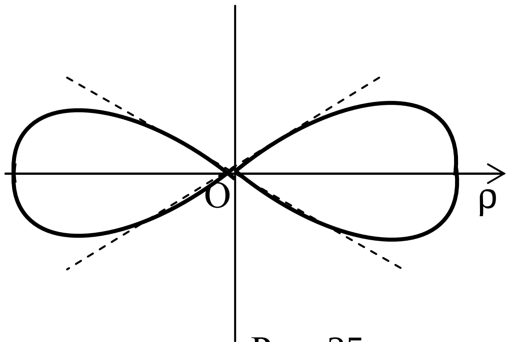


Рис. 25

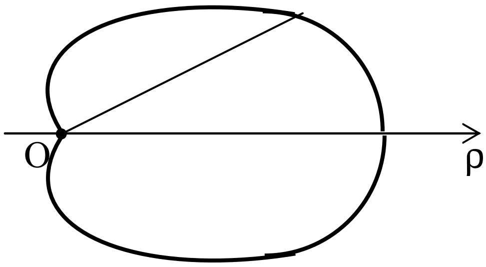


Рис. 26

Пример. Построить кривую $\rho=a(1+\cos\varphi)$. Эта кривая называется кардиоидой (рис. 26). Строим таблицу значений, придавая аргументу φ значения $0...2\pi$ с постоянным шагом $h=\pi/4$.

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	…	2π
ρ	2a	1,7a	a	0,3a	0	…	2a

В <u>обобщенной</u> полярной системе координат допускаются отрицательные значения полярного радиуса ρ. В этой системе $-\infty<\rho<+\infty$, $-\infty<\varphi<+\infty$. При этом точки $M_1(\rho,\varphi)$ и $M_2(-\rho,\varphi)$ строятся симметрично относительно полюса O. Например, из уравнения лемнискаты $\rho^2=a^2\cos2\varphi$ следует, что $\rho=\pm a\sqrt{\cos2\varphi}, a>0$.

Здесь $\cos\ 2\varphi\geq0$, $-\frac{\pi}{2}\leq2\varphi\leq\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{4}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{4}$. Строим таблицу значений.

φ	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{8}$	$-\frac{\pi}{12}$	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$
ρ	0	$\pm$ 0,8a	$\pm$ 0,9a	$\pm$ a	$\pm$ 0,9a	$\pm$ 0,8a	0

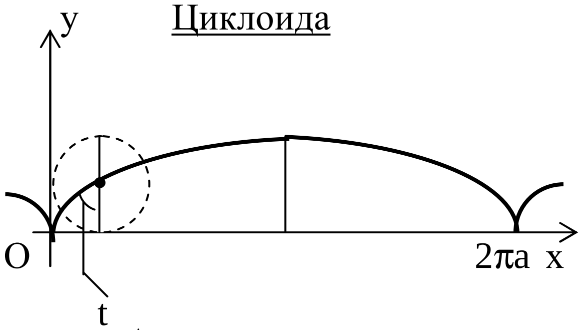
Уравнению $\rho=a\sqrt{\cos2\varphi}$ соответствует та часть лемнискаты, которая расположена в первой и четвертой четвертях, а уравнению $\rho=-a\sqrt{\cos2\varphi}$ - во второй и третьей четвертях.

Кривые, заданные параметрически

Линию L на плоскости XOY можно рассматривать как траекторию движущейся точки M (x,y). При этом ее координаты x и y изменяются в зависимости от некоторого параметра t. Обычно в качестве параметра t выступает либо время движения, либо угол поворота. Таким образом, параметрические уравнение линии L имеют вид $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, где $\alpha \le t \le \beta$.

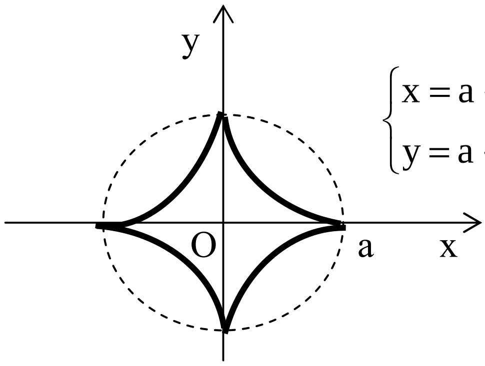
Примеры некоторых кривых, заданных параметрически

Циклоида



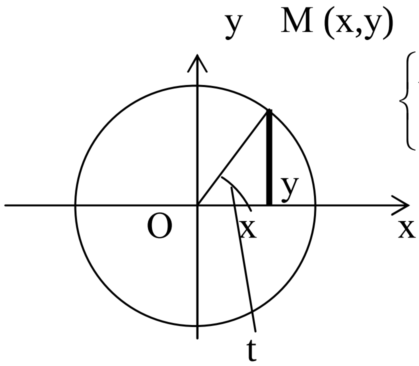
$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

Астроида



$$\begin{cases} x = a \cdot \cos^3 t, \\ y = a \cdot \sin^3 t. \end{cases}$$

Окружность



$$\begin{cases} x = a \cdot \cos t, \\ y = a \cdot \sin t. \end{cases}$$

Здесь t – угол поворота радиуса-вектора движущейся точки. Циклоиду описывает точка M, лежащая на окружности радиусом a, когда окружность движется по оси OX и описывает полный оборот. Астроиду описывает также точка, лежащая на окружности радиусом a/2, при ее движении внутри окружности радиусом a.

4. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

В пространстве XYZ всякой поверхности P соответствует уравнение F(x,y,z)=0 с тремя переменными x, y, z. Линия L в трехмерном пространстве определяется как результат пересечения двух поверхностей: $L = P_1 x P_2$. Таким образом, аналитически линия L задается системой двух уравнений с тремя переменными $L: \begin{cases} F_1(x,y,z) = 0 \\ F_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$. Простейшей из поверхностей является плоскость.

Плоскость

Плоскость π задается уравнением первой степени относительно x,y,z. $\pi: Ax + By + Cz + Д = 0$. Это общее уравнение плоскости. Здесь A, B, C - координаты нормального вектора $\vec{N} = (A, B, C)$ (рис. 27).

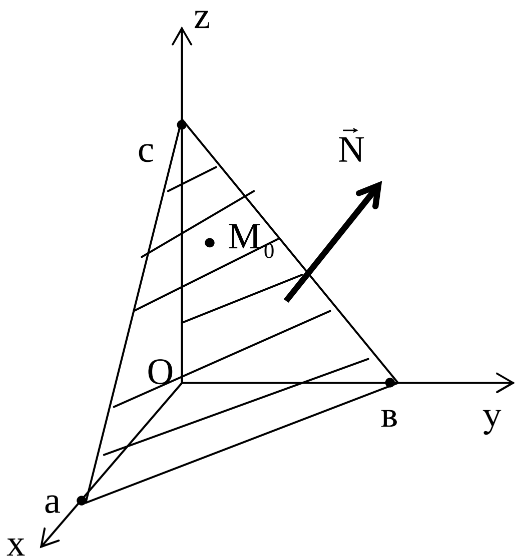


Рис. 27

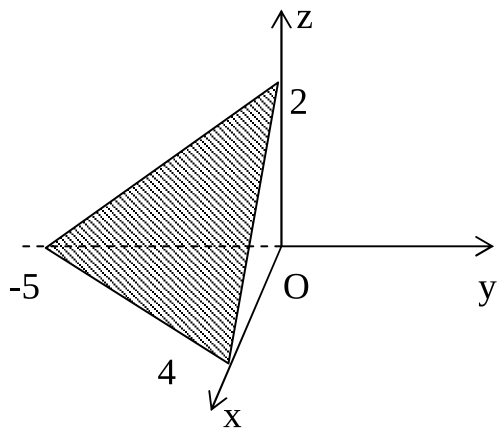


Рис. 28

Если плоскость π проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то ее уравнение имеет вид $\pi: A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$. Чтобы построить плоскость, рекомендуется ее уравнение записать в «отрезках»: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Пример. Построить плоскость 5x - 4y + 10z – 20 = 0 (рис. 28).

Решение. 5x – 4y + 10z= 20, $\dfrac{5x}{20}-\dfrac{4y}{20}+\dfrac{10z}{20}=1$, $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{-5}+\dfrac{z}{2}=1$.

Итак, a = 4, b = - 5, c = 2 .

Известно, что если точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ не лежат на одной прямой, то они определяют единственную плоскость. Ее уравнение имеет вид

$$\pi: \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Пример. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1,0,-3)$, $M_2(4,-1,2)$, $M_3(2,-2,1)$.

Решение. $\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z+3 \\ 4-1 & -1-0 & 2+3 \\ 2-1 & -2-0 & 1+3 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} x-1 & y & z+3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}=0.$

Разложим определитель по элементам первой строки:

$$(x-1)\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}+(z+3)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=0, \qquad 6(x-1)-7y-5(z+3)=0.$$

$\pi:\quad 6x-7y-5z-21=0$.

Пусть заданы две плоскости $\pi_1: \quad A_1x+B_1y+C_1z+Д_1=0, \quad \vec{N}_1(A_1,B_1,C_1)$,
$\pi_2: \quad A_2x+B_2y+C_2z+Д_2=0, \quad \vec{N}_2(A_2,B_2,C_2)$. Угол Θ между ними численно

равен углу между их нормальными векторами $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$, поэтому

$$\cos\Theta = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right| \cdot \left|\vec{N}_2\right|} = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

В частности, если $\pi_1 \| \pi_2$, то $\vec{N}_1 \| \vec{N}_2$ и $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$. Если же $\pi_1 \perp \pi_2$, то $\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2$; тогда $\cos\Theta = 0$, т.е. $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0$.

Пример. Какой угол образуют плоскости $\pi_1 : x - 2y - z + 4 = 0$, $\pi_2 = 3x + y - 2z - 7 = 0$?

Решение. Здесь $\vec{N}_1(1,-2,-1)$, $\vec{N}_2(3,1,-2)$, $\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = 3 - 2 + 2 = 3$. $\left|\vec{N}_1\right| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$, $\left|\vec{N}_2\right| = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$. $\cos\Theta = \frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}} = \frac{3}{2\sqrt{21}}$.

Прямая линия в пространстве

Известно, что две плоскости π_1 и π_2 пересекаются по прямой $\ell = \pi_1 \times \pi_2$. Поэтому уравнения прямой ℓ имеют вид

$$\ell : \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + Д_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + Д_2 = 0. \end{cases}$$

Это <u>общие уравнения</u> прямой ℓ в трехмерном пространстве.

Положение прямой ℓ будет определено, если известны некоторая точка $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ на этой прямой и вектор $\vec{S} = (m, n, p)$, которому прямая ℓ параллельна (рис. 29). Если $M = (x, y, z)$- произвольная точка прямой ℓ, то $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Так как $\overrightarrow{M_0M} \| \vec{S}$, то

$$\ell : \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \quad (8)$$

Здесь $\vec{S} = (m, n, p)$- направляющий вектор прямой ℓ.

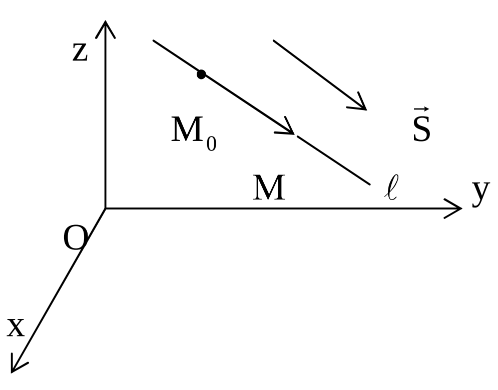


Рис. 29

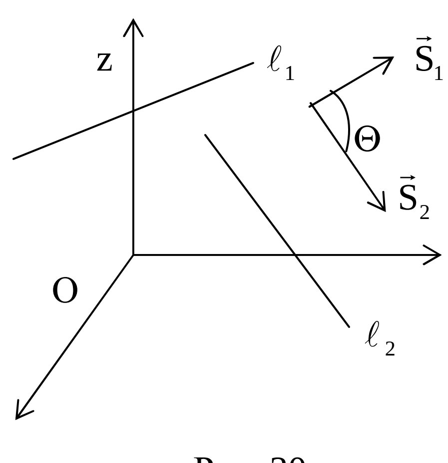


Рис. 30

Уравнеия (8) называются каноническими уравнения прямой ℓ.

Как и на плоскости, прямую ℓ в пространстве можно задать с помощью двух точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, через которые она проходит:

$$\ell: \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Пример. Написать уравнение прямой ℓ, которая проходит через точки $M_1(1,-3,5)$ и $M_2(0,4,-2)$.

$$\frac{x-1}{0-1} = \frac{y+3}{4+3} = \frac{z-5}{-2-5} \quad \text{или} \quad \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{7} = \frac{z-5}{-7}.$$

В механике часто используются <u>параметрические уравнения</u> прямой ℓ: $x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \quad z = z_0 + pt, \quad -\infty < t < +\infty$.

Пример. Уравнения полученной прямой записать в параметрической форме. Приравнивая каждое из отношений параметру t, получим

$\frac{x-1}{-1} = t, \frac{y+3}{7} = t, \frac{z-5}{-7} = t$. Отсюда следует, что x = - t + 1, y = 7t – 3, z = - 7t + 5.

Угол между двумя прямыми ℓ_1 и ℓ_2 - это угол Θ между их направляющими векторами (рис. 30) $\vec{S}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ и $\vec{S}_2 = (m_2, n_2, p_2)$.

Поэтому $\cos\Theta = \frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}{|\vec{S}_1| \cdot |\vec{S}_2|} = \frac{m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$.

Если $\ell_1 \| \ell_2$, то $\vec{S}_1 \| \vec{S}_2$, поэтому $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$. Если $\ell_1 \perp \ell_2$, то $\vec{S}_1 \perp \vec{S}_2$ и $\cos\Theta = 0$, поэтому $m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2 = 0$.

Пример. Написать уравнения прямой ℓ, которая проходит через точку $M(1,-2,3)$ параллельно прямой $\ell_1: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{-5}$.

Решение. Так как $\ell \| \ell_1$, то $\vec{S} \| \vec{S}_1$. Это значит, что в качестве направляющего вектора прямой ℓ можно взять вектор $\vec{S}_1 = (1,3,-5)$. Канонические уравнения искомой прямой имеют вид $\ell: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{-5}$.

Криволинейные поверхности второго порядка

Это поверхности, заданные уравнением второй степени с тремя переменными. К ним относятся сфера, трехосный эллипсоид, однополостный и двуполостный гиперболоиды, эллиптический и гиперболический параболоиды, конусы второго порядка. Их уравнения имеют следующий вид:

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ - сфера; $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ - эллипсоид;

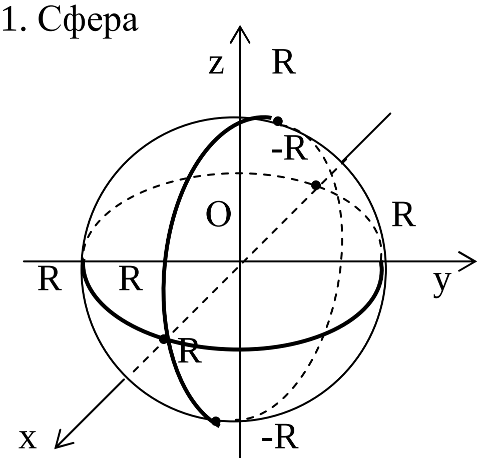
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ - однополостный гиперболоид;

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$ - двуполостный гиперболоид;

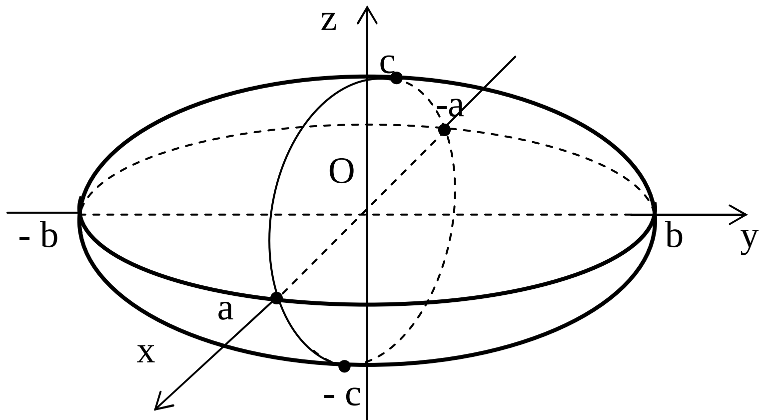
$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$$ - эллиптический параболоид;

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$$ - гиперболический параболоид.

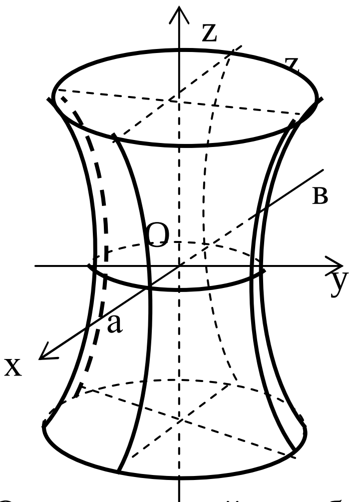
1. Сфера



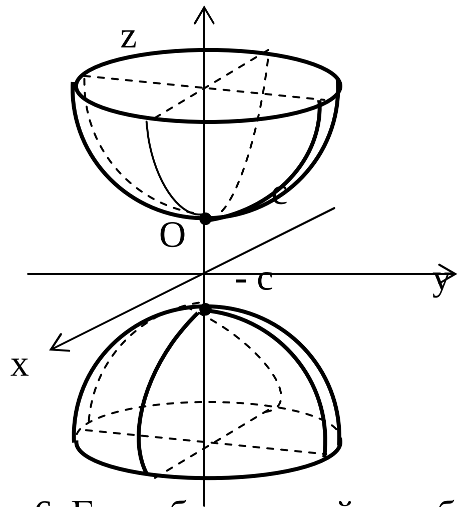
2. Эллипсоид



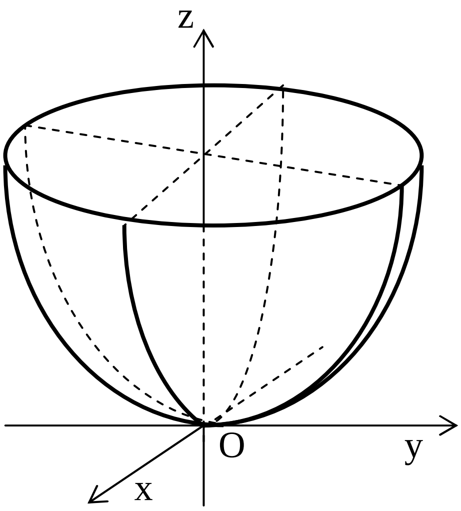
3. Однополостный гиперболоид



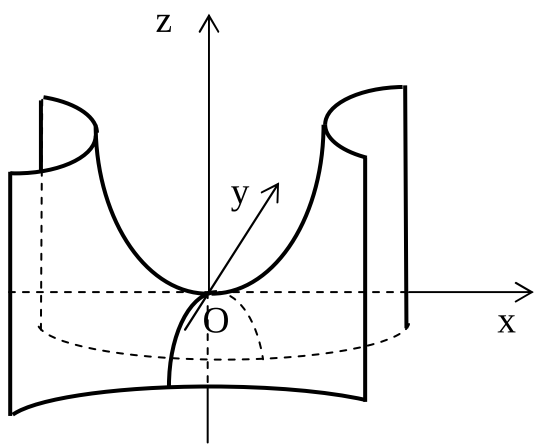
4. Двуполостный гиперболоид



5. Эллиптический параболоид



6. Гиперболический параболоид



5. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Функция $y = f(x)$ называется <u>бесконечно малой</u> при $x \to x_0$ или $x \to \infty$, если предел ее равен нулю, то есть $\lim\limits_{x \to x_0\ (x\to\infty)} f(x) = 0$. Обычно бесконечно малые функции обозначают $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x),...$. Так, например, $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, следовательно, $\alpha(x) = x^2$ есть бесконечно малая функция при $x \to 0$. Функция $\beta(x) = (x-1)^3$ будет бесконечно малой при $x \to 1$, так как $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^3 = 0$. Функция $\gamma(x) = \dfrac{1}{x}$ будет бесконечно малой при $x \to \infty$, так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = 0$.

Функция y= f(x) называется <u>бесконечно большой</u> при $x \to x_0$ или $x \to \infty$, если $\lim\limits_{x \to x_0\ (x\to\infty)} f(x) = \infty$. Такими будут функции f (x) = tg x при $x \to \dfrac{\pi}{2}$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{x-1}$ при $x \to 1$. Очевидно, что если $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to x_0$, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ - бесконечно большая функция при $x \to x_0$.

Упражнение. Пусть $x \to 0$. Какие из следующих функций будут бесконечно малые и какие бесконечно большие: $\sin^2 x$; $\dfrac{1}{x^2}$; ctgx; tgx; $1 - \cos x$.

Основные теоремы о пределах

Если функция y=f(x) и y=$\varphi(x)$ имеют пределы при $x \to x_0$, то выполняются следующие теоремы:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} c = c, \quad c = \text{const}$.
2. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x) \pm \varphi(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$.
3. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot\varphi(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$.
4. $\lim\limits_{x\to x_0}[c\cdot\varphi(x)] = c\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$.
5. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}$,если $\lim\limits_{x\uparrow x_0}\varphi(x) \neq 0$.
6. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^\alpha = \left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]^\alpha, \quad \alpha \in R$.

Непрерывные функции

Для существования предела $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не имеет значения, определена или нет эта функция в точке x_0. Например, функция $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ не определена при x = 0 (неопределенность $\dfrac{0}{0}$), однако $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ (первый замечательный предел).

Определение. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если выполнены следующие условия.

а) f(x) определена в точке x_0;

б) существуют лево- и правосторонние пределы в этой точке:

$A = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x), \quad B = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$;

в) однородные пределы совпадают, то есть A=B;

г) предел функции равен значению функции в предельной точке x_0, то есть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Если нарушено хотя бы одно из условий: а) – г), то в точке x_0 функция терпит разрыв. При этом x_0 - точка разрыва первого рода (точка конечного скачка), если существуют оба односторонних предела А и В; x_0 - точка разрыва второго рода (точка бесконечного скачка), если $A = \infty$ или $B = \infty$.

Функция $y = \dfrac{\sin x}{x}$ терпит разрыв первого рода в точке x = 0, так как

$A = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ и $B = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (рис.30). Здесь скачок функции $|B - A| = 0$.

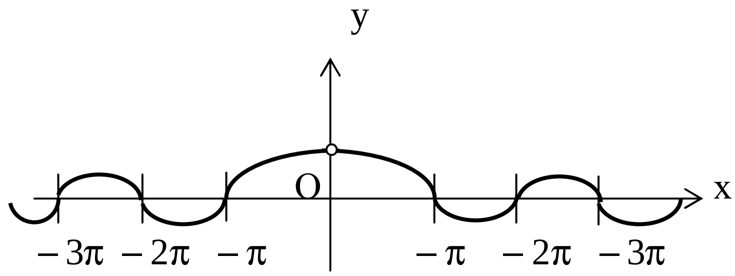


Рис. 30

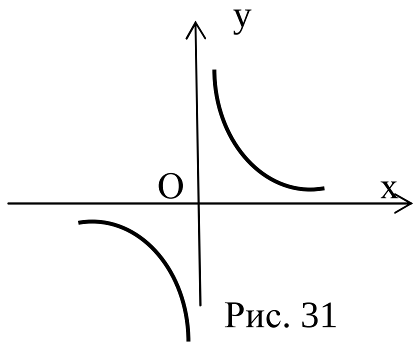


Рис. 31

Функция $y = \dfrac{1}{x}$ в точке x = 0 терпит разрыв, так как y(0) не существует (рис.32). Здесь $A = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} \dfrac{1}{x} = -\infty, \quad B = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} \dfrac{1}{x} = +\infty$. Точка x = 0 - точка разрыва.

Справедлива следующая теорема. Все основные элементарные функции непрерывны в области их определения.

Замечание. К основным элементарным относятся функции степенная $y = x^{\alpha}$, показательная $y = a^x$; логарифмическая $y = \log_a x$; тригонометрические: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$, $y = \sec x$, $y = \operatorname{cosec} x$; аркусы: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$; $y = arctgx$; $y = arcctgx$.

Кроме того, сложная функция, составленная из непрерывных функций, является непрерывной в области её определения. Так, например, функция $y = \sin x^2$ непрерывна всюду, так как она составлена из непрерывных функций $V = x^2$ и $y = \sin V$. Функция $y = \lg(2x - 1)$ непрерывна на $x > \dfrac{1}{2}$.

Из условия г) непрерывности $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ следует, что для нахождения предела непрерывной функции достаточно вместо x подставить его предельное значение x_0, например: $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x - x^2 + \sqrt{x}}{x+3} = \dfrac{2\cdot 4 - 4^2 + \sqrt{4}}{4+3} = -\dfrac{6}{7}$.

Условие г) непрерывности можно записать в следующей форме:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right)$, то есть у непрерывной функции <u>знак предела и знак функции</u> можно переставлять местами. Это основное свойство непрерывной функции, которое широко используется при вычислении пределов.

Примеры.

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\log_a f(x)\right] = \log_a\left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right] = \log_a f(x_0)$.

2. $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{\alpha} = \left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]^{\alpha} = \left[f(x_0)\right]^{\alpha}$.

3. $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{\varphi(x)} = \left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)} = \left[f(x_0)\right]^{\varphi(x_0)}$.

Раскрытие математических неопределенностей

1. При вычислении $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ возможен случай, когда $f(x_0) = 0, \quad \varphi(x_0) = 0$, то есть дробь $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ терпит разрыв в точке x_0. Тогда говорят, что имеем неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Происходит это потому, что функция $f(x)$ и $\varphi(x)$ содержит сомножитель $(x - x_0)$, который обращается в нуль при $x = x_0$. Необходимо его выделить и сократить дробь на $x - x_0$ по следующей схеме:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{(x - x_0)f_1(x)}{(x - x_0)\varphi_1(x)} = \frac{f_1(x_0)}{\varphi_1(x_0)}.$$

Пример. $A = \lim\limits_{x\to 6}\dfrac{2x^2 - 11x - 6}{3x^2 - 19x + 6} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$**.** Найдем корни трехчленов

$$2x^2 - 11x - 6 = 0,\ x_1 = 6,\ x_2 = -\frac{1}{2},\ 2x^2 - 11x - 6 = 2(x-6)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (x-6)(2x+1);$$

$$3x^2 - 19x + 6 = 0,\ x_1 = 6,\ x_2 = \frac{1}{3},\quad 3x^2 - 19x + 6 = 3(x-6)\left(x - \frac{1}{3}\right) = (x-6)(3x-1);$$

$$A = \lim_{x\to 6}\cdot\frac{2x^2 - 11x - 6}{3x^2 - 19x + 6} = \lim_{x\to 6}\frac{\cancel{(x-6)}(2x+1)}{\cancel{(x-6)}(3x-1)} = \lim_{x\to 6}\frac{2x+1}{3x-1} = \frac{13}{17}.$$

Пример. $A = \lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{6-x} - 1}{3 - \sqrt{4+x}} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$. Умножим числитель и знаменатель на сопряженные им выражения

$$A=\lim_{x\to 5}\frac{\left(\sqrt{6-x}-1\right)\cdot\left(\sqrt{6-x}+1\right)\cdot\left(3+\sqrt{4+x}\right)}{\left(3-\sqrt{4+x}\right)\cdot\left(\sqrt{6-x}+1\right)\cdot\left(3+\sqrt{4+x}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{\left[\left(\sqrt{6-x}\right)^2-1\right]\cdot\left(3+\sqrt{4+x}\right)}{\left[9-\left(\sqrt{4+x}\right)^2\right]\cdot\left(\sqrt{6-x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{(5-x)\cdot\left(3+\sqrt{4+x}\right)}{(5-x)\cdot\left(\sqrt{6-x}+1\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{3+\sqrt{4+x}}{\sqrt{6-x}+1}=\frac{6}{2}=3.$$

Во многих случаях следует использовать первый замечательный предел и следствия из него:

$$\lim_{v\to 0}\frac{\sin v}{v}=1,\quad \lim_{v\to 0}\frac{\mathrm{tg} v}{v}=1,\quad \lim_{v\to 0}\frac{\arcsin v}{v}=1,\quad \lim_{v\to 0}\frac{\mathrm{arctg} v}{v}=1.$$

Замечание. Следует помнить, что все эти формулы верны, когда функция делится на её аргумент. Например, если $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=1$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot\sin 3x}{3x}=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3.$$

Пример. $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{5x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{5x^2}=\frac{2}{5}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=\frac{2}{5}$**.**

2. Если при $x\to x_0$ $f(x)\to\infty$ и $\varphi(x)\to\infty$, то отношение $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ представляет неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$. В этом случае рекомендуется числитель и знаменатель разделить на старшую степень x.

Пример.

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{4x-7-2x^3}{7x+x^3}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x-7-2x^2}{x^3}}{\frac{7x+x^3}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x^2}-\frac{7}{x^3}-2}{\frac{7}{x^2}+1}=\frac{0-0-2}{0+1}=-2.$$

Пример.

$A=\lim\limits_{x\leftarrow\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Здесь старшая степень x^1, поэтому

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{x}}{\frac{\sqrt[4]{x^3+x}-x}{x}}=\lim_{x\leftarrow\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}+\sqrt{\frac{x}{x^2}}}{\sqrt[4]{\frac{x^3+x}{x^4}}-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{1}{x}}}{\sqrt[4]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}-1}=-1.$$

При вычислении $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-\varphi(x)\right]$возможен случай, когда $f(x)\to+\infty$ и $\varphi()x\to+\infty$.Тогда разность $f(x)-\varphi(x)$ есть неопределенность вида $\infty-\infty$. С помощью тождественных преобразований она приводится к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Пример. $A=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{1}{1-x}\right)=(\infty-\infty).$

Приведем дроби к общему знаменателю. Так как $1-x^3=(1-x)(1+x+x^2)$, то

$$A=\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)}-\frac{1}{1-x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{3-(1+x+x^2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim_{x\to 1}\frac{2-x-x^2}{(1-x)(1+x+x^2)}\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=\frac{3}{3}=1.$$

Пример. $A=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x-3}-\sqrt{2x+1}\right)\quad(\infty-\infty).$

Умножим и разделим на сопряженное выражение $\sqrt{4x-3}+\sqrt{2x+1}$, тогда

$$A=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{4x-3}-\sqrt{2x+1}\right)\cdot\left(\sqrt{4x-3}+\sqrt{2x+1}\right)}{\sqrt{4x-3}+\sqrt{2x+1}}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{4x-3}\right)^2-\left(\sqrt{2x+1}\right)^2}{\sqrt{4x-3}+\sqrt{2x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2x-4}{\sqrt{4x-3}+\sqrt{2x+1}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{2x-4}{x}}{\dfrac{\sqrt{4x-3}+\sqrt{2x+1}}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{2-\dfrac{4}{x}}{\sqrt{\dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{x^2}}+\sqrt{\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}=\frac{2}{0}=\infty.$$

Раскрытие степенных неопределенностей $1^\infty, \infty^0, 0^0$

Пусть надо найти $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{\varphi(x)}$. Если при этом

$f(x)\to 1$ и $\varphi(x)\to\infty$, то имеем неопределенность 1^∞;

$f(x)\to\infty$ и $\varphi(x)\to 0$, то имеем неопределенность ∞^0;

$f(x)\to 0$ и $\varphi(x)\to 0$, то имеем неопределенность 0^0.

Эти неопределенности раскрываются с помощью второго замечательного предела

$$\lim_{v\to\infty}\left(1+\frac{1}{v}\right)^v=e,\quad e=2{,}71828...$$

Широко используются также следствия из этой формулы:

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=e,\quad \lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=1,\quad \lim_{\alpha\to 0}\frac{e^\alpha-1}{\alpha}=1.$$

Примеры.

1. $A=\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{1/x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right]^3=e^3,\quad \alpha=3x.$

2. A=$\lim\limits_{x\leftarrow\infty}\left(\dfrac{3x+5}{3x+1}\right)^x$. Здесь $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+5}{3x+1}=1$, поэтому получим неопределенность

вида 1^∞.Так как $\dfrac{3x+5}{3x+1}=\dfrac{(3x+1)+4}{3x+1}=1+\dfrac{4}{3x+1}$, то

$$A=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{3x+1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{3x+1}\right)^{\frac{3x+1}{4}}\right]^{\frac{4x}{3x+1}}.$$ Обозначим $\frac{4}{3x+1}=\alpha,$ тогда $\alpha\to 0$

при $x\to\infty$, причем $\frac{3x+1}{4}=\frac{1}{\alpha}$. Найдем предел основания:

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{3x+1}\right)^{\frac{3x+1}{4}}=\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=e$. Найдем предел показателя: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{3x+1}=\frac{4}{3}$.

Таким образом, $A=e^{\frac{4}{3}}$.

3. $A=\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{1/\sin^2 x}$. Это неопределенность вида 1^{∞}.

Так как $\cos 2x=1+(\cos 2x-1)=1+\left(-2\sin^2 x\right)=1+\alpha$, где $\alpha=-2\sin^2 x$, то

$$A=\lim_{x\to 0}\left\{\left[1+(-2\sin^2 x)\right]^{\frac{1}{-2\sin^2 x}}\right\}^{\frac{-2\operatorname{sim}^2 x}{\sin^2 x}}=\lim_{\alpha\to 0}\left\{(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin^2 x}{\sin^2 x}}=e^{-2}.$$

4. $A=\lim\limits_{x\to\infty}\{x[\ln(x+1)-\ln x]\}$. Это неопределенность вида $0\cdot\infty$. Так как

$x\cdot[\ln(x+1)-\ln x]=x\cdot\ln\frac{x+1}{x}=x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$, то используя свойство непрерывности логарифмической функции, найдем

$$A=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]=\ln e=1.$$

5. $A=\lim\limits_{x\to 1}(7-6x)^{x/3x-3}$. Неопределенность вида 1^{∞}. Так как $7-6x=1+(6-6x)$, то, полагая $\alpha=6-6x$, получим

$$A=\lim_{x\to 1}\left\{\left[1+(6-6x)\right]^{1/6-6x}\right\}^{(6-6x)x/3x-3}=\lim_{\alpha\to 0}\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{-6x(x-1)}{3(x-1)}}=e^{-2}.$$

Эквивалентные бесконечно малые функции

Две бесконечно малые функции $\alpha=\alpha(x)$ и $\beta=\beta(x)$ при $x\to x_0$ или $x\to\infty$ называются эквивалентными, если предел их отношения равен единице.

Эквивалентность бесконечно малых функций записывается в виде $\alpha(x)\sim\beta(x)$ **.** Таким образом, если $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то $\alpha(x)\sim\beta(x)$ **.** В последующем для упрощения записи аргумент x будем опускать. Эквивалентные бесконечно малые функции широко используются при вычислении пределов, так как они обладают следующими свойствами : если $\alpha_1\sim\alpha_2$ и $\beta_1\sim\beta_2$ **,** то $\lim\frac{\alpha_1}{\beta_2}=\lim\frac{\alpha_1}{\beta_2}$. Другими словами, при вычислении предела отношения двух бесконечно малых функций их можно заменять эквивалентными бесконечно малыми функциями. Так, например, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{x}=3$, так как $\sin 3x\sim 3x$.

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций

$\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1,\quad \lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\alpha}{\alpha}=1,\quad \lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}\alpha}{\alpha}=1,\quad \lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\arcsin\alpha}{\alpha}=1$. Поэтому $\sin\alpha\sim\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha\sim\alpha$, $\mathrm{arctg}\alpha\sim\alpha$, $\arcsin\alpha\sim\alpha$ **при** $\alpha\to 0$. Так как

$\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=1,\quad \lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{e^{\alpha}-1}{\alpha}=1,\quad \lim\dfrac{\sqrt{1+\alpha}-1}{1/2\alpha}=1,$ то $\ln(1+\alpha)\sim\alpha$,

$e^{\alpha}-1\sim\alpha$, $\sqrt{1+\alpha}-1\sim\dfrac{1}{2}\alpha$ при $\alpha\to 0$.

Примеры.

1. $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\mathrm{tg}8x}=\left|\begin{matrix}\sin 3x\sim 3x\\ \mathrm{tg}8x\sim 8x\end{matrix}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{8x}=\dfrac{3}{8}.$

2. $A=\lim\limits_{x\leftarrow 0}\dfrac{\sqrt{1+\mathrm{tg}3x}-1}{\ln(1+4x)}=\left|\begin{matrix}\sqrt{1+\mathrm{tg}3x}-1\sim\dfrac{1}{2}\mathrm{tg}3x\sim\dfrac{1}{2}\cdot 3x\\ \ln(1+4x)\sim 4x\end{matrix}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{3}{2}x}{4x}=\dfrac{3}{8}.$

3. $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}\left(e^{2x}-1\right)}{\sin 5x}=\left|\begin{matrix}e^{2x}-1\sim 2x\\ \sin 5x\sim 5x\end{matrix}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}\cdot 2x}{5x}=\dfrac{2}{5}\lim\limits_{x\to 0}e^{-x}=\dfrac{2}{5}e^{0}=$
$=2/5\cdot 1=2/5.$

.4. $A=\lim\limits_{x\leftarrow\infty}\left[x\cdot\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\left|e^{\frac{1}{x}}-1\sim\dfrac{1}{x}\right|=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1.$

Примеры для самостоятельного решения

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+1}{2x^3+x^2+3}$.
2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+x-12}{x^2-5x+4}$.
3. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{x^3+2x+12}$.
4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$.
5. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{16-x^2}{x^3-64}$.
6. $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}$.
7. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{3-x}$.
8. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2-\sqrt{6+x}}{\sqrt{7-x}-3}$.
9. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{\sqrt{x+2}-2}$.
10. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-\sqrt{3x+4}}{16-x^2}$.
11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-4x^2+8}{-5x^3+2x^2+x}$.
12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x-1}{3x^2-5x+6}$.

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+5}{x^3+3x+7}$.

14. $\lim\limits_{x\to-3}\left(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{6}{9-x^2}\right)$.

15. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+3}-x\right)$.

16. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x}\right)$.

17. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x-1}-x\right)$.

18. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+7x}\right)$.

19. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{tg}6x}{\sin 13x}$.

20. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(1-x)}{x^2-1}$.

21. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 5x}{\mathrm{tg}2x}$.

22. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 3x}{1-\cos 5x}$.

23. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln^2(1+2x)}{\sin^2 6x+\arcsin^3 x}$.

24. $\lim\limits_{x\to0}\sin 2x\cdot \mathrm{ctg}3x$.

25. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-3x)}{\sin 6x}$.

26. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$.

27. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{1-\cos x/2}$.

28. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(e^{x-3}-1)\cdot\cos\pi x}{\mathrm{arctg}(x^2-9)}$.

29. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 4x}$.

30. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}$.

31. $\lim\limits_{x\to0}x\cdot\mathrm{ctg}3x$.

32. $\lim\limits_{x\to0}(1-\cos x)\mathrm{ctg}x$.

33. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+3}\right)^{x+1}$.

34. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{7x+3}{9x+3}\right)^{\frac{1}{x}}$.

35. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6-x}{7-x}\right)^{\frac{1-x^3}{x^2}}$.

36. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{3x-1}\right)^{x+3}$.

37. $\lim\limits_{x\to0}\left(1+x+x^2\right)^{1/\sin x}$.

38. $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{1/x^2}$.

Ответы

1. $\frac{10}{66}$	2. ∞	3. $\frac{1}{14}$	4. 1	5. $-\frac{1}{6}$	6. $\frac{4}{9}$	7. $-\frac{1}{3}$
8. $\frac{6}{5}$	9. $\frac{8}{3}$	10. $-\frac{5}{64}$	11. $-\frac{3}{5}$	12. ∞	13. 0	14. $-\frac{1}{6}$
15. -3	16. 0	17. ∞	18. $-\frac{7}{2}$	19. $\frac{6}{13}$	20. $-\frac{1}{2}$	21. $\frac{5}{2}$
22. $\frac{18}{25}$	23. $\frac{1}{9}$	24. $\frac{2}{3}$	25. $-\frac{1}{2}$	26. $\frac{1}{2}$	27. 4	28. $-\frac{1}{6}$
29. $\frac{1}{8}$	30. -2	31. $\frac{1}{3}$	32. 0	33. e	34. $e^{-\frac{2}{3}}$	35. e^{-1}
36. 0	37. e	38. $e^{-1/2}$				

6. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

Пусть в некотором промежутке $[a,b]$ задана непрерывная функция $y=f(x)$. $x_0 \in [a,b]$- заданная точка (рис.33).

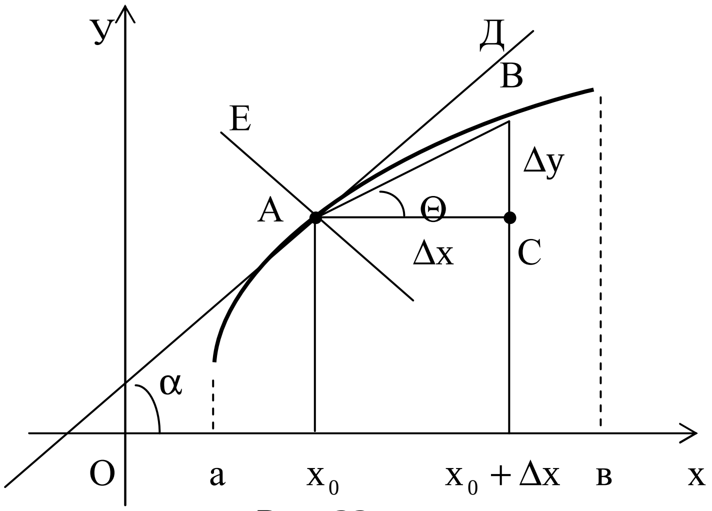


Рис. 33

Дадим аргументу x_0 приращение Δx, тогда функция получит приращение $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$, это величина отрезка ВС (рис.33).

Отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ называется <u>средней</u> скоростью изменения функции $y=f(x)$ в промежутке $[x_0; x_0+\Delta x]$, а предел этого отношения, когда $\Delta x \to 0$, называется <u>производной</u> <u>функции</u> $y=f(x)$ в заданной точке x_0. Таким образом, $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Замечание. *Если* $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ *не существует, то и производной* $f'(x_0)$ *тоже не существует.*

Производную функции $y=f(x)$ в произвольной точке x принято обозначать $f'(x)$ или $y'(x)$, или $\dfrac{dy}{dx}$. Если же точка x_0 задана, значение производной в этой точке записывают в виде $f'(x_0)$, $y'(x_0)$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$.

Производная функции в заданной точке характеризует скорость изменения функции в этой точке. Например, производная от пути по времени есть скорость движения, то есть $V(t)=\dfrac{ds}{dt}$; производная от скорости по времени дает ускорение движения $a(t)=\dfrac{dv}{dt}$. Если функция $Q=Q(t)$ выражает количество электричества, протекающего за время t через сечение проводника, то $\dfrac{dQ}{dt}=i(t)$ есть сила тока в момент времени t. Видно (рис. 33), что $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\mathrm{tg}Q$. Переходя к пределу при $\Delta x\to 0$,получаем $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\mathrm{tg}Q=\mathrm{tg}\alpha$. Итак, производная функции в заданной точке равна тангенсу угла α, который образует касательная в точке $A(x_0;y_0)$ с осью OX: $f'(x_0)=\mathrm{tg}\alpha$. Так как $\mathrm{tg}\alpha = K_{кас}$, то $K_{кас}=f'(x_0)$. Поскольку уравнение прямой с угловым коэффициентом имеет вид $y-y_0=k(x-x_0)$, то получим уравнение касательной АД: $y-y_0=f(x_0)(x-x_0)$(рис. 33).

Так как нормаль $AE \perp AД$, то $K_{н.}=-\dfrac{1}{K_{кас}}=-\dfrac{1}{f'(x_0)}$. Поэтому уравнение нормали АЕ имеет вид $y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0)$ (рис. 33).

Пример. Найти производную функции $y=\sin x$ в производной точке x.

Решение. $y(x)=\sin x, y(x+\Delta x)=\sin(x+\Delta x)$, тогда $\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)=$ $=\sin(x+\Delta x)-\sin x$. Так как $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$, то

$$\Delta y=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}.\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\cos(x+\Delta x)\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\Delta x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x\cdot 1=\cos x.$$

Замечание. *При нахождении предела следует помнить, что* $x=\mathrm{const}$, Δx - *переменная.*

Пример (самостоятельно). Пользуясь определением, найти производную функции $y=x^3$. Ответ: $y'=3x^2$.

Пример. Написать уравнение касательной и нормали к кривой $y=x^3$ в точке А (2; 8) (рис.34).

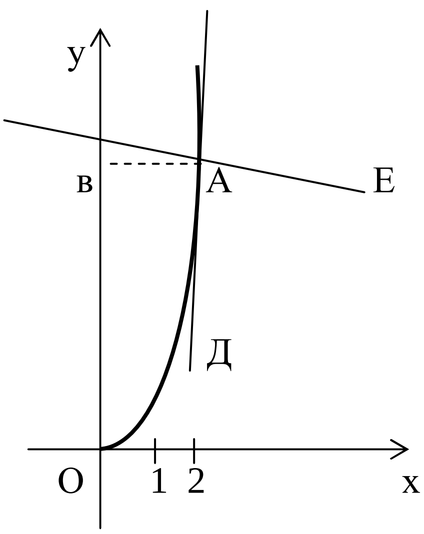


Рис. 34

Решение. Так как $y'=3x^2$, то $K_{кас}=3\cdot 2^2=12$, $K_н=-1/12$. Уравнение касательной $y-8=12(x-2)$ или $y=12x-16$. Уравнение нормали $y-8=-\dfrac{1}{12}(x-2)$ или $y=-\dfrac{1}{12}x+\dfrac{49}{6}$.

Основные правила дифференцирования

1. Производная константы равна нулю: $(c)'=0$.

2. Производная независимой переменной равна единице: $(x)'=1$.

3. Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ имеют производные в заданной точке x, то $(u+v)'=u'+v'$. $(uv)'=u'v+uv'$, $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

4. Постоянный множитель можно выносить за знак производной: $(cu)'=c\cdot u'$.

5. Если $y=f(u)$, где $u=\varphi(x)$, то y – сложная функция. Тогда $y'_x=y'_u\cdot u'_x$.

6. Если $y=f(u)$ и $x=\varphi(y)$ - взаимно обратные функции, то $y'_x=1/x'_y$.

Найти производные функций.

Пример. $y=5x^3$, $y'=5\cdot\left(x^3\right)'=5\cdot 3^2=15x^2$.

Пример. $y=x^3\cdot\sin x$, $y'=\left(x^3\right)\cdot\sin x+x^3(\sin x)'=3x^2\cdot\sin x+x^3\cos x$.

Пример. $y=\dfrac{\sin x}{2x^3}$,

$$y'=\left(\frac{\sin x}{2x^3}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{(\sin x)'\cdot x^3-\sin x\cdot\left(x^3\right)'}{x^6}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos x\cdot x^3-\sin x\cdot 3x^2}{x^6}=\frac{x\cos x-3\sin x}{2x^4}.$$

Пример. $y=\sin x^3$. Это сложная функция

$y=\sin u$, $u=x^3$, $y'=\left(\sin x^3\right)'=\cos x^3\cdot\left(x^3\right)'=3x^2\cdot\cos x^3$.

Производные основных элементарных функций

Все последующие функции предполагаются сложными: $u=u(x)$.

1. Производные степенных функции:

$$\left(u^{\alpha}\right)'=\alpha\cdot u^{\alpha-1}\cdot u',\alpha\in R.\ \left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}};\ \left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}.$$

2. Производные показательных функций:

$$\left(a^u\right)'=a^u\cdot\ln a\cdot u';\ \left(e^u\right)'=e^u\cdot u',\ \left(e^x\right)'=e^x.$$

3. Производные логарифмических функций:

$$\left(\log_a u\right)'=\frac{u'}{u\cdot\ln a};\ (\ln u)'=\frac{u'}{u};\ (\ln x)'=\frac{1}{x}.$$

4. Производные тригонометрических функций:

$$(\sin u)'=\cos u\cdot u';\quad (\cos u)'=-\sin u\cdot u';\quad (\mathrm{tg}u)'=\sec^2 u\cdot u';\quad (\mathrm{ctg}u)'=-\mathrm{cosec}^2u\cdot u';$$

$$(\sec u)'=\sec u\cdot\mathrm{tg}u\cdot u';\quad (\mathrm{cosec}u)'=-\mathrm{cosec}u\cdot\mathrm{ctg}u\cdot u'.$$

5. Производные обратных тригонометрических функций:

$$(\arcsin u)'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};\quad (\arccos u)'=-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};\quad (\mathrm{arctg}u)'=\frac{u'}{1+u^2};\quad (\mathrm{arcctg}u)'=-\frac{u'}{1+u^2}.$$

Примеры. Найти производные функций

Пример 1. $y=(5+3x)^7$, $y'=7\cdot(5+3x)^6\cdot(5+3x)'=21(5+3x)^6$.

Пример 2. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\cdot\left(x^2+1\right)'$.

$$y'=\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Пример 3. $y=\cos^2(x^2)$.

$$y'=2\cos\left(x^2\right)\cdot\left(\cos\left(x^2\right)\right)'=2\cos\left(x^2\right)\cdot\left(-\sin\left(x^2\right)\right)'\cdot\left(x^2\right)'=-2x\cdot\sin\left(2x^2\right).$$

Пример 4. $y=\arcsin\sqrt{x}$, $y'=\dfrac{\left(\sqrt{x}\right)'}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}}=\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$.

Пример 5. $y=\ln\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}\right)$.

$$y'=\frac{\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}\right)'}{\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}}=\frac{1}{\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}}\cdot\frac{\left(\sqrt{x-1}\right)'}{1+\left(\sqrt{x-1}\right)'}=\frac{1}{\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^3-x^2}}.$$

Примеры для самостоятельного решения.

1. $y=3x^2\sqrt{x}-4x\sqrt[4]{x^3}+9\sqrt[3]{x^2}-6x+\dfrac{4}{\sqrt{x}}-\dfrac{4}{7x^2\sqrt[3]{x}}$.

Указание. *Каждое слагаемое записать в виде степенной функции с дробным показателем степени.*

Ответ: $y'=7x\sqrt[3]{x}-7\sqrt[4]{x^3}+\dfrac{6}{\sqrt[3]{x}}-\dfrac{3}{\sqrt{x}}-\dfrac{2}{x\sqrt{x}}+\dfrac{4}{3x^3\sqrt[3]{x}}$.

2. $y=\sqrt[4]{\left(3+4\sqrt[3]{2x}\right)^3}$. Ответ: $y'=\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[4]{3+4\sqrt[3]{2x}}}$.

3. $y=\left(8x^3-21\right)\cdot\sqrt[3]{\left(7+4x^3\right)^2}$. Ответ: $y'=\dfrac{160x^5}{\sqrt[3]{4+4x^3}}$.

4. $y=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Ответ: $y'=\dfrac{1}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$.

5. $y=\left(\cos^2 x+2/3\right)\cdot\sin^3 x$. Ответ: $y'=5\sin^2 x\cdot\cos^3 x$.

6. $y=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x-2$. Ответ: $y'=\dfrac{4}{\sin^2 2x}$.

7. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1+x^2}$. Ответ: $y'=\dfrac{-2x}{2\cdot 2x^2+x^4}$.

8. $y=\ln\dfrac{x^2-2}{\sqrt{\left(6-2x^2\right)^3}}$. Ответ: $y'=\dfrac{x^3}{\left(x^2-2\right)\left(3-x^2\right)}$.

Указание. *Целесообразно предварительно выполнить логарифмирование* $y=\ln\left(x^2-2\right)-\frac{3}{2}\ln\left(6-2x^2\right)$.

Дифференцирование функций, заданных параметрически

Производная функции $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$, заданной параметрически, находится по формуле $y'=\frac{y_t'}{x_t'}$.

Пример. $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$ $\begin{matrix} x_t'=-3a\cos^2 t\cdot\sin t \\ y_t'=3a\sin^2 t\cdot\cos t \end{matrix}$, $y_x'=\frac{3a\sin^2 t\cdot\cos t}{-3a\cos^2 t\cdot\sin t}=-\mathrm{tg}t$.

Пример. $\begin{cases} x=\arcsin t \\ y=\ln\left(1-t^2\right) \end{cases}$, $x_t'=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, $y_t'=\frac{-2t}{1-t^2}$. $y_x'=\frac{(-2t)\sqrt{1-t^2}}{\left(1-t^2\right)\cdot 1}=\frac{-2t}{\sqrt{1-t^2}}$.

Примеры для самостоятельного решения.

1. $\begin{cases} x=a\left(t-\sin t\right) \\ y=a\left(1-\cos t\right) \end{cases}$. Ответ: $y'=\mathrm{ctg}\frac{t}{2}$.

2. $\begin{cases} x=\frac{1-t}{1+t} \\ y=\frac{2t}{1+t} \end{cases}$. Ответ: $y_x'=-1$.

3. $\begin{cases} x=2\cos t-\cos 2t \\ y=2\sin t-\sin 2t \end{cases}$. Ответ: $y_x'=\mathrm{tg}\frac{3t}{2}$.

4. $\begin{cases} x=t^3+3t+1 \\ y=3t^5+5t^3+1 \end{cases}$. Ответ: $y_x'=5t^2$.

Частные производные

Пусть дана формула $z=f(x,y)$ двух независимых переменных x и y. Будем считать $y=\text{const}$, а x дадим приращение Δx. Тогда функция получит <u>частное приращение</u> по переменной x: $\Delta_x z=f\left(x+\Delta x,y\right)-f\left(x,y\right)$, $y=\text{const}$.

Величина $\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ называется средней скоростью изменения функции $z=f\left(x,y\right)$ по переменной x, а ее предел при $\Delta x\to 0$ называется <u>частной производной</u> от этой функции по переменной x. Используются следующие обозначения этой производной: z_x', $\frac{\partial z}{\partial x}$, $f_x'\left(x,y\right)$.

Итак, $\frac{\partial z}{\partial x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x+\Delta x,y\right)-f\left(x,y\right)}{\Delta x}$, $y=\text{const}$.

Аналогично $\frac{\partial z}{\partial y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f\left(x,y+\Delta y\right)-f\left(x,y\right)}{\Delta y}$, $x=\text{const}$.

Все правила дифференцирования и формулы производных сохраняют силу при отыскании частных производных. Следует, однако, помнить, что при нахождении постоянной величиной считают $\frac{\partial z}{\partial x}$ y и наоборот: при нахождении $\frac{\partial z}{\partial y}$ постоянной считают x.

Примеры. Найти частные производные

1. $z = x^2 + 3x^3y^2 + 4y^3$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y^2\left(x^3\right)' + 0 = 2x + 3y^2 \cdot 3x^2 = 2x + 9x^2y^2; \quad y = \text{const}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 3x^3 \cdot \left(y^2\right)' + 4\left(y^3\right)' = 3x^3 \cdot 2y + 4 \cdot 3y^2 = 6x^3y + 12y^2; \; x = \text{const}.$$

2. $z = e^{x/y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x/y} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)' = e^{x/y} \cdot \frac{1}{y} \cdot (x)' = e^{x/y} \cdot \frac{1}{y}, \quad y = \text{const}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x/y} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)' = e^{x/y} \cdot x \cdot \left(\frac{1}{y}\right)' = e^{x/y} \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right), \quad x = \text{const}.$$

Примеры для самостоятельного решения.

Найти z'_x, z'_y.

1. $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$. Ответ: $z'_x = \frac{y}{x^2 + y^2}$, $z'_y = -\frac{x}{x^2 + y^2}$.
2. $z = x^y$. Ответ: $z'_x = y \cdot x^{y-1}$, $z'_y = x^y \cdot \ln x$.

Дифференцирование сложной функции

Рассмотрим функцию $z = f(u, v)$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ есть функции одной независимой переменной x. Производная $\frac{dz}{dx}$ находится по формуле

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} \quad . \tag{9}$$

и называется полной производной.

Аналогично, если $z = f(u, v, w)$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x)$, то полная производная находится по формуле

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{dw}{dx}. \tag{10}$$

В частном случае, если $z = f(x, u, v)$, а $u = u(x)$, $v = v(x)$, полная производная находится по формуле

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}. \tag{11}$$

Если $z = f(u, v)$, где $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, то z – сложная функция независимых переменных x и y, а её частные производные находятся по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Пример. Найти $\frac{dz}{dx}$, если $z=e^{u^2-v^2}$; $u=\cos x,\ \ v=\sin x$.

Воспользуемся формулой (9):

$$\frac{\partial z}{\partial u}=e^{u^2-v^2}\cdot\left(u^2-v^2\right)'_u=e^{u^2-v^2}\cdot 2u,\quad \frac{du}{dx}=-\sin x.$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=e^{u^2-v^2}\cdot\left(u^2-v^2\right)'_v=e^{u^2-v^2}\cdot(-2v),\ \frac{dv}{dx}=\cos x.$$

$$\frac{dz}{dx}=e^{u^2-v^2}\cdot 2u\cdot(-\sin x)+e^{u^2-v^2}\cdot(-2v)\cdot\cos x=-2\sin 2x\cdot e^{\cos 2x}.$$

Пример. Найти $\frac{\partial z}{\partial x};\ \frac{\partial z}{\partial y}$, если $z=u^2v-v^2u,\ u=x\cos y,\ \ v=x\sin y$.

$$\frac{\partial z}{\partial u}=2uv-v^2=2x\cos y\cdot x\sin y-x^2\sin^2 y=x^2\left(\sin 2y-\sin^2 y\right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=u^2-2vu=x^2\cos^2 y-2x\sin y\cdot x\cos y=x^2\left(\cos^2 y-\sin 2y\right);$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\cos y;\ \frac{\partial u}{\partial y}=-x\sin y;\ \frac{\partial v}{\partial x}=\sin y;\ \frac{\partial v}{\partial y}=x\cos y.$$

По формуле 11 получим

$$\frac{\partial z}{\partial x}=x^2\left(\sin 2y-\sin^2 y\right)\cdot\cos y+x^2\left(\cos^2 y-\sin 2y\right)\cdot\sin y=x^2(\cos y-\sin y)\cdot\left(\frac{3}{2}\sin 2y\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2\left(\sin 2y-\sin^2 y\right)\cdot(-x\sin y)+x^2\left(\cos^2 y-\sin 2y\right)\cdot x\cos y=x^3(\sin y+\cos y)\cdot$$

$$\cdot\left(1-\frac{3}{2}\sin 2y\right).$$

Пример. Найти полную производную $\frac{dz}{dx}$, если , $z=uvw$ где $u=x^2+1$, $v=\ln x;\ w=\mathrm{tg}x.$ Воспользуемся формулой (10):

$$\frac{\partial z}{\partial u}=v\cdot w;\ \frac{\partial z}{\partial v}=u\cdot w;\ \ \frac{\partial z}{\partial w}=u\cdot v;\ \frac{du}{dx}=2x;\ \frac{dv}{dx}=\frac{1}{x};\ \ \frac{dw}{dx}=\sec^2 x.$$

$$\frac{dz}{dx}=v\cdot w\cdot 2x+u\cdot w\cdot\frac{1}{x}+u\cdot v\cdot\sec^2 x=\ln x\cdot\mathrm{tg}x\cdot 2x+\frac{x^2+1}{x}\cdot\mathrm{tg}x+\frac{x^2+1}{\cos^2 x}\cdot\ln x.$$

Решите самостоятельно примеры

1. Найти $\frac{du}{dt}$, если $u=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, где

$x=R\cos t,\ \ y=R\sin t;\ \ z=H;\ \ R,H=\mathrm{const}.$ Ответ: $\frac{du}{dt}=0$.

2. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, $x = u \cdot \sin v$, $y = u \cdot \cos v$. Ответ: $\frac{\partial z}{\partial u} = 0$; $\frac{\partial z}{\partial v}$.

Дифференцирование функций, заданных неявно

Если функция $y = f(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$, то ее производная y' определяется формулой $y' = -F'_x / F'_y$. Аналогично, если функция двух переменных $z = f(x, y)$ задана неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$, то ее частные производные $z'_x = -F'_x / F'_z$, $z'_y = -F'_y / F'_z$.

Пример. Найти $\frac{dy}{dx}$, если $x^3 + y^3 - 3xy = 0$. Здесь $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$,

$$F'_x = 3x^2 - 3y, \quad F'_y = 3y^2 - 3x, \quad y' = \frac{x^2 - y}{x - y^2}.$$

Пример. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $x = z \cdot \ln\frac{z}{y}$.

Преобразуем уравнение

$$x - z \cdot \ln\frac{z}{y} = 0, \; x - z(\ln z - \ln y) = 0; \quad x - z \cdot \ln z + z \cdot \ln y = 0, F(x, y, z) = x - z\ln z + z\ln y;$$

$$F'_x = 1, \; F'_y = \frac{z}{y}, \; F'_z = -\ln z - z \cdot \frac{1}{z} + \ln y.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{-\ln z + \ln y - 1} = \frac{1}{1 + \ln\frac{z}{y}}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{z/y}{-\ln z - 1 + \ln y} = \frac{z}{y\left(1 + \ln\frac{z}{y}\right)}.$$

Примеры для самостоятельного решения

1. Найти $\frac{dy}{dx}$, если $\frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} - \sqrt[3]{\frac{y}{x}} = 0$. Ответ: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$.

2. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $x + \operatorname{arctg}\frac{y}{z - x} - z = 0$.

   Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z - x}{(z - x)^2 + y^2 + y}$.

3. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $x \cdot e^y + y \cdot e^x + z \cdot e^x = a$.

   Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\left(e^{y-x} + y + z\right)$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\left(x \cdot e^{y-x} + 1\right)$.

Полный дифференциал

Полным приращением функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ называется разность $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$, где $\Delta x, \Delta y$ - приращения аргументов.

Функция $z = f(x, y)$ называется дифференцируемой в точке (x, y), если в этой точке полное приращение можно представить в виде
$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y$, где α, β - бесконечно малые функции при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$.

Полным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называется главная часть полного приращения функции, линейная относительно приращения аргументов, т.е. $\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$. Дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращениями, т.е. $dx = \Delta x, dy = \Delta y$. Полный дифференциал вычисляется по формуле $dx = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$. Аналогично полный дифференциал функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ вычисляется по формуле $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} \partial z$.

Пример 1. $z = y \cdot \ln\left(x^2 - y^2\right)$. Найти dz.

Решение. $\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot \frac{2x}{x^2 - y^2} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 1 \cdot \ln\left(x^2 - y^2\right) + y \cdot \frac{-2y}{x^2 - y^2} = \ln\left(x^2 - y^2\right) - \frac{2y^2}{x^2 - y^2}.$$

Тогда $dz = \frac{2xy}{x^2 - y^2} dx + \left(\ln\left(x^2 - y^2\right) - \frac{2y^2}{x^2 - y^2} \right) dy$.

Пример 2. $u = \frac{y}{x} \cdot e^{xyz}$.

Решение. $\frac{\partial u}{\partial x} = y \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) \cdot e^{xyz} + \frac{y}{x} e^{xyz} \cdot yz = e^{xyz} \left(\frac{y^2 z}{x} - \frac{y}{x^2} \right) = e^{xyz} \cdot \frac{xy^2 z - y}{x^2}$.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x} \cdot e^{xyz} + \frac{y}{x} \cdot e^{xyz} \cdot xz = e^{xyz} \left(\frac{1}{x} + yz \right).$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{y}{x} \cdot e^{xyz} \cdot xy = y^2 e^{xyz}.$$

Тогда $du = e^{xyz} \cdot \frac{xy^2 z - y}{x^2} dx + e^{xyz} \left(\frac{1}{x} + yz \right) dy + y^2 e^{xyz} dz$.

Решить самостоятельно

1. Найти du, если $u = x^{y^2 z}$.
2. Найти dz, если $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$.

Если Δx и Δy достаточно малы по сравнению со значением аргументов, то справедливы приближенные равенства: $\Delta z \approx \Delta z$ и $f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) \approx f(x,y) + dz$.

Производные высших порядков

Частными производными второго порядка от функции $z = f(x,y)$ называются частные производные от ее частных производных первого порядка, т.е. $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{x^2}$, $\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{y^2}$. Частные производные по различным переменным называются смешанными производными, т.е.

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ - смешанные производные второго порядка.

Аналогично определяются частные и смешанные производные более высокого порядка.

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = z'''_{x^3}$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^3}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = z'''_{y^3}$ - частные производные третьего порядка.

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = z'''_{yyx}$, $\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial y} = z'''_{xyy}$ - смешанные производные третьего порядка.

Пример. $z = y \cdot \ln x$. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot \frac{1}{x} = \frac{y}{x}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \ln x$. $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{y}{x^2}$.

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(\ln x) = 0$. $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}$.

Решить самостоятельно примеры.

1. $z = x^2 y^3$. Проверить, что $\frac{\partial^5 z}{\partial x^2 \partial y^3} = \frac{\partial^5 z}{\partial y^3 \partial x^2}$.
2. $u = xy + \sin(x+y)$. Найти $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

Производная функции в данном направлении. Градиент функции

Производной функции $u = f(x,y,z)$ в точке $M(x,y,z)$ в направлении вектора $\bar{\ell} = \overline{MM_1}$ называется предел $\frac{\partial u}{\partial \ell} = \lim\limits_{|\overline{MM_1}| \to 0} \frac{f(M_1) - f(M)}{|\overline{MM_1}|}$. Если функция дифференцируема, то производная по направлению вычисляется по формуле $\frac{\partial u}{\partial \ell} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$, где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ - направляющие косинусы вектора $\bar{\ell}$.

Градиентом функции $u = f(x, y, z)$ в точке $M(x, y, z)$ называется вектор, координатами которого являются частные производные функции u:
$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}$.

Градиент функции и производная функции с направлением вектора $\bar{\ell}$ связаны формулой $\frac{\partial u}{\partial \ell} = \operatorname{grad} u \cdot \bar{\ell} = \text{пр}_{\bar{\ell}} \operatorname{grad} u$.

Градиент указывает направление наискорейшего роста функции в данной точке, при этом $\max \frac{\partial u}{\partial \ell} = |\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$.

Пример 1. Найти производную функции $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ в точке $M\ (1,2,1)$ в направлении вектора $\bar{r} = 2\bar{i} + 4\bar{j} + 4\bar{k}$.

Решение. $\frac{\partial u}{\partial \ell} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$.

$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = \left.\frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}\right|_M = \frac{2 \cdot 1}{1 + 4 + 1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = \left.\frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2}\right|_M = \frac{2 \cdot 2}{1 + 4 + 1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$,

$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = \left.\frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2}\right|_M = \frac{2 \cdot 1}{6} = \frac{1}{3}$, $\bar{\ell} = \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|}$; $\bar{r}(2;4;4)$; $|\bar{r}| = \sqrt{4 + 16 + 16} = 6$;

$\bar{\ell} = \left(\frac{2}{6}; \frac{4}{6}; \frac{4}{6}\right)$ или $\bar{\ell} = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right) \Rightarrow \cos\alpha = 1/3$; $\cos = 2/3$; $\cos\gamma = 2/3$.

Тогда $\frac{\partial u}{\partial \ell} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{9}$.

Пример 2. Найти наибольшую скорость изменения функции $u = \operatorname{tg} x - x + 3\sin y + z + \operatorname{ctg} z - \sin^3 y$ в точке $M\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. $\max \frac{\partial u}{\partial \ell} = |\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$, $\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}$.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = \left.\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\right|_M = \frac{1}{\cos^2 \pi/4} - 1 = 2 - 1 = 1.$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = \left.\left(3 \cdot \cos y - 3 \cdot \sin^2 y \cdot \cos y\right)\right|_M = 3 \cdot \cos\frac{\pi}{3} - 3 \cdot \sin^2\frac{\pi}{3} \cdot \cos^2\frac{\pi}{3} = 3 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} =$$
$$= \frac{3}{2} - \frac{9}{8} = \frac{3}{8}.$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = \left.\left(1 - \frac{1}{\sin^2 z}\right)\right|_M = 1 - \frac{1}{\sin^2 \pi/2} = 1 - 1 = 0.$$

$$\operatorname{grad} u=\bar{i}+\frac{3}{8}\bar{j}; \ \max\frac{\partial u}{\partial \ell}=\sqrt{1^2+\left(\frac{3}{8}\right)^2}=\frac{\sqrt{73}}{8}.$$

Решить самостоятельно.

Пример 1. Найти производную функции $u=xy^2z^3$ в точке M (3; 2; 1) в направлении вектора $\overline{MN}$, где N (5; 4; 2). Ответ: 68/3.

Пример 2. Найти производную функции $z=x^2-xy+y^2$ в точке M (1, 1) в направлении вектора $\bar{\ell}=6\bar{i}+8\bar{j}$. Ответ: 7/5.

Пример 3. Найти наибольшую скорость изменения функции $z=\arcsin\frac{x}{x+y}$ в точке M (1, 1).

Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Касательной плоскостью к поверхности в точке M называется плоскость, в которой лежат все касательные прямые, проведенные к кривым, лежащим на поверхности, проходящим через точку M.

Нормаль к поверхности называется прямая, проходящая через точку M и перпендикулярная касательной плоскости. Пусть поверхность задана уравнением $F(x,y,z)=0$ и точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ лежит на поверхности. Уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ имеет вид

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}(x-x_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}(y-y_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}(z-z_0)=0.$$

Уравнение нормали $$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}}.$$

Пример. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z=\sin x\cdot\cos y$ в точке $M_0\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4};\frac{1}{2}\right)$.

Решение. Уравнение поверхности $\sin x\cdot\cos y-z=0$.

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}=\cos x\cdot\cos y\Big|_{M_0}=\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}.$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}=\sin x\cdot(-\sin y)\Big|_{M_0}=-\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{2}, \quad \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}=-1.$$

Уравнение касательной плоскости имеет вид:

$$\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}\left(y-\frac{\pi}{4}\right)-1\left(z-\frac{1}{2}\right)=0;$$

$$x-\frac{\pi}{4}-\left(y-\frac{\pi}{4}\right)-2\left(z-\frac{1}{2}\right)=0; \quad x-\frac{\pi}{4}-y+\frac{\pi}{4}-2z+1=0; \quad x-y-2z+1=0.$$

Уравнение нормали $\dfrac{x-\frac{\pi}{4}}{1/2}=\dfrac{y-\frac{\pi}{4}}{-1/2}=\dfrac{z-\frac{1}{2}}{-1}$; $\dfrac{x-\frac{\pi}{4}}{1}=\dfrac{y-\frac{\pi}{4}}{-1}=\dfrac{z-\frac{1}{2}}{2}$.

Экстремум функции двух переменных

Точка $M_0(x_0,y_0)$ называется точкой максимума функции $z=f(x,y)$, если существует такая окрестность точки M_0, что значение функции в точке M_0 больше, чем в любой другой точке окрестности, т.е. $(\forall(x,y))(f(x_0,y_0)>f(x,y))$.

Точка $M_0(x_0,y_0)$ называется точкой минимума функции $z=f(x,y)$, если существует такая окрестность точки M_0, что значение функции в точке M_0 меньше, чем в любой другой точке окрестности, т.е. $(\forall(x,y))(f(x_0,y_0)<f(x,y))$.

Точки $\min$ и $\max$ называются точками экстремума. Значение функции в точке $\max(\min)$ называется максимальным (минимальным).

Если точка $M_0(x_0,y_0)$ является точкой экстремума функции $z=f(x,y)$, то обе частные производные в этой точке равны нулю,

$$\begin{cases}\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}=0\\ \left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}=0\end{cases}$$ (необходимые условия экстремума).

Точки, в которых частные производные равны нулю, называются стационарными точками. Не всякая стационарная точка является точкой экстремума.

Пусть точка $M_0(x_0,y_0)$- стационарная точка функции $z=f(x,y)$.

Составим определитель $\Delta=\begin{vmatrix}\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0} & \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{M_0}\\ \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right|_{M_0} & \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0}\end{vmatrix}$.

1. Если $\Delta>0$, то функция в точке M_0 имеет экстремум, при этом если $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0}>0$ $\left(\text{или } \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0}>0\right)$, то точка M_0- точка минимума; а если $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0}<0$ $\left(\text{или } \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0}<0\right)$, то точка M_0 - точка максимума.

2. Если $\Delta<0$, то экстремума в точке M_0 нет.

3. Если $\Delta=0$, то требуется дополнительное исследование.

Пример. Найти экстремум функции $z=x^2+xy+y^2-3x-6y$.

Решение.

1. Находим частные производные первого порядка: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 3$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 6$.

2. Находим стационарные точки:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases}, \text{ откуда } \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}. \quad M_0(0;3) \text{ - стационарная точка.}$$

3. Находим частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$

и составляем определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0 \Rightarrow$ в точке M_0 экстремум существует. А так как $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} > 0$, то точка M_0 - точка $\min$. $z_{\min} = -9$.

Пример. Найти экстремум функции $z = x^3 + y^3 - 15xy$.

Решение.

1. $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 15y$.
$\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 15x$.

2. $$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x^2 - 15y = 0 \\ 3x^2 - 15y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ y^2 - 5x = 0, \end{cases}$$

$\frac{1}{25}x^4 - 5x = 0$, $x^4 - 125x = 0$, $x(x^3 - 125) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$, $x_2 = 5$.

Две стационарные точки $M_1(0;0)$, $M_2(5;5)$.

3. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -15$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$.

Исследуем точку $M_1(0;0)$: $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_1} = 0$, $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_1} = -15$, $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_1} = 0$, тогда

$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -15 \\ -15 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 125 < 0 \Rightarrow$ в точке M_1 экстремума нет.

Исследуем точку $M_2(5;5)$: $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_2} = 30$, $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_2} = -15$, $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_2} = 30$, тогда

$\Delta = \begin{vmatrix} 30 & -15 \\ -15 & 30 \end{vmatrix} = 900 - 125 > 0 \Rightarrow$ в точке M_2 экстремум существует. А так как $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_2} > 0$, то точка M_2 - точка $\min$,

$z_{\min} = 5^3 + 5^3 - 15 \cdot 5 \cdot 5 = 125 + 125 - 375 = -125$.

7. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Функция $F(x)$ называется <u>первообразной</u> функции $f(x)$, если $F'(x)=f(x)$. Так, для функции $f(x)=x^2$ первообразной будет функция $F(x)=\frac{x^3}{3}$, так как $\left(\frac{x^3}{3}\right)'=x^2$. Но первообразными будут также функции $\frac{x^3}{3}+1,\ \frac{x^3}{3}-5,\ ...,\ \frac{x^3}{3}+C$, так как производные от этих функций совпадают с x^2. Таким образом, если функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, то она имеет бесконечно много первообразных вида $F(x)+C$, где $C=\text{const}$. <u>Множество всех первообразных</u> для $f(x)$ иначе <u>называется неопределенным интегралом</u> от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$. Итак, $\int f(x)dx=F(x)+C$. Например, $\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+C,\ \int \sin x dx=-\cos x+C,\ \int e^x dx=e^x+C,\ \int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$.

Теорема существования: всякая непрерывная в промежутке $[a,в]$ функция $f(x)$ имеет на этом промежутке первообразную $F(x)$.

Свойства неопределенного интеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$.
2. $\int df(x)=f(x)+C$.
3. $d\left[\int f(x)dx\right]=f(x)dx$.
4. $\int c\cdot f(x)dx=c\int f(x)dx,\quad c=\text{const}$.
5. $\int[f(x)+\varphi(x)]dx=\int f(x)dx+\int\varphi(x)dx$.

Таблица неопределенных интегралов

Интегралы от степенных функций:

1. $\int v^{\alpha}dv=\frac{v^{\alpha+1}}{\alpha+1},\ \alpha\neq-1$. 2. $\int\frac{dv}{\sqrt{v}}=2\sqrt{v}+C$. 3. $\int\frac{dv}{v}=\ln|v|+C$.

Интегралы от показательных функций:

4. $\int a^v dv=\frac{a^v}{\ln a}+C$. 5. $\int e^v dv=e^v+C$.

Интегралы от тригонометрических функций:

6. $\int\sin v dv=-\cos v+C$. 7. $\int\cos v dv=\sin v+C$. 8. $\int \text{tg} v dv=-\ln|\cos v|+C$.

9. $\int \text{ctg} v dv=\ln|\sin v|+C$. 10. $\int\sec v dv=\ln\left|\text{tg}\left(\frac{v}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$. 11. $\int \text{cosec} v dv=\ln\left|\text{tg}\frac{v}{2}\right|+C$.

12. $\int\sec^2 v dv=\text{tg} v+C$. 13. $\int \text{cosec}^2 v dv=-\text{ctg} v+C$.

Последняя группа формул:

14. $\int\frac{dv}{v^2+a^2}=\frac{1}{a}\text{arctg}\frac{v}{a}+C$. 15. $\int\frac{dv}{v^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{v-a}{v+a}\right|+C$.

16. $\int \frac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}} = \arcsin\frac{v}{a} + C$.

17. $\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 \pm a^2}} = \ln\left|v + \sqrt{v^2 \pm a^2}\right| + C$.

Примеры.

1. $\int \frac{(x+1)^2 dx}{\sqrt[3]{x}} = \int \frac{x^2 + 2x + 1}{x^{1/3}} dx = \int x^{5/3} dx + 2\int x^{2/3} dx + \int x^{-1/3} dx =$

$= \frac{x^{8/3}}{8/3} + 2\frac{x^{5/3}}{5/3} + \frac{x^{2/3}}{2/3} + C \quad = \frac{3}{8} x^2 \sqrt[3]{x^2} + \frac{6}{5} x \sqrt[3]{x^2} + \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + C.$

2. $\int \frac{xdx}{\sqrt{9 - x^4}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{\sqrt{3^2 - (x^2)^2}} = \frac{1}{2} \arcsin\frac{x^2}{3} + C$.

3. $\int (2\sin x + 3\cos x) dx = 2\int \sin x dx + 3\int \cos x dx = -2\cos x + 3\sin x + C$.

4. $\int e^{5\cos x} \sin x dx$.

Применим формулу 5 из таблицы интегралов. Так как $d(5\cos x) = -5\sin x dx$, то сделаем поправку на «-1/5».

Тогда $\int e^{5\cos x} \sin x dx = -\frac{1}{5} \int e^{5\cos x} (-5\sin x) dx = -\frac{1}{5} \int e^{5\cos x} d(5\cos x) =$

$= -\frac{1}{5} e^{5\cos x} + C$.

5. $\int (10x^2 + 3)^4 x dx$.

Применим формулу 1 из таблиц ыинтегралов. Так как $d(10x^2 + 3) = 20xdx$, то делаем поправку на 1/20.

Тогда

$$\int (10x^2 + 3)^4 x dx = 1/20 \int (10x^2 + 3)^4 (20xdx) = 1/20 \int (10x^2 + 3)^4 d(10x^2 + 3) =$$

$$= 1/20 \frac{(10x^2 + 3)^5}{5} + C = \frac{(10x^2 + 3)^5}{100} + C.$$

6. $\int \mathrm{tg} 17x dx = 1/17 \int \mathrm{tg} 17x (17dx) = \quad |d(17x) = 17dx| \quad = 1/17 \int \mathrm{tg} 17x d(17x) =$

$= 1/17(-\ln|\cos 17x|) + C = -1/17 \ln|\cos 17x| + C.$

7. $\int \frac{\sqrt{1 + \ln 2x}}{x} dx$. Применим формулу 1 из таблицы интегралов. Так как

$d(1 + \ln 2x) = \frac{dx}{x}$, то

$$\int x \frac{\sqrt{1 + \ln 2x}}{x} dx = \int (1 + \ln 2x)^{1/2} \cdot \frac{dx}{x} = \int (1 + \ln 2x)^{1/2} d(1 + \ln 2) = \frac{2(1 + \ln 2x)^{3/2}}{3} + C.$$

Решить самостоятельно:

1. $\int \frac{\ln^3 2x dx}{x}$;	Ответ: $\frac{\ln^4 2x}{4} + C.$
2. $\int \frac{e^{-x} dx}{(5 + e^{-x})^3}$;	Ответ: $\frac{1}{2(5 + e^{-x})^2} + C.$

3. $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$;	Ответ: $\sqrt{x^2+2x+5}+C.$
4. $\int \frac{\cos 2x dx}{\sqrt[3]{7-3\sin 2x}}$;	Ответ: $-1/4\sqrt[3]{(7-3\sin 2x)^2}+C.$
5. $\int \frac{(1+\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$;	Ответ: $\frac{(1+\arcsin x)^3}{3}+C.$
6. $\int \frac{\sqrt[3]{(3-5tg x/2)^4}dx}{\cos^2 x/2}$;	Ответ: $-\frac{6}{35}\sqrt[3]{\left(3-5tg\frac{x}{2}\right)^7}+C.$
7. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$;	Ответ: $2e^{\sqrt{x}}+C.$
8. $\int 2^{5x}dx$;	Ответ: $\frac{2^{5x}}{5\ln 2}+C.$
9. $\int \frac{kdx}{ax+в}$;	Ответ: $\frac{k}{a}\ln\lvert ax+в\rvert+C.$
10. $\int \frac{xdx}{4+x^2}$;	Ответ: $\frac{1}{2}\ln(4+x^2)+C.$
11. $\int \frac{dx}{4+x^2}$;	Ответ: $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$
12. $\int \frac{xdx}{9-4x^4}$;	Ответ: $-\frac{1}{24}\ln\left\lvert\frac{2x^2-3}{2x^2+3}\right\rvert+C.$
13. $\int \sin\frac{x}{3}dx$;	Ответ: $-3\cos\frac{x}{3}+C.$
14. $\int \cos x\cdot 3^{\sin x}dx$;	Ответ: $\frac{3^{\sin x}}{\ln 3}+C.$
15. $\int x\cdot\sin\frac{1-x^2}{3}dx$;	Ответ: $\frac{3}{2}\cos\left(\frac{1-x^2}{3}\right)+C.$

Методы интегрирования

1. Интегралы, сводящиеся к последней группе формул

$$\int\frac{dv}{v^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{v}{a}+C. \qquad \int\frac{dv}{v^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{v-a}{v+a}\right\rvert+C.$$

$$\int\frac{dv}{\sqrt{a^2-v^2}}=\arcsin\frac{v}{a}+C. \qquad \int\frac{dv}{\sqrt{v^2\pm a^2}}=\ln\left\lvert v+\sqrt{v^2\pm a^2}\right\rvert+C.$$

1. Интегралы $\int\frac{mdx}{ax^2+вx+c}$; $\int\frac{mdx}{\sqrt{ax^2+вx+c}}$.

В числителе константа, в знаменателе квадратный трехчлен или корень квадратный из квадратного трехчлена. Чтобы такой интеграл привести к последней группе формул, надо в квадратном трехчлене выделить полный квадрат.

Примеры.

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}} = \ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+2}\right| + C;$

Применим формулу (17) из таблицы интегралов.

2. $\int \frac{dx}{x^2+5x+9} = \int \frac{dx}{\left(x^2+2x\frac{5}{2}+\frac{25}{4}\right)-\frac{25}{4}+9} = \int \frac{d\left(x+\frac{5}{2}\right)}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{11}}{2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{11}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{\left(x+\frac{5}{2}\right)}{\frac{\sqrt{11}}{2}} =$

$= \frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{2x+5}{\sqrt{11}} + C.$ Применим формулу (14) из таблицы интегралов.

2.Интегралы $\int \frac{(mx+n)dx}{ax^2+вx^2+c}$; $\int \frac{(mx+n)dx}{\sqrt{ax^2+вx+c}}$. В числителе линейная функция, в знаменателе квадратный трехчлен или корень квадратный из квадратного трехчлена. Чтобы такой интеграл привести к последней группе формул надо в числителе выделить дифференциал квадратного трехчлена; разбить интеграл на сумму интегралов; первый интеграл будет типа $\int \frac{dv}{v}$ или $\int \frac{dv}{\sqrt{v}}$, а второй – 1-го типа.

Примеры.

1. $\int \frac{3xdx}{2x^2+2x+5} = \quad \left|d\left(2x^2+2x+5\right)=(4x+2)dx\right| \quad = 3\int \frac{1/4[(4x+2)-2]dx}{2x^2+2x+5} =$

$= \left[\frac{3}{4}\int \frac{(4x+2)dx}{2x^2+2x+5} - \int \frac{2dx}{2x^2+2x+5}\right] = \frac{3}{4}\left[\int \frac{d\left(2x^2+2x+\right)}{2x^2+2x+5} - 2\cdot\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+5/2}\right] =$

$= \frac{3}{4}\left[\ln\left|2x^2+2x+5\right| - \int \frac{d(x+1/2)}{(x+1/2)^2+(3/2)^2}\right] =$

$= \frac{3}{4}\left[\ln\left|2x^2+2x+5\right| - \frac{1}{3/2}\operatorname{arctg}\frac{x+1/2}{3/2}\right] =$

$= \frac{3}{4}\ln\left|2x^2+2x+5\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{3} + C.$

2. $\int \frac{(5x+3)dx}{\sqrt{-x^2-2x+8}} = \int \frac{-\frac{5}{2}[(-2x-2)+2-6/5]}{\sqrt{-x^2-2x+8}}dx = \quad \left|d\left(-x^2-2x+8\right)=(-2x-2)dx\right|$

$= -\frac{5}{2}\left[\int \frac{(-2x-2)dx}{\sqrt{-x^2-2x+8}} + \frac{4}{5}\int \frac{dx}{\sqrt{8-(x^2+2x)}}\right] =$

$$=-\frac{5}{2}\left[\int\frac{d\left(-x^2-2x+8\right)}{\sqrt{-x^2-2x+8}}+\frac{4}{5}\int\frac{dx}{\sqrt{8-\left(x^2+2x+1-1\right)}}\right]=$$

$$=-\left[2\sqrt{-x^2-2x+8}+\frac{4}{5}\int\frac{dx}{\sqrt{9-(x+1)^2}}\right]=-5\sqrt{-x^2-2x+8}-2\arcsin\frac{x+1}{3}+C.$$

Интегрирование рациональных дробей

Рациональной дробью $R(x)$ называется отношение двух многочленов, то есть $R(x)=\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{в_0x^m+в_1x^{m-1}+...+в_m}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n}$. Если $m<n$, то дробь $R(x)$ называется правильной; если же $m\geq n$, то эта дробь неправильная. Приведем примеры. Следующие дроби правильные:

$$R_1(x)=\frac{1}{x^2-1},\ m=0, n=2;\qquad R_2(x)=\frac{2x+3}{x^2+5x-1},\ \ m=1, n=2.$$

Следующие дроби неправильные:

$$R_3(x)=\frac{x^4-2x^3+1}{x^2+2x+5},\ m=4, n=2;\qquad R_4(x)=\frac{x^2-4}{x^2+1},\ \ m=2, n=2.$$

Если дробь $R(x)$ неправильная, то есть $m\geq n$, то, разделив числитель на знаменатель, можно выделить целую часть – многочлен степени $m-n$. Другими словами, всякую неправильную дробь $R(x)$ можно представить в виде $R(x)=S_{m-n}(x)+R_1(x)$, где $S_{m-n}(x)$- многочлен степени $m-n$ и $R_1(x)$ - правильная дробь.

Пример. Выделить целую часть дроби $R(x)=\frac{x^5-4x^3+5x^2-7}{x^3-2x^2+4x+1}$.

$$\begin{array}{l|l}
x^5-4x^3+5x^2-7 & x^3-2x^2+4x+1 \\
\underline{x^5-2x^4+4x^3+x^2} & \overline{x^2+2x-4}\quad \text{(частное)} \\
\quad\ _\,2x^4-8x^3+4x^2-7 & \\
\quad\ \ \underline{2x^4-4x^3+8x^2+2x} & \\
\qquad\quad _\,-4x^3-4x^2-2x-7 & \\
\qquad\quad\ \ \underline{-4x^3+8x^2-16x-4} & \\
\qquad\qquad\ \ -12x^2+14x-3\quad \text{(остаток)} &
\end{array}$$

$$R(x)=\frac{x^5-4x^3+5x^2-7}{x^3-2x^2+4x+1}=x^2+2x-4+\frac{-12x^2+14x-3}{x^3-2x^2+4x+1}.$$

Определение. Следующие рациональные дроби называются простейшими первого, второго, третьего типов:

$$R_1(x)=\frac{A}{x-x_0},\ R_2(x)=\frac{A}{(x-x_0)^k},\ R_3(x)=\frac{Ax+B}{x^2+px+q}.$$

Здесь A, B, x_0, k, p, q есть заданные константы, причем k - натуральное число. Квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ имеет только комплексные корни.

Теорема о разложении рациональной дроби. Правильная рациональная дробь $R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ разлагается в сумму простейших дробей 1-3 типов в зависимости от корней знаменателя $P_n(x)$. При этом возможны следующие случаи:

а) если знаменатель $P_n(x)$ имеет простой вещественный корень $x = x_0$, то в разложении ему соответствует дробь первого вида $A/(x - x_0)$;

б) если $x = x_0$ - вещественный корень кратности k знаменателя $P_n(x)$, то в разложении ему соответствует сумма k дробей 1-2 типов:

$$\frac{A}{x - x_0} + \frac{B}{(x - x_0)^2} + \ldots + \frac{C}{(x - x_0)^k}.$$

в) если $x_{1,2} = (\alpha \pm \beta i)$ - простые комплексные корни $P_n(x)$,то в разложении им соответствует дробь третьего вида $\frac{Ax + B}{x^2 + px + q}$, причем x_1 и x_2 - суть корни трехчлена $x^2 + px + q$.

Разложение дроби на простейшие рекомендации проводить по следующей схеме.

1. Найти все корни знаменателя $P_n(x)$ и определить их кратность.
2. Разложить знаменатель $P_n(x)$ на множители.
3. Написать сумму простейших дробей, соответствующих корням знаменателя $P_n(x)$.

Пример. Написать разложение дроби $R(x) = \frac{2x^2 - 3x + 3}{x^3 - 2x^2 + x}$.

Здесь $P_3(x) = x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2$. Таким образом, $x_1 = 0$ - простой корень, ему соответствует дробь A/x, $x_2 = 1$- двукратный корень, ему соответствует сумма $\frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$; $\frac{2x^2 - 3x + 3}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$.

Пример. Написать разложение дроби $R(x) = \frac{1}{x^3 + 1}$.

Здесь $P_3(x) = x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$. Корни знаменателя: $x_1 = -1$- простой вещественный, $x_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$ -комплексные; $\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2 - x + 1}$.

Нахождение неопределенных коэффициентов

Коэффициенты A, B, C, . . . разложения можно находить двумя способами.

Первый способ. Приведем правую часть равенства

$$\frac{2x^2-3x+3}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2} \qquad (12)$$

к общему знаменателю: $\dfrac{2x^2-3x+3}{x(x-1)^2}=\dfrac{A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx}{x(x-1)^2}$.

Отсюда следует, что $2x^2-3x+3=A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx$. Придавая x значения $x=0, x=1, x=-1$, получим систему трех уравнений с тремя неизвестными A, B, C.

$$\begin{matrix} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{matrix} \quad \begin{cases} 3=A \\ 2=C \\ 8=4A+2B-C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3 \\ C=2 \\ B=-1. \end{cases}$$

Разложение дроби имеет вид $\dfrac{2x^2-3x+3}{x(x-1)^2}=\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{(x-1)^2}$.

Замечание. В качестве значений x удобно брать корни знаменателя.

Второй способ. После приведения равенства (12) к целому виду $2x^2-3x+3=A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx$ получим равенство двух многочленов второй степени $2x^2-3x+3=(A+B)x^2+(-2A-B+C)x+A$. Приравнивая коэффициенты при x^2, x и свободные члены, получим

$$\begin{array}{c|l} x^2 & A+B=2 \\ x^1 & -2A-B+C=-3 \\ x^0 & A=3 \end{array} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} B=-1 \\ C=2 \\ A=3 \end{cases}$$

Упражнение. Разложите на простейшие следующие дроби:

$R_1(x)=\dfrac{1}{x^3-1}$; $R_2(x)=\dfrac{x^2-x+2}{2x^2+x^3}$; $R_3(x)=\dfrac{3x+5}{x^4+x^3+x^2+x}$.

Разложив данную правильную рациональную дробь на простейшие, можно взять интеграл от обеих частей полученного равенства. Таким образом, интегрирование всякой рациональной дроби сводится в конечном счете к интегралам следующих трех видов: $J_1=\int\dfrac{A}{x-x_0}dx$, $J_2=\int\dfrac{A}{(x-x_0)^k}dx$, $J_3=\int\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$.

Пример. Найти интеграл $J=\int\dfrac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}dx$. Разделив числитель на знаменатель, получим $\dfrac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}=x+1+\dfrac{2}{x^3-x^2+x-1}$.

Поэтому $J=\int xdx+\int dx+2\int\dfrac{dx}{x^3-x^2+x-1}=\dfrac{x^2}{2}+x+2J_1$. Разложим знаменатель на множители: $x^3-x^2+x-1=(x-1)(x^2+1)$. Корню $x_1=1$ соответствует дробь

$\frac{A}{x-1}$, корням $x_{2,3}=\pm i$ соответствует дробь $\frac{Bx+C}{x^2+1}$, т.е.

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1} \text{ или } 1=A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1).$$

При $x=1,\ 1=2A,\ A=1/2$, при $x=0,\ 1=A-C,\ C=-1/2$,
при $x=-1,\ 1=2A+2B-2C,\ B=-1/2$.

$$J_1=\int\frac{dx}{(x-1)(x^2+1)}=\int\frac{1/2}{x-1}dx+\int\frac{(-1/2)x-1/2}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{xdx}{x^2+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}\text{arctg}x+C.$$

$$J=\frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\text{arctg}x+C.$$

Примеры для самостоятельного решения.
Найти следующие интегралы:

$J_1=\int\frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}$. Ответ: $J_1=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C$.

$J_2=\int\frac{(x^3+1)dx}{x^3-x^2}$. Ответ: $J_2=x+\frac{1}{x}+2\ln|x-1|-\ln|x|+C$.

$J_3=\int\frac{xdx}{x^3-1}$. Ответ: $J_3=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln|x^2+x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

Интегрирование по частям

Если $u=u(x)$ и $V=V(x)$ - дифференцируемые функции, то справедлива следующая формула интегрирования по частям: $\int udv=u\cdot v-\int vdu$.
При нахождении $\int f(x)dx$ подынтегральное выражение $f(x)dx$ разбивают на два сомножителя u и dv таким образом, чтобы вновь образованный интеграл $\int vdu$ был табличным или сводился к табличному.

Основные классы функций, интегрируемых по частям

1. Интегралы вида $J_1=\int P_n(x)\cos\alpha xdx$, $J_2=\int P_n(x)\sin\alpha xdx$, $J_3=\int P_n(x)e^{\alpha x}dx$.

Здесь $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n$ - многочлен n-й степени. Во всех случаях в качестве функции u(x) берется многочлен $P_n(x)$.

Пример. Найти $\int x\cos 3xdx$. Здесь u = x, dv = cos 3x dx.

$$J=\int x\cos 3xdx=\left|\begin{matrix}u=x, & dv=\cos 3xdx\\ du=dx, & v=1/3\sin 3x\end{matrix}\right|=\frac{1}{3}x\sin 3x-\frac{1}{3}\int\sin 3xdx=$$

$$=\frac{1}{3}x\sin 3x+\frac{1}{9}\cos 3x+C.$$

В общем случае, если многочлен k-й степени, формулу интегрирования по частям следует применить k раз.

Пример. $J=\int\left(x^2-1\right)e^{2x}dx=\begin{vmatrix} x^2-1=u, & dv=e^{2x}dx \\ du=2xdx, & v=1/2\cdot e^{2x}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)e^{2x}-\int xe^{2x}dx=$

$=\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)e^{2x}-J_1.$

$J_1=\int xe^{2x}dx=\begin{vmatrix} u=x, & dv=e^{2x}dx \\ du=dx, & v=1/2\cdot e^{2x}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}x\cdot e^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}x\cdot e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x};$

$J=\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)\cdot e^{2x}-\frac{1}{2}x\cdot e^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}+C.$

2. Интегралы, содержащие обратные тригонометрические функции или логарифмы:

$J_1=\int P_n(x)\arcsin\alpha x dx,\quad J_2=\int P_n(x)\mathrm{arctg}\alpha x dx,\quad J_3=\int P_n(x)\ln\alpha dx.$

Здесь в качестве функции u(x) следует взять обратную тригонометрическую функцию или логарифм.

Пример. $J=\int x\cdot\mathrm{arctg}x dx=\begin{vmatrix} u=\mathrm{arctg}x, & dv=xdx \\ du=\dfrac{dx}{1+x^2}, & v=\dfrac{x^2}{2}\end{vmatrix}=\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{1+x^2}=$

$=\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}x-\frac{1}{2}J_1.$

$J_1=\int\frac{\left(x^2+1\right)-1}{x^2+1}dx=\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\int dx-\int\frac{dx}{x^2+1}=x-\mathrm{arctg}x;$

$J=\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}x+C.$

Примеры для самостоятельного решения

1. $\int(x+2)^2\sin 5x dx$. Ответ: $C-\frac{1}{5}(x+2)^2\cos 5x+\frac{2}{25}(x+2)\sin 5x+\frac{2}{125}\cos 5x$.

2. $\int x\ln 3x dx$. Ответ: $\frac{x^2}{2}\ln 3x-\frac{x^2}{4}+C$.

3. $\int x^3 2^{3x}dx$. Ответ: $\frac{2^{3x}}{3\ln 2}\left(x^3-\frac{x^2}{\ln 2}+\frac{2x}{3(\ln 2)^2}-\frac{2}{9(\ln 2)^3}\right)+C$.

4. $\int(x+1)\cos^2\frac{x}{3}dx$. Ответ: $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}(x+1)\sin\frac{2x}{3}+\frac{9}{8}\cos\frac{2x}{3}+C$.

Итегрирование тригонометрических функций

Рассмотрим интеграл вида $J=\int f\left(\cos x,\sin x\right)dx$, где f рациональная функция относительно cos ← x и sin ← x. Такой интеграл с помощью так называемой универсальной тригонометрической подстановки $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$ приводится к интегралу от рациональной дроби относительно t. Замена переменных выполняется по следующим формулам: $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$.

Пример. Найти интеграл $J=\int\frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$. После замены переменных получим

$$J=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{8-4\frac{2t}{1+t^2}+7\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{2dt}{t^2-8t+15}=2\int\frac{dt}{(t-4)^2-1}=$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-4-1}{t-4+1}\right|+C=\ln\left|\frac{t-5}{t-3}\right|+C$$

Так как $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, то $J=\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-5}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3}\right|+C$. Подстановка $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ из-за универсальности приводит, как правило, к сложным рациональным дробям, поэтому эту подстановку используют только в крайних случаях. Многие интегралы можно найти проще. Рассмотрим примеры.

1. Интегралы

$J_1=\int\cos\alpha x\cdot\cos\beta x dx,\quad J_2=\int\sin\alpha x\cdot\sin\beta x dx,\quad J_3=\int\sin\alpha dx\cdot\cos\beta x dx$.

Здесь достаточно использовать школьные формулы:

$\cos\alpha\cdot\cos\beta=1/2[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$,

$\sin\alpha\sin\beta=1/2[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$,

$\sin\alpha\cos\beta=1/2[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]$.

Пример.

$$J=\int\sin 3x\cos 2x dx=1/2\int(\sin x+\sin 5x)dx=1/2\int\sin x dx+1/2\int\sin 5x dx=$$

$$=-1/2\cos x-1/10\cos 5x+C.$$

2. Интеграл $J=\int f(\cos x,\sin x)dx$, где поднтегральная функция четная относительно синуса и косинуса, т.е. $f(-\cos x,-\sin x)=f(\cos x,\sin x)$, то применяется подстановка $\operatorname{tg}x=t$; тогда $\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$; $\sin x=\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$;

$dx=\frac{dt}{1+t^2}$. Эта же подстановка приводит к цели, если $J=\int f(\operatorname{tg}x)dx$.

Примеры.

1. $$J=\int\frac{dx}{2-\sin^2 x}=|\operatorname{tg}x=t|=\int\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{2-\frac{t^2}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{t^2+2}=\frac{1}{\sqrt2}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt2}+C=\frac{1}{\sqrt2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt2}+C.$$

2. $$\int\frac{dx}{\sin^2 x+2\sin x\cdot\cos x-5\cos^2 x}=\left|\begin{matrix}\mathrm{tg}x=t, & \sin x=\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}};\\ \cos x=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, & dx=\dfrac{dt}{1+t^2}\end{matrix}\right|=$$

$$=\int\frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{\dfrac{t^2}{1+t^2}+2\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}-5\dfrac{1}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{t^2+2t-5}=\int\frac{d(t+1)}{(t+1)^2-\left(\sqrt{6}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{t+1-\sqrt{6}}{t+1+\sqrt{6}}\right|=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}x+1-\sqrt{6}}{\mathrm{tg}x+1+\sqrt{6}}\right|+C.$$

3. Интеграл вида $J=\int\sin^m x\cdot\cos^n xdx$. Здесь возможны следующие случаи:

а) Если m и n – четные и неотрицательные числа , то интеграл берется по формулам понижения степени:

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2};\quad \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}.$$

Пример. Найти интеграл $J=\int\cos^4 xdx$.

$$\cos^4 x=\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x\right)=\frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{8}(3+4\cos 2x+\cos 4x);$$

$$J=\frac{1}{8}(3+4\cos 2x+\cos 4x)dx=\frac{1}{8}\left(3x+2\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C;$$

б) если одно из чисел m и n - нечетное натуральное число, то используем формулы $\sin^2 x=1-\cos^2 x$, $\cos^2 x=1-\sin^2 x$.

Пример. Найти интеграл $J=\int\sin^3 x\cdot\cos^2 xdx$.

$$\sin^3 x\cdot\cos^2 x=\sin^2 x\cdot\cos^2 x\cdot\sin x=(1-\cos x)\cos^2 x\cdot\sin x=\left(\cos^2 x-\cos^4 x\right)\sin x.$$

$$J=\int\left(\cos^2 x-\cos^4 x\right)\sin xdx=\left|\begin{matrix}\cos x=t\\ -\sin xdx=dt\end{matrix}\right|=-\int\left(t^2-t^4\right)dt=-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+C=$$

$$=1/5\cos^5 x-1/3\cos^3 x+C.$$

4. Интегралы вида $J=\int\sec^n xdx$, $J=\int\mathrm{cosec}^m xdx$, где n и m – нечетные положительные числа, можно найти по частям следующим образом.

Пример. $J=\int\sec^3 xdx=\left|\begin{matrix}u=\sec x, & dv=\sec^2 xdx\\ du=\sec x\cdot\mathrm{tg}xdx, & v=\mathrm{tg}x\end{matrix}\right|=\sec x\cdot\mathrm{tg}x-\int\sec x\cdot\mathrm{tg}^2xdx=$

$$=\sec x\cdot\mathrm{tg}x-\int\sec x\left(\sec^2 x-1\right)dx.$$

Итак, $\int\sec^3 xdx=\sec x\cdot\mathrm{tg}x-\int\sec^3 xdx+\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$.

Отсюда $2\int \sec^3 x dx = \sec x \operatorname{tg} x + \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2}\sec x \cdot \operatorname{tg} x + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

Примеры для самостоятельного решения

1. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx;$ Ответ: $\frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$

2. $\int \sin^3 x\sqrt{\cos x}dx;$ Ответ: $2\sqrt{\cos^3 x}\left(\frac{1}{7}\cos^2 x - \frac{1}{3}\right) + C.$

3. $\int \sin 4x \cdot \sin 6x dx;$ Ответ: $\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{20}\sin 10x + C.$

4. $\int \frac{dx}{5+4\sin x};$ Ответ: $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3} + C.$

Интегрирование иррациональных функций

1. Тригонометрические подстановки.

Если интеграл вида $J_1 = \int f\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx$, то $x = a\sin t;\ dx = a\cos t;$

$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} = a\sqrt{1-\sin^2 t} = a \cdot \cos t.$

Если интеграл вида $J_2 = \int f\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right)dx$, то $x = a\operatorname{tg}t,\ dx = a\sec^2 t dt,$

$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2\operatorname{tg}^2 t} = a\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t} = a \cdot \sec t.$

Если интеграл вида $J_3 = \int f\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx$, то $x = a\sec t,\ dx = a\sec t \cdot \operatorname{tg}t \cdot dt,$

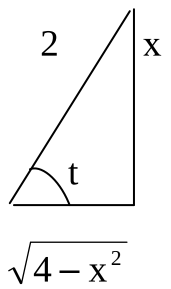
$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2\sec^2 t - a^2} = a\sqrt{\sec^2 t - 1} = a\operatorname{tg}t.$

Примеры.

1. $J = \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}dx = \left|\begin{matrix} x = 2\sin t \\ dx = 2\cos t dt \end{matrix}\right| = \int \frac{2\cos t}{2\sin t}2\cos t dt = 2\int \frac{\cos^2 t}{\sin t}dt =$

$$= 2\int \frac{1-\sin^2 t}{\sin t}dt = 2\int(\operatorname{cosec} t - \sin t)dt = 2\left[\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right| + \cos t\right] + C.$$

Возврат к старой переменной x проще выполнить с помощью треугольника.



$\sin t = x/2,\quad \cos t = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2},\ \operatorname{tg}\frac{t}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}} = \frac{1-\cos t}{\sin t};$

$\operatorname{tg}\frac{t}{2} = \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x};\ J = 2\ln\left|\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}\right| + \sqrt{4-x^2} + C.$

Пример 2. $\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-2}}=\left|\begin{array}{l}x=\sqrt{2}\cdot\sec t,\\ dx=\sqrt{2}\cdot\sec t\cdot \mathrm{tgt}dt\end{array}\right|=\int\frac{\sqrt{2}\sec t\cdot \mathrm{tgt}\cdot dt}{\left(\sqrt{2}\cdot\sec t\right)^3\sqrt{2\sec^2 t-2}}=$

$$=\int\frac{\sqrt{2}\cdot\sec t\cdot \mathrm{tgt}dt}{2\sqrt{2}\cdot\sec^3 t\cdot\sqrt{2}\mathrm{tgt}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{dt}{\sec^2 t}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\int\cos^2 tdt=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$

$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(t+\sin t\cos t\right)=J.$ Из подстановки $x=\sqrt{2}\sec t\Rightarrow$

$\frac{x}{\sqrt{2}}=\sec t\Rightarrow\cos t=\sqrt{2}/x,\ \sin t=\sqrt{1-\cos^2 t}=\sqrt{1-\frac{2}{x^2}};\quad t=\arccos\frac{\sqrt{2}}{x}.$

Тогда

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-2}}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{x}+\frac{\sqrt{2}}{x}\cdot\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}\right)=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{x}+\frac{\sqrt{2}\sqrt{x^2-2}}{x^2}\right)+C.$$

2. Интегралы вида $J_1=\int R\left(x,x^{\frac{m}{n}},x^{\frac{p}{q}},...,x^{\frac{r}{e}}\right)dx$, содержащие дробные степени x, приводятся к интегралам от рациональных функций с помощью подстановки $x=t^k$, где k- наименьший общий знаменатель дробных показателей x.

Интегралы вида $J_2=\int R\left(x,(ax+в)^{\frac{m}{n}},(ax+в)^{\frac{p}{q}},...,(ax+в)^{\frac{r}{e}}\right)dx$, содержащие дробные степени линейного двучлена $ax+в$, приводятся к интегралам от иррациональных функций с помощью подстановки $ax+в=t^k$, где k- наименьший общий знаменатель дробных показателей $ax+в$.

Примеры.

1. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x}+1\right)}=\int\frac{6t^5dt}{\sqrt{t^6}\left(\sqrt[3]{t^6}+1\right)}=\left|\begin{array}{l}\text{так как } x^{\frac{1}{2}} \text{ и } x^{\frac{1}{2}}\text{, то применим}\\ \text{подстановку } x=t^6;dx=6t^5dt\end{array}\right|=\int\frac{6t^5dt}{t^3\left(t^2+1\right)}=$

$$=6\int\frac{t^2dt}{t^2+1}=6\int\frac{\left(t^2+1\right)-1}{t^2+1}dt=6\left[\int\frac{t^2+1}{t^2+1}dt-\int\frac{dt}{t^2+1}\right]=6\left[\int dt-\int\frac{dt}{t^2+1}\right]=6(t-\mathrm{arctgt})=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{вернемся к } x:\\ x=t^6\Rightarrow t=\sqrt[6]{x}\end{array}\right|=6\sqrt[6]{x}-6\cdot\mathrm{arctg}\sqrt[6]{x}+C.$$

2. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}=\left|\begin{array}{l}\text{здесь } (2x+1)^{2/3} \text{ и } (2x+1)^{1/2}\text{, то применим}\\ \text{подстановку } 2x+1=t^6;\ dx=3t^5dt\end{array}\right|=\int\frac{3t^5dt}{\sqrt[3]{\left(t^6\right)^2}-\sqrt{t^6}}=$

$$=3\int\frac{t^5dt}{t^4-t^3}=3\int\frac{t^2dt}{t-1}=3\int\left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt=3\left(\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right)=\left|2x+1=t^6\Rightarrow\sqrt[6]{2x+1}\right|=$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt[6]{(2x+1)^2}+3\sqrt[6]{2x+1}+3\ln\left|\sqrt[6]{2x+1}-1\right|+C.$$

Примеры для самостоятельного решения.

1. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$. Ответ: $C-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

2. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}dx}{x}$. Ответ: $\sqrt{x^2-1}-\arccos\frac{1}{x}+C$..

3. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}$. Ответ: $\frac{6}{5}\left(\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt[12]{x^5}+2\ln\left|\sqrt[12]{x^5}-1\right|\right)+C$.

4. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}dx$. Ответ: $2\sqrt{1+\ln x}-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1+\ln x}}{1-\sqrt{1+\ln x}}\right|+C$.

Определенный интеграл и его приложения

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$. Разобьем этот отрезок произвольно на n частей точками $x_0=a, x_1, x_2, ..., x_n=b$. В каждом из образовавшихся отрезков $[x_{i-1}, x_i]$возьмем произвольную точку $\overline{x}_i$ и вычислим в ней функцию $f(\overline{x}_i)$, обозначив длину соответствующего отрезка $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, составим сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\cdot\Delta x_i$, которая называется <u>интегральной</u> суммой функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Определение. Предел интегральной суммы при условии, что число частичных отрезков неограниченно увеличивается, а длина наибольшего из них стремится к нулю, <u>называется определенным интегралом</u> от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\Delta x_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\cdot\Delta x_i$$

Заметим, чтобы существовал предел т.е. <u>чтобы существовал определенный интеграл</u>, достаточно, чтобы подинтегральная функция $f(x)$ была наотрезке интегрирования $[a,b]$ <u>непрерывной</u>.

Свойства определенного интеграла

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

2. $\int_a^b [\ c_1f_1(x)\pm c_2f_2(x)\ ]dx = c_1\int_a^b f_1(x)dx \pm c_2\int_a^b f_2(x)dx$, ($c_1$ и c_2 – постоянные).

3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, где $a\le c\le b$.

4. Если $(\forall x\in[a,b])f(x)\le\varphi(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx$.

5. Теорема <u>об оценке</u> определенного интеграла. Если m- наименьшее, M – наибо-

-льшее значения $f(x)$ на $[a,b]$ то $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$.

6. Теорема <u>о среднем</u> значении $f(x)$ на $[a,b]$. Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то на этом отрезке существует такая точка $c(a\le c\le b)$, что $\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$.

7. <u>Геометрический смысл</u> определенного интеграла: если $\forall x\in[a,b]\quad f(x)\ge 0$, то $\int_a^b f(x)dx$ численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$, отрезком $[a,b]$ оси ОХ, прямыми $x=a,\ x=b$.

Задание: попробуйте самостоятельно дать геометрическую интерпретацию свойств 3-6 определенного интеграла.

Формула Ньютона-Лейбница

Чтобы вычислить определенный интеграл на отрезке $[a,b]$от непрерывной на этом отрезке функции $f(x)$, надо найти первообразную этой функции с помощью неопределенного интегрирования, а затем вычислить разность значений этой первообразной на верхнем и нижнем пределах интегрирования, то есть следует воспользоваться <u>формулой Ньютона-Лейбница.</u>

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$

Пример. Вычислить

$$\int_1^{\sqrt{e}}\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}=\arcsin(\ln x)\Big|_1^{\sqrt{e}}=\arcsin\left(\ln\sqrt{e}\right)-\arcsin(\ln 1)=\arcsin\frac{1}{2}-\arcsin 0=\frac{\pi}{6}$$

Пример. Вычислить $\int_0^3 x\cdot\operatorname{arctg}x dx$. Применяем формулу определенного интегрирования по частям: $\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$.

$$\int_0^3 x\cdot\operatorname{arctg}x dx=\frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg}x\Big|_0^3-\frac{1}{2}\int_0^3\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx=$$

$$=\left[u=\operatorname{arctg}x;\ du=\frac{dx}{1+x^2};\ dv=xdx;\ v=\frac{1}{2}x^2\right]=\left(\frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x\right)\Big|_0^3=$$

$$=\frac{9}{2}\operatorname{arctg}3-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}3=5\operatorname{arctg}3-\frac{3}{2}.$$

Пример. Вычислить $J=\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}dx$. Найдем первообразную подинтегральной функции с помощью тригонометрической подстановки $x=R\sin t,\ dt=R\cos tdt$. Найдем новые границы

$x_1 = 0;\quad 0 = R\sin t \;\Rightarrow\; t_1 = 0.$

$x_2 = R;\;\; R = R\sin t \Rightarrow \sin t = 1;\; t_2 = \dfrac{\pi}{2}.$

$$J = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{R^2 - R^2\sin t}\cdot R\cdot \cos t dt\cdot \int_0^{\pi/2} R^2\cos^2 t\,dt = R^2\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}dt =$$

$$= \frac{1}{2}R^2\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}R^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi - 0 - \frac{1}{2}\sin 0\right) = \frac{\pi R^2}{4}.$$

Несобственные интегралы

В задачах, связанных с понятием определенного интеграла, речь идет о <u>непрерывных</u> функциях, заданных в <u>конечном</u> замкнутом промежутке $[a, b]$. Нарушение одного из этих требований: функция $f(x)$ терпит внутри отрезка интегрирования $[a, b]$ или на одном из его концов разрыв, или промежуток интегрирования бесконечен $(]-\infty, a], [a, +\infty[,]-\infty, +\infty[)$ - приводит к понятию <u>несобственных интегралов</u>.

Определение 1. Если $f(x)$ непрерывна в интервале $[a, +\infty[$, то несобственным интегралом 1 рода называют

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

При этом , если предел существует и конечен, несобственный интеграл сходится. Если этот предел не существует или бесконечен, несобственный интеграл расходится.

Аналогично $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx,\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{+t} f(x)dx.$

Пример. Вычислить

$$\int_{e^2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim_{b\to+\infty}\int_{e^2}^{b}(\ln x)^{-3}d(\ln x) = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2\ln^2 x}\right)\Bigg|_{e^2}^{b} =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{\ln^2 b} - \frac{1}{\ln^2 e^2}\right] = -\frac{1}{2}\left[0 - \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{8} \;\Rightarrow\; \text{интеграл сходится.}$$

Пример.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t}\frac{dx}{(x+1)^2 + 2^2} = \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}\Bigg|_{-t}^{t} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\left[\operatorname{arctg}\frac{t+1}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1-t}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{интеграл сходится.}$$

Пример.

$$\int_0^{+\infty}\cos x dx = \lim_{b\to+\infty}\sin x\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty}(\sin b - \sin 0) = \lim_{x\to+\infty}\sin b \;\; \text{не существует, следовательно}$$

интеграл расходится.

Определение 2. Если $f(x)$ терпит бесконечный разрыв в точке $x = a$ или $x = b$, или $x = c(a < c < b)$, то $\int_a^b f(x)dx$ называется несобственным интегралом II рода. Вычисляют такие интегралы следующим образом:

а) $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to\infty} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx,$ если x = a – точка разрыва;

б) $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx,$ если x = b – точка разрыва;

c) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$ если x = c - точка разрыва.

Пример. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon} =$

$= \lim_{\varepsilon\to+0} [\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0] = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ интеграл сходится.

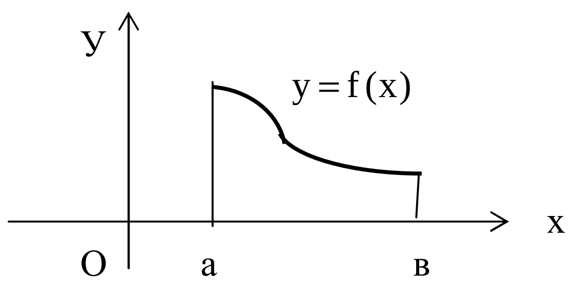
Пример. $\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{\varepsilon\to+0} \ln\ln x \Big|_{1+\varepsilon}^2 = \ln\ln 2 - \lim_{\varepsilon\to+0} \ln|\ln(1+\varepsilon)| =$

$= \ln\ln 2 - \ln\ln 1$- не существует, то есть данный интеграл расходится.

Пример. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = 2\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = 2\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^2} = 2\lim_{\varepsilon\to+0} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_\varepsilon^1 = \infty.$ Интеграл расходится.

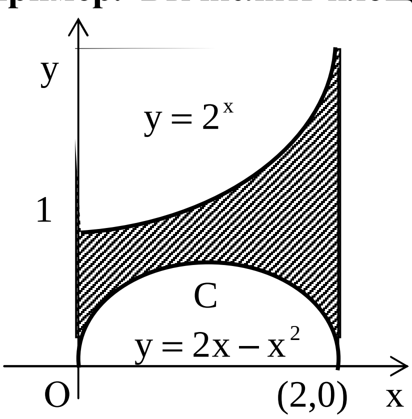
Приложения определенного интеграла

1. Площадь плоской фигуры.



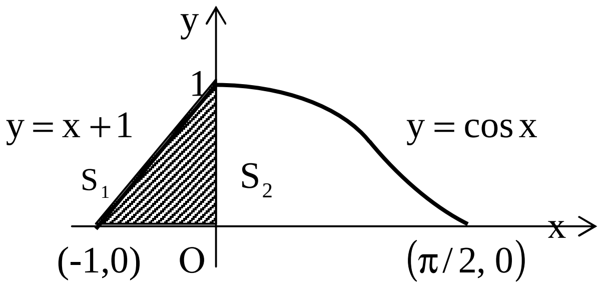
На основании свойства 7 определенного интеграла (см. его геометрический смысл). Площадь криволинейной трапеции вычисляется по формуле:
$S = \int_0^b f(x)dx$ или $S = \int_a^b ydx$.

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями



$y = 2^x; y = 2x - x^2;\ x = 0;\ x = 2.$ Для построения параболы $y = 2x - x^2$ приведем ее уравнение к каноническому виду $(x-1)^2 = -(y-1)$.
Вершина параболы C (1,1).
$S = S_1 - S_2 = \int_0^2 \left[2^x - (2x - x^2)\right]dx = \frac{3}{\ln 2} - \frac{4}{3}.$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

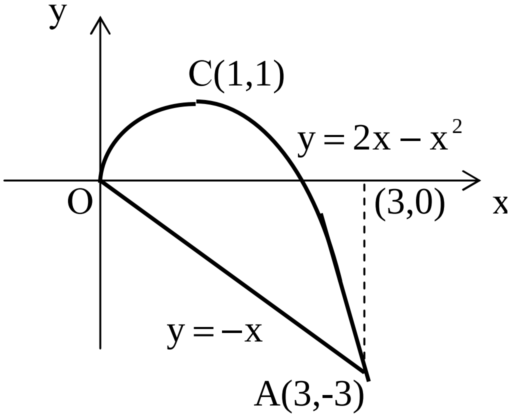


$y = x + 1;\ y = \cos x;\ y = 0.$

$$S = S_1 + S_2 = \int_{-1}^{0}(x+1)dx + \int_{0}^{\pi/2}\cos x dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + x\right]\Bigg|_{-1}^{0} + \sin x\Bigg|_{0}^{\pi/2} = 3/2.$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x;$



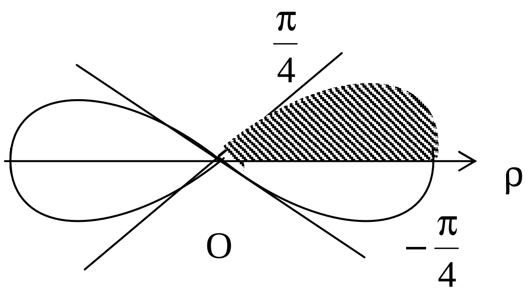
$y = 2x - x^2$. Для определения пределов интегрирования найдем точки пересечения параболы $y = 2x - x^2$ и прямой $y = -x$: $\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = -x \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 3x = 0 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = -3 \end{cases}$$

$$S = S_1 + S_2 = \int_0^2 (2x - x^2)dx + \left| \int_0^3 (-x)dx - \int_2^3 (2x - x^2) \right| =$$

$$= \int_0^3 [(2x - x^2) - (-x)]dx = \int_0^3 (3x - x^2)dx = \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_0^3 = 4{,}5 \text{ кв.ед.}$$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли

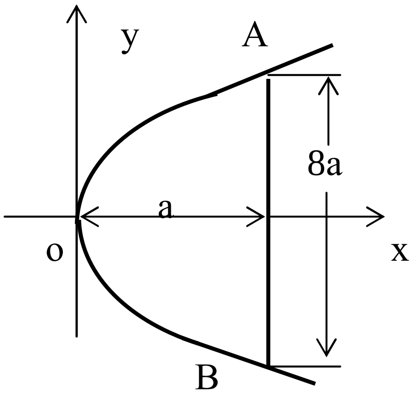


$\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$. Формула для вычисления площади плоской фигуры в полярной системе координат: $S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2 d\varphi;$

$$\frac{1}{4}S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} a^2\cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{4};\ S = a^2.$$

2. Площадь поверхности вращения, образованной вращением дуги линии $y = f(x)$ от $x = a$ до $x = b$ вычисляется по формуле: $Q = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f^{12}(x)}dx$.

Пример. Размеры параболического зеркала AOB указаны на чертеже. Найти



площадь поверхности этого зеркала. Уравнение параболы AOB в общем виде: $y = 2px$, точка A (a,4a), $y^2 = 2px \Rightarrow 16a^2 = 2pa \Rightarrow p = 8a$.

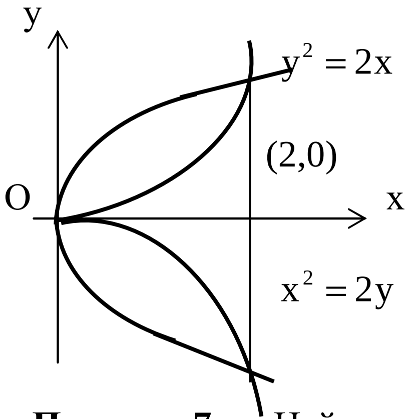
Уравнение AOB: $y^2 = 16ax \Rightarrow y = 4\sqrt{ax};\ y' = 2\sqrt{\frac{a}{x}}$;

$$Q = 2\pi\int_0^a 4\sqrt{ax}\cdot\sqrt{1+\frac{4a}{x}}dx = 8\pi\sqrt{a}\int_0^a\sqrt{x+4a}dx =$$

$$= \frac{16}{3}\pi a^2\left(5\sqrt{5}-8\right).$$

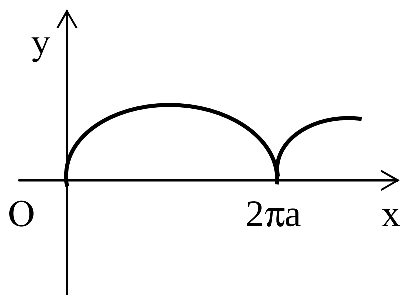
3. Объем тела вращения, образованного вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$ и прямыми $x = a$ до $x = b$ вокруг оси OX, вычисляется по формуле $V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$.

Пример . Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX части плоскости, ограниченной параболами $y^2 = 2x$ и $x^2 = 2y$.



$$V = V_{\left(y^2=2x\right)} - V_{\left(x^2=2y\right)} = \pi\int_0^2 2xdx - \pi\int_0^2\frac{x^4}{4}dx = \frac{12\pi}{5}$$

Пример 7. Найти объем тела, образованного вращением одной «арки» циклоиды вокруг ее основания:

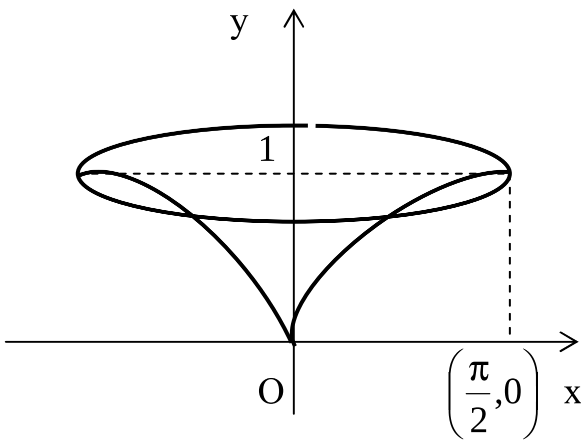


$$\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases} \quad 0 \le x \le 2\pi a \Rightarrow 0 \le t \le 2\pi$$

$$V = \pi\int_0^{2\pi a} y^2dx = \pi\int_0^{2\pi} y^2(t)dx(t) = \pi\int_0^{2\pi} a^3(1-\cos t)^3dt =$$

$$= \pi a^3\int_0^{2\pi}\left(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t\right)dt = 5a^3\pi^2.$$

Пример. Найти объем тела, образованного вращением дуги синусоиды $y = \sin x$, заключенного между началом координат и ближайшей вершиной, вокруг оси OY.



$0 \le x \le \frac{\pi}{2};\ 0 \le y \le 1;$

$$V = \pi\int_{y_1}^{y_2} x^2(y)dy = \pi\int_0^1 \arcsin^2 y dy =$$

(интегрируем по частям дважды)

$$= \pi\left[y \cdot \arcsin^2 y + 2\sqrt{1-y^2}\arcsin y - 2y\right]_0^1 =$$

$$= \frac{\pi a^3}{4} - 2\pi.$$

Упражнения

1. Вычислить определенные интегралы

а) $\int_{-1}^{2} x^2 dx$; б) $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx$; в) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$; г) $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$; д) $\int_0^1 x \cdot e^{-x} dx$.

2. Вычислить несобственные интегралы

а) $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$; в) $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2}$; г) $\int_0^{\pi/4} \operatorname{ctg} x dx$; д) $\int_{0,5}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

3. Вычислить площади фигур, ограниченных данными линиями:

а) $y = e^x$; $y = e^{-x}$; $x = 1$. б) $x = a\cos t$; $y = b\sin t$. в) $\rho = a\varphi$, $(0 \le \varphi \le 2\pi)$.

Ответы: а) $S = \frac{1}{e}(e-1)^2$. б) $S = \pi ab$. в) $S = \frac{4}{3}\pi^3 a^2$.

4. Найти площадь сферического пояса: дуга окружности с центром в начале координат и радиусом r вращается вокруг оси OX, высота пояса H.Ответ: $Q = 2\pi rH$.

5. Вычислить объем тела, образованного вращением площадки, ограниченной линиями оси OX:

а) $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi$, $y = 0$. Ответ: $V = \frac{\pi^2}{2}$.

б) $y = x \cdot e^x$, $x = 1$, $y = 0$. Ответ: $V = \frac{\pi}{4}(e^2 - 1)$.

в) $y = \arcsin x$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$. Ответ: $V = \pi\left(\frac{\pi^2}{4} - 2\right)$.

Библиографический список

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. М.: Наука, 1985. – Т 2.
2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука, 1980.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М.: Наука, 1982.
4. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Наука, 1980.
5. Функции нескольких переменных (типовой расчет) / Н.А. Воронова, Г.А. Кузик, Т.Б. Стрельникова. Омск: Изд. ОмПИ, 1982.
6. Векторная алгебра. Линейные преобразования / Н.И.Васильева, Е.А. Воробьева, Р.Ш.Минабудинова. Омск: Изд.ОмПИ, 1980.
7. Линейная алгебра и аналитическая геометрия (типовой расчет) / Э.Г.Кучеренко, Н.И. Васильева, Р.Ш. Минабудинова. Омск: Изд. ОмПИ, 1983.
8. Данко П.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. М.: Высш. школа, 1980.