МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Омский государственный технический университет

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И ВВЕДЕНИЮ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Методические указания
для студентов заочной формы обучения

Омск-2004

Составители: Кичигина Раиса Сергеевна, старший преподаватель;
Хаустова Нина Михайловна, старший преподаватель

Данные методические указания предназначены для студентов-заочников первого курса, обучающихся на технических специальностях ОмГТУ. Они содержат варианты контрольных заданий по аналитической геометрии и введению в математический анализ.

Задачи по аналитической геометрии охватывают следующие темы:

1) полярные координаты;

2), 3) прямая линия на плоскости;

4), 5) кривые второго порядка;

6), 7) плоскость;

8), 9), 10) прямая линия в пространстве.

Введение в математический анализ предполагает рассмотрение двух тем:

- предел функции (задачи 11-23).
- непрерывность и точки разрыва (задачи 24-26).

Прежде чем приступить к выполнению контрольных заданий, следует изучить теорию по конспекту установочных лекций и рекомендованной литературе. После этого желательно разобрать пример, приведенный перед каждой задачей.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Задача 1. Если принять полюс за начало декартовых координат, а полярную ось за ось Ох, то декартовы координаты $(x,\ y)$ точки М и ее полярные координаты $(\rho,\ \varphi)$ будут связаны зависимостями $\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi \end{cases}$ или $\begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi=\dfrac{y}{x}. \end{cases}$

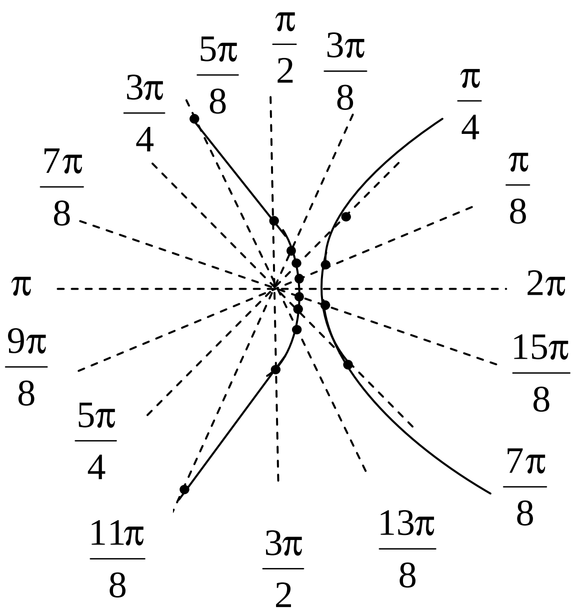
Из этих формул следует, что $\cos\varphi=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\sin\varphi=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Пример 1. Дано уравнение линии $\rho=\dfrac{3}{1+2\cos\varphi}$ в полярной системе координат. Определить точки, лежащие на линии, в промежутке $0\le\varphi\le 2\pi$, придавая значения φ с шагом $\pi/8$. Построить линию. Записать ее уравнение в декартовой системе координат.

Составим таблицу значений функции $\rho=\dfrac{3}{1+2\cos\varphi}$.

φ	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
ρ	1	1,05	1,24	1,7	3	12,8	-7,2	-3,5	-3
φ	π	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{13\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{15\pi}{8}$	2π
ρ	-3	-3,5	-7,2	12,8	3	1,7	1,24	1,05	1

Значения функции нужно вычислять только для верхней части таблицы, нижняя часть повторяет значения верхней в обратном порядке. Строим точки, полярные координаты которых заданы таблицей. Проведем лучи $\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \ldots, \frac{15\pi}{8}$. Положительные значения ρ отложим от полюса по соответствующему лучу, а отрицательные – по продолжению луча за полюс.



Запишем уравнение линии $\rho = \frac{3}{1+2\cos\varphi}$ в декартовых координатах:

$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{3}{1+2\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}$. Упрощая уравнение, получим $\sqrt{x^2+y^2}+2x=3$;

$3x^2-12x-y^2+9=0$; $3(x-2)^2-y^2-3=0$; $\frac{(x-2)^2}{1}-\frac{y^2}{3}=1$. Получаем нормальное уравнение гиперболы с центром в точке C(2, 0).

Контрольные варианты к задаче 1

Дано уравнение линии $\rho = f(\varphi)$ в полярной системе координат. Определить точки, лежащие на линии, в промежутке $0 \le \varphi \le 2\pi$. Шаг взять равным $\pi/8$. Построить линию. Записать уравнение линии в декартовой системе координат.

1. $\rho = \frac{3}{2+\sin\varphi}$.
2. $\rho = 4(1-\cos\varphi)$.
3. $\rho = 3(1+\cos\varphi)$.
4. $\rho = 1+\cos 2\varphi$.
5. $\rho = 4(1+\sin\varphi)$.
6. $\rho = \frac{1}{2+\cos\varphi}$.

7. $\rho = 2\sin^2 2\varphi$.

8. $\rho = 3\cos^2 2\varphi$.

9. $\rho = \frac{1}{2}(3+\cos\varphi)$.

10. $\rho = 2+\sin\varphi$.

11. $\rho = \sin 3\varphi + 2$.

12. $\rho = \cos 2\varphi - 2$.

13. $\rho = 1+\sin 2\varphi$.

14. $\rho = \sin 2\varphi + 2$.

15. $\rho = \frac{4}{4-\cos\varphi}$.

16. $\rho = 2\cos\varphi - 1$.

17. $\rho = \frac{1}{3-2\sin\varphi}$.

18. $\rho = 2\sin\varphi - 2\cos\varphi$.

19. $\rho = \frac{1}{2\sin\varphi+3}$.

20. $\rho = 3\sin\varphi - 2$.

21. $\rho = 3+2\sin\varphi$.

22. $\rho = \frac{3}{3+\sin\varphi}$.

23. $\rho = 2\sin\varphi - 2$.

24. $\rho = \frac{4}{2+\sin\varphi}$.

25. $\rho = 2\sin\varphi - \cos\varphi$.

26. $\rho = \frac{2}{2-\cos\varphi}$.

27. $\rho = 2\sin\varphi - 1$.

28. $\rho = 2\cos\varphi - 4$.

29. $\rho = 3-\sin\varphi$.

30. $\rho = \frac{2}{3+\cos\varphi}$.

Задача 2. Общее уравнение прямой на плоскости имеет вид

$$Ax+By+C=0, \qquad (1)$$

где A, B – координаты нормального (перпендикулярного) вектора прямой.

Уравнение прямой, проходящей через точку $M(x_0,\ y_0)$, перпендикулярно вектору $\vec{n} = \{A;B\}$:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0) = 0. \qquad (2)$$

Уравнение прямой, проходящей через точку $M(x_0,\ y_0)$, параллельно вектору $\vec{S}=\{m;\ n\}$, имеет вид

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n}. \qquad (3)$$

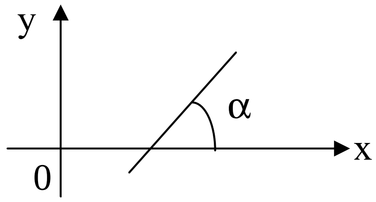
Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M(x_1,\ y_1)$ и $M(x_2,\ y_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (4)$$

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M(x_0,\ y_0)$ в данной направлении, имеет вид

$$y-y_0 = k(x-x_0) \qquad (5)$$

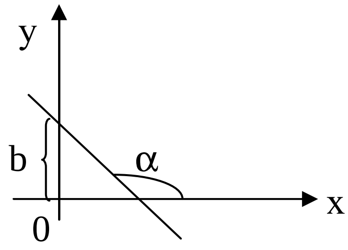
где $k = tg\alpha$ - угловой коэффициент прямой, α - угол, образованный прямой с положительным направлением на оси OX.



Если прямая проходит через начало координат, то ее уравнение имеет вид

$$y = kx. \tag{6}$$

Уравнение
$$y = kx + b \tag{7}$$
называется уравнением прямой с угловым коэффициентом, где b – величина отрезка, отсекаемого прямой от оси ОУ.



Пусть две прямые заданы общими уравнениями

$$\ell_1 : A_1x + B_1y = C_1 \quad \text{и} \quad \ell_2 : A_2x + B_2y = C_2.$$

Если $\ell_1 \| \ell_2$, то $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$.

Если $\ell_1 \perp \ell_2$, то $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$.

Если $\ell_1, \ell_2 = \delta$, то $\cos\delta = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$.

Пусть две прямые заданы уравнениями с угловым коэффициентом

$$\ell_1 : y = k_1x + b_1 \quad \text{и} \quad \ell_2 : y = k_2x + b_2.$$

Если $\ell_1 \| \ell_2$, то $k_1 = k_2$.

Если $\ell_1 \perp \ell_2$, то $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$.

Если $\ell_1, \ell_2 = \delta$, то $tg\delta = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$.

Расстояние d от точки $M(x_0,\ y_0)$ до прямой $Ax+By+C = 0$ вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{8}$$

Пример 2

Даны координаты вершин треугольника $A(2, 5)$, $B(5, 1)$, $C(11, 3)$.

1) Вычислить длину стороны BC.

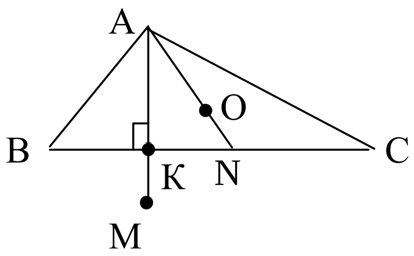
2) Составить уравнение линии BC.

3) Составить уравнение высоты, проведенной из вершины A, и найти ее длину.

4) Найти точку пересечения медиан.

5) Найти косинус внутреннего угла при вершине B.

6) Найти координаты точки M, расположенной симметрично точке A, относительно прямой BC.



Решение

1. Длина стороны BC равна модулю вектора $\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{BC} = \{11-5; 3-1\}$, $\overrightarrow{BC} = \{6; 2\}$; $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{6^2+2^2} = 2\sqrt{10}$.

2. Уравнение прямой BC: $\dfrac{x-x_в}{x_c-x_в} = \dfrac{y-y_в}{y_c-y_в}$; $\dfrac{x-5}{6} = \dfrac{y-1}{2}$; $x-3y-2=0$.

3. Уравнение высоты AK запишем как уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,5)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{BC} = \{6; 2\}$: $6(x-2)+2(y-5)=0;$ $3x+y-11=0$. Длину высоты AK можно найти как расстояние от точки A до прямой BC: $|AK| = d = \dfrac{|1\cdot 2-3\cdot 5-2|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}} = \dfrac{15}{\sqrt{10}} = \dfrac{3\sqrt{10}}{2}$.

4. Найдем координаты точки N – середины стороны BC:

$$x_N = \frac{x_в+x_c}{2} = \frac{5+11}{2} = 8;\ y_N = \frac{y_в+y_c}{2} = \frac{1+3}{2} = 2;\ \ N(8,2).$$

Точка пересечения медиан O делит каждую медиану на отрезки в отношении $\lambda = 2:1$.

Используем формулы деления отрезка в данном отношении λ:

$$x_0 = \frac{x_A+\lambda x_N}{1+\lambda};\ y_0 = \frac{y_A+\lambda y_N}{1+\lambda};\ x_0 = \frac{2+2\cdot 8}{3} = 6;\ y_0 = \frac{5+2\cdot 2}{3} = \frac{9}{3} = 3;\ O(6,\ 3).$$

5. Косинус угла при вершине B найдем как косинус угла между векторами $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$ $\{2-5;\ 5-1\} = \overrightarrow{BA}\{-3,4\}$; $\overrightarrow{BC}\{6;\ 2\}$,

$$\cos B = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{-3\cdot 6+4\cdot 2}{\sqrt{(-3)^2+4^2}\cdot 2\sqrt{10}} = \frac{-10}{10\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

6. Точка M, симметричная точке A относительно прямой BC, расположена на прямой AK, перпендикулярной к прямой BC, на таком же расстоянии от прямой,

как и точка А. Координаты точки К найдем как решения системы $\begin{cases} x-3y-2=0, \\ 3x+y-11=0. \end{cases}$

Систему решим по формулам Крамера: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 10$; $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 11 & 1 \end{vmatrix} = 35$;

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 5;\ x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{35}{10} = \frac{7}{2};\ y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2};\ K\left(\frac{7}{2};\ \frac{1}{2}\right).$$

Точка К является серединой отрезка АМ.

$x_K = \dfrac{x_A + x_M}{2}$; $\dfrac{7}{2} = \dfrac{2 + x_M}{2}$; $x_M = 5$; $y_K = \dfrac{y_A + y_M}{2}$; $\dfrac{1}{2} = \dfrac{5 + y_M}{2}$; $y_M = -4$; $M(5, -4)$.

Контрольные варианты к задаче 2

Даны координаты вершин треугольника АВС. Требуется:

1) вычислить длину стороны ВС;
2) составить уравнение линии ВС;
3) составить уравнение высоты, проведенной из вершины А;
4) вычислить длину высоты, проведенной из вершины А;
5) найти точку пересечения медиан;
6) вычислить внутренний угол при вершине В;
7) найти координаты точки М, расположенной симметрично точке А относительно прямой ВС.

1. $A(-12, -3)$, $B(12, -10)$, $C(-6, 14)$.
2. $A(-19, -1)$, $B(5, -8)$, $C(-13, 16)$.
3. $A(-6, -5)$, $B(18, -12)$, $C(0, 12)$.
4. $A(3, 12)$, $B(27, 5)$, $C(9, 29)$.
5. $A(6, 0)$, $B(30, -7)$, $C(12, 17)$.
6. $A(-9, 20)$, $B(15, 13)$, $C(-3, 37)$.
7. $A(-21, 18)$, $B(3, 11)$, $C(-15, 35)$.
8. $A(-15, 27)$, $B(9, 20)$, $C(-9, 44)$.
9. $A(-27, -24)$, $B(-3, -31)$, $C(-21, -7)$.
10. $A(-17, 26)$, $B(7, 19)$, $C(-11, 43)$.
11. $A(6, 2)$, $B(30, -5)$, $C(12, 19)$.
12. $A(4, 3)$, $B(-12, -9)$, $C(-5, 15)$.
13. $A(-1, 7)$, $B(11, 2)$, $C(17, 10)$.
14. $A(1, 1)$, $B(-15, 11)$, $C(-8, 13)$.
15. $A(-14, 10)$, $B(10, 3)$, $C(-8, 27)$.
16. $A(7, 1)$, $B(-5, -4)$, $C(-9, -1)$.
17. $A(-2, 1)$, $B(-18, -11)$, $C(-11, 13)$.
18. $A(10, -1)$, $B(-2, -6)$, $C(-6, -3)$.
19. $A(-12, 6)$, $B(12, -1)$, $C(-6, 23)$.
20. $A(8, 0)$, $B(-4, -5)$, $C(-8, -2)$.
21. $A(-20, 0)$, $B(4, -7)$, $C(-14, 17)$.
22. $A(-16, -8)$, $B(8, -15)$, $C(-10, 9)$.
23. $A(-20, -6)$, $B(4, -13)$, $C(-14, 10)$.
24. $A(-4, 7)$, $B(20, 0)$, $C(2, 24)$.
25. $A(-8, 8)$, $B(16, 1)$, $C(-2, 25)$.
26. $A(-24, 2)$, $B(0, -5)$, $C(-18, 19)$.
27. $A(-14, 6)$, $B(10, -1)$, $C(-8, 23)$.
28. $A(-8, -3)$, $B(4, -12)$, $C(8, 10)$.
29. $A(-5, 7)$, $B(7, -2)$, $C(11, 20)$.
30. $A(-12, -1)$, $B(0, -10)$, $C(4, 12)$.

Пример 3

Через точку M(3, 5) провести прямую так, чтобы она отсекала от координатного угла равнобедренный треугольник.

«Провести прямую» - это значит записать уравнение прямой, при этом делать чертеж и проводить прямую не обязательно.

Будем искать уравнение прямой в отрезках, т. е. в форме $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, где a и b – величины отрезков, отсекаемых прямой на осях координат. По условию задачи $|a|=|b|$ и прямая проходит через точку M(3, 5). Следовательно, $\frac{3}{a}+\frac{5}{b}=1$. Для определения a и b имеем две системы: $\begin{cases}\frac{3}{a}+\frac{5}{b}=1,\\ a=b,\end{cases}$ и $\begin{cases}\frac{3}{a}+\frac{5}{b}=1,\\ a=-b.\end{cases}$

Решение первой системы: $a_1 = b_1 = 8$, решение второй системы: $b=2,\ a=-2$. Получаем две прямые: $\frac{x}{8}+\frac{y}{8}=1$ или $x+y-8=0$ и $-\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1$ или $x-y+2=0$

Контрольные варианты к задаче 3

1. Вершина квадрата $A(7, 3)$, сторона CD лежит на прямой, отсекающей на осях координат отрезки $a=4,\ b=3$. Написать уравнение стороны АД (Квадрат ABCD).

2. В треугольнике ABC даны уравнения: высоты AN $x-2y+7=0$, высоты BM $9x-4y-11=0$ и стороны AB $x-3y+9=0$. Составить уравнение третьей высоты.

3. Найти точку, симметричную точке $M(-2,-9)$ относительно прямой $2x+5y-38=0$.

4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $x+2y-4=0$ и $3x-2y+12=0$ и образующей угол в 45^0 с прямой $2x-y-1=0$.

5. Через точку пересечения прямых $3x+5y+3=0$ и $x-2y+12=0$ провести прямую перпендикулярно прямой $2x+8y-6=0$.

6. В треугольнике ABC даны уравнения: стороны AB $5x-3y+2=0$ и высот AN $4x-3y+1=0$ и BM $7x+2y-22=0$. Составить уравнения двух других сторон треугольника.

7. Вычислить координаты вершин ромба, если известны уравнения двух его сторон ($x+2y=4$ и $x+2y=10$) и уравнение одной из его диагоналей $y=x+2$.

8. Из точки $A(5, 4)$ выходит луч света под углом $\varphi = \operatorname{arctg}2$ к оси Ox и от нее отражается. Написать уравнения падающего и отраженного лучей.

9. Под каким углом к оси Ox наклонена прямая, проходящая через точки $A(1, 4)$, $B(3, 5)$.

10. В квадрате ABCD даны вершина $A(2, 3)$ и точка $M(5, 2)$ - точка пересечения диагоналей. Найти уравнения сторон квадрата, не проходящих через вершину A.

11. Даны точки $A(1, 5)$, $B(6, 9)$, $C(7, 2)$. Отрезок AC разделен точкой D в отношении $\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DC}} = 2$. Найти расстояние от точки A до прямой BD.

12. Отрезок прямой $3x - 5y - 30 = 0$, заключенный между осями координат, является диагональю квадрата. Найти уравнение одной (любой) стороны квадрата.

13. Через точку пересечения прямых $2x - y = -7$ и $3x + 4y = 6$ провести прямую перпендикулярно прямой $2x + 5y - 1 = 0$.

14. Даны уравнения двух сторон параллелограмма: $3x - 2y = 1$ и $x - 4y + 3 = 0$ и точка пересечения диагоналей $M(4, 3)$. Составить уравнения двух других сторон параллелограмма.

15. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $P(2, -1)$ и составляющих угол 45^0 с прямой $y = 3x + 5$.

16. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $x + 2y + 9 = 0$ и $2x + y + 1 = 0$ - и точка пересечения его диагоналей $E(5, -4)$. Составить уравнения двух других его сторон.

17. Даны середины противоположных сторон квадрата $M(-2, 1)$ и $N(4, 3)$. Написать уравнения двух сторон квадрата, на которых лежат точки M и N.

18. Провести прямую так, чтобы точка $A(1, 2)$ была серединой ее отрезка, заключенного между осями координат. Составить уравнение этой прямой.

19. Даны две точки: $A(-4, 0)$ и $B(0, 6)$. Через середину отрезка AB провести прямую, отсекающую от оси Ox отрезок, вдвое больший, чем отрезок на оси Oy.

20. В треугольнике ABC даны вершины: $A(1, 2)$, $B(0, 4)$, $C(-2, 2)$. Определить: а) угол между стороной AB и медианой стороны BC; б) длину высоты, опущенной из вершины C.

21. Составить уравнения катетов прямоугольного равнобедренного треугольника, зная уравнение гипотенузы $y = 3x + 7$ и вершину прямого угла $A(4, -1)$.

22. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $P(8, -2)$ и отсекающей от координатного угла треугольник площадью 8 дм^2.

23. В треугольнике ABC даны вершины: $A(0, 3)$, $B(-4, 3)$, $C(2, 7)$. Найти точку, симметричную точке B относительно стороны AC.

24. В треугольнике ABC даны вершины: $A(-1, 2)$, $B(4, 1)$, $C(2, 5)$. Найти угол между медианой AM и высотой BH.

25. Даны точки $A(-2, 0)$, $B(2, 2)$. На отрезке OA (O – начало координат), построить параллелограмм OACД, диагонали которого пересекаются в точке B. Написать уравнения сторон и диагоналей параллелограмма.

26. Под каким углом к оси Ох наклонена прямая, проходящая через точки $A(1, 7)$ и $B(-3, 5)$?

27.Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $x-2y-8=0$ и $x+2y-4=0$ и образующую с осью Ох угол, вдвое больший угла, образованного с той же осью прямой $2y-x-6=0$.

28. Найти точку, симметричную точке $P(-5, -13)$ относительно прямой $2x-3y-3=0$.

29. Прямая ℓ отсекает на осях координат отрезки $a=2$ и $b=-3$. Найти точку, симметричную точке $A(1, 4)$ относительно прямой ℓ.

30. Даны уравнения двух сторон параллелограмма: $5x-4y+3=0$ и $13x+2y-17=0$ - и одна из его вершин $A(3, -4)$. Найти точку пересечения его диагоналей.

31. Противоположные вершины ромба лежат в точках $A(5, 7)$ и $C(3, 3)$. Написать уравнения его диагоналей.

32. Найти точку, симметричную точке $M(-6, 9)$ относительно прямой $2x-3y+18=0$.

33. Даны уравнения двух сторон параллелограмма: $x-y-1=0$ и $x-2y=0$- и точка пересечения его диагоналей $M(3,-1)$. Написать уравнения двух других сторон параллелограмма.

34. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-3, -2)$ и образующей с осями координат треугольник, который находится во второй четверти и имеет площадь 1,5 см^2.

35. Даны точки $O(0, 0)$ и $A(-3, 0)$. На отрезке ОА построен параллелограмм, диагонали которого пересекаются в точке $B(0, 2)$. Написать уравнение сторон и диагоналей параллелограмма.

36. Даны вершины треугольника: $A(1, -1)$, $B(-2, 1)$, $C(3, 5)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины А на медиану, проведенную из вершины В.

37. Определить длину высоты трапеции ABCD, если $A(-2, -2)$, $B(-3, 1)$, $C(7, 7)$, $Д(3, 1)$ - вершины.

38. Даны вершины треугольника ABC: $A(1, 2)$, $B(3, 8)$, $C(0, 3)$. Найти угол между медианой АМ и стороной ВС.

39. Даны вершины треугольника: $A(-4, 3)$ и $B(4, 1)$ и точка пересечения высот $M(3, 3)$. Найти третью вершину С.

40. Вычислить координаты вершин ромба, если известны уравнения двух его сторон: $2x-5y-1=0$, $2x-5y-34=0$ - и уравнение одной из его диагоналей $x+3y-6=0$.

41. В треугольнике ABC даны вершины: $A(0, 3)$, $B(3, 8)$, $C(1, 2)$. Из вершины С опустить перпендикуляр на медиану стороны ВС.

42. Даны уравнения двух сторон параллелограмма: $x+y-1=0$ и $y+1=0$. Его диагонали пересекаются в точке $M(-1, 0)$. Составить уравнение диагонали, не проходящей через точку пересечения данных сторон.

43. Найти расстояние от точки $A(4, 3)$ до прямой, проведенной перпендикулярно к отрезку ВС через его середину, если $B(1, 0), C(2, 3)$.

44. Под каким углом к оси Ох наклонена прямая, проходящая через точки $A(-6, 9)$ и $B(3, -4)$?

45. Через точку пересечения прямых $2x-3y-9=0$ и $x+y-2=0$ провести прямые, составляющие угол 45^0 с прямой $x-3y+6=0$.

46. Дана вершина прямого угла $C(1, 3)$ в равнобедренном прямоугольном треугольнике. Центр его описанного круга $M(3, 4)$. Написать уравнения катетов.

47. В квадрате ABCD даны: вершина $A(-4,3)$ и уравнение диагонали $5x-3y-5=0$. Написать уравнения сторон квадрата, проходящих через точку А.

48. Две стороны параллелограмма ($y=2x-2$ и $y=x+2$) пересекаются в начале координат. Написать уравнения диагоналей.

49. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку пересечения медиан треугольника с вершинами $A(-7, 1), B(3, -5), C(9, 11)$.

50. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1, 1)$ так, что середина ее отрезка, заключенного между прямыми $x+2y-1=0$ и $x+2y-3=0$, лежит на прямой $x-y-1=0$.

51. В треугольнике АВС даны вершины $A(1, 2), B(3, 8), C(0, 3)$. Из вершины В опустить перпендикуляр на медиану стороны АВ.

52. Составить уравнение катетов прямоугольного равнобедренного треугольника, зная уравнение гипотенузы $y=2x-1$ и вершину прямого угла $A(2, -3)$.

53. Вершины треугольника находятся в точках $A(2, -1), B(-1, -2), C(3, 1)$. Найти длину высоты треугольника, опущенную из вершины А.

54. Проверить, что точки $A(-4, -3), B(-5, 0), C(5, 6)$ и $Д(1, 0)$ служат вершинами трапеции, и найти ее высоту.

55. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $x+2y-4=0,\ 3x-2y+12=0$ и образующей угол 45^0 с прямой $2x-y-1=0$.

56. В треугольнике АВС даны: вершина $B(2, 1)$ и уравнения двух высот ($AN: 2x-y+10=0$ и $CE: 3x-7y+57=0$). Составить уравнения сторон треугольника.

57. Через точку пересечения прямых $9x-2y-5=0$ и $8x+3y-14=0$ провести прямую, образующую угол 45^0 с прямой $3x-7y+5=0$.

58. Даны вершины треугольника: $A(-1, 3), B(3, -2), C(5, 3)$. Составить уравнения медианы, проведенной из вершины В, и высоты, опущенной из вершины С на сторону ВА.

59. Даны: уравнения основания $x+y+1=0$ и боковой стороны $x-2y-3=0$ равнобедренного треугольника. Составить уравнение другой боковой стороны, если известно, что на ней лежит точка $P(-3, -1)$.

60. Найти точку пересечения медиан треугольника с вершинами: $A(2, -8)$, $B(-3, 9)$, $C(7, -10)$.

Задача 4

Канонические уравнения кривых второго порядка имеют вид

1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ - эллипс с фокусами $F_1(-c,\ 0)$ и $F_2(c,\ 0)$, где $c^2=a^2-b^2$, и эксцентриситетом $\varepsilon=\dfrac{c}{a}<1$. Если $a=b$, то уравнение $x^2+y^2=a^2$ описывает окружность, в этом случае $\varepsilon=0$;

2) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ - гипербола с фокусами $F_1(-c,\ 0)$ и $F_2(c,\ 0)$, где $c^2=a^2+b^2$, и эксцентриситетом $\varepsilon=\dfrac{c}{a}>1$. Прямые $y=\pm\dfrac{b}{a}x$ являются асимптотами гиперболы;

3) $y^2=2px$ - парабола, симметричная оси Ох, с фокусом $F\left(\dfrac{p}{2},\ 0\right)$ и директрисой $x=-\dfrac{p}{2}$, $x^2=2py$ - парабола, симметричная относительно Оу, с фокусом $F\left(0,\ \dfrac{p}{2}\right)$ и директрисой $y=-\dfrac{p}{2}$.

Пример 4

Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, если ее директриса параллельна оси Оу и проходит через левый фокус гиперболы:

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1.$$

Определим координаты левого фокуса гиперболы: $a^2=16$; $b^2=9$; $c=\sqrt{a^2+b^2}=5$, $F_1(-c,\ 0)=F_1(-5,\ 0)$. Так как директриса параболы параллельна оси Оу и проходит через точку $F_1(-5,\ 0)$, то она имеет уравнение $x=-5$. Определим значение параметра p параболы: $x=-\dfrac{p}{2}=-5$; $p=10$. Каноническое уравнение параболы имеет вид $y^2=2px$, т. е. $y^2=20x$.

Контрольные варианты к задаче 4

1. Написать уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок, отсекаемый на оси Ох параболой $y = 3 - 2x - x^2$.

2. Составить уравнение гиперболы, имеющей общие фокусы с эллипсом $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$, при условии, что эксцентриситет ее равен 5/4.

3. Найти точки пересечения асимптот гиперболы $x^2 - 3y^2 = 12$ с окружностью, имеющей центр в правом фокусе гиперболы и проходящей через начало координат

4. Найти длину и уравнение перпендикуляра, опущенного из фокуса параболы $y = -x^2/8$ на прямую, отсекающую на осях координат отрезки $a = 2,\ b = 2$.

5. Составить уравнение множества точек, равноудаленных от точки $A(2,\ 2)$ и оси абсцисс. Построить чертеж.

6. Дан эллипс $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{45} = 1$. Составить уравнение гиперболы, имеющей фокусы, общие с фокусами эллипса, если известно, что эксцентриситет гиперболы равен $2/\sqrt{3}$.

7. Составить уравнение окружности, проходящей через фокусы эллипса $x^2 + 4y^2 = 4$ и имеющей центр в его «верхней» вершине.

8. Составить уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок, отсекаемый на оси Ох параболой $y = 9 + 2x - x^2$.

9. Построить эллипс $x^2 + 4y^2 = 4$ и параболу $x^2 = 6y$ и найти площадь трапеции, основаниями которой служат большая ось эллипса и общая хорда эллипса и параболы.

10. Написать уравнение параболы и ее директрисы, если парабола проходит через точки пересечения прямой $y = x$ и окружности $x^2 + y^2 + 6x = 0$ и симметрична относительно оси Ох.

11. Дан эллипс $5x^2 + 8y^2 = 40$. Составить уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы - в вершинах данного эллипса.

12. Составить уравнение окружности, имеющей центр в фокусе параболы $y^2 = 8x$ и касающейся ее директрисы. Найти точки пересечения параболы и окружности.

13. Составить уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок, отсекаемый параболой $x = 9 + 2y - y^2$ на оси Оу.

14. Составить уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок, отсекаемый на оси Оу параболой $x = 3 - 2y - y^2$.

15. Составить уравнение гиперболы, имеющей общие фокусы с эллипсом $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, при условии, что эксцентриситет её равен 5/4.

16. Фокус параболы совпадает с центром окружности $x^2+y^2-6y+5=0$, а вершина параболы лежит в начале координат. Составить уравнение параболы и ее директрисы.

17. Написать уравнение окружности, проходящей через фокусы эллипса $x^2+16y^2=16$ и имеющей центр в его «нижней» вершине.

18. Дан эллипс $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$. Составить уравнение гиперболы, если ее фокусы совпадают с вершинами эллипса, а ее вершины – с фокусами эллипса.

19. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, если ее директриса параллельна оси Ох и проходит через «верхний» конец малой оси эллипса $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{36}=1$.

20. На параболе $x^2=8y$ найти точку, расстояние которой до фокуса равно четырем.

21. На параболе $y^2=4x$ найти точку, расстояние которой до фокуса равно пяти.

22. Вершина параболы лежит в начале координат, директриса ее проходит через «правый» фокус эллипса $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{11}=1$. Составить уравнение параболы.

23. На прямой $x=5$ найти точку, одинаково удаленную от «левого» фокуса и «верхней» вершины эллипса $x^2+5y^2=20$.

24. Дано уравнение гиперболы $x^2-y^2=8$. Составить уравнение эллипса, имеющего с гиперболой общие фокусы и проходящего через точку $A(4,\ 6)$.

25. Составить уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок прямой $3x+4y-12=0$, заключенный между осями координат.

26. Через вершину параболы $y^2=4\sqrt{2}\,x$ проведена прямая под углом 45^0 к оси Ох. Вычислить длину хорды, отсекаемой параболой на этой прямой.

27. Эллипс, симметричный относительно осей координат, проходит через точку $M(-4,\ \sqrt{21})$ и имеет эксцентриситет $\varepsilon=3/4$. Написать простейшие уравнение эллипса и найти расстояния от точки М до фокусов.

28. Даны вершины треугольника АСВ: $A(-3,\ -2)$, $B(0,\ 10)$, $C(6,\ 2)$. Составить уравнение окружности, для которой медиана АЕ служит диаметром.

29. Найти эксцентриситет и уравнение асимптот гиперболы, фокусы которой находятся в вершинах эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, если произведение эксцентриситетов гиперболы и эллипса равно единице.

30. Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки $A(3,\ 2\sqrt{3})$ и $B(3\sqrt{3},\ -2)$. Найти фокусы и точки пересечения эллипса и окружности, центр которой находится в начале координат и радиус равен $\sqrt{26}$.

З а д а ч а 5

Нормальные уравнения кривых второго порядка с центром в точке $C(x_0,\ y_0)$ имеют вид

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ - окружность радиусом R;

$\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)}{b^2}=1$ - эллипс с полуосями a и b;

$\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=\pm1$ - гипербола;

$(y-y_0)^2=\pm2p(x-x_0)$ или $(x-x_0)^2=\pm2p(y-y_0)$ - парабола.

Пример 5

Дано уравнение линии $9x^2+16y^2-90x+32y+97=0$. Записать уравнение линии в нормальной форме и построить эту кривую.

Чтобы привести уравнение к нормальной форме, сгруппируем слагаемые, содержащие только x и y, вынося коэффициенты при x^2 и y^2 за скобки:

$$9(x^2-10x)+16(y^2+2y)+97=0.$$

Дополняем выражения в скобках до полных квадратов:

$$9\left[\left(x^2-2\cdot5x+25\right)-25\right]+16\left[\left(y^2+2y+1\right)-1\right]+97=0;$$

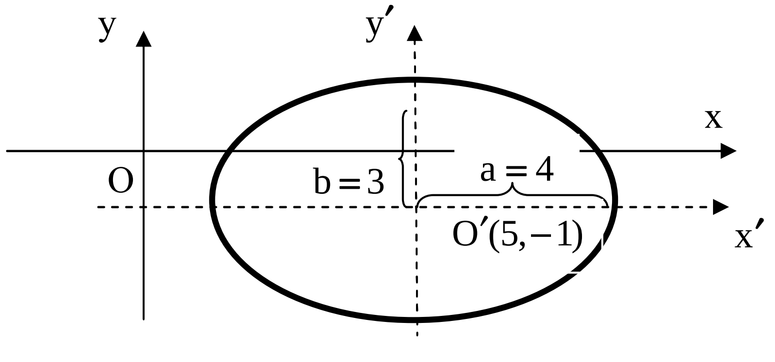
$$9\left[(x-5)^2-25\right]+16\left[(y+1)^2-1\right]+97=0;$$

$$9(x-5)^2+16(y+1)^2-225-16+97=0;$$

$$9(x-5)^2+16(y+1)^2=144.$$

Разделив обе части на 144, получим нормальное уравнение эллипса:

$\dfrac{(x-5)^2}{16}+\dfrac{(y+1)^2}{9}=1$ с полуосями $a=4,\ b=3$ с центром в точке $O'(5,\ -1)$. Через точку $O'(5,-1)$ проведем новые оси координат ($O'x'$ и $O'y'$) параллельные соответственно осям Ox и Oy. По обе стороны от точки O' отложим по оси $O'x'$ отрезки длиной $a=4$, а по оси $O'y'$ - $b=3$, получив таким образом вершины эллипса. Проведя через вершины вспомогательные отрезки, параллельные осям, получим прямоугольник, в который нужно вписать эллипс. Чертим эллипс.



Координаты фокусов эллипса в новых осях: $F_1^{/}(-c,\ 0)$ и $F_2^{/}(c,\ 0)$. Здесь $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$. Старыми координатами фокусов будут $F_1\left(-\sqrt{7}+5,-1\right)$ и $F_2\left(\sqrt{7}+5,-1\right)$, т. к. $x'=x-5$ и $y'=y+1$

Контрольные варианты к задаче 5

Дано уравнение линии $F(x,\ y)=0$. Построить линию, записав это уравнение в нормальной форме. Записать координаты фокусов. Если эта линия окажется параболой, то записать уравнение директрисы.

1. $x^2-4y^2-8x+4y+4=0$.
2. $8x^2+48x+18y+63=0$.
3. $3x^2-y^2+48x+144=0$.
4. $x^2+4y^2+4x-16y-8=0$.
5. $x^2+4y^2-6x+8y-3=0$.
6. $2y^2+8x+12y-3=0$.
7. $x^2-2y^2+4x-3y-3=0$.
8. $5x^2+6y^2+10x-12y-31=0$
9. $x^2-4y^2+8x-24y-24=0$.
10. $9x^2-16y^2-54x-64y-127=0$.
11. $16y^2-9x^2+32y+54x-209=0$.
12. $9x^2+4y^2-18x+8y-23=0$.
13. $9x^2+25y^2-36x-50y-164=0$.
14. $9x^2-16y^2-18x-64y-199=0$.
15. $9y^2-4x^2+18y+8x-31=0$.
16. $x^2+2y^2+4x-12y+18=0$.
17. $9x^2+4y^2-18x+16y-11=0$.
18. $4x^2-9y^2-8x+36y+32=0$.
19. $9x^2+16y^2+36x-64y-44=0$.
20. $4x^2-9y^2-16x+18y-29=0$.
21. $9x^2+4y^2+18x-8y-23=0$.
22. $x^2-4y^2-20x+10y+90=0$.
23. $x^2-4y^2+8x-24y+44=0$.
24. $9x^2-4y^2-18x-16y-11=0$.
25. $4x^2+9y^2+8x+36y-32=0$.
26. $2x^2+3y^2+8x-6y+8=0$.
27. $x^2-4y^2+6x+5=0$.
28. $3x^2-3y^2-2x-6y+4=0$.
29. $x^2-4y^2+2x+16y-7=0$.
30. $x^2-4y^2-4x+16y+8=0$.

З а д а ч а 6

Общее уравнение плоскости имеет вид: $Ax+Bx+Cz+D=0$, где $\vec{n}=\{A;B\,C\}$ - ненулевой вектор, перпендикулярный плоскости (нормальный вектор плоскости).

Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $[\ M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ и $M_3(x_3,\ y_3,\ z_3)\ ]$ определяется равенством

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z \end{vmatrix} = 0.$$

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + Bx + Cz + D = 0$ находится по формуле $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Пример 6

Найти расстояние от точки $M_0(1, -2, 3)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(3,\ -1,\ 2), M_2(4,\ -1,\ -1), M_3(2,\ 0,\ 2)$.

Найдем уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1, M_2,\ M_3$:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 4-3 & -1+1 & -1-2 \\ 2-3 & 0+1 & 2-2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислим определитель, разложив его по первой строке:

$$(x-3)\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (y+1)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$3(x-3)+3(y+1)+(z-2) = 0; \quad 3x + 3y + z - 9 + 3 - 2 = 0;\ 3x + 3y + z - 8 = 0.$

Найдем расстояние от точки M_0 до плоскости $3x + 3y + z - 8 = 0$.

$$d = \frac{|3\cdot 1 - 3\cdot 2 + 3 - 8|}{\sqrt{3^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{8}{\sqrt{19}} = \frac{8\sqrt{19}}{19}.$$

Контрольные варианты к задаче 6

Найти расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящей через три точки $M_1,\ M_2$ и M_3:

1. $M_1(-3,\ 4,\ -7)$, $M_2(1,\ 5,\ -4)$, $M_3(-5,\ -2,\ 0)$, $M_0(-12,\ 7,\ -1)$.
2. $M_1(-1,\ 2,\ -3)$, $M_2(4,\ -1,\ 0)$, $M_3(2,\ 1,\ -2)$, $M_0(1,\ -6,\ -5)$.
3. $M_1(-3,\ -1,\ 1)$, $M_2(-9,\ 1,\ -2)$, $M_3(3,\ -5,\ 4)$, $M_0(-7,\ 0,\ -1)$.
4. $M_1(1,\ -1,\ 1)$, $M_2(-2,\ 0,\ 3)$, $M_3(2,\ 1,\ -1)$, $M_0(-2,\ 4,\ 2)$.
5. $M_1(1,\ 2,\ 0)$, $M_2(1,\ -1,\ 2)$, $M_3(0,\ 1,\ -1)$, $M_0(2,\ -1,\ 4)$.
6. $M_1(1,\ 0,\ 2)$, $M_2(1,\ 2,\ -1)$, $M_3(2,\ -2,\ 1)$, $M_0(-5,\ -9,\ 1)$.
7. $M_1(1,\ 2,\ -3)$, $M_2(1,\ 0,\ 1)$, $M_3(-2,\ -1,\ 6)$, $M_0(3,\ -2,\ -9)$.
8. $M_1(3,\ 10,\ -1)$, $M_2(-2,\ 3,\ -5)$, $M_3(-6,\ 0,\ -3)$, $M_0(-6,\ 7,\ -10)$.
9. $M_1(-1,\ 2,\ 4)$, $M_2(-1,-2,-4)$, $M_3(3,\ 0,\ -1)$, $M_0(-2,\ 3,\ 5)$.
10. $M_1(0,-3,1)$, $M_2(-4,\ 1,\ 2)$, $M_3(2,\ -1,\ 5)$, $M_0(-3,\ 4,\ -5)$.
11. $M_1(1,\ 3,\ 0)$, $M_2(4,\ -1,\ 2)$, $M_3(3,\ 0,\ 1)$, $M_0(4,\ 3,\ 0)$.

12. $M_1(-2,\ -1,-1)$, $M_2(0,\ 3,\ 2)$, $M_3(3,\ 1,\ -4)$, $M_0(-21,\ 20,\ -16)$.
13. $M_1(-3,\ -5,\ 6)$, $M_2(2,\ 1,\ -4)$, $M_3(0,\ -3,\ -1)$, $M_0(3,\ 6,\ 68)$.
14. $M_1(1,\ 5,\ -7)$, $M_2(-3, 6,\ 3)$, $M_3(-2,\ 7,\ 3)$, $M_0(1,\ -1,\ 2)$.
15. $M_1(1,\ -1,\ 2)$, $M_2(2,\ 1,\ 2)$, $M_3(1,\ 1,\ 4)$, $M_0(-3,\ 2,\ 7)$.
16. $M_1(1,\ 3,\ 6)$, $M_2(2, 2, 1)$, $M_3(-1, 0, 1)$, $M_0(5, -4, 5)$.
17. $M_1(-4,\ 2, 6)$, $M_2(2,\ -3,\ 0)$, $M_3(-10,\ 5,\ 8)$, $M_0(-12,\ 1, 8)$.
18. $M_1(7,\ 2,\ 4)$, $M_2(7,\ -1,\ -2)$, $M_3(-5, -2, -1)$, $M_0(10,\ 1,\ 8)$.
19. $M_1(2,\ 1,\ 4)$, $M_2(3,\ 5,\ -2)$, $M_3(-7,\ -3,\ 2)$, $M_0(-3,\ 1, 8)$.
20. $M_1(-1,\ -5,\ 2)$, $M_2(-6,\ 0, -3)$, $M_3(3,\ 6, -3)$, $M_0(10,\ -8, -7)$.
21. $M_1(0, -1, -1)$, $M_2(-2,\ 3, 5)$, $M_3(1, -5, -9)$, $M_0(-4, -13,\ 6)$.
22. $M_1(5,\ 2,\ 0)$, $M_2(2,\ 5,\ 0)$, $M_3(1,\ 2,\ 4)$, $M_0(-3,\ -6,\ -8)$.
23. $M_1(2,\ -1,\ -2)$, $M_2(1,\ 2,\ 1)$, $M_3(5,\ 0,\ -6)$, $M_0(14,\ -3,\ 7)$.
24. $M_1(-2,\ 0,\ -4)$, $M_2(-1,\ 7,\ 1)$, $M_3(4,\ -8,\ -4)$, $M_0(-6,\ 5,\ 5)$.
25. $M_1(14,\ 4,\ 5)$, $M_2(-5,\ -3,\ 2)$, $M_3(-2, -6, -3)$, $M_0(-1, -8,\ 7)$.
26. $M_1(1,\ 2,\ 0)$, $M_2(3,\ 0,\ -3)$, $M_3(5,\ 2,\ 6)$, $M_0(-13,\ -8,\ 16)$.
27. $M_1(2,\ -1,\ 2)$, $M_2(1,\ 2,\ -1)$, $M_3(3,\ 2,\ 1)$, $M_0(-5,\ 3,\ 7)$.
28. $M_1(1,\ 1,\ 2)$, $M_2(-1,\ 1,\ 3)$, $M_3(2, -2,\ 4)$, $M_0(2, 3,\ 8)$.
29. $M_1(2, 3,\ 1)$, $M_2(4,\ 1,\ -2)$, $M_3(6,\ 3,\ 7)$, $M_0(-5, -4,\ 8)$.
30. $M_1(1,\ 1, -1)$, $M_2(2, 3,\ 1)$, $M_3(3,\ 2,\ 1)$, $M_0(-3, -7,\ 6)$.

З а д а ч а 7

Косинус угла φ между плоскостями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ вычисляется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{N_2}}{\left|\overrightarrow{N_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{N_2}\right|} \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Пример 7

Найти угол между плоскостями $x + y - 1 = 0$ и $2x - y + \sqrt{3}z + 1 = 0$.

Найдем косинус искомого угла:

$$\cos\varphi = \frac{1 \cdot 2 + 1(-1) + 0 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}} = \frac{1}{4},\ \varphi = \arccos\frac{1}{4}.$$

Контрольные варианты к задаче 7

Найти угол между плоскостями:

1. $x-3y+5=0, \ \ 2x-y+5z-16=0$.
2. $x-3y+z-1=0, \ \ x+z-1=0$.
3. $4x-5y+3z-1=0, \ x-4y-z+9=0$.
4. $3x-y+2z+15=0, 5x+9y-3z-1=0$.
5. $6x+2y-4z+17=0, 9x+3y-6z-4=0$.
6. $x-y\sqrt{2}+z-1=0, \ \ x+y\sqrt{2}-z+3=0$.
7. $3y-z=0, \ \ 2y+z=0$.
8. $6x+3y-2z=0, x+2y+6z-12=0$.
9. $x+2y+2z-3=0, 16x+12y-15z-1=0$
10. $2x-y+5z+16=0, x+2y+3z+8=0$.
11. $2x+2y+z-1=0, x+z-1=0$.
12. $3x+y+z-4=0, x+2y+3z+8=0$.
13. $3x-2y-2z-16=0, x+y-3z-7=0$.
14. $2x+2y+z+9=0, x-y+3z-1=0$.
15. $x+2y+2z-3=0, 2x-y+2z+5=0$.
16. $3x+2y-3z=0, \ \ x+y+z-7=0$.
17. $x-3y-2z-8=0, \ x+y-z+3=0$.
18. $3x-2y+3z+23=0, \ y+z+5=0$.
19. $x+y+3z-7=0, \ y+z-1=0$.
20. $x-2y+2z+17=0, x-2y-1=0$.
21. $x+2y-1=0, \ x+y+6=0$.
22. $2x-z+5=0, \ \ 2x+3y-7=0$.
23. $5x+3y+z-18=0, \ 2y+z-9=0$.
24. $4x+3z-2=0, \ x+2y+2z+5=0$.
25. $x+4y-z+1=0, \ 2x+y+4z-3=0$.
26. $2y+z-9=0, \ x-y+2z-1=0$.
27. $2x-6y+14z-1=0, 5x-15y+35z-3=0$.
28. $x-y+7z-1=0, \ 2x-2y-5=0$.
29. $3x-y-5=0, \ 2x+y-3=0$.
30. $x+y+z\sqrt{2}-3=0, x-y+z\sqrt{2}-1=0$

З а д а ч а 8

Канонические уравнения прямой в пространстве имеют вид

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}, \qquad (9)$$

где $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ - точка, лежащая на прямой, а $\vec{S}=\{m;\ n;\ p\}$ - направляющий вектор прямой (ненулевой вектор, параллельный прямой).

Чтобы перейти от общих уравнений прямой

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \qquad (10)$$

к ее каноническим уравнениям, нужно на прямой найти какую-нибудь точку M_0 и определить направляющий вектор прямой $\vec{S}$. Точку M_0 можно найти так: задаем произвольно значение одной переменной, например, $z=z_0$, и из общих уравнений прямой (10) найдем значения x_0 и y_0. Направляющий вектор $\vec{S}$ параллелен линии пересечения плоскостей (10) и, следовательно, перпендикулярен векторам $\vec{n}_1=\{A_1;\ B_1;\ C_1\}$ и $\vec{n}_2=\{A_2;\ B_2;\ C_2\}$. Поэтому в качестве $\vec{S}$ можно взять вектор

$$\vec{S}=\bar{n}_1\times\bar{n}_2=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Пример 8

Написать канонические уравнения прямой $\begin{cases} x-2y+3z-4=0, \\ 3x+2y-5z-4=0. \end{cases}$

Найдем точку $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$, лежащую на прямой. Пусть $z_0=0$.

Тогда $\begin{cases} x_0-2y_0=4, \\ 3x_0+2y_0=4. \end{cases}$

Решив систему, найдем $x_0=2$ и $y_0=-1$. Таким образом, $M_0(2,-1,0)$. Найдем направляющий вектор прямой

$$\bar{S}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=4\bar{i}+14\bar{j}+8\bar{k}.$$

Запишем канонические уравнения: $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+1}{14}=\dfrac{z}{8}$ или $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{7}=\dfrac{z}{4}$.

Контрольные варианты к задаче 8

Написать канонические уравнения прямой:

1. $\begin{cases} 2x - y - 3z + 1 = 0, \\ x + 5y + z = 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + 2y + 3z - 1 = 0, \\ 2x - 3y + 2z - 9 = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + y - z - 1 = 0, \\ 8x + 3y - 6z - 2 = 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + y - z + 2 = 0, \\ 4x - 3y + z - 1 = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x + 5y - 3z - 4 = 0, \\ 4x - 3y + 2z - 9 = 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x + 7y - z - 8 = 0, \\ x + 2y + z - 4 = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x + 4y + 2z - 8 = 0, \\ x + 5y + z = 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x - 4y - 3z + 3 = 0, \\ 3x + y + z - 5 = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x + y - z - 1 = 0, \\ x + 2y + z - 4 = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x + y + z - 5 = 0, \\ 4x - 3y + z - 1 = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x + y + z - 2 = 0, \\ 2x - y - 3z + 6 = 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x - 3y + 2z + 2 = 0, \\ x + 3y + z + 14 = 0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x - 2y + z - 4 = 0, \\ 2x + 2y - z - 8 = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x + y + z - 2 = 0, \\ x - y - 2z + 2 = 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x + 3y + z + 6 = 0, \\ x - 3y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3x + y - z - 6 = 0, \\ 3x - y + 2z = 0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x + 5y + 2z + 11 = 0, \\ x - y - z - 1 = 0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 3x + 4y - 2z + 1 = 0, \\ 2x - 4y + 3z + 4 = 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 5x + y - 3z + 4 = 0, \\ x - y + 2z + 2 = 0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x - y - z - 2 = 0, \\ x - 2y + z + 4 = 0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 4x + y - 3z + 2 = 0, \\ 2x - y + z - 8 = 0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3x + 3y - 2z - 1 = 0, \\ 2x - 3y + z + 6 = 0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 6x - 7y - 4z - 2 = 0, \\ x + 7y - z - 5 = 0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 8x - y - 3z - 1 = 0, \\ x + y + z + 10 = 0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 6x - 5y - 4z + 8 = 0, \\ 6x + 5y + 3z + 4 = 0. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x + 5y - z - 5 = 0, \\ 2x - 5y + 2z + 5 = 0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x - 3y + z + 6 = 0, \\ x - 3y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 5x + y + 2z + 4 = 0, \\ x - y - 3z + 2 = 0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 4x + y + z + 2 = 0, \\ 2x - y - 3z - 8 = 0. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 2x + y - 3z - 2 = 0, \\ 2x - y + z + 6 = 0. \end{cases}$

З а д а ч а 9

Точка пересечения P прямой и плоскости находится следующим образом: уравнения прямой приводят к параметрическому виду $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$, затем подставляют в уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ и определяют значение параметра t, соответствующее точке пересечения. Если при такой подстановке уравнение плоскости выполняется при любом t, то прямая лежит в плоскости, а если не выполняется ни при каком t, то прямая параллельна плоскости. Найденное значение t подставляют в параметрические уравнения прямой.

Пример 9

Найти точку пересечения прямой $\frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$ и плоскости $3x + 5y - z - 2 = 0$.

Приведем уравнения прямой к параметрическому виду:
$\frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1} = t$; $\frac{x-12}{4} = t \Rightarrow x = 12 + 4t$; $\frac{y-9}{3} = t \Rightarrow y = 9 + 3t$;
$\frac{z-1}{1} = t \Rightarrow z = 1 + t$, т. е. параметрические уравнения прямой имеют вид

$$\begin{cases} x = 12 + 4t \\ y = 9 + 3t \\ z = 1 + t. \end{cases}$$

Подставив x, y, z в уравнение плоскости, найдем t:
$3(12 + 4t) + 5(9 + 3t) - (1 + t) - 2 = 0; \quad t = -3.$
Искомая точка пересечения прямой и плоскости имеет координаты
$x_0 = 12 + 4(-3) = 0$; $y_0 = 9 + 3(-3) = 0$; $z_0 = 1 - 3 = -2$, т. е. $P(0,\ 0,\ -2)$.

Контрольные варианты к задаче 9

Найти точку пересечения прямой и плоскости:

1. $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{4}$ и $x + 2y + 3z - 14 = 0$.
2. $\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{5}$ и $x + 2y - 5z + 20 = 0$.
3. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{2}$ и $x - 3y + 7z - 24 = 0$.

4. $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{2}$ и $2x-y+4z=0$.

5. $\frac{x-5}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-2}{0}$ и $3x+y-5z-12=0$.

6. $\frac{x+1}{-3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-2}$ и $x+3y-5z+9=0$.

7. $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-1}$ и $x-2y+5z+17=0$.

8. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-4}{1}$ и $x-2y+4z-19=0$.

9. $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+4}{-1}$ и $2x-y+3z+23=0$.

10. $\frac{x+2}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+3}{0}$ и $2x-3y-5z-7=0$.

11. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{3}$ и $4x+2y-z-11=0$.

12. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-1}{-1}$ и $3x-2y-4z-8=0$.

13. $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+3}{2}$ и $x+2y-z-2=0$.

14. $\frac{x+3}{1}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z+2}{3}$ и $5x-y+4z+3=0$.

15. $\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-4}{3}$ и $x+3y+5z-42=0$.

16. $\frac{x-3}{-1}=\frac{y-4}{5}=\frac{z-4}{2}$ и $7x+y+4z-47=0$.

17. $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{5}$ и $2x+3y+7z-52=0$.

18. $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+3}{2}$ и $3x+4y+7z-16=0$.

19. $\frac{x-5}{-2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+4}{-1}$ и $2x-5y+4z+24=0$.

20. $\frac{x-1}{8}=\frac{y-8}{-5}=\frac{z+5}{12}$ и $x-2y-3z+18=0$.

21. $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+5}{0}$ и $x+7y+3z+11=0$.

22. $\frac{x-5}{-1}=\frac{y+3}{5}=\frac{z-1}{2}$ и $3x+7y-5z-11=0$.

23. $\frac{x-1}{7}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-6}{-1}$ и $4x+y-6z-5=0$.

24. $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-8}{0}$ и $5x+9y+4z-25=0$.

25. $\frac{x+1}{-2}=\frac{y}{0}=\frac{z+1}{3}$ и $x+4y+13z-23=0$.

26. $\frac{x-1}{6}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{3}$ и $3x-2y+5z-3=0$.

27. $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+3}{-2}$ и $3x-y+4z=0$.

28. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-5}=\frac{z-3}{-2}$ и $x+2y-5z+16=0$.

29. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z+2}{-2}$ и $3x-7y-2z+7=0$.

30. $\frac{x+3}{0}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+5}{11}$ и $5x+7y+9z-32=0$.

З а д а ч а 10

Чтобы найти точку M', симметричную точке $M(x_1, y_1, z_1)$ относительно прямой, нужно найти проекцию точки М на прямую $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$. Проекция будет серединой отрезка MM'. Проекция есть точка пересечения прямой с перпендикулярной к ней плоскостью, проходящей через точку М. Так как вектор $\overline{S} = \{m,\ n,\ p\}$ перпендикулярен этой плоскости, ее уравнение запишем в виде

$$m(x-x_1)+n(y-y_1)+p(z-z_1) = 0.$$

Далее, как и в предыдущей задаче, находим точку P (точку пересечения данной прямой с найденной плоскостью). Зная середину отрезка MM', найдем координаты точки M'. Чтобы найти точку M', симметричную точке $M(x_1,\ y_1,\ z_1)$ относительно плоскости $Ax+By+Cz+D=0$, нужно найти проекцию точки М на плоскость. Проекция будет серединой отрезка MM'.

Проекция точки $M(x_1, y_1, z_1)$ на плоскость будет точкой пересечения перпендикуляра к плоскости, проходящего через точку М, с самой плоскостью. Вектор $\overline{n} = \{A;\ B;\ C\}$ будет направляющим вектором перпендикулярной прямой.

Далее, как и в задаче 9, находим точку пересечения перпендикуляра с данной плоскостью.

Зная середину отрезка MM', найдем координаты точки M'.

Пример 10

Найти точку M', симметричную точке $M(5,\ 2,\ -1)$ относительно плоскости $2x-y+3z+23=0$.

Запишем канонические уравнения перпендикуляра MM' к плоскости. Вектор $\overline{n}=\{2;\ -1;\ 3\}$ будет направляющим вектором перпендикуляра

$$\frac{x-5}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{3}.$$

Параметрические уравнения прямой MM': $x=5+2t;\ y=2-t;\ z=-1+3t.$ Подставляя $x,\ y,\ z$ из этих уравнений в данное уравнение плоскости, найдем значение t:

$$2(5+2t)-(2-t)+3(-1+3t)+23=0;\ t=-2.$$

Точка P пересечения прямой с плоскостью будет иметь координаты $x_p=5+2(-2)=1;\ y_p=2-(-2)=4;\ z_p=-1+3(-2)=-7$, т. е. $P(1,\ 4,\ -7)$.

Так как P – середина отрезка MM' и $M'(x_2,\ y_2,\ z_2)$ - координаты, так как если то

$$x_p=\frac{x_1+x_2}{2};\ 1=\frac{5+x_2}{2};\ x_2=-3;\qquad y_p=\frac{y_1+y_2}{2};\ 4=\frac{2+y_2}{2};\ y_2=6;$$

$$z_p=\frac{z_1+z_2}{2};-7=\frac{-1+z_2}{2};\qquad z_2=-13;\qquad M'(-3,\ 6,\ -13).$$

Контрольные варианты к задаче 10

Найти точку M', симметричную точке M относительно прямой (для вариантов 1-15) или плоскости (для вариантов 16-30):

1. $M(0,\ -3,\ -2)$, $\quad\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1{,}5}{-1}=\dfrac{z}{1}.$
2. $M(2,\ -1,\ 1)$, $\quad\dfrac{x-4{,}5}{1}=\dfrac{y+3}{-0{,}5}=\dfrac{z-2}{1}.$
3. $M(1,\ 1,\ 1)$, $\quad\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1{,}5}{-2}=\dfrac{z-1}{1}.$
4. $M(1,\ 2,\ 3)$, $\quad\dfrac{x-0{,}5}{0}=\dfrac{y+1{,}5}{-1}=\dfrac{z-1{,}5}{1}.$
5. $M(1,\ 0,\ -1)$, $\quad\dfrac{x-3{,}5}{2}=\dfrac{y-1{,}5}{2}=\dfrac{z}{0}.$
6. $M(2,\ 1,\ 0)$, $\quad\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y+1{,}5}{-1}=\dfrac{z+0{,}5}{1}.$
7. $M(-2,\ -3,\ 0)$, $\quad\dfrac{x+0{,}5}{1}=\dfrac{y+1{,}5}{0}=\dfrac{z-0{,}5}{1}.$
8. $M(-1,\ 0,\ -1)$, $\quad\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1{,}5}{0}=\dfrac{z-2}{1}.$

9. $M(0,\ 2,\ 1)$, $\quad \dfrac{x-1{,}5}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$.

10. $M(3,\ -3,\ -1)$, $\quad \dfrac{x-6}{5}=\dfrac{y-3{,}5}{4}=\dfrac{z+0{,}5}{0}$.

11. $M(3,\ 3,\ 3)$, $\quad \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1{,}5}{0}=\dfrac{z-3}{1}$.

12. $M(-1,\ 2,\ 0)$, $\quad \dfrac{x+0{,}5}{1}=\dfrac{y+0{,}7}{-0{,}2}=\dfrac{z-2}{2}$.

13. $M(2,-2,-3)$, $\quad \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+0{,}5}{0}=\dfrac{z+1{,}5}{0}$.

14. $M(-1,\ 0,\ 1)$, $\quad \dfrac{x+0{,}5}{0}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z-4}{2}$.

15. $M(0,\ -3,\ -2)$, $\quad \dfrac{x-0{,}5}{0}=\dfrac{y+1{,}5}{-1}=\dfrac{z-1{,}5}{1}$.

16. $M(1,\ 0,\ 1)$, $\quad 4x+6y+4z-25=0$.

17. $M(-1,\ 0,\ -1)$, $\quad 2x+6y-2z+11=0$.

18. $M(0,\ 2,\ 1)$, $\quad 2x+4y-3=0$.

19. $M(2,\ 1,\ 0)$, $\quad y+z+2=0$.

20. $M(-1,\ 2,\ 0)$, $\quad 4x-5y-z-7=0$.

21. $M(2,\ -1,\ 1)$, $\quad x-y+2z-2=0$.

22. $M(1,\ 1,\ 1)$, $\quad x+4y+3z+5=0$.

23. $M(1,\ 2,\ 3)$, $\quad 2x+10y+10z-1=0$.

24. $M(0,\ -3,\ -2)$, $\quad 2x+10y+10z-1=0$.

25. $M(1,\ 0,\ -1)$, $\quad 2y+4z-1=0$.

26. $M(3,\ -3,\ -1)$, $\quad 2x-4y-4z-13=0$.

27. $M(-2,\ -3,\ 0)$, $\quad x+5y+4=0$.

28. $M(2,\ -2,\ -3)$, $\quad y+z+2=0$.

29. $M(-1,\ 0,\ 1)$, $\quad 2x+4y-3=0$.

30. $M(3,\ 3,\ 3)$, $\quad 8x+6y+8z-25=0$.

З а д а ч а 11

Правило 1. Чтобы вычислить $A=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{q(x)}$, нужно вместо переменной x поставить её предельное значение x_0.

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)=0,\ \lim\limits_{x\to x_0} q(x)=q(x_0)=C\neq 0,$ то $A=\dfrac{0}{C}=0.$

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)=C\neq 0,\ \lim\limits_{x\to x_0} q(x)=q(x_0)=0,$ то $A=\dfrac{C}{0}=\infty$.

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} q(x) = q(x_0) = 0$, то $A = \dfrac{0}{0}$ - неопределенность.

Правило 2. Чтобы раскрыть неопределенность $\dfrac{0}{0}$ в алгебраическом выражении, надо в числителе и знаменателе выделить множитель $x - x_0$, который стремится к нулю, и на него под знаком предела сократить.

Правило 3. Если в числителе и знаменателе стоят многочлены, то чтобы получить множитель $x - x_0$, нужно многочлены разложить на множители.

Пример 11

Вычислить предел $A = \lim\limits_{x\to 6} \dfrac{2x^2 - 11x - 6}{3x^2 - 19x + 6} = \dfrac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 6} \frac{2x^2 - 11x - 6}{3x^2 - 19x + 6} = \frac{2\cdot 6^2 - 11\cdot 6 - 6}{3\cdot 6^2 - 19\cdot 6 + 6} = \frac{0}{0}.$$

Найдем корни многочленов $2x^2 - 11x - 6 = 0$, $x_1 = 6$, $x_2 = -\dfrac{1}{2}$;

$$2x^2 - 11x - 6 = 2(x-6)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (x-6)(2x+1);$$

$$3x^2 - 19x + 6 = 0,\ \ x_1 = 6,\ \ x_2 = \frac{1}{3};$$

$$3x^2 - 19x + 6 = 3(x-6)\left(x - \frac{1}{3}\right) = (x-6)(3x-1).$$

$$A = \lim_{x\to 6} \frac{\cancel{(x-6)}(2x+1)}{\cancel{(x-6)}(3x-1)} = \lim_{x\to 6} \frac{2x+1}{3x-1} = \frac{2\cdot 6+1}{3\cdot 6-1} = \frac{13}{17}.$$

Контрольные варианты к задаче 11

Вычислить пределы функции:

1. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x^2 - 9x + 9}{x^2 - 5x + 6}$.	2. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x^2 + 7x + 6}{3x^2 + 10x + 8}$.	3. $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{2x^2 + 15x + 25}{5 - 4x - x^2}$.
4. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{3x^2 - 14x - 5}{x^2 - 2x - 15}$.	5. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{4x^2 + 7x + 3}{2x^2 + x - 1}$.	6. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{2x^2 - 11x + 5}{3x^2 - 14x - 5}$.
7. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{3x^2 + 7x + 2}{2x^2 + x - 6}$.	8. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2 + x - 10}{x^2 - x - 2}$.	9. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2 - 2x - 8}{2x^2 + 5x + 2}$.
10. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{6 - x^2 - x}{3x^2 + 8x - 3}$.	11. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x - 3}$.	12. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{6 - 7x - 3x^2}{2x^2 + 7x + 3}$.
13. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 + 2x - 8}{8 - x^3}$.	14. $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{x^2 + x - 12}{x^2 + 2x - 8}$.	15. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 5x + 2}$.

16. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-3x+2}$.	17. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{x^2+x-20}$.	18. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-2x-15}{2x^2-7x-15}$.
19. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+5x-7}{3x^2-x-2}$.	20. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-x-3}{x^2-3x-4}$.	21. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}$.
22. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+x-6}{2x^2-x-21}$.	23. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{2x^2+x-21}$.	24. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{3x^2+11x+6}$.
25. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+x-4}{5-3x-2x^2}$.	26. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-x-7}{3x^2+x-2}$.	27. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5x^2-16x+3}{x^2-4x+3}$.
28. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-9x+9}{x^2-7x+12}$.	29. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{2x^2+15x+25}{10-3x-x^2}$.	30. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-7x+3}{10x-x^2-21}$.

Задача 12

Пример 12

Вычислить предел $A = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^4-x^2-12}$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^4-x^2-12}=\frac{2^3-2\cdot 4-2+2}{2^4-4-12}=\frac{0}{0}.$$

В числителе и знаменателе получаются нули за счет сомножителя $x-2$, который стремится к нулю при $x\to 2$. Разложим многочлены на множители, разделив их на $x-2$.

$$\begin{array}{l|l}
x^3-2x^2-x+2 & x-2 \\ \cline{2-2}
-\underline{x^2-2x^2} & x^2-1 \\
-x+2 & \\
-\underline{-x+2} &
\end{array}$$

$$x^3-2x^2-x+2=(x-2)(x^2-1).$$

$$\begin{array}{l|l}
x^4-x^2-12 & x-2 \\ \cline{2-2}
-\underline{x^4-2x^3} & x^3+2x^2+3x+6 \\
2x^3-x^2 & \\
-\underline{2x^3-4x^2} & \\
\qquad 3x^2-12 & \\
-\qquad\underline{3x^2-6x} & \\
\qquad\qquad 6x-12 & \\
-\qquad\qquad\underline{6x-12} &
\end{array}$$

$$x^4-x^2-12=(x-2)(x^3+2x^2+3x+6).$$

$$A=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2-1)}{(x-2)(x^3+2x^2+3x+6)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x^3+2x^2+3x+6}=\frac{4-1}{8+8+6+6}=\frac{3}{28}.$$

Замечание. При разложении многочлена в числителе можно было применить способ группировки и вынесения общего множителя, а в знаменателе найти корни, решив биквадратное уравнение.

Контрольные варианты к задаче 12

Вычислить пределы функций:

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x^3-2x-1)(x+1)}{x^4+4x^2-5}$.	2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x+x^2}$.
2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x^3+3x+2)^2}{x^3+2x^2-x-2}$.	4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2x^2-x-1)^2}{x^3+2x^2-x-2}$.
3. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x^2+2x-3)^2}{x^3+4x^2+3x}$.	6. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x^3-2x-1)^2}{x^4+2x+1}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x+x^5}$.	8. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+9}$.
9. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$.	10. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+5x+2}$.
11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.	11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}$.
13. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3-3x-2}$.	14. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$.
15. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$.	16. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-3x^2+4}$.
17. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-3x^2+4}$.	18. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+7x^2+16x+12}$.
19. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{(x^2-x-2)^2}$.	20. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x-2}{2x^2+3x-14}$.
21. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}$.	22. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$.
22. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$.	24. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$.
25. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^3+2x^2-x-2}$.	26. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2+3x}$.
27. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^4+2x+1}$.	28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{4x^2+x^5}$.
29. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3+x^2-5x+3}$.	30. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+7x^2+15x+9}{x^3+8x^2+21x+18}$.

З а д а ч а 13

Если в числителе или знаменателе стоят иррациональные выражения, то для получения сомножителя $x - x_0$ умножим числитель и знаменатель на сопряженные им выражения.

Пример 13

Вычислить $A = \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{6-x} - 1}{3 - \sqrt{4+x}} = \left(\dfrac{0}{0}\right).$

$$\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}} = \frac{\left[\left(\sqrt{6-x}-1\right)\left(\sqrt{6-x}+1\right)\right]\left(3+\sqrt{4+x}\right)}{\left(\sqrt{6-x}+1\right)\left[\left(3-\sqrt{4+x}\right)\left(3+\sqrt{4+x}\right)\right]} = \lim_{x\to 5} \frac{\left[\left(\sqrt{6-x}\right)^2 - 1^2\right]\left(3+\sqrt{4+x}\right)}{\left(\sqrt{6-x}+1\right)\left[\left(\sqrt{4+x}\right)^2\right]} =$$

$$= \lim_{x\to 5} \frac{(5-x)\left(3+\sqrt{4+x}\right)}{\left(\sqrt{6-x}+1\right)(5-x)} = \lim_{x\to 5} \frac{3+\sqrt{4+x}}{\sqrt{6-x}+1} = \frac{6}{2} = 3.$$

Контрольные варианты к задаче 13

Вычислить пределы функций:

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+3}-2}.$ 2. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{2x+3}-1}{\sqrt{5+x}-2}.$ 3. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x-2}-1}.$

4. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}.$ 5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}.$ 6. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{3-\sqrt{x+11}}{2-\sqrt{x+6}}.$

7. $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{\sqrt{9+x}-2}{\sqrt{4-x}-3}.$ 8. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{5-\sqrt{22-x}}{1-\sqrt{4+x}}.$ 9. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2-\sqrt{5-x}}{3-\sqrt{8+x}}.$

10. $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{3-\sqrt{x^2-7}}{2-\sqrt{8+x}}.$ 11. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{1-\sqrt{x-3}}{2-\sqrt{x}}.$ 12. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3}.$

13. $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{\sqrt{x}-3}.$ 14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+25}-5}.$ 15. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\sqrt{x+4}-1}{\sqrt{3-2x}-3}.$

16. $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{4-\sqrt{x+7}}.$ 17. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}.$ 18. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}.$

19. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{2-\sqrt{x+1}}.$ 20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2}}{x+x^2}.$ 21. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{3x+2}-\sqrt{8}}{\sqrt{2x+5}-3}.$

22. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}.$ 23. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\sqrt{1-x}-2}{4-\sqrt{1-5x}}.$ 24. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{2x-2}-2}{\sqrt{x+1}-2}.$

25. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+}}{x^2-5x}$. 26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{4-x^2}-2}$. 27. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+3}-2}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}}{5z+x^2}$. 29. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+6}-2}{x^2-4}$. 30. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{3x+7}-4}$.

З а д а ч а 14

Пример 14

Вычислить $A=\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{2x^2+11x+5}{3-\sqrt{14+x}}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to -5}\frac{2x^2+11x+5}{3-\sqrt{14+x}}=\lim_{x\to -5}\frac{(x+5)(2x+1)\left(3+\sqrt{14+x}\right)}{\left(3-\sqrt{14+x}\right)\left(3+\sqrt{14+x}\right)}=\lim_{x\to -5}\frac{(x+5)(2x+1)\left(3+\sqrt{14+x}\right)}{9-\left(\sqrt{14+x}\right)^2}=$$

$$=\lim_{x\to -5}\frac{\cancel{(x+5)}(2x+1)\left(3+\sqrt{14+x}\right)}{-\cancel{(x+5)}}=\lim_{x\to -5}\left[-(2x+1)\left(3+\sqrt{14+x}\right)\right]=$$

$$=-(-10+1)\left(3+\sqrt{14-5}\right)=9\cdot 6=54.$$

Контрольные варианты к задаче 14

Вычислить пределы функций:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}}$. 2. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{2x^2-19x+9}$.

3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-7x-4}{\sqrt{2x+1}-3}$. 4. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{6x+1}-5}{4-\sqrt{x+12}}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+`}-2}{x-2}-1$. 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x+3x^2}-(1+x)}{\sqrt[3]{x}}$.

7. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$. 8. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$

9. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{2x^2-15x-8}$. 10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{7x^2-x}$. 12. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2-\sqrt{x+1}}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$.

13. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-64}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}$. 14. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{10-x-6\sqrt{1-x}}{2x^2+17x+8}$.

15. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{\sqrt{1-4x}-3}$.

16. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-6x+8}$.

17. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$.

18. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^3+27}{4-\sqrt{1-5x}}$.

19. $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{2+x}-3}{2x^2-13x-7}$.

20. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{6x+1}-5}$.

21. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{4-\sqrt{x+12}}{2x^2-7x-4}$.

22. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{x^2-5x+6}$.

23. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{9-x}-3}{\sqrt{x+4}-2}$.

24. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{5-\sqrt{x^2+9}}{\sqrt{2x+1}-3}$.

25. $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{\sqrt{9+x}-2}{x^2+5x}$.

26. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{2x+5}-3}{2x^2+3x-14}$.

27. $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{\sqrt{x+16}-5}$.

28. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{5-\sqrt{22-x}}{\sqrt{1-x}-2}$.

29. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x^2+3x-2}{3-\sqrt{x+11}}$.

30. $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{2x^2+9x+4}{3-\sqrt{x^2-7}}$

З а д а ч а 15

Если при $x \to x_0$ $f(x)\to\infty$ и $q(x)\to\infty$, то отношение $\dfrac{f(x)}{q(x)}$ представляет собой неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$. В этом случае рекомендуется числитель и знаменатель разделить почленно на старшую степень переменной x.

Пример 15

Вычислить предел $A=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x-7-2x^2}{7x+x^3}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x-7-2x^2}{7x+x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{4x-7-2x^2}{x^3}}{\dfrac{7x+x^3}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{7}{x^3}-2}{\dfrac{7}{x^2}+1}=\frac{0-0-2}{0+1}=-2.$$

Контрольные варианты к задаче 15

Вычислить пределы функций:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^5+7x^3-4}{6x^5-3x^2+2}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2+3x^2-x^5}{2x+3x^2-3x^5}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-3x+1}{2x^3+x^2-2}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-3x+1}{3x^3+x^2+4x}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x+2x^3-5x^4}{2x^5+5x^2-3}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^5-2x+1}{2x^5+4x+5}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3-7x^2+5x^3}{2+2x-x^3}$.

8. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4+5x^2-3x^5}{8-6x-x^5}$.

9. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-7x+1}{3x^4+x+3}$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$

11. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5-2x-3x^4}{x^5+x+3}$.

12. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-2x^2+3}{5x^5-x+4}$.

13. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+7x^2-2}{6x^3-4x+3}$.

14. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3-8x+1}{4x^2+x+1}$.

15. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+4x-5}{6x^2-2x+1}$.

16. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^5-3x^2+8}{2x^5+2x-1}$.

17. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x-x^3+5}{x^2+x-4}$.

18. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^3-2x+5}{4-x^4}$.

19. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4-x-x^2}{2x^3+x+1}$.

20. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^4-4x^2+3}{x^4+1}$.

21. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-5x+1}{6x^2+3x-4}$.

22. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^6-x^3+2x}{2x^6-1}$.

23. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^5-x^2+x}{x^5-2}$.

24. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-3x+1}{7x^4-x+5}$.

25. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^4-2x^3+2}{x^4+3}$.

26. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^5+6x-5}{x^5+2x^2-3}$.

27. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2x^5-2x^3+4}{7x^5+3x^2+2}$

28. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^5-3x^2+2}{3x^5+4x+1}$.

29. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4+5x^2-3x^5}{2x^5+4x^4-1}$.

30. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3+x^2+4x}{7-7x^3+2x}$.

З а д а ч а 16

Пример 16

Вычислить предел $A=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+7)^3-(n-1)^3}{(3n-1)^2-(5n+1)^2}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+7)^3-(n-1)^3}{(3n-1)^2-(5n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^3+3n^2\cdot 7+3n7^2+7^3\right)-\left(n^3-3n^2+3n-1\right)}{\left(9n^2-6n+1\right)-\left(25n^2+10n+1\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+21n^2+147n+343-n^3+3n^2-3n+1}{9n^2-6n+1-25n^{2-10n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{24n^2+144n+344}{-16n^2-16n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

Здесь старшая степень при n – вторая и n^2- степень, поэтому

$$A=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{24n^2+144n+344}{n^2}}{\frac{-16n^2-16n}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{24+\frac{144}{n}+\frac{344}{n^2}}{-16-\frac{16}{n}}=\frac{24+0+0}{-16-0}=\frac{24}{-16}=-\frac{3}{2}.$$

Контрольные варианты к задаче 16

Вычислить пределы числовых последовательностей:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3-n)^2+(3+n)^2}{(3-n)^2-(3+n)^2}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^4-(1+n)^4}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^3-(1+n)^3}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1-n)^4-(1+n)^4}{(1+n)^3-(1-n)^3}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(6-n)^2-(6+n)^2}{(6+n)^2-(1-n)^2}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(n+1)^3-(n+1)^2}{(n-1)^3-(n+1)^3}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1+2n)^3-8n^3}{(1+2n)^2+4n^2}$.

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3-4n)^2}{(n-3)^3-(n+3)^3}$.

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3-n)^3}{(n+1)^2-(n+1)^3}$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(n+1)^2+(n-1)^2-(n+2)^3}{(4-n)^3}$.

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2(n+1)^3-(n-2)^3}{n^2+2n-3}$.

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(n+1)^3+(n+2)^3}{(n+4)^3+(n+5)^3}$.

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(n+3)^3+(n+4)^3}{(n+3)^4-(n+4)^4}$.

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^3+(n-1)^3}$.

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8n^3-2n}{(n+1)^4-(n-1)^4}$.

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(n+6)^3-(n+1)^3}{(2n+3)^2+(n+4)^2}$.

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2n-3)^3-(n+5)^3}{(3n-1)^3+(2n+3)^3}$.

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(n+10)^2+(3n+1)^2}{(n+6)^3-(n+1)^3}$.

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2n+1)^3+(3n+2)^3}{(2n+3)^3-(n-7)^3}$.

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(n+7)^3-(n+2)^3}{(3n+2)^2-(4n+1)^2}$.

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2n+1)^3-(2n+3)^3}{(2n+1)^2+(2n+3)^2}$.

22. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n^3-(n-1)^3}{(n+1)^4-n^4}$.

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(n+2)^4-(n-2)^4}{(n+5)^2+(n-5)^2}$.

24. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^3+(n-1)^3}$.

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2-(n-1)^2}$. 26. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$.

27. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(n+2)^3+(n-2)^3}{n^4+2n^2-1}$. 28. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(n+1)^3+(n-1)^3}{n^3-3n}$.

29. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(n+1)^3+(n-1)^3}{n^3+1}$. 30. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(n+2)^2-(n-2)^2}{(n+3)^2}$.

З а д а ч а 17

Если при $x\to x_0$, $f(x)\to+\infty$ и $q(x)\to+\infty$, то разность $f(x)-q(x)$ представляет собой неопределенность $\infty-\infty$. Чтобы раскрыть такую неопределенность, надо привести её к виду $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Пример 17

Вычислить предел $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x-3}-\sqrt{2x+1}\right)=(\infty-\infty)$.

Умножим и разделим на сопряженное выражение $\sqrt{4x-3}+\sqrt{2x+1}$, тогда

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{4x-3}-\sqrt{2x+1}\right)\left(\sqrt{4x-3}+\sqrt{2x+1}\right)}{\sqrt{4x-3}+\sqrt{2x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{4x-3}\right)^2-\left(\sqrt{2x+1}\right)^2}{\sqrt{4x-3}+\sqrt{2x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-4}{\sqrt{4x-3}+\sqrt{2x+1}}=\frac{\infty}{\infty}.$$

Здесь старшая степень x - первая, поэтому

$$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{2x-4}{x}}{\dfrac{\sqrt{4x-3}+\sqrt{2x+1}}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\dfrac{4}{x}}{\dfrac{\sqrt{4x-3}}{x}+\dfrac{\sqrt{2x+1}}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\dfrac{4}{x}}{\sqrt{\dfrac{4x-3}{x^2}}+\sqrt{\dfrac{2x+1}{x^2}}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\dfrac{4}{x}}{\sqrt{\dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{x^2}}+\sqrt{\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}=\frac{2}{0}=\infty.$$

Контрольные варианты к задаче 17

Вычислить пределы функции:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}\right)$. 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-5x}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)$. 4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2-3}-5x\right)$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+12x}-\sqrt{9x^2+18x-5}\right).$

6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+6x-3}-x\right).$

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+2x}\right).$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2-3}-\sqrt{x^2+1}\right).$

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^6+3x^2+1}-x^3\right).$

10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+9}-x\right).$

11. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{y^2-2y}--y\right).$

12. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x-1}-\sqrt{2x+1}\right).$

13. $\lim\limits_{u\to\infty}\left(\sqrt{u^2-4}-\sqrt{u^2+4u}\right).$

14. $\lim\limits_{y\to+\infty}\left(\sqrt{(y+2)(y+6)}-y\right).$

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+8x-7}-\sqrt{x^2+4x}\right).$

16. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+4x}-3x\right).$

17. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x+x^2}-x\right).$

18. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+3x}\right).$

19. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{3x^2+2x+1}\right).$

20. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-3x}\right).$

21. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+10x+9}-x\right).$

22. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x+5}-\sqrt{2x+7}\right).$

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-9x}\right).$

24. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x^2-2}-5x\right).$

25. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+1}-x\right).$

26. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+5}-\sqrt{x^2+2}\right)$.

27. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+6x+1}-\sqrt{3x^2+1}\right).$

28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{3x^2-1}\right)$.

29. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{7x-1}-\sqrt{2x-3}\right).$

30. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{8x^2+1}-2x\right).$

З а д а ч а 18

Две бесконечно малые функции $\alpha=\alpha(x)$ и $\beta=\beta(x)$ при $x\to x_0$ или $x\to\infty$ называются эквивалентными, если предел их отношения равен единице. Эквивалентность бесконечно малых функций записывается в виде $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

Таким образом, если $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

<u>Таблица эквивалентных бесконечно малых функций</u>

1. $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\dfrac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1\Rightarrow\ \sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$ при $\alpha(x)\to 0$.

2. $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}\alpha(x)}{\alpha(x)}=1 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$ при $\alpha(x)\to 0$.

3. $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\dfrac{\arcsin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1 \Rightarrow \arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$ при $\alpha(x)\to 0$

4. $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}\alpha(x)}{\alpha(x)}=1 \Rightarrow \operatorname{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$ при $\alpha(x)\to 0$.

5. $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\dfrac{\ln(1+\alpha(x))}{\alpha(x)}=1 \Rightarrow \ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$ при $\alpha(x)\to 0$.

6. $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\dfrac{e^{\alpha(x)}-1}{\alpha(x)}=1 \Rightarrow e^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x)$ при $\alpha(x)\to 0$.

7. $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\alpha(x)}-1}{\frac{1}{2}\alpha(x)}=1 \Rightarrow \sqrt{1+\alpha(x)}-1 \sim \dfrac{1}{2}\alpha(x)$ при $\alpha(x)\to 0$.

Теорема. Предел отношения двух бесконечно малых не изменится, если одну или обе бесконечно малые заменить им эквивалентными, т. е. если $\alpha_1(x)\sim\alpha_2(x)$ и $\beta_1(x)\sim\beta_2(x)$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}$.

Заметим, что с помощью эквивалентных бесконечно малых раскрывают неопределенность $\dfrac{0}{0}$.

Пример 18

Вычислить предел $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 18x}{\operatorname{tg}13x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 18x}{\operatorname{tg}13x}=\left|\begin{matrix}\sin 18x\sim 18x\\ \operatorname{tg}13x\sim 13x\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{18x}{13x}=\frac{18}{13}.$$

Пример 19

Вычислить предел $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}3x}-1}{\ln(1+4x)}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}3x}-1}{\ln(1+4x)}=\left|\begin{matrix}\sqrt{1+\operatorname{tg}3x}-1\sim\frac{1}{2}\operatorname{tg}3x\sim\frac{1}{2}\cdot 3x\\ \ln(1+4x)\sim 4x\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{2}x}{4x}=\frac{3}{8}.$$

Пример 20

Вычислить предел $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos^3 2x}{\arcsin^2 7x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos^3 2x}{\arcsin^2 7x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x\left(1-\cos^2 2x\right)}{\arcsin^2 7x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x\cdot\sin^2 2x}{\arcsin^2 7x} =$$

$$= \left|\begin{matrix}\sin^2 2x \sim (2x)^2\\ \arcsin^2 7x \sim (7x)^2\end{matrix}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x\cdot 4x^2}{49x^2} = \frac{4}{49}.$$

Контрольные варианты к задаче 18

Вычислить пределы функций:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{x\,\mathrm{tg}2x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos 2x}{9x^2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,\mathrm{tg}x}{1-\cos x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{\sin^2 5x}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x^2}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{\mathrm{tg}^2 2x}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,\mathrm{tg}3x}{\cos x-\cos^3 x}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2 3x}{1-\cos 4x}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{x\sqrt{1-\cos 8x}}{\sin^2 4x}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos\ 2x}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x\sin 3x}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,\mathrm{tg}x}{1-\cos 4x}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-1}{x\,\mathrm{tg}2x}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 4x}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\sin x}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{1-\cos 4x}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 2x}{x^2}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^5 x}{x\sin 3x}$.

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\,\mathrm{tg}3x}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x\,\mathrm{tg}4x}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{\arcsin^4 3x}$.

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{2x\,\mathrm{tg}2x}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{\sin^2 5x}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,\mathrm{tg}\,2x}{1-\cos x}$.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 3x}{\arcsin^2 3x}$.

30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{\sin^2 2x}$.

З а д а ч а 19

Пример 21

Вычислить предел $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+7}-\sqrt{7}}{\mathrm{arctg}15x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+7}-\sqrt{7}}{\mathrm{arctg}15x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{2x+7}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{2x+7}+\sqrt{7}\right)}{\left(\sqrt{2x+7}+\sqrt{7}\right)\cdot\mathrm{arctg}15x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{2x+7}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}{\left(\sqrt{2x+7}+\sqrt{7}\right)\cdot\mathrm{arctg}15x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\left(\sqrt{2x+7}+\sqrt{7}\right)\cdot\mathrm{arctg}15x}=\left|\mathrm{arctg}\,15x\sim 15x\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\left(\sqrt{2x+7}+\sqrt{7}\right)\cdot 15x}=\frac{2}{2\sqrt{7}\cdot 15}=\frac{1}{15\sqrt{7}}.$$

Контрольные варианты к задаче 19

Вычислить пределы функций:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,5x}{\sqrt{x+16}-4}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+4}-2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\cdot\sin x}-1}{3x^2}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x+2}-\sqrt{2}}{\mathrm{tg}\,3x}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{2}\right)\sin\frac{x}{2}}{x^2}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,5x}{\sqrt{x+8}-\sqrt{8}}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 5x}{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{3}}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\mathrm{arctg}\,3x}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 3x}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{\cos x-\cos^3 x}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{5-\sqrt{x+25}}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\mathrm{tg}\,\frac{x}{4}}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}5x}{\sqrt{x+4}-2}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^5 x}{\sqrt{9+x^2}-3}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-2\cos x}{x\left(\sqrt{1+x}-1\right)}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{8+x}-\sqrt{8}\right)\sin 2x}{x^2}$.

19. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\alpha^2}{\left(\sqrt{9-\alpha}-3\right)\operatorname{tg}3\alpha}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{x+9}-3\right)x}{\sin^2 3x}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin 3x}$.

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}7x}{\sqrt{x+49}-7}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 7x}{\sqrt{x+4}-2}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{2}\right)\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{x^2}$.

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}13x}{\sqrt{2x+5}-\sqrt{5}}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x+2}-\sqrt{2}}{\operatorname{tg}3x}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x\sin x}-\sqrt{2}}{2x^2}$.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+25}-5}$.

30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\sqrt{x+9}-3}$.

З а д а ч а 20

Пусть нужно найти $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{\varphi(x)}$. Если при этом при $x\to x_0$ $f(x)\to 1$ и $\varphi(x)\to\infty$, то имеем неопределенность 1^∞; если $f(x)\to\infty$ и $\varphi(x)\to 0$, то имеем неопределенность ∞^0; $f(x)\to 0$ и $\varphi(x)\to 0$, то имеем неопределенность 0^0. Эти неопределенности раскрываются с помощью **второго замечательного предела**.

1. $\lim\limits_{v\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{v}\right)^v=\ell,\ \ell=2{,}71828...$ или 2. $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\left(1+\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}=\ell.$

Пример 22

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+5}{3x+1}\right)^x$.

Здесь $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+5}{3x+1}=\infty=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+\frac{5}{x}}{3+\frac{1}{x}}=1$, поэтому получим неопределенность вида 1^{∞}. Используем первую форму второго замечательного предела. Для этого преобразуем основание к виду $1+\frac{1}{v}$ следующим образом:

$$\frac{3x+5}{3x+1}=1+\left(\frac{3x+5}{3x+1}-1\right)=1+\frac{3x+5-3x-1}{3x+1}=1+\frac{4}{3x+1}=1+\frac{1}{\frac{3x+1}{4}}.$$

Тогда $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+5}{3x+1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3x+1}{4}}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{3x+1}{4}}\right)^{\frac{3x+1}{4}}\right]^{\frac{4}{3x+1}\cdot x}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{3x+1}{4}}\right)^{\frac{3x+1}{4}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{3x+1}}=e^{\frac{4}{3}},$$

т. к. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{3x+1}=\frac{4}{3}$, а предел основания равен e.

Контрольные варианты к задаче 20

Вычислить пределы функций:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-5}{x^2+1}\right)^{6-4x^2}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+8}{2x^2+3x-1}\right)^{x^2-4}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+2}{x^3+1}\right)^{6x^3+4}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x-1}{5x-2}\right)^{3x}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+4x-5}{2x^2-8}\right)^{2x}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{x^2+1}\right)^{3-x^2}$.

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-7}{2x-3}\right)^{4x+1}$.

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x-4}\right)^{2x}$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+1}{4x-3}\right)^{1-2x}$.

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x-2}{5x+3}\right)^{3-2x}$.

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+4}\right)^{x}$.

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^{4-x}$.

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-5}{4x-3}\right)^{4x+1}$.

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+5}\right)^{1-3x}$.

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+4}\right)^{1-2x}$.

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+5}{4x+1}\right)^{2x-3}$.

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x-2}\right)^{6x+1}$.

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{4-x}$.

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+7}{5x-3}\right)^{2x}$.

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+2}\right)^{2x-4}$.

22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+5}\right)^{3x-2}$.

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{7x-1}{7x+5}\right)^{4-x}$.

24. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-3}{3x-1}\right)^{1-4x}$.

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x-1}{5x+7}\right)^{3x+1}$.

26. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6-x}{7-x}\right)^{3x}$.

27. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{7x+5}{7x-1}\right)^{3-x}$.

28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^3+4}\right)^{5x^3+1}$.

29. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+8}{3x^2-1}\right)^{x^2-4}$.

30. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x-5}\right)^{7x+1}$.

З а д а ч а 21

Пример 23

Вычислить $A=\lim\limits_{x\to\infty}\{(x-9)[\ln(x+4)-\ln x]\}$. Это неопределенность вида $\infty\cdot 0$.

Так как $(x-9)[\ln(x+4)-\ln x]=(x-9)\cdot\ln\frac{x+4}{x}=(x-9)\cdot\ln\left(1+\frac{4}{x}\right)=\ln\left(1+\frac{4}{x}\right)^{x-9}$.

Найдем, используя свойство непрерывности логарифмической функции:

$$A=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{4}{x}\right)^{x-9}=\ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{x-9}=\ln\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x/4}\right)^{\frac{x}{4}}\right]^{\frac{4}{x}\cdot(x-9)}=$$

$$=\ln\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{4}}\right)^{\frac{x}{4}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x-36}{x}}=\ln e^4=4.$$

Контрольные варианты к задаче 21

Вычислить пределы функции:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(8x-1)[\ln(2x-1)-\ln 2x]$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)[\ln(x+1)-\ln x]$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x+2)[\ln(x+3)-\ln(x+4)]$.
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)[\ln(2x+3)-\ln(2x-4)]$.
5. $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-2)[\ln(2x-1)-\ln(2x+1)]$.
6. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-5)[\ln(x-3)-\ln x]$.
7. $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-5)[\ln(2x+4)-\ln(2x+1)]$.
8. $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x+1)[\ln(2x-1)-\ln(2x+4)]$.
9. $\lim\limits_{x\to+\infty}(4x-3)[\ln(x+2)-\ln(x-1)]$.
10. $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x+5)[\ln(2x-1)-\ln x]$.
11. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-7)[\ln(x+4)-\ln x]$.
12. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+7)[\ln(4x-5)-\ln 4x]$.
13. $\lim\limits_{x\to+\infty}(7x-4)[\ln(4x+1)-\ln 4x]$.
14. $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+3)[\ln(x+2)-\ln x]$.
15. $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-5)[\ln(2x+4)-\ln 2x]$.
16. $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-2)[\ln(2x+1)-\ln(2x-1)]$.
17. $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x+7)[\ln(5x+2)-\ln(5x-3)]$.
18. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)[\ln(2x+3)-\ln(2x-4)]$.
19. $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x+4)[\ln(x+2)-\ln x]$.
20. $\lim\limits_{x\to+\infty}(3-x)[\ln(1-x)-\ln(2-x)]$.
21. $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x+4)\left[\ln\left(\frac{1}{2}x-1\right)-\ln\left(\frac{1}{2}x+5\right)\right]$.
22. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-4)[\ln(2-3x)-\ln(5-3x)]$.
23. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)[\ln(2x-3)-\ln(2x+1)]$.
24. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-8)[\ln(4x+3)-\ln(4x-7)]$.
25. $\lim\limits_{x\to+\infty}(4x-1)[\ln(2-x)-\ln(3-x)]$.
26. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-6)[\ln(2x+1)-\ln(2x+3)]$.
27. $\lim\limits_{x\to+\infty}(3-x)[\ln(2x+1)-\ln(2x-5)]$.
28. $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-1)[\ln(2x-1)-\ln(2x+1)]$.
29. $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+3)[\ln(x+1)-\ln x]$.
30. $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-3)[\ln(3x-1)-\ln 3x]$.

З а д а ч а 22

Пример 24

Вычислить $A = \lim\limits_{x\to 2}(9-4x)^{\frac{x}{x-2}}$.

Если представить предельное значение переменной x, то получим неопределенность вида 1^{∞}. Используя вторую форму второго замечательного предела $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$, введем новую переменную $y = x-2$. Тогда $y \to 0$, если $x \to 0$. Из замены $x = y+2$. Тогда

$$A = \lim_{x\to 2}(9-4x)^{\frac{x}{x-2}} = \lim_{y\to 0}[9-4(y+2)]^{\frac{y+2}{(y+2)-2}} = \lim_{y\to 0}(1-4y)^{\frac{y+2}{y}} =$$

$$= \lim_{y\to 0}\left\{[1+(-4y)]^{\frac{1}{-4y}}\right\}^{\frac{-4y(y+2)}{y}} = e^{-8}.$$

Контрольные варианты к задаче 22

Вычислить пределы функций

1. $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{x}{1-x}}$. 2. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{2x}{1-x}}$. 3. $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{3x}{x-1}}$.

4. $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)^{\frac{5x}{x^2-1}}$. 5. $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{3x}{x-2}}$. 6. $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)^{\frac{2x}{x-3}}$.

7. $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{2x}{x^2-4}}$. 8. $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{x}{x-2}}$. 9. $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{2x}{x^2-1}}$.

10. $\lim\limits_{x\to 1}(7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}$. 11. $\lim\limits_{x\to 1}(4-3x)^{\frac{x}{x-1}}$. 12. $\lim\limits_{x\to 2}(5-2x)^{\frac{x}{x-2}}$.

13. $\lim\limits_{x\to 3}(7-2x)^{\frac{2x}{x-3}}$. 14. $\lim\limits_{x\to -1}(2x+3)^{\frac{1}{x+1}}$. 15. $\lim\limits_{x\to -1}(2x+3)^{\frac{1}{x+1}}$.

16. $\lim\limits_{x\to 1}(6x-5)^{\frac{3x}{x^2-1}}$. 17. $\lim\limits_{x\to -3}(2x+7)^{\frac{2x}{x^2-9}}$. 18. $\lim\limits_{x\to -2}(4x+9)^{\frac{2x}{x^2-4}}$.

19. $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{4}{x-2}}$. 20. $\lim\limits_{x\to 4}(2x-7)^{\frac{7x}{x-4}}$. 21. $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{\frac{5x}{x-3}}$.

22. $\lim\limits_{x\to -3}(3x+10)^{\frac{6x}{x+3}}$. 23. $\lim\limits_{x\to -2}(5+2x)^{\frac{3x}{x^2-4}}$. 24. $\lim\limits_{x\to -5}(11+2x)^{\frac{7x}{x+5}}$.

23. $\lim\limits_{x\to 5}(2x-9)^{\frac{2x}{x^2-25}}$. 26. $\lim\limits_{x\to -4}(2x+9)^{\frac{5x}{x^2-16}}$. 27. $\lim\limits_{x\to 4}(3x-11)^{\frac{7x}{x-4}}$.

28. $\lim\limits_{x\to -5}(3x+16)^{\frac{6x}{x+5}}$. 29. $\lim\limits_{x\to 7}(2x-13)^{\frac{x}{x^2-49}}$. 30. $\lim\limits_{x\to -7}(15+2x)^{\frac{3x}{x^2-49}}$.

З а д а ч а 23

Пример 25

Вычислить $\lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{4}{x^2-6x+5}\right)$.

При подстановке предельного значения аргумента возникает неопределенность $(\infty-\infty)$. Приведение к общему знаменателю сводит эту неопределенность к неопределенности $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

$$\lim_{x\to 5}\left(\frac{1}{x-5}-\frac{4}{(x-5)(x-1)}\right)=\lim_{x\to 5}\frac{x-1-4}{(x-5)(x-1)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 5}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{4}.$$

Контрольные варианты задачи 23

Вычислить пределы функций:

1. $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{12}{x^3+8}\right)$.

2. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$.

2. $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{4}{4-x^2}\right)$.

4. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x\right)$.

6. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

7. $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{6}{9-x^2}\right)$.

8. $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{12}{x^3-64}\right)$.

9. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+3}-x\right)$.

10. $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$.

11. $\lim\limits_{z\to 2}\left(\dfrac{1}{2-z}-\dfrac{3}{8-z^3}\right)$.

12. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+5}-x\right)$.

13. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{10}{x-2}-\dfrac{1}{x^2-x-2}\right)$.

14. $\lim\limits_{x\to -6}\left(\dfrac{3}{x^2+7x+6}-\dfrac{1}{x+6}\right)$.

15. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{5}{x-3}-\dfrac{1}{x^2-5x+6}\right)$.

16. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{6}{9-x^2}-\dfrac{1}{x-3}\right)$.

17. $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{3}{x^2-5x+4}\right)$.

18. $\lim\limits_{x\to -4}\left(\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{1}{x^2+9x+20}\right)$.

19. $\lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{10}{x^2-25}-\dfrac{1}{x-5}\right)$.

20. $\lim\limits_{x\to -5}\left(\dfrac{1}{x+5}-\dfrac{1}{x^2+11x+30}\right)$.

21. $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{2x^2+7x+5}\right)$. 22. $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{3x^2+13x+14}\right)$.

23. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^3+3x^2+1}{x^2+1}-x\right)$. 24. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x^2-5x+6}\right)$.

25. $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{x^2+3x+2}-\dfrac{1}{x+1}\right)$. 26. $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{4}{x+3}-\dfrac{1}{x^2+7x+12}\right)$.

27. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{2}{x^2-4x+3}\right)$. 28. $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{9}{2x^2-7x-4}\right)$.

29. $\lim\limits_{x\to -4}\left(\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{2}{x^2+10x+24}\right)$. 30. $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{6}{x^2-2x-8}\right)$.

З а д а ч а 24

Функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0, если выполнены условия:

1) функция определена в этой точке и ее окрестности;

2) существует предел функции в точке x_0, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$;

3) предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке.

Если в точке x_1 нарушено хотя бы одно из этих условий, то x_1 - точка разрыва.

Точка разрыва x_1 называется точкой разрыва первого рода, если существуют конечные односторонние пределы функции в этой точке. Если при этом они равны между собой, то x_1 называют точкой устранимого разрыва, а если они не равны, то x_1 называют точкой неустранимого разрыва или скачком.

Точка разрыва x_2 называется точкой разрыва второго рода, если хотя бы один (или оба) из односторонних пределов функции в точке x_2 бесконечен или не существует.

Пример 26

Исследовать функцию $y=f(x)$ на непрерывность. В точках разрыва установить характер разрыва. Схематично построить график функции

$$y=\begin{cases} -1, \text{ если } x<-\dfrac{\pi}{4};\\ \operatorname{tg}x, \text{ если } -\dfrac{\pi}{4}\le x<0;\\ \dfrac{1}{x-1}, \text{ если } x\ge 0.\end{cases}$$

Функция задана тремя аналитическими выражениями, представляющими собой элементарные функции, которые непрерывны во всех точках, где они определены.

Функция $y=-1$ всюду определена, функция $y=\operatorname{tg}x$ определена на промежутке $\left(-\frac{\pi}{4}\right)\le x<0$, функция $y=\frac{1}{x-1}$ не определена в точке $x_0=1$, которая является точкой разрыва. Точками разрыва могут быть также точки $x=-\frac{\pi}{4}$ и $x_2=0$, где происходит смена аналитического выражения функции.

Исследуем на непрерывность функцию в точке $x_1=-\frac{\pi}{4}$.

1. $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1.$

2. $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{4}-0} f(x)=\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{4}} (-1) = -1.$

$\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{4}+0} f(x) = \lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{4}+0} \operatorname{tg}x = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1,\quad \lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{4}} f(x) = -1.$

3. $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{4}} f(x) = f\left(-\frac{\pi}{4}\right).$

В точке $x_1 = -\frac{\pi}{4}$ функция непрерывна.

Исследуем на непрерывность функцию в точке $x_2 = 0$.

1. $f(0) = \frac{1}{0-1} = -1.$

2. $\lim\limits_{x\to0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to0} \operatorname{tg}x=0,\quad \lim\limits_{x\to0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x-1} = -1.$

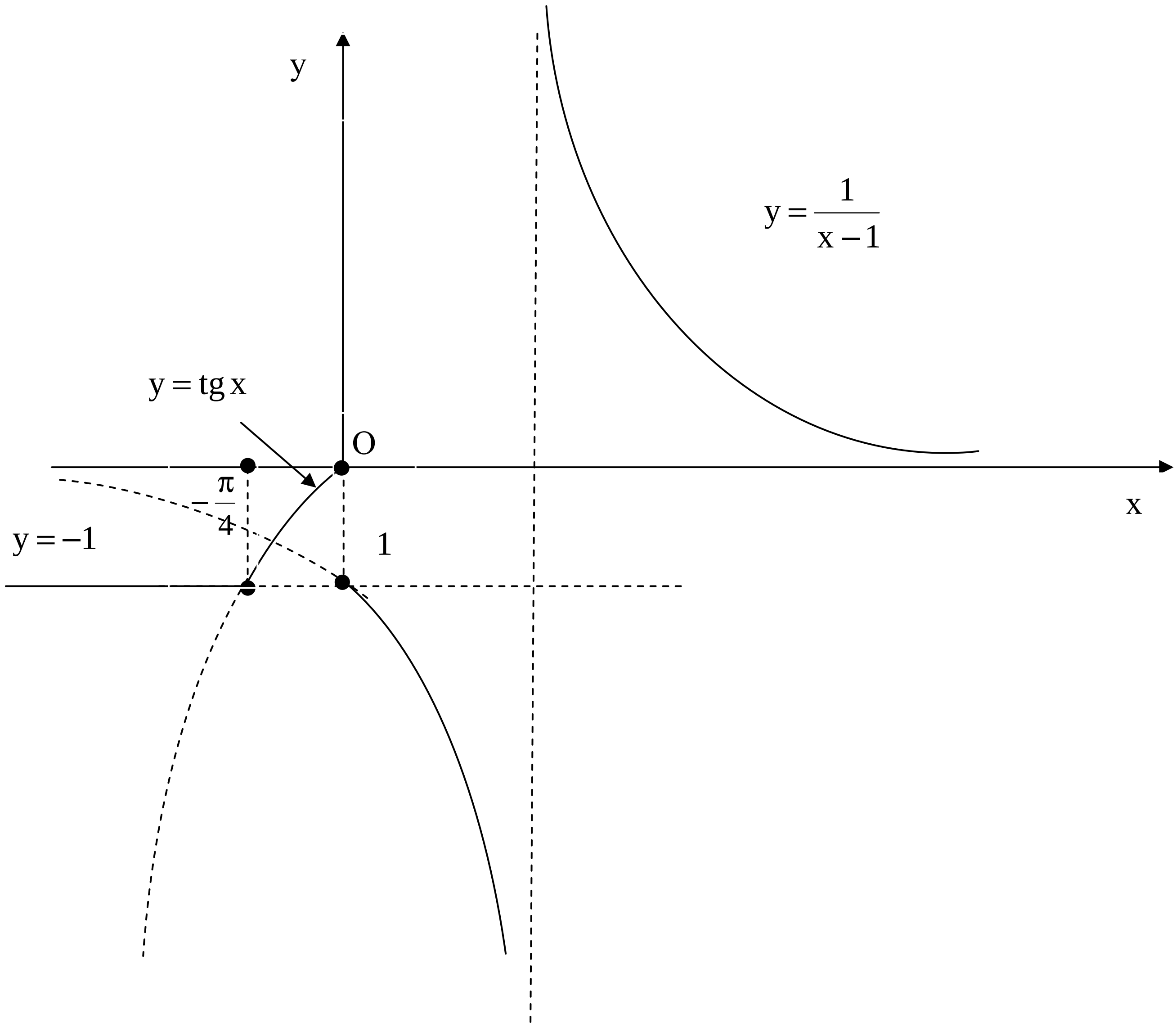
Так как односторонние пределы в точке $x_2=0$ не равны между собой, предел функции в точке $x_2=0$ не существует. Однако односторонние пределы в этой точке существуют и конечны, поэтому x_2 - точка неустранимого разрыва I рода.

Определим характер разрыва функции в точке $x_3=1$.

$$\lim_{x\to1-0} f(x)=\lim_{x\to1-0}\frac{1}{x-1}=\left(\frac{1}{-0}\right)=-\infty.$$
$$\lim_{x\to1+0} f(x)=\lim_{x\to1+0}\frac{1}{x-1}=\left(\frac{1}{+0}\right)=+\infty.$$

Так как односторонние пределы функции в точке $x_0=1$ бесконечны, точка x_0- точка разрыва второго рода.

График функции, имеет следующий вид.



Контрольные варианты задачи 24

Исследовать функцию $y=f(x)$ на непрерывность. В точках разрыва установить характер разрыва. Схематично построить график функции:

1. $y=\begin{cases}2x+1, & \text{если } x<-1\\ x^2, & \text{если } -1\le x\le 2\\ 6-x, & \text{если } x>2\end{cases}$

2. $y=\begin{cases}4+x, & \text{если } x<-1\\ x^2+2, & \text{если } -1\le x<1\\ 2x, & \text{если } x\ge 1\end{cases}$

3. $y=\begin{cases}x+1, & \text{если } x\le 0\\ (x+1)^2, & \text{если } 0<x\le 2\\ -x+4, & \text{если } x>2\end{cases}$

4. $y=\begin{cases}x+2, & \text{если } x\le -1\\ x^2+1, & \text{если } -1<x\le 1\\ -x+3, & \text{если } x>1\end{cases}$

5. $y=\begin{cases}-x, & \text{если } x\le 0\\ -(x-1)^2, & \text{если } 0<x<2\\ x-3, & \text{если } x\ge 2\end{cases}$ 6. $y=\begin{cases}-(x+1), & \text{если } x\le -1\\ (x+3)^3, & \text{если } -1<x<0\\ x, & \text{если } x\ge 0\end{cases}$

7. $y=\begin{cases}x+1, & \text{если } x\le 0\\ x^2, & \text{если } 0<x\le 2\\ 0{,}5\,x+3, & \text{если } x>2\end{cases}$ 8. $y=\begin{cases}-x, & \text{если } x\le 0\\ \operatorname{tg}x, & \text{если } 0<x<\dfrac{\pi}{4}\\ 2, & \text{если } x\ge\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$

9. $y=\begin{cases}x+1, & \text{если } x<0\\ x^2+1, & \text{если } 0\le x<1\\ 1, & \text{если } x\ge 1\end{cases}$ 10. $y=\begin{cases}x^2+1, & \text{если } x<0\\ 1-x, & \text{если } 0\le x\le 2\\ 2, & \text{если } x>2\end{cases}$

11. $y=\begin{cases}-2x, & \text{если } x\le 0\\ \sqrt{x}, & \text{если } 0<x<4\\ 3, & \text{если } x\ge 4\end{cases}$ 12. $y=\begin{cases}x^2, & \text{если } x\le 0\\ x, & \text{если } 0<x\le 2\\ 1, & \text{если } x>2\end{cases}$

13. $y=\begin{cases}3x, & \text{если } x\le 0\\ 2, & \text{если } 0<x\le 2\\ x, & \text{если } x>2\end{cases}$ 14. $y=\begin{cases}-x, & \text{если } x\le 0\\ \sin x, & \text{если } 0<x\le\pi\\ x-2, & \text{если } x>\pi\end{cases}$

15. $y=\begin{cases}2x, & \text{если } x\le 0\\ x^2+1, & \text{если } 0<x\le 1\\ 2, & \text{если } x>1\end{cases}$ 16. $y=\begin{cases}-x, & \text{если } x\le 0\\ x^2+1, & \text{если } 0<x\le\\ x+1, & \text{если } x>2\end{cases}$

17. $y=\begin{cases}x^2+1, & \text{если } x\le 1\\ 2x, & \text{если } 1<x\le 3\\ x+2, & \text{если } x>3\end{cases}$ 18. $y=\begin{cases}x^2+1, & \text{если } x\le 2\\ 1+2x, & \text{если } 2<x\le 3\\ 4x+2, & \text{если } x>3\end{cases}$

19. $y=\begin{cases}x-3, & \text{если } x<0\\ x+1, & \text{если } 0\le x\le 4\\ 3+\sqrt{x}, & \text{если } x>4\end{cases}$ 20. $y=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & \text{если } x\le 0\\ 0, & \text{если } 0<x\le 2\\ x-2, & \text{если } x>2\end{cases}$

$$21.\ y=\begin{cases}2x^2, & \text{если } x\le 0\\ x, & \text{если } 0<x\le 1\\ 2, & \text{если } x>1\end{cases}\qquad 22.\ y=\begin{cases}-x-1, & \text{если } x<0\\ 2x, & \text{если } 0\le x<2\\ x^2, & \text{если } x\ge 2\end{cases}$$

$$23.\ y=\begin{cases}x^3+1, & \text{если } x\le 0\\ x, & \text{если } 0<x\le 2\\ 3, & \text{если } x>2\end{cases}\qquad 24.\ y=\begin{cases}x-1, & \text{если } x\le 0\\ x^2, & \text{если } 0<x<2\\ 2x, & \text{если } x\ge 2\end{cases}$$

$$25.\ y=\begin{cases}3x+1, & \text{если } x<0\\ x^2+1, & \text{если } 0\le x<1\\ 0, & \text{если } x\ge 2\end{cases}\qquad 26.\ y=\begin{cases}\sqrt{-x}, & \text{если } x\le 0\\ 2, & \text{если } 0<x\le 2\\ x, & \text{если } x>2\end{cases}$$

$$27.\ y=\begin{cases}5x+1, & \text{если } x<-1\\ x^2, & \text{если } -1\le x\le 2\\ 6-x, & \text{если } x>2\end{cases}\qquad 28.\ y=\begin{cases}3+x, & \text{если } x<-1\\ x^2+1, & \text{если } -1\le x<1\\ 3x, & \text{если } x\ge 1\end{cases}$$

$$29.\ y=\begin{cases}x+1, & \text{если } x\le 0\\ (x+1)^2, & \text{если } 0<x\le 2\\ -x+2, & \text{если } x>2\end{cases}\qquad 30.\ y=\begin{cases}x+3, & \text{если } x\le -1\\ x^2+2, & \text{если } -1<x\le 1\\ -x+4, & \text{если } x>1\end{cases}$$

З а д а ч а 25

Известно, если $a>1$, то $\lim\limits_{x\to\infty} a^x=+\infty$ или $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$.

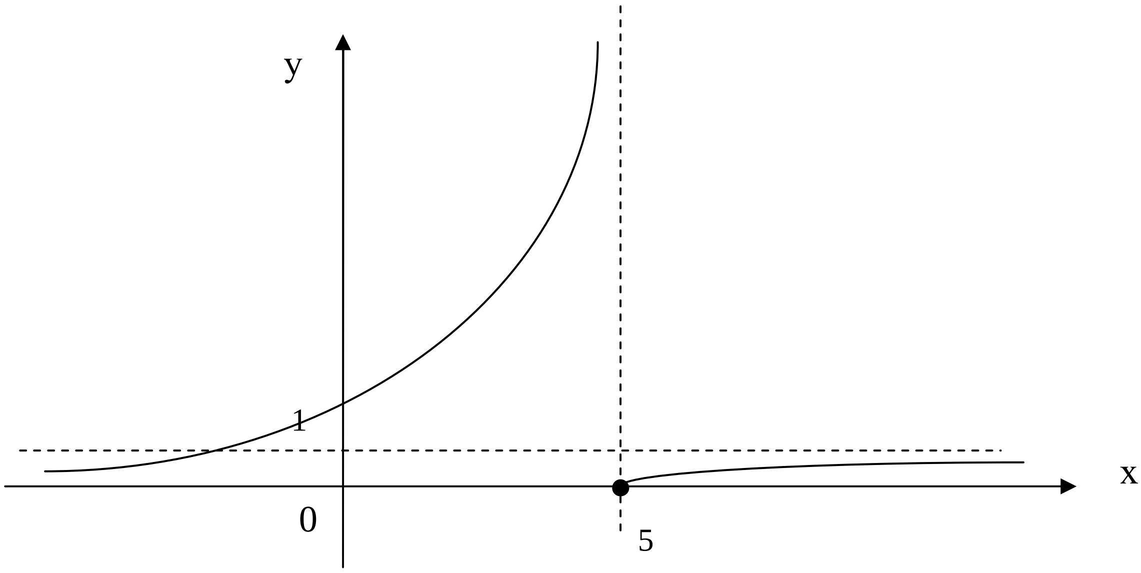
Пример 27

Исследовать функцию $y=9^{\frac{4}{5-x}}$ на непрерывность. Установить характер точек разрыва. Схематично построить график функции .

Функция $y=9^{\frac{4}{5-x}}$ элементарная, поэтому она непрерывна во всех точках, кроме точки $x_0=5$, где она не определена.

$$\lim_{x\to5-0}\frac{4}{5-x}=\left(\frac{4}{+0}\right)=+\infty,\quad \lim_{x\to5+0}\frac{4}{5-x}=\left(\frac{4}{-0}\right)=-\infty.$$

Поэтому $\lim\limits_{x\to5-0} 9^{\frac{4}{5-x}}=9^{\lim\limits_{x\to5-0}\frac{4}{5-x}}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to5+0} 9^{\frac{4}{5-x}}=9^{\lim\limits_{x\to5+0}\frac{4}{5-x}}=0$. В точке $x_0=5$ - разрыв II рода, т. к. левосторонний предел бесконечен.



Контрольные варианты задачи 25

Исследовать функцию $y = f(x)$ на непрерывность. В точках разрыва установить характер разрыва. Схематично построить график функции:

1. $y = 5^{\frac{1}{x-3}}$	2. $y = 3^{\frac{1}{x-4}}$	3. $y = 2^{\frac{1}{1-x}}$	4. $y = 4^{\frac{6}{3-x}}$	5. $y = 9^{\frac{1}{x-2}}$
6. $y = 7^{\frac{1}{x+1}}$	7. $y = 6^{\frac{2}{x-3}}$	8. $y = 5^{\frac{4}{2-x}}$	9. $y = 7^{\frac{6}{2+x}}$	10. $y = 3^{\frac{2}{x+4}}$
11. $y = 4^{\frac{2}{x-3}}$	12. $y = 7^{\frac{3}{x-1}}$	13. $y = 6^{\frac{5}{x+4}}$	14. $y = 8^{\frac{7}{x-4}}$	15. $y = 2^{\frac{3}{x+5}}$
16. $y = 9^{\frac{1}{x+2}}$	17. $y = 7^{\frac{1}{x+3}}$	18. $y = 3^{\frac{1}{x+5}}$	19. $y = 3^{\frac{5}{x-6}}$	20. $y = 8^{\frac{1}{x-7}}$
21. $y = 6^{\frac{1}{x-5}}$	22. $y = 5^{\frac{3}{2x-4}}$	23. $y = 2^{\frac{3}{x-5}}$	24. $y = 3^{\frac{4}{x-2}}$	25. $y = 5^{\frac{3}{1-x}}$
26. $y = 5^{\frac{7}{2-x}}$	27. $y = 2^{\frac{3}{7-x}}$	28. $y = 5^{\frac{7}{3-x}}$	29. $y = 5^{\frac{4}{7-x}}$	30. $y = 7^{\frac{4}{5-2x}}$

З а д а ч а 26

По определению модуль числа $|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0. \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$

Следовательно, $|x - a| = \begin{cases} x - a, & \text{если } x \geq a \\ -x + a, & \text{если } x < a. \end{cases}$

Пример 28

Исследовать функцию на непрерывность. Установить характер разрыва. Построить график функции

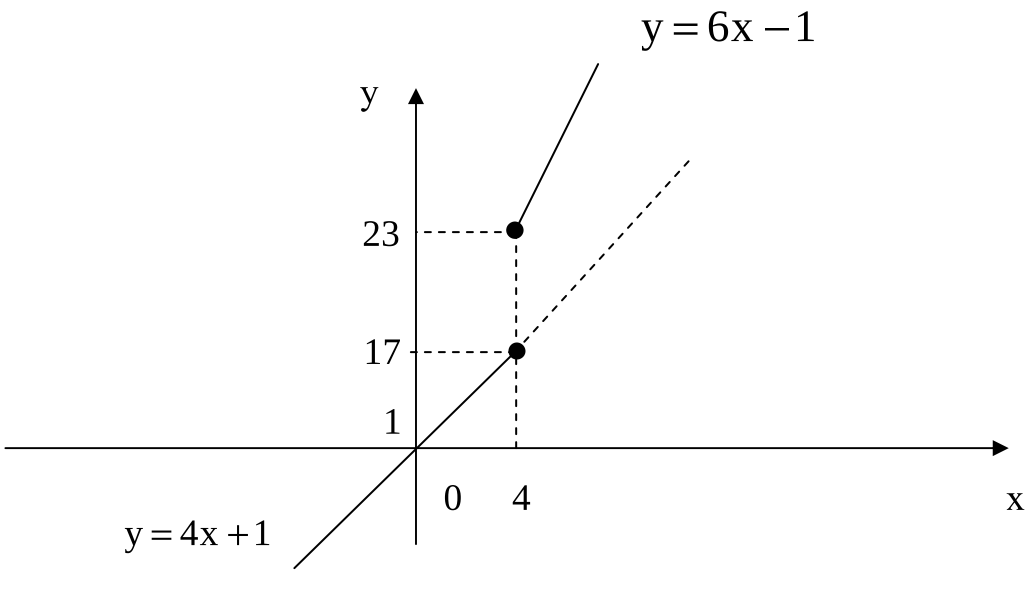
$$f(x) = 5x + \frac{x-4}{|x-4|}(x-1).$$

так как $|x-4| = \begin{cases} x-4, \text{ если } x \geq 4, \\ 4-x, \text{ если } x < 4, \end{cases}$ $\quad \frac{x-4}{|x-4|} = \begin{cases} 1, \text{ если } x > 4, \\ -1, \text{ если } x < 4. \end{cases}$

Функция $f(x)$ не определена в точке $x = 4$. Эта функция может быть записана в виде

$$f(x) = \begin{cases} 5x + 1 \cdot (x-1) = 6x - 1, \text{ если } x > 4, \\ 5x + (-1) \cdot (x-1) = 4x + 1, \text{ если } x < 4. \end{cases}$$

Каждое из аналитических выражений непрерывно, следовательно, функция $f(x)$ имеет разрыв только в точке $x_0 = 4$, где она не определена. Слева от этой точки функция задана формулой $f(x) = 4x + 1$. Следовательно, $\lim\limits_{x \to 4-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 4-0}(4x+1) = 17$. Справа от точки $x_0 = 4$ функция задана формулой $f(x) = 6x - 1$, поэтому $\lim\limits_{x \to 4+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 4+0}(6x-1) = 23$. Односторонние пределы в точке $x_0 = 4$ конечны, но не равны между собой. Предел функции в точке $x_0 = 4$ не существует. Функция имеет разрыв в этой точке, который является неустранимым разрывом I рода (скачком).



Контрольные варианты задачи 26

Исследовать функцию на непрерывность. В точках разрыва установить характер разрыва. Схематично построить график функции:

1. $f(x)=2x-\frac{|x+3|}{x+3}$.

2. $f(x)=x+\frac{x-1}{|x-1|}$.

3. $f(x)=\frac{x-1}{|x-1|}\cdot x+1$.

4. $f(x)=\frac{|x+5|}{x+5}\cdot x+2$.

5. $f(x)=\frac{|x+4|}{x+4}\cdot x-1$.

6. $f(x)=\frac{2x-1}{|2x-1|}\cdot x-7$.

7. $f(x)=2x-\frac{3x-3}{|3x-3|}(x-1)-2$.

8. $f(x)=\frac{x-1}{|x-1|}(x+1)-3$.

9. $f(x)=3x-\frac{|x-4|}{x-4}$.

10. $f(x)=x-\frac{x+5}{|x+5|}$.

11. $f(x)=x\cdot\frac{|x-1|}{x-1}-2$

12. $f(x)=3x+\frac{x+4}{|x+4|}$.

13. $f(x)=\frac{|x+5|}{x+5}\cdot(x-1)+2$.

14. $f(x)=\frac{|x+1|}{2(x+1)}\cdot x-1$.

15. $f(x)=\frac{4x-4}{|4x-4|}\cdot x-2$.

16. $f(x)=\frac{|2x+1|}{2x+1}\cdot(x-1)+2$.

17. $f(x)=\frac{|x-1|}{x-1}(x-3)+4$.

18. $f(x)=\frac{|4x+2|}{4x+2}\cdot x-1$.

19. $f(x)=\frac{3x-6}{|3x-6|}\cdot x+4$.

20. $f(x)=\frac{x+4}{|x+4|}\cdot(x+2)-1$.

21. $f(x)=\frac{x-6}{|x-6|}\cdot x+5$.

22. $f(x)=\frac{|x|}{2x}(x-1)+2$.

23. $f(x)=\frac{|x-1|}{x-1}(x+2)-5$.

24. $f(x)=\frac{|x-2|}{x-2}(x+1)+1$.

25. $f(x)=\frac{|x-3|}{x-3}\cdot(x-2)-1$.

26. $f(x)=2x-\frac{|x+5|}{x+5}$.

27. $f(x)=x+\frac{x-1}{|x-1|}$.

28. $f(x)=-2x-\frac{x-3}{|x-3|}$.

29. $f(x)=x+\frac{|x-2|}{x-2}$.

30. $f(x)=\frac{2|x|}{x}\cdot(x-2)+3$

Библиографический список

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. М.: Наука, 1985. Т. 2.

2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука, 1980.

3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М.: Наука, 1982.

4. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Наука, 1980.

5. Линейная алгебра и аналитическая геометрия (типовой расчет) / Сост.: Э.Г.Кучеренко, Н.И. Васильева, Р.Ш. Минабудинова; ОмПИ. Омск, 1983.

6. Данко П.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. М.: Высш. школа, 1980.

7. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1984.

Редактор Г. М. Кляут
ИД 06039 от 12.10.01
Сводный темплан 2004 г.
Подписано в печать 12.07.04. Бумага офсетная. Формат 60 x 84 1/16
Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ. л. 3,5. Уч.-изд. л. 3,5.
Тираж 100 экз. Заказ

Издательство ОмГТУ.644050, г. Омск, пр-т Мира, 11.
Типография ОмГТУ