Министерство образования и науки Российской Федерации
Омский государственный технический университет

# КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ ПО ЛИНЕЙНОЙ И ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЕ

Методические указания
для студентов технических специальностей
заочной формы обучения

Омск - 2004

Составители: Кичигина Раиса Сергеевна, старший преподаватель,
Хаустова Нина Михайловна, старший преподаватель

## Линейная алгебра

**Матрицей** называется произвольная система элементов, расположенных в виде таблицы, имеющей m строк и n столбцов.

Если элементы матрицы - числа, то матрица называется числовой. Обозначается матрица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad A=(a_{ij}),$$

где $i=1,\ 2,\ \ldots,\ m,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ i-$ номер строки, $j-$ номер столбца.

Матрица, имеющая $m$ строк и $n$ столбцов, называется матрицей размером $m\times n$. Если $m\neq n$, то матрица называется прямоугольной, а если $m=n$, то матрица называется квадратной.

Матрица размером $m\times 1$ называется матрицей-строкой; матрица размером $1\times n$ называется матрицей-столбцом.

Матрица, у которой все элементы равны нулю, называется нулевой. Ее обозначают О.

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов, стоящих по главной диагонали равны нулю, называется диагональной.

Диагональная матрица, у которой элементы, стоящие на главной диагонали равны единице, называется единичной. Ее будем обозначать буквой Е.

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица $A^{т}$, полученная из данной матрицы А заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется транспонированной. Если матрица А размером $m\times n$, то матрица $A^{т}$ будет размером $n\times m$.

Чтобы сложить две матрицы **одинакового размера**, нужно сложить элементы, стоящие на одинаковых местах. Если $A_{m\times n}=(a_{ij})$ и $B_{m\times n}=(b_{ij})$, то $A+B=C$, причем $C_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})$.

Чтобы умножить матрицу на число, нужно каждый элемент этой матрицы умножить на это число. Если $A_{m\times n}=(a_{ij})$, то $A\cdot\alpha=B$, причем $B_{m\times n}=(\alpha\cdot a_{ij})$.

Умножить можно не любые две матрицы, а лишь такие, у которых количество столбцов первой матрицы равно количеству строк второй матрицы.

Если $A_{m\times n}$, $B_{n\times k}$ и $C=A\cdot B$, то $C_{m\times k}$, т. е. $(m\times\underline{n})\cdot(\underline{n}\times k)=m\times k$. Пусть $C_{m\times n}=(c_{ij})$. Чтобы получить элемент $c_{ij}$ в матрице произведения, надо элементы

$i$-й строки первой матрицы умножить на элементы $j$-го столбца второй матрицы и полученные произведения сложить.

Начнем с умножения матрицы-строки $A=(1\ \ 0\ -2\ \ 3)$ на матрицу-столбец $B=\begin{pmatrix}5\\11\\7\\4\end{pmatrix}$. Матрица А имеет размер $1\times 4$ (одна строка, 4 столбца), матрица В – размер $4\times 1$. Произведение $A\cdot B$ существует, т. к. число столбцов первой матрицы совпадает с числом строк второй. Результирующая матрица С будет иметь размер $1\times 1$, т. е. состоять из единственного элемента. Найдем этот элемент. $c_{11}=1\cdot 5+0\cdot 11+(-2)\cdot 7+3\cdot 4=3$. Для этого умножим первый элемент матрицы-строки на первый элемент матрицы-столбца, прибавим произведение второго элемента матрицы-строки на второй элемент матрицы-столбца, затем прибавим произведение третьего элемента матрицы-строки на третий элемент матрицы-столбца и произведение соответствующих четвертых элементов.

$$(1\ \ 0-2\ \ 3)\cdot\begin{pmatrix}5\\11\\7\\4\end{pmatrix}=(5+0-14+12)=(3).$$

**Пример 1.** Найти произведение матриц

$$\begin{pmatrix}-2 & 3 & 1\\ 4 & -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & 4 & 1\\ -2 & 3 & -1\end{pmatrix}.$$

Матрица А=$\begin{pmatrix}-2 & 3 & 1\\ 4 & -1 & 2\end{pmatrix}$ имеет размер $2\times 3$, матрица В=$\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & 4 & 1\\ -2 & 3 & -1\end{pmatrix}$ имеет размер $3\times 3$. Произведение $A\cdot B$ существует, в результате получится матрица С размером $2\times 3$. Элемент $c_{ij}$ этой матрицы будет равен единственному элементу матрицы, которая получается, если $i$-ю строку, рассматриваемую как матрицу-строку, матрицы А умножить на $j$-й столбец (матрицу-столбец) матрицы В.

К примеру, чтобы найти $c_{23}$, нужно умножить вторую строку матрицы А на третий столбец матрицы В.

$$(c_{23})=(4-1\ \ 2)\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}=(4\cdot 2-1\cdot 1+2(-1))=(5),\ \ c_{23}=5.$$

Таким же образом можно найти остальные элементы матрицы С.

$$(c_{11}) = (-2\ \ 3\ \ 1)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = (-6+3-2) = (-5), \quad c_{11} = -5.$$

$$(c_{12}) = (-2\ \ 3\ \ 1)\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = (2+12+3) = (17), \quad c_{12} = 17.$$

$$(c_{13}) = (-2\ 3\ 1)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (-4+3-1) = (-2), \quad c_{13} = -2.$$

$$(c_{21}) = (4\ \ -1\ \ 2)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = (12-1-4) = (7), \quad c_{11} = 7.$$

$$(c_{22}) = (4\ \ -1\ \ 2)\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = (-4-4+6) = (-2), \quad c_{22} = -2.$$

$$C = \begin{pmatrix} -5 & 17 & -2 \\ 7 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

**Задача 1.** Найти произведение матриц.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ -5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 4 \\ 1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 3 \\ 7 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 & -3 \\ 4 & 5 & -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -5 & 2 \\ 6 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \\ 2 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & -6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \\ 4 & 3 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 5 \\ 4 & 6 & -7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & -9 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 20. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -5 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ 22. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 3 & 0 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 24. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ 3 & 4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ 26. $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 10 & 9 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 28. $\begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & -4 & 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \\ 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 2 & 13 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 & -5 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ 30. $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ -2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

**Задача 2.** Матрица $A^{-1}$ называется обратной для квадратной матрицы A, если $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$. Если определитель матрицы A не равен нулю, то матрица A называется невырожденной.

Матричное уравнение вида $A \cdot X = B$, где A и B – заданные матрицы, а X – искомая матрица, имеет решение $X = A^{-1} \cdot B$, если матрица A – квадратная и невырожденная. Решение матричного уравнения $X \cdot A = B$ имеет вид $X = B \cdot A^{-1}$. Обратная матрица $A^{-1}$ может быть найдена следующим образом.

1) Найдем $|A|$ – определитель матрицы А.

Если $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, то $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{21}\cdot a_{12}$.

2) Найдем $A^T$, т. е. транспонируем матрицу А, заменив каждую строку на столбец с соответствующим номером.

3) Найдем $\tilde{A}^T$, т. е. матрицу, составленную из алгебраических дополнений к элементам матрицы $A^T$. Алгебраические дополнения находятся по формуле $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$, где $M_{ij}$- определитель, полученный из определителя матрицы $A^T$ вычеркиванием $i$-й строки и $j$-го столбца.

4). Найдем $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\tilde{A}^T$.

**Пример 2.** Решить матричное уравнение $X\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -9 & -10 \end{pmatrix}$ и сделать проверку.

Пусть $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -9 & -10 \end{pmatrix}$. Матричное уравнение имеет вид $X\cdot A=B$, решение которого находится по формуле $X=B\cdot A^{-1}$. Найдем $A^{-1}$.

$$1)\ \ |A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=1\cdot 4-2\cdot 3=-2.$$

$$2)\ \ A^T=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

3) Найдем $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

$$|A^T|=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}\quad \begin{matrix} A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot(4)=4 & A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot 2=-2 \\ A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot 3=-3 & A_{22}=(-1)^{4}\cdot 1=1. \end{matrix}\quad \tilde{A}^T=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$4)\ A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Найдем $X=B\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -9 & -10 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Матрицы A и B размером $2\times 2$, следовательно, X имеет размер $2\times 2$.

$x_{11}=(-1)\cdot(-2)+0\cdot\dfrac{3}{2}=2$, $\qquad x_{12}=(-1)\cdot 1+0\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1$,

$x_{21}=(-9)\cdot(-2)+(-10)\cdot\dfrac{3}{2}=3$, $\quad x_{22}=(-9)\cdot 1+(-10)\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-4$, $\quad X=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -4\end{pmatrix}$.

Выполним проверку, подставив X в исходное уравнение:

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=C,$$

$c_{11}=2-3=-1$, $\qquad c_{12}=4-4=0$, $\qquad C=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -9 & -10\end{pmatrix}$.

$c_{21}=3-12=-9$, $\qquad c_{22}=6-16=-10$,

Матрица совпадает с матрицей B.

**Ответ:** $X=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -4\end{pmatrix}$.

**Контрольные варианты к задаче 2.** Решить матричное уравнение и сделать проверку.

1. $X\cdot\begin{pmatrix}2 & -2\\ 3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 4 & -2\end{pmatrix}$

2. $X\cdot\begin{pmatrix}1 & -8\\ 4 & -7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & -3\end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix}2 & -8\\ 1 & -3\end{pmatrix}\cdot Y=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

4. $Y\cdot\begin{pmatrix}-3 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 11\\ 13 & -2\end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix}5 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}\cdot Y=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

6. $X\cdot\begin{pmatrix}3 & -2\\ -3 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 12\\ 1 & -2\end{pmatrix}$

7. $X\cdot\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -7\\ 5 & -1\end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 4 & 7\end{pmatrix}\cdot Y=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 5 & -6\end{pmatrix}$

9. $X\cdot\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 5\\ -5 & 1\end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix}3 & 5\\ -2 & -4\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}7 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

11. $X\cdot\begin{pmatrix}7 & -2\\ -3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & -4\end{pmatrix}$

12. $X\cdot\begin{pmatrix}-3 & -5\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 11\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 11 & 13 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$ 14. $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} -7 & -11 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ 16. $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$

17. $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ 18. $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

19. $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 20. $\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 9 & 8 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} -6 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ 22. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 15 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$ 24. $X \cdot \begin{pmatrix} 11 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

25. $X \cdot \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ 26. $X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 13 & 2 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} 1 & 11 \\ -13 & -2 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$ 28. $X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 11 \\ -10 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

29. $Y \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ 30. $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 13 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

**Задача 3.** Определитель четвертого порядка будем вычислять, пользуясь свойствами определителя и теоремой Лапласа. По теореме Лапласа, определитель равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на соответствующие им алгебраические дополнения. Прежде чем применить эту теорему, желательно в выбранной строке (или столбце) получить три нуля, используя свойство: определитель не изменится, если к элементам какой-либо строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.

**Пример 3.** Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$.

Заметим, что все элементы последнего столбца кратны двум. Общий множитель два можно вынести за знак определителя: $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

Выберем строку (или столбец), в которой будем делать нули. Пусть это будет третий столбец. Рабочей будет первая строка. Она останется без изменения. Получим нули в этом столбце следующим образом: умножим элементы первой строки на (-2) и прибавим получившиеся числа к соответствующим элементам второй строки:

$$2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} \cdot (-2) = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & 0 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Теперь элементы первой строки умножим на (-1) и прибавим к соответствующим элементам третьей строки:

$$2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & 0 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} \cdot (-1) = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Чтобы получить нуль в третьем столбце последней строки, элементы первой строки умножим на 3 и прибавим к соответствующим элементам четвертой строки, затем применим теорему Лапласа, разложив определитель по третьему столбцу:

$$2\cdot\begin{vmatrix}3&2&1&-1\\-4&-5&0&5\\2&2&0&2\\1&1&-3&2\end{vmatrix}\cdot(3)=2\cdot\begin{vmatrix}3&2&1&-1\\-4&-5&0&5\\2&2&0&2\\10&7&0&-1\end{vmatrix}=$$

$$=2(1\cdot A_{13}+0\cdot A_{23}+0\cdot A_{33}+0\cdot A_{43})=2\cdot A_{13}.$$

Алгебраические дополнения элементов определителя находятся по формуле $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$, где $M_{ij}$- определитель, получающийся из исходного вычеркиванием $i$-й строки и $j$-го столбца:

$$2\cdot A_{13}=2\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}-4&-5&5\\2&2&2\\10&7&-1\end{vmatrix}=2\cdot(-1)^4\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}-4&-5&5\\1&1&1\\10&7&-1\end{vmatrix}.$$

Общий множитель второй строки был вынесен за знак определителя. Получим теперь нули в первом столбце, в первой и третьей строках. Для этого умножим вторую строку вначале на 4 и прибавим к соответствующим элементам первой строки, а затем на (-10) и прибавим к элементам третьей строки. Применим теорему Лап-ласа:

$$4\cdot\begin{vmatrix}-4&-5&5\\1&1&1\\10&7&-1\end{vmatrix}=4\cdot\begin{vmatrix}0&-1&9\\1&1&1\\0&-3&-11\end{vmatrix}=4\cdot 1\cdot A_{21}=4\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}-1&9\\-3&-11\end{vmatrix}=$$

$$=4\cdot(-1)^3\cdot[(-1)\cdot(-11)-(-3)\cdot 9]=(-4)\cdot(11+27)=(-4)\cdot 38=-152.$$

**Ответ:** $\Delta=-152.$

**Контрольные варианты к задаче 3.** Вычислить определитель.

1. $\begin{vmatrix}2&3&-3&4\\2&1&-1&2\\6&3&1&0\\2&3&0&-5\end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix}2&1&2&1\\3&1&1&1\\11&5&3&3\\5&2&2&4\end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix}1&2&3&2\\2&-1&2&-3\\3&-2&-1&2\\-2&-3&2&1\end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix}6&9&3&3\\5&-1&4&-9\\-2&4&2&0\\4&-1&-2&2\end{vmatrix}$ 6. $\begin{vmatrix}0&1&3&4\\1&0&2&3\\-3&-2&0&-5\\4&3&-5&0\end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ 8. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ 9. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 10 & 8 \\ 4 & 2 & 9 & 9 \\ 1 & 1 & 7 & 2 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ -6 & -6 & 9 & 3 \\ -4 & -4 & 2 & 8 \end{vmatrix}$ 11. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ 12. $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 8 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 7 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ -3 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ 5 & -3 & 0 & -3 \end{vmatrix}$ 14. $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 15. $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$ 17. $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$ 18. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

19. $\begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ 20. $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$ 21. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}$

22. $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ 23. $\begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}$ 24. $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ 26. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 & 7 \\ 3 & -5 & 7 & -1 \\ 5 & -7 & 1 & -3 \\ 7 & -1 & 3 & -5 \end{vmatrix}$ 27. $\begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 & 7 \\ 3 & 2 & 9 & -3 \\ 3 & 7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 9 & 6 \end{vmatrix}$

28. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$ 29. $\begin{vmatrix} 6 & 5 & 9 & 3 \\ 5 & 8 & 8 & -2 \\ 4 & 5 & 5 & 2 \\ 7 & 8 & 10 & 2 \end{vmatrix}$ 30. $\begin{vmatrix} 7 & 4 & -5 & -3 \\ -8 & -5 & 8 & 9 \\ -4 & -3 & 2 & 3 \\ -5 & -2 & 7 & 6 \end{vmatrix}$

**Задача 4.** Система линейных уравнений является крамеровской, если число уравнений системы равно числу неизвестных и определитель матрицы системы отличен от нуля. Крамеровскую систему можно представить в виде матричного уравнения $A \cdot X = B$ и найти решение по формуле $X = A^{-1} \cdot B$. Систему Крамера можно решить также по формулам Крамера: $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, где $\Delta$ - определитель матрицы системы (главный определитель), $\Delta_i$ - определитель, полученный из главного заменой $i$-го столбца на столбец правых частей системы (столбец свободных членов), $x_i$ - искомые неизвестные.

**Пример 4.** Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 4x - 3y = 11 \\ 3x + 5y = 1 \end{cases}$ двумя способами: а) по формулам Крамера, б) матричным методом. Сделать проверку.

$$\text{а)}\quad \Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 - 3 \cdot (-3) = 29,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 11 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 11 \cdot 5 - 1 \cdot (-3) = 58\ ,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - 3 \cdot 11 = -29,$$

$$\begin{cases} x = x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{58}{29} = 2, \\ y = x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{-29}{29} = -1. \end{cases}$$

Сделаем **проверку** найденного решения, подставив $x = 2$ и $y = -1$ в данную систему: $\begin{cases} 4 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = 11 \\ 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) = 1 \end{cases} = \begin{cases} 8 + 3 = 11 \\ 6 - 5 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 11 = 11 \\ 1 = 1. \end{cases}$

Ответ: (2; -1).

б) Пусть $A=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 3 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}11\\ 1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$. Тогда данная система запишется в виде матричного уравнения $AX=B$, решение которого $X=A^{-1}\cdot B$. Найдем $A^{-1}$.

1) $|A|=\begin{vmatrix}4 & -3\\ 3 & 5\end{vmatrix}=29$, 2) $A^{T}=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 3 & 5\end{pmatrix}^{T}=\begin{pmatrix}4 & 3\\ -3 & 5\end{pmatrix}$,

3) $|A^{T}|=\begin{vmatrix}4 & 3\\ -3 & 5\end{vmatrix}$, $A_{11}=(-1)^2\cdot 5=5$, $A_{12}=(-1)^3\cdot(-3)=3$,

$A_{21}=(-1)^3\cdot 3=-3$, $A_{22}=(-1)^4\cdot 4=4$, $\tilde{A}^{T}=\begin{pmatrix}5 & 3\\ -3 & 4\end{pmatrix}$

4) $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\cdot\tilde{A}^{T}=\dfrac{1}{29}\begin{pmatrix}5 & 3\\ -3 & 4\end{pmatrix}$.

Найдем $X=A^{-1}\cdot B$. Матрица $A^{-1}$ имеет размер $2\times 2$, матрица B - $2\times 1$. Матрица X будет иметь размер $2\times 1$.

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{29}\begin{pmatrix}5 & 3\\ -3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix},\quad \frac{1}{29}\begin{pmatrix}5\cdot 11+3\\ -33+4\end{pmatrix}=\frac{1}{29}\begin{pmatrix}58\\ -29\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$$

**Ответ:** $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$.

**Контрольные варианты к задаче 4.** Решить систему линейных уравнений двумя способами: а) по формулам Крамера, б) матричным методом. Сделать проверку.

1. $\begin{cases}2x-3y=1\\ 5x+2y=2\end{cases}$ 2. $\begin{cases}2x+3y=2\\ -3x+5y=1\end{cases}$ 3. $\begin{cases}6x-y=1\\ 3x+11y=2\end{cases}$

4. $\begin{cases}5x-3y=2\\ 13x+2y=5\end{cases}$ 5. $\begin{cases}11x+2y=4\\ 3x-2y=5\end{cases}$ 6. $\begin{cases}7x+2y=1\\ 3y-2x=5\end{cases}$

7. $\begin{cases}13y+2x=3\\ 7x-2y=4\end{cases}$ 8. $\begin{cases}5y-2x=4\\ x+10y=-3\end{cases}$ 9. $\begin{cases}11x+5y=3\\ 7x-8y=6\end{cases}$

10. $\begin{cases}13x-3y=2\\ 20x-y=5\end{cases}$ 11. $\begin{cases}9x+2y=-5\\ 4x-3y=7\end{cases}$ 12. $\begin{cases}7x+3y=-4\\ 3x-10y=5\end{cases}$

13. $\begin{cases} 6x - 7y = 2 \\ 5x + 10y = 3 \end{cases}$ 14. $\begin{cases} 3x - 11y = 5 \\ 2x + 5y = 13 \end{cases}$ 15. $\begin{cases} 7x + 10y = 2 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$

16. $\begin{cases} -2x + 5y = 7 \\ 3y - 6x = 10 \end{cases}$ 17. $\begin{cases} 3x + 10y = 5 \\ 3y + 7x = -10 \end{cases}$ 18. $\begin{cases} 11x + 2y = 5 \\ 3y - x = 7 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 13x + 2y = 5 \\ 3y - x = 7 \end{cases}$ 20. $\begin{cases} 9x + 2y = 1 \\ 2x + 5y = -3 \end{cases}$ 21. $\begin{cases} 3x - 5y = 7 \\ 2x + 7y = 3 \end{cases}$

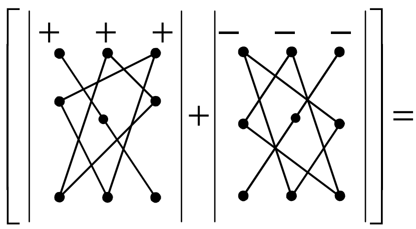
22. $\begin{cases} 7x + 9y = 4 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$ 23. $\begin{cases} 6x - 4y = 2 \\ 7x + 5y = -3 \end{cases}$ 24. $\begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ 17x + 5y = 2 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 7x + 8y = -2 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$ 26. $\begin{cases} 5y + 2x = -5 \\ 3x - 7y = 1 \end{cases}$ 27. $\begin{cases} 3x - 5y = 7 \\ 3y + 2x = 1 \end{cases}$

28. $\begin{cases} 7x - y = -3 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$ 29. $\begin{cases} 10x + 2y = 7 \\ 3x - 13y = 1 \end{cases}$ 30. $\begin{cases} 3x + 10y = 2 \\ 5x - 7y = 1 \end{cases}$

**Задача 5.** Определители третьего порядка можно находить методом треугольников

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$



$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}.$$

В квадратных скобках приведена схема, по которой получены слагаемые. Три элемента, соединенные отрезками, перемножают, перед полученным произведением ставят знак, указанный сверху.

**Пример 5.** Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 10 \\ x - y = 4 \\ -x + 2y + z = -3 \end{cases}$ по формулам Крамера и матричным методом. Сделать проверку.

а) Главный определитель системы, составленный из коэффициентов при неизвестных, найдем с помощью свойств определителя и теоремы Лапласа, разлагая определитель по третьему столбцу:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ \\ (-3)\end{matrix}=\begin{vmatrix}5 & -4 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}5 & -4\\ 1 & -1\end{vmatrix}=5\cdot(-1)-1\cdot(-4)=-1\neq 0.$$

Система является крамеровской. Найдем ее решение по формулам Крамера.

Определитель $\Delta_1$, получающийся из $\Delta$ заменой первого столбца на столбец из свободных членов (правых частей системы), найдем методом треугольников.

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}10 & 2 & 3\\ 4 & -1 & 0\\ -3 & 2 & 1\end{vmatrix}=10\cdot(-1)\cdot 1+2\cdot 0\cdot(-3)+3\cdot 4\cdot 2-10\cdot 0\cdot 2-2\cdot 4\cdot 1-3\cdot(-1)\cdot(-3)=$$

$$=-10+0+24+0-8-9=-3.$$

Определитель $\Delta_2$ получим из $\Delta$ заменой второго столбца на столбец из свободных членов и вычислим, получив еще один нуль в третьем столбце:

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2 & 10 & 3\\ 1 & 4 & 0\\ -1 & -3 & 1\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \cdot(-3)\end{matrix}=\begin{vmatrix}5 & 19 & 0\\ 1 & 4 & 0\\ -1 & -3 & 1\end{vmatrix}=1\cdot A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}5 & 19\\ 1 & 4\end{vmatrix}=5\cdot 4-1\cdot 19=1.$$

Вычислим методом треугольников определитель $\Delta_3$, полученный из $\Delta$ заменой третьего столбца свободными членами, методом треугольников

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2 & 2 & 10\\ 1 & -1 & 4\\ -1 & 2 & -3\end{vmatrix}=6-8+20-16+6-10=-2.$$

Найдем неизвестные по формулам Крамера:

$$x=x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-3}{-1}=3;\qquad y=x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{1}{-1}=-1;\qquad z=x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-2}{-1}=2.$$

**Проверка.** Подставим найденные значения $x=3$, $y=-1$, $x=2$ в каждое уравнение системы

$$\begin{cases} 2\cdot 3+2(-1)+3\cdot 2=10 & 10=10 \\ 3-(-1)=4 & 4=4 \\ -3+2\cdot(-1)+2=-3 & -3=-3 \end{cases}$$

б) Запишем систему $\begin{cases} 2x+2y+3z=10 \\ x-y=4 \\ -x+2y+z=-3 \end{cases}$ в матричном виде.

Пусть $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Тогда $A\cdot X=B$ и $X=A^{-1}\cdot B$.

Найдем $A^{-1}$ по формуле $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\tilde{A}^{т}$.

1) $|A|=-1$; 2) $A^{T}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3) $A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-1$ $A_{12}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=4$ $A_{13}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=3$

$A_{21}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-1$ $A_{22}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=5$ $A_{23}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=3$

$A_{31}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=1$ $A_{32}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-6$ $A_{33}=(-1)^6\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-4$

$$\tilde{A}^{T}=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

4) $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\tilde{A}^{T}=(-1)\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

Найдем $X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 10 + (-4)\cdot 4 + (-3)(-3) \\ 1\cdot 10 + (-5)\cdot 4 + (-3)(-3) \\ (-1)\cdot 10 + 6\cdot 4 + 4\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

**Ответ:** $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

**Контрольные варианты к задаче 5.** Решить систему линейных уравнений двумя способами: а) по формулам Крамера, б) матричным методом. Сделать проверку.

1. $\begin{cases} x + y - z = -2 \\ 2x - 4y + z = -4 \\ 4x - 3y + z = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ x - 12y + 4z = -7 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x + 2y - 3z = -1 \\ x + y - z = 1 \\ 8x + 3y - 6z = 2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x - 5y - z = -14 \\ x - 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y - 4z = 20 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x + 9y - 4z = 9 \\ 2x + 5y - 3z = 4 \\ 4x - 3y + 2z = 9 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 7x + 5y + z = 16 \\ 5x + 8y - z = 7 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x + 5y + 3z = 8 \\ 3x - 5y - 6z = -7 \\ x - 4y - 2z = -3 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x + 3y + 5z = 1 \\ 2x + 4y + 6z = 2 \\ 8x + 9y + 7z = -1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x - 4y + 5z = 1 \\ 2x - 3y + z = 1 \\ 3x - 5y - z = 1 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3x + y - z = 5 \\ 2x - 3y + z = -11 \\ x + 4y + 5z = 2 \end{cases}$

12. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & -5 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 14 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 5 & 2 & 13 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -4 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$

**Задача 6.** Для решения систем линейных уравнений применим метод Гаусса, состоящий в последовательном исключении неизвестных. Для этого расширенная матрица системы с помощью элементарных преобразований над строками приводится к «трапециевидной форме», т. е. к виду, когда все элементы, расположенные ниже главной диагонали, равны нулю.

Элементарными преобразованиями над строками матрицы будем считать:

1) умножение всех элементов строки на число, отличное от нуля;

2) перестановку местами двух строк;

3) прибавление к элементам строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и то же число.

Рангом матрицы называется наивысший **порядок** минора, отличного от нуля.

Найдем ранг матрицы системы и ранг расширенной матрицы. Решим вопрос о совместности системы с помощью теоремы Кронекера-Капелли и определим число решений. Восстановим по последней матрице систему и решим ее «снизу вверх». Выполним проверку.

**Пример 6.** Решим систему $\begin{cases} 2x - y + 5z + 2u = 7 \\ 3x + 4y + 6z - 4u = 3 \\ x - y + 7z = 5 \\ 4x + 6y + 8z - 2u = 1 \end{cases}$ методом Гаусса.

Запишем расширенную матрицу системы. Выполним преобразование 2), сделав первой строку, первый элемент которой равен единице. Если такой строки нет, то ее получают, используя пп. 2) и 3).

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 5 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & 7 & 0 & 5 \\ 4 & 6 & 8 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 7 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 6 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & 5 & 2 & 7 \\ 4 & 6 & 8 & -2 & 1 \end{array}\right) (-3)(-2)(-4) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 7 & 0 & 5 \\ 0 & 7 & -15 & -4 & -12 \\ 0 & 1 & -9 & 2 & -3 \\ 0 & 10 & -20 & -2 & -19 \end{array}\right).$$

С помощью преобразований 3) получили нули в первом столбце. Второй сделаем строку, второй элемент которой равен единице. Если такой строки нет, тот ее получают с помощью преобразований. В матрице поменяем местами вторую и третью строки и получим нули во втором столбце ниже диагонали.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 7 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -9 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & -15 & -4 & -12 \\ 0 & 10 & -20 & -2 & -19 \end{array}\right) (-7)(-10) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 7 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -9 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 48 & -18 & 9 \\ 0 & 0 & 70 & -22 & 11 \end{array}\right).$$

Элементы, получившиеся в двух последних строках, довольно большие. Их можно уменьшить: умножим 3-ю строку на 1/3, из четвертой вычтем третью, результат умножив на 1/2:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 7 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -9 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 16 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 11 & -2 & 1 \end{array}\right)(-1) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 7 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -9 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -3 \end{array}\right)(-2)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 7 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -9 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 2 \end{array}\right)(-5) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 7 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -9 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -34 & 17 \end{array}\right)\cdot(-1/34) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 7 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -9 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Получившаяся матрица системы имеет ранг 4, такой же ранг имеет и расширенная матрица. Система совместна и имеет единственное решение. Найдем его, решив систему

$$\begin{cases} x - y + 7z = 5 \\ y - 9z + 2u = -3 \\ z + 6u = -3 \\ u = -\frac{1}{2}; \end{cases} \qquad z + 6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -3, \quad z = 0; \qquad y - 0 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -3,\ y = -2 \qquad x = 3$$

Выполним проверку полученного решения

$$\begin{cases} 2\cdot 3 - (-2) + 0 + 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 7, & 7 = 7 \\ 3\cdot 3 + 4\cdot(-2) + 0 - 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 3, & 3 = 3 \\ 3 - (-2) + 0 = 5, & 5 = 5 \\ 4\cdot 3 + 6\cdot(-2) + 0 - 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 1, & 1 = 1 \end{cases}$$

**Ответ:** $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \\ z = 0 \\ u = -\frac{1}{2}. \end{cases}$

**Контрольные варианты к задаче № 6.**

Решить систему методом Гаусса. Выполнить проверку.

1. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+11x_3+5x_4=2 \\ x_1+x_2+5x_3+2x_4=1 \\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4=-3 \\ x_1+x_2+3x_3+4x_4=-3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \\ 3x_1-x_2-x_3-2x_4=-4 \\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=-6 \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=-4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+2y+3z-2u=6 \\ 2x-y-2z-3u=8 \\ 3x+2y-z+2u=4 \\ 2x-3y+2z+u=-8 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 6x+5y-2z+4u=-4 \\ 9x-y+4z-u=13 \\ 3x+4y+2z-2u=1 \\ 3x-9y+2u=11 \end{cases}$

5. $\begin{cases} y-3z+4u=-5 \\ x-2z+3u=-4 \\ 3x+2y-5u=12 \\ 4x+3y-5z=5 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x+3y+5z+7u=12 \\ 3x+5y+7z+u=0 \\ 5x+7y+z+3u=4 \\ 7x+y+3z+5u=16 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x-y+z-u=1 \\ 2x-y-3u=2 \\ 3x-z+u=-3 \\ 2x+2y+2z+5u=-6 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x+2y+3z+4u=5 \\ 2x+y+2z+3u=1 \\ 3x+2y+z+2u=1 \\ 4x+3y+2z+u=-5 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x+5y+4z+u=20 \\ x+3y+2z+u=11 \\ 2x+10y+9z+7u=40 \\ 3x+8y+9z+2u=37 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x-y-6z+3u=-1 \\ 7x-4y+2z-15u=-32 \\ x-2y-4z+9u=5 \\ x-y+2z-6u=-8 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x+3y-z-2u=4 \\ 3x-y+2z+2u=9 \\ x+2y+3z-4u=3 \\ 3x-4y-z+3u=4 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x+y-6z-4u=6 \\ 3x-y-6z-4u=2 \\ 2x+3y+9z+2u=6 \\ 3x+2y+3z+8u=-7 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3x+4y+z+2u=-3 \\ 3x+5y+3z+5u=-6 \\ 6x+8y+z+5u=-8 \\ 3x+5y+3z+7u=-8 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 4x-3y+z+5u=7 \\ x-2y-2z-3u=3 \\ 3x-y+2z=-1 \\ 2x+3y+2z-8u=-7 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3+x_4=4 \\ 4x_1+3x_2-x_3+2x_4=6 \\ 8x_1+5x_2-3x_3+4x_4=12 \\ 3x_1+3x_2-2x_3+2x_4=-6 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x-3y+3z+2u=3 \\ 6x+9y-2z-u=-4 \\ 10x+3y-3z-2u=3 \\ 8x+6y+z+3u=-7 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x+2y+3z+4u=0 \\ 2x+3y+z+2u=0 \\ x+y+z-u=2 \\ x-2z-6u=7 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 5x+3y+z=16 \\ -x+2y+z=3 \\ -y+z=2 \\ x+z+2u=7 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1+x_2+x_4=1 \\ x_1-x_2+2x_4=1 \\ 2x_1-x_3+2x_4=1 \\ x_1+x_2+x_3=1 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x+y-z+u=7 \\ x-y+z+u=1 \\ x+y+z-u=-1 \\ x+y+z+u=5 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1-x_2+7x_3-2x_4=2 \\ 2x_1-3x_2+8x_3-4x_4=1 \\ 4x_1+2x_2+19x_3+x_4=8 \\ 6x_1-5x_2+11x_3-3x_4=-3 \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1-2x_2+4x_3-3x_4=1 \\ 2x_1-3x_2+3x_3-2x_4=2 \\ 4x_1-9x_2+x_3-8x_4=-3 \\ x_1+6x_2-4x_3+8x_4=4 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1+3x_2+x_3+4x_4=2 \\ 2x_1-3x_2+2x_3+8x_4=1 \\ 4x_1+3x_2+4x_3-4x_4=0 \\ x_1+6x_2-x_3+12x_4=6 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 3x-2y-5z+u=3 \\ 2x-3y+z+5u=-3 \\ x+2y-4u=-3 \\ x-y-4z+9u=22 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x-2y+u=-3 \\ 2x+3y+z-3u=-6 \\ 3x+4y-z+2u=0 \\ x+3y+z-u=2 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x+2y+3z+4u=3 \\ 2x+y+2z+3u=-2 \\ 3x+2y+z+2u=3 \\ 4x+3y+2z+u=2 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 3x+7y-2z+4u=3 \\ -3x-2y+6z-4u=11 \\ 5x+5y-3z+2u=6 \\ 2x+6y-5z+3u=0 \end{cases}$

28. $\begin{cases} 5x+4z+2u=3 \\ x-y+2z+u=1 \\ 4x+y+2z=1 \\ x+y+z+u=0 \end{cases}$

29. $\begin{cases} 2x+3y+5z+3u=2 \\ x+2y+4z+3u=-1 \\ 3x+3y+6z+5u=-1 \\ 4x+y+2z+2u=2 \end{cases}$

30. $\begin{cases} 2x+y+4z+8t=-1 \\ x+3y-6z+2t=3 \\ 3x-2y+2z-2t=8 \\ 2x-y+2z=4 \end{cases}$

**Задача 7.** Решая систему линейных уравнений методом Гаусса, можно по ходу решения исследовать систему на совместность, найти число решений, определить основные и свободные переменные. Если все правые части системы (свободные члены) равны нулю, то система называется однородной. Такая система всегда совместна. Если ранг матрицы системы $r$ равен числу неизвестных $n$, то система имеет единственное решение (нулевое). Если $r < n$, то система имеет бесконечное множество решений, причем $r$ основных переменных могут быть выражены через n-r свободных переменных.

**Пример 7.** Исследовать и решить систему уравнений. Выполнить проверку общего решения.

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1+x_2+4x_3+3x_4=0 \\ 2x_1+x_2+9x_3+2x_4=0 \\ 4x_1+4x_2+7x_3+6x_4=0. \end{cases}$$

Матрицу системы приведем к трапециевидной форме, выполняя элементарные преобразования над строками:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 9 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix} \cdot (-1)(-2)(-4)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot(-1) \quad (-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{3}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы системы $r=3,$ т. к. $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -7\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0.$

Число неизвестных $n=4.$ Так как $r<n,$ то система имеет бесконечно много решений, в том числе и ненулевых. Основные переменные $x_1,\ x_2,\ x_3$ могут быть выражены через свободную переменную $x_4$.

$$\begin{cases} x_1+x_2+\ \ x_3+\ \ x_4\ =0 \\ \quad x_2-7x_3 \qquad\quad =0 \\ \qquad\quad x_3+\dfrac{2}{3}x_4=0 \end{cases}$$

$$x_3=-\frac{2}{3}x_4$$

$$x_2=7x_3=-\frac{14}{3}x_4$$

$$x_1=-x_2-x_3-x_4=\frac{14}{3}x_4+\frac{2}{3}x_4-x_4==\frac{13}{3}x_4.$$

**Проверка.** Подставим решение в исходную систему:

$$\begin{cases} \dfrac{13}{3}x_4-\dfrac{14}{3}x_4-\dfrac{2}{3}x_4+x_4=-0, \qquad 0=0; \\ \dfrac{12}{3}x_4-\dfrac{14}{3}x_4-\dfrac{8}{3}x_4+3x_4=0, \qquad 0=0; \\ \dfrac{26}{3}x_4-\dfrac{14}{3}x_4-\dfrac{18}{3}x_4+2x_4=0, \qquad 0=0; \\ \dfrac{52}{3}x_4-\dfrac{56}{3}x_4-\dfrac{14}{3}x_4+6x_4=0, \qquad 0=0. \end{cases}$$

**Ответ:** $\begin{cases} x_1=\dfrac{13}{3}x_4, \\ x_2=-\dfrac{14}{3}x_4, \\ x_3=-\dfrac{2}{3}x_4, \\ x_4\in R-\text{любое число.} \end{cases}$

**Контрольные варианты к задаче 7.** Исследовать и решить систему уравнений. Выполнить проверку общего решения.

1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 11x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ 11x_1 + 4x_2 + 56x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x - 3y + 4z - u = 0 \\ 3x - 2y + 5z + 4u = 0 \\ 2x + y + z + 5u = 0 \\ x + 4y - 3z + 6u = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 - 5x_2 - x_3 - 8x_4 = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x + 2y - z - 8u = 0 \\ 2x - 2y - 4z - 2u = 0 \\ 3x - 2y - 5z - 4u = 0 \\ 4x + 2y - 2z - 10u = 0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 11x + 17y + 6z - 39u = 0 \\ 2x - 3y - 5z - u = 0 \\ x + 32y + 31z - 34u = 0 \\ 3x + 29y + 26z - 35u = 0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 9x - 4y - 13z - 10u = 0 \\ 8x + 17y + 9z - 29u = 0 \\ 7x + y - 6z - 15u = 0 \\ x - 21y - 22z + 19u = 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 13x - 11y - 24z - 15u = 0 \\ 4x - 3y - 7z - 5u = 0 \\ 6x - 2y - 8z - 10u = 0 \\ 12x - 9y - 21z - 15u = 0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x - 5y - 8z + u = 0 \\ x + 3y + 2z - 5u = 0 \\ 5x + y - 4z - 9u = 0 \\ 7x - 7y - 17u = 0 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3x + 2y - z - 8u = 0 \\ 2x - 2y - 4z - 2u = 0 \\ 3x - 2y - 5z - 4u = 0 \\ 4x + 2y - 2z - 10u = 0 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x - 5y - 7z + u = 0 \\ 5x + 6y + z - 16u = 0 \\ 3x + 11y + 8z - 13u = 0 \\ 4x - 10y - 14z - 2u = 0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 7x-9y-16z-5u=0 \\ 5x-5y-10z-5u=0 \\ 12x-9y-21z-15u=0 \\ 6x-7y-13z-5u=0 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 7x+y-6z-15u=0 \\ 2x-5y-7z+u=0 \\ 3x+11y+8z-13u=0 \\ x-21y-22z+19u=0 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+2x_4=0 \\ x_1+3x_2+x_3+5x_4=0 \\ x_1+x_2+5x_3-7x_4=0 \\ 2x_1+3x_2-3x_3+14x_4=0 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3x_1+4x_2-5x_3+7x_4=0 \\ 2x_1-3x_2+3x_3-2x_4=0 \\ 4x_1+11x_2-13x_3+16x_4=0 \\ 7x_1-2x_2+x_3+3x_4=0 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4=0 \\ x_1+x_2+2x_3+3x_4=0 \\ 2x_1+4x_2+5x_3+10x_4=0 \\ 2x_1-4x_2+x_3-6x_4=0 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x_1+x_2+4x_3+x_4=0 \\ 3x_1+2x_2-x_3-6x_4=0 \\ 7x_1+4x_2+6x_3-5x_4=0 \\ x_1+8x_3+7x_4=0 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4+3x_5=0 \\ 5x_1+7x_2+x_3+3x_4+4x_5=0 \\ 4x_1+5x_2+2x_3+x_4+5x_5=0 \\ 7x_1+10x_2+x_3+6x_4+5x_5=0 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x_1+6x_2+10x_3+4x_4-2x_5=0 \\ 6x_1+10x_2+17x_3+7x_4-3x_5=0 \\ 9x_1+3x_3+2x_4+3x_5=0 \\ 12x_1-2x_2+x_3+8x_4+5x_5=0 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+2x_4-6x_5=0 \\ 2x_1+3x_2+7x_3+6x_4-18x_5=0 \\ 3x_1+5x_2+11x_3+9x_4-27x_5=0 \\ 2x_1-7x_2+7x_3+16x_4-48x_5=0 \\ x_1+4x_2+5x_3+2x_4-6x_5=0 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 5x_1+6x_2+2x_3+7x_4+4x_5=0 \\ 2x_1+3x_2-x_3+4x_4+2x_5=0 \\ 7x_1+9x_2-3x_3+5x_4+6x_5=0 \\ 5x_1+9x_2-3x_3+x_4+6x_5=0 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1+x_2-3x_4-x_5=0 \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=0 \\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=0 \\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=0 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+2x_4-3x_5=0 \\ x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=0 \\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4-2x_5=0 \\ 2x_1-5x_2+x_3-2x_4+2x_5=0 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 0 \\ 6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 9x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 3x_5 = 0 \\ 6x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 20x_4 + 3x_5 = 0 \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 15x_5 = 0 \end{cases}$

28. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 8x_5 = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_1 - 9x_2 - 3x_3 - 5x_4 - 14x_5 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$

29. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 9x_4 + 6x_5 = 0 \\ 9x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 30x_4 + 15x_5 = 0 \\ 6x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$

30. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$

## 8. Векторная алгебра

Если известны координаты точек $A(a_1,\ a_2,\ a_3)$ и $B(b_1, b_2, b_3)$, то координаты вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}\{b_1 - a_1;\ \ b_2 - a_2;\ \ b_3 - a_3\} = \vec{a}\{x;\ y;\ z\}$.
Разложение этого вектора по ортам $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$: $\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$.
Длина вектора находится по формуле $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, а направляющие косинусы равны $\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|}$, $\cos\beta = \frac{y}{|\vec{a}|}$, $\cos\gamma = \frac{z}{|\vec{a}|}$. Орт вектора $\vec{a}^{\,o} = \{\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma\}$.

**Пример 8.** Даны точки $A(1;\ 7;\ 0)$, $B(5;\ 7;\ 3)$, $C(7;\ 6;\ 5)$.

Разложить вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$ по ортам $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ и найти его длину, направляющие косинусы, орт вектора $\vec{a}$. Найдем координаты векторов:
$\overrightarrow{AC}\{7-1;\ 6-7;\ \ 5-0\} = \overrightarrow{AC}\{6; -1;\ 5\}$ и $\overrightarrow{BC}\{7-5;\ 6-7;\ 5-3\} = \overrightarrow{BC}\{2;\ -1;\ 2\}$.
Вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AC} - \ -\overrightarrow{BC} = \vec{a}\{6-2;\ -1-(-1);\ 5-2\} = \vec{a}\{4; 0; 3\}$,
$|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 0 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\beta = 0$, $\cos\gamma = \frac{3}{5}$, $\vec{a}^{\,0}\left\{\frac{4}{5}; 0; \frac{3}{5}\right\}$.

**Контрольные варианты к задаче 8.** Даны точки A, B и C. Разложить вектор $\vec{a}$ по ортам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Найти длину, направляющие косинусы и орт вектора $\vec{a}$.

1. $A(1;\,2;\,-1),\ B(1;\,3;\,4),\ C(0;\,1;\,5)$, $\vec{a}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$.

2. $A(1;\,2;\,-1),\ B(1;\,3;\,4),\ C(0;\,1;\,5)$, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}$.

3. $A(1;\,2;\,-1),\ B(1;\,3;\,4),\ C(0;\,1;\,5)$, $\vec{a}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$.

4. $A(1;\,2;\,-1),\ B(1;\,3;\,4),\ C(0;\,1;5)$, $\vec{a}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AC}$.

5. $A(1;\,2;\,-1),\ B(1;\,3;\,4),\ C(0;\,1;\,5)$, $\vec{a}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$.

6. $A(1;\,2;\,-1),\ B(1;\,3;\,4),\ C(0;\,1;\,5)$, $\vec{a}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$.

7. $A(1;\,2;\,-1),\ B(1;\,3;\,4),\ C(0;\,1;\,5)$, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$.

8. $A(1;\,2;\,-1),\ B(1;\,3;\,4),\ C(0;\,1;\,5)$, $\vec{a}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}$.

9. $A(1;\,2;\,-1),\ B(1;\,3;\,4),\ C(0;\,1;\,5)$, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}$.

10. $A(1;\,2;\,-1),\ B(1;\,3;\,4),\ C(0;\,1;\,5)$, $\vec{a}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}$.

11. $A(4;\,1;\,0),\ B(2;\,-2;\,1),\ C(6;\,3;\,1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

12. $A(4;\,1;\,0),\ B(2;\,-2;\,1),\ C(6;\,3;\,1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}$.

13. $A(4;\,1;\,0),\ B(2;\,-2;\,1),\ C(6;\,3;\,1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

14. $A(4;\,1;\,0),\ B(2;\,-2;\,1),\ C(6;\,3;\,1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AC}$.

15. $A(4;\,1;\,0),\ B(2;\,-2;\,1),\ C(6;\,3;\,1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$.

16. $A(4;\,1;\,0),\ B(2;\,-2;\,1),\ C(6;\,3;\,1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$.

17. $A(4;\,1;\,0),\ B(2;\,-2;\,1),\ C(6;\,3;\,1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$.

18. $A(4;\,1;\,0),\ B(2;\,-2;\,1),\ C(6;\,3;\,1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}$.

19. $A(4;\,1;\,0),\ B(2;\,-2;\,1),\ C(6;\,3;\,1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}$.

20. $A(4;\,1;\,0),\ B(2;\,-2;\,1),\ C(6;\,3;\,1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}$.

21. $A(-1;\,-2;\,4),\ B(-4;\,-2;\,0),\ C(3;\,-2;\,1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$.

22. $A(-1;\,-2;\,4),\ B(-4;\,-2;\,0)$, $C(3;\,-2;\,1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}$.

23. $A(-1;-2;4), B(-4;-2;0), C(3;-2;1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

24. $A(-1;-2;4), B(-4;-2;0)$, $C(3;-2;1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AC}$.

25. $A(-1;-2;4), B(-4;-2;0), C(3;-2;1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$.

26. $A(-1;-2;4), B(-4;-2;0)$, $C(3;-2;1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$.

27. $A(-1;-2;4), B(-4;-2;0), C(3;-2;1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$.

28. $A(-1;-2;4), B(-4;-2;0)$, $C(3;-2;1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}$.

29. $A(-1;-2;4), B(-4;-2;0), C(3;-2;1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}$.

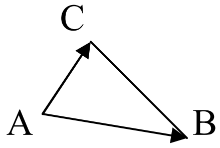
30. $A(-1;-2;4), B(-4;-2;0)$, $C(3;-2;1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}$.

**Задача 9.** Если даны векторы $\vec{a}\{a_1;a_2;a_3\}$ и $\vec{b}\{b_1;b_2;b_3\}$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3$.

Тогда $\cos\widehat{\vec{a},\vec{b}}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$; проекция вектора $\vec{b}$ на направление вектора $\vec{a}$ $\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$, условие перпендикулярности ненулевых векторов выглядит следующим образом: $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

Условие коллинеарности векторов: $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$.

**Пример 9.** Даны вершины треугольника $A(1;1;1), B(5;4;1), C(6;13;1)$. Найти угол при вершине $A$ и проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на сторону $AC$.




Внутренний угол при вершине A образован векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$,

$\overrightarrow{AB}\{5-1;4-1;1-1\}=\overrightarrow{AB}\{4,3,0\}$, $\overrightarrow{AC}\{5;12;0\}$.

Тогда $\cos\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}$. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\cdot5+3\cdot12+0=56$,

$\overrightarrow{AB}==\sqrt{4^2+3^2}=5$, $\overrightarrow{AC}=\sqrt{5^2+12^2}=13$. $\cos\angle A=\dfrac{56}{5\cdot13}=\dfrac{56}{65}$.

Проекция $\overrightarrow{AB}$ на направление вектора $\overrightarrow{AC}$: $\text{пр}_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{56}{13}$.

## Контрольные варианты к задаче 9

1. Даны векторы $\vec{a}=2\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{b}=-\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$. Найти $\text{пр}_{\vec{a}+\vec{b}}\vec{b}$.

2. Найти косинус угла, образованного вектором $\vec{b}=10\vec{i}-2\sqrt{2}\cdot\vec{j}-6\vec{k}$ и осью OZ.

3. Даны векторы $\vec{a}=5\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$. Найти косинус угла между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

4. Даны векторы $\vec{a}=-6\vec{i}-5\vec{k}$ и $\vec{b}\{5;\ \sqrt{3};\ 6\}$. Вычислить $\text{пр}_{\vec{b}}(\vec{a}+\vec{b})$.

5. Найти косинус угла, образованного вектором $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ и осью ОУ.

6. Даны векторы $\vec{a}=\{3;\ 1;\ -1\}$ и $\vec{b}=-2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$. Найти косинус угла, образованного вектором $\vec{a}+\vec{b}$ и осью ОХ.

7. Даны векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$ и $\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}$. Найти $\text{пр}_{\overrightarrow{AC}}(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC})$.

8. Вычислить проекцию вектора $\vec{a}=5\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k}$ на ось вектора $\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$.

9. Определить угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k}$ и $\vec{b}=4\vec{i}+5\vec{j}-3\vec{k}$.

10. Определить, при каком значении m векторы $\vec{a}=m\vec{i}+\vec{j}$ и $\vec{b}=3\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$ перпендикулярны.

11. Определить, при каком значении $\alpha$ векторы $\vec{a}=\alpha\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{b}\{1;\ \alpha;\ 2\}$ взаимно перпендикулярны.

12. Даны вершины треугольника: $A(-1;\ -2;\ 4)$, $B(-4;\ -2;\ 0)$, $C(3;\ -2;\ 1)$. Определить внутренний угол при вершине B.

13. Даны вершины треугольника: $A(3;\ 2;\ -3)$, $B(5;\ 1;\ -1)$, $C(1;\ -2;\ 1)$. Определить внутренний угол при вершине A.

14. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a}\{2;\ 1;\ -1\}$ и удовлетворяющий условию $\vec{x}\cdot\vec{a}=3$.

15. Даны две точки $M(-5;\ 7;\ -6)$ и $N(7;\ -9;\ 9)$. Вычислить проекцию вектора $\vec{a}\{1,\ -3,\ 1\}$ на ось вектора $\overrightarrow{MN}$.

16. Даны векторы: $\vec{a}=2\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{b}=-\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$. Вычислить $\text{пр}_{\vec{a}+2\vec{b}}\vec{b}$.

17. Найти острый угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}\{2;\ 1;\ 0\}$, $\vec{b}=-\vec{j}+\vec{k}$.

18. Даны три вектора: $\vec{a}\{3;\ -6;\ -1\}$, $\vec{b}\{1;\ 4;\ -5\}$, $\vec{c}=3\vec{i}-4\vec{j}+12\vec{k}$. Найти $\text{пр}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})$.

19. Даны три вектора: $\vec{a}\{1;\ -3;\ 4\}$, $\vec{b}\{3;\ -4;\ 2\}$, $\vec{c}=-\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}$. Найти $\text{пр}_{\vec{b}+\vec{c}}\vec{a}$.

20. Найти острый угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}\{2;\ 1;\ 0\}$ и $\vec{b}=-2\vec{j}+\vec{k}$.

21. Даны три вектора: $\vec{a}\{3;-6;-1\}$, $\vec{b}\{1;\ 4;\ -5\}$, $\vec{c}=3\vec{i}-4\vec{j}+12\vec{k}$. Вычислить $\text{пр}_{\vec{a}}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.

22. Найти вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен векторам $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{k}$ и $\vec{b}=3\vec{j}$
и удовлетворяет условию $\vec{x}\cdot\left(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}\right)=-6$.

23. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ и удовлетворяющий условию $\vec{x}\cdot\vec{b}=6$.

24. Даны вершины треугольника: $A(-1;\ -2;\ 4)$, $B(-4;\ -2;\ 0)$, $C(3;\ -2;\ 1)$. Определить внешний угол при вершине A.

25. Даны вершины треугольника: $A(3;\ 2;\ -3)$, $B(5;\ 1;\ -1)$, $C(1;\ -2;\ 1)$. Определить внешний угол при вершине A.

26. Дан вектор $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ и точки $M(3;\ -1;\ 2)$ и $N(4;\ -2;\ 1)$. Найти $\text{пр}_{\overline{MN}}\vec{a}$.

27. В треугольнике с вершинами $A(2;\ -1;\ 3)$, $B(1;1;\ 1)$, $C(0;\ 0;\ 5)$. Определить внутренний угол при вершине A.

28. Даны векторы $\vec{a}\{1;\ -1;\ 2\}$ и $\vec{b}\{2;\ -2;\ 1\}$. Найти проекцию вектора $\vec{c}=3\vec{a}-\vec{b}$ на направление вектора $\vec{b}$.

29. Даны вершины треугольника: $A(4;\ 1;\ 0)$, $B(2;\ 2;\ 1)$, $C(6;\ 3;\ 1)$. Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на сторону $\overrightarrow{AC}$.

30. Даны векторы $\vec{a}=3\vec{i}-6\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}$, $\vec{c}=3\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$. Найти проекцию вектора $\vec{a}+\vec{c}$ на вектор $\vec{b}+\vec{c}$.

**Задача 10.** Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, можно найти по формуле $S_n=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$, а площадь треугольника, построенного на этих векторах: $S_\Delta=\dfrac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$.

**Пример 10.** Даны вершины треугольника $A(1;\ 2;\ 0)$, $B(3;\ 0;-3)$ и $C(5;\ 2;\ 6)$. Найти его площадь и длину высоты, опущенной из вершины C.

$S_\Delta=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$. Находим векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}\{3-1;\ 0-2;\ -3-0\}=\overrightarrow{AB}\{2,-2,-3\},\quad \overrightarrow{AC}\{5-1;\ 2-2;\ 6-0\}=\overrightarrow{AC}\{4,0,6\}.$$

Векторное произведение $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -2 & -3\\ 4 & 0 & 6\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 0 & 6\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & 6\end{vmatrix}+$

$$+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}2 & -2\\ 4 & 0\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot(-12+0)-\vec{j}\cdot(12+12)++\vec{k}\cdot(0+8)=-12\vec{i}-24\vec{j}+8\vec{k}=$$

$$=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-12)^2+(-24)^2+8^2}=\sqrt{784}=28,\quad S_\Delta=\frac{1}{2}\cdot 28=14.$$

Так как $S_\Delta=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot h$, где $h$ – длина высоты, опущенной из вершины С на сторону АВ, $h=\frac{2\cdot S_\Delta}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$. $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{2^2+(-2)^2+(-3)^2}=\sqrt{17}$, $h=\frac{2\cdot 14}{\sqrt{17}}=\frac{28\cdot\sqrt{17}}{17}$.

**Контрольные варианты к задаче 10**

1. В параллелограмме ABCD даны векторы $\overrightarrow{AB}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ и $\overrightarrow{AD}\{2;\ 1;\ -2\}$. Найти площадь параллелограмма, построенного на диагоналях параллелограмма ABCD.

2. Даны три вершины параллелограмма $A(3;\ -2;\ 4)$, $B(4;\ 0;\ 3)$, $C(7;\ 1;\ 5)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины C (через площадь параллелограмма).

3. Найти площадь треугольника с вершинами $A(-1;\ 3;\ 2)$, $B(1;\ 2;\ 6)$, $C(2;\ 5;\ 1)$ (средствами векторной алгебры).

4. Найти площадь треугольника с вершинами $A(5;\ 2;\ 7)$, $B(6;\ 1;\ 9)$, $C(5;\ 2;\ 8)$ (средствами векторной алгебры).

5. Даны три вершины треугольника: $A(3;\ -1;\ 2)$, $B(3;\ 0;\ 3)$, $C(2;\ -1;\ 1)$. Найти его высоту, приняв ВС за основание (через площадь треугольника).

6. На векторах $\vec{a}\left\{1;\ 1;\ \frac{3}{2}\right\}$ и $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}+\frac{9}{2}\vec{k}$ построен параллелограмм. Найти площадь параллелограмма, сторонами которого являются диагонали данного параллелограмма.

7. Даны векторы $\vec{a}\{-1;\ 3;\ -3\}$ и $\vec{b}=2\vec{i}+2\vec{k}$. Найти вектор $\vec{c}$, перпендикулярный к векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если модуль вектора $\vec{c}$ численно равен площади треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – левая.

8. Даны точки $A(2;\ -1;\ -4)$, $B(5;\ 1;\ 2)$, $C\left(\frac{11}{2};\ -\frac{1}{2};\ -\frac{5}{2}\right)$. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC})$.

9. На векторах $\vec{a}\{4;\ 7;\ 3\}$ и $\vec{b}\{1;\ 2;\ 1\}$ построен параллелограмм. Найти высоту, опущенную на основание $\vec{b}$ (через площадь).

10. В треугольнике ABC, где $A(-1;\ 4;\ 3)$, $B(-1;\ 20;\ 13)$, $C(-1;\ 10;\ 7)$, найти длину высоты, опущенной на сторону AB (через площадь треугольника; средствами векторной алгебры).

11. На векторах $\vec{a}(-2;\ -2;\ -3)$ и $\vec{b}=3\vec{i}+6\vec{j}+7\vec{k}$ построен параллелограмм. Найти площадь параллелограмма, построенного на диагоналях данного параллелограмма.

12. В треугольнике с вершинами $A(-1;\ 4;\ 3)$, $B(-1;\ 20;\ 13)$ и $C(-1;\ 10;\ 7)$ точка E делит сторону AB пополам. Найти площадь треугольника ACE (средствами векторной алгебры).

13. Найти площадь параллелограмма со сторонами $2\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{a}+2\vec{b}$, если $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$.

14. Найти площадь треугольника со сторонами $\vec{a}$ и $\vec{b}-\vec{c}$, если $\vec{a}\{1;\ -2;\ 0\}$, $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ и $\vec{c}=-\vec{j}+3\vec{k}$.

15. Дан треугольник с вершинами $A(2;\ -1;\ 2)$, $B(1;\ 2;\ -1)$ и $C(3;\ 2;\ 1)$. Вычислить площадь треугольника и высоту, опущенную из вершины A (средствами векторной алгебры).

16. Даны векторы $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{b}=5\vec{i}+3\vec{j}$. Найти вектор $\vec{d}$, который перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если длина его численно равна площади треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и тройка векторов $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{d}$ – правая.

17. Даны точки $A(1;\ 2;\ 0)$, $B(3;\ 0;\ -3)$ и $C(5;\ 2;\ 6)$. Вычислить площадь треугольника и высоту, опущенную из вершины C (средствами векторной алгебры).

18. В треугольнике с вершинами $A(2;\ -1;\ 2)$, $B(1;\ 2;\ -1)$ и $C(3;\ 2;\ 1)$ точка E делит сторону AB пополам. Найти площадь треугольника BCE (средствами векторной алгебры).

19. Даны точки $A(2;\ -1;\ 2)$, $B(1;\ 2;\ -1)$ и $C(3;\ 2;\ 1)$. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{CA}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{CB}$.

20. Даны три вершины треугольника: $A(1;\ -1;\ 2)$, $B(5;\ -6;\ 2)$, $C(1;\ 3;\ -1)$. Вычислить его высоту, опущенную из вершины B (через площадь, средствами векторной алгебры).

21. Дан треугольник с вершинами $A(1;\ 2;\ -1)$, $B(0;\ 1;\ 5)$ и $C(-1;\ 2;\ 1)$. Найти его высоту, опущенную из вершины A (через площадь, средствами векторной алгебры).

22. Даны векторы $\vec{b}\{-3;\ 1;\ 2\}$ и $\vec{c}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $2\vec{b}-\vec{c}$ и $2\vec{c}-\vec{b}$.

23. Даны векторы $\vec{b}\{3;\ 1;\ -1\}$ и $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $2\vec{a} - \vec{b}$ и $3\vec{b} - \vec{a}$.

24. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{b} + 3\vec{a}$ и $2\vec{a}$, где $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

25. В треугольнике с вершинами $A(1;\ 2;\ 0)$, $B(3;\ 0;\ -3)$ и $C(5;\ 2;\ 6)$ точка E делит сторону AB пополам. Найти площадь треугольника ACE (средствами векторной алгебры).

26. Даны векторы $\vec{a}\,\{2;\ -3;\ 1\}$ и $\vec{b}\{-3;\ 1;\ 2\}$. Найти вектор $\vec{c}$, который перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если модуль вектора $\vec{c}$ численно равен площади треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и тройка векторов $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ – левая.

27. Даны точки $A(5;\ -1;\ 3)$, $B(0;\ -2;\ 1)$ и $C(3;\ 2;\ 4)$. Найти длину высоты треугольника ABC, опущенной из вершины C (через площадь, средствами векторной алгебры).

28. Даны три вершины параллелограмма $A(-1;\ -2;\ 0)$, $B(2;\ 1;\ 3)$ и $C(-3;\ 0;\ 1)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины C (через площадь, средствами векторной алгебры).

29. На векторах $\vec{a}\{2;\ -3;\ 1\}$ и $\vec{b} = 2\vec{k} - 3\vec{i} + \vec{j}$ построен параллелограмм. Найти площадь параллелограмма, построенного на его диагоналях.

30. Даны векторы $\vec{a}\{2;\ -3;\ 1\}$, $\vec{b} = -3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $2\vec{a}$ и $\vec{b} + 3\vec{c}$.

**Задача 11.** Если даны координаты $\bar{a}(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\bar{b}(x_2,\ y_2,\ z_2)$ и $\bar{c}(x_3,\ y_3,\ z_3)$, то смешанное произведение векторов вычисляют по формуле

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Объемы параллелепипеда и тетраэдра (треугольной пирамиды), построенных на векторах $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ находятся с помощью смешанного произведения векторов:

$$V_{пар} = \left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|,\quad V_{тет} = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|.$$

Если $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c} > 0$, то тройка векторов $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ - правая.

Если $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c} < 0$, то тройка левая.

Если $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c} = 0$, то векторы $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ компланарны.

**Пример 11.** Дан параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$, построенный на векторах $\overrightarrow{AB}\{4;\ 3;\ 0\}$, $\overrightarrow{AD}(2;\ 1;\ 2\}$ и $\overrightarrow{AA'}\{-3;\ -2;\ 5\}$. Найти высоту, проведенную из вершины $A'$ на грань $ABCD$.

Объем $V_{пар}$ равен произведению площади основания на высоту:

$$V_{пар} = S \cdot h = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| \cdot h.$$

$V_{пар}$ находится также по формуле $V_{пар} = \left|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA'}\right|$, поэтому

$$h = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA'}\right|}{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right|}.$$

Вычислим векторное произведение $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$

$$= \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 8\vec{j} - 2\vec{k} = \{6; -8; -2\}.$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{6^2 + (-8)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{26}.$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA'} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -12, \quad \left|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA}\right| = |-12| = 12.$$

Тогда $h = \dfrac{12}{2\sqrt{26}} = \dfrac{12 \cdot \sqrt{26}}{2 \cdot 26} = \dfrac{3\sqrt{26}}{13}$.

### Контрольные варианты к задаче 11

1. Найти объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\overrightarrow{AB}\{1;\ 3;\ 1\}$, $\overrightarrow{AC}\{0;\ 1;\ -1\}$ и $\overrightarrow{AD} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

2. Найти объем треугольной пирамиды с вершинами $A(-1;\ 4;\ 1)$, $B(0;7;1)$, $C(1;\ 3;\ 5)$, $D(0;\ 6;\ -1)$.

3. Найти значение $t$, при котором векторы $\vec{a}\{2;\ -1;\ 5\}$, $\vec{b}\{t;\ 4;\ 2\}$ и $\vec{c} = \{1;\ 0;\ -1\}$ образуют левую тройку, а объем параллелепипеда, построенного на них, равен 33.

4. Даны векторы $\vec{a} = t\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b}\{1; -1; 0\}$, $\vec{c} = \vec{k}$. Найти значение t, при котором выполняется равенство $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}$.

5. Точки $A(2;\ 3;\ t)$, $B(3;\ -1;\ -2)$, $C(1;\ 4;\ 0)$ и $Д(1; 3; 2)$ лежат в одной плоскости. Найти t .

6. Найти объем параллелепипеда, зная четыре его вершины: $A(3;\ -1;\ 2)$, $B(0;\ -1;\ 3)$, $C(0;\ 1;\ 1)$ и $D(3;\ 4; -1)$.

7. Найти значение t, при котором векторы $\vec{a} = t\vec{i} + t\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 5\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{c}\{-1;\ 3;\ t\}$ компланарны.

8. Точки $A(-2;\ 1;\ -3)$, $B(3;\ 4;\ 4)$, $C(5;\ 6;\ 0)$ и $E(5;\ 6;\ t)$ служат вершинами параллелепипеда, объем которого равен 16. Найти t.

9. Даны векторы $\vec{a}\{-2;\ -2;\ 2\}$ $\vec{b}\{1;\ -1;\ 1\}$ и $\vec{c} = 5\vec{i} - 0{,}5\vec{j} + t\vec{k}$. Найти значение t, при котором имеет место равенство $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{b}$.

10. Векторы $\vec{a} = t\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 5\vec{j} + 7\vec{k}$ и $\vec{c} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ компланарны. Найти t.

11. Даны векторы $\vec{a}\{1;\ t;\ -1\}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ и $\vec{c} = -\vec{j} - 5\vec{i}$. Найти значение t, при котором имеет место равенство $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c} = \overrightarrow{a\cdot b} - \overrightarrow{b\cdot c} + \overrightarrow{a\cdot c}$.

12. Даны векторы $\vec{a}\{-2;\ 3;\ t\}$ $\vec{b} = 4\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = 4\vec{k} + \vec{j}$. Найти значение t, при котором имеет место равенство $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = \left|\vec{b}\right|$.

13. Векторы $\vec{a}\{1;\ -3;\ 1\}$ $\vec{b}\{3;\ 2;\ -2\}$ и $\vec{c} = t\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ образуют правую тройку, причем объем параллелепипеда, построенного на этих векторах, равен девяти. Найти t.

14. Векторы $\vec{a} = 6\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 7\vec{k}$ и $\vec{c}$ образуют левую тройку и служат ребрами параллелепипеда, объем которого равен 45. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен плоскости ХОУ. Найти отличную от нуля координату вектора $\vec{c}$.

15. Векторы $\vec{a}\{3;\ 4;\ t\}$ $\vec{b}\{0;\ -3;\ 1\}$ и $\vec{c} = 2\vec{i} + 5\vec{k}$ образуют левую тройку. Объем построенного на них параллелепипеда равен 51. Найти t.

16. Найти объем треугольной пирамиды с вершинами в точках $A(2;\ 2;\ 2)$, $B(4;\ 3;\ 3)$, $C(4;\ 5;\ 4)$ и $D(5;\ 5;\ 6)$.

17. Объем треугольной пирамиды равен пяти. Три его вершины находятся в точках $A(2;\ 1;\ -1)$, $B(3;\ 0;\ 1)$, $C(2;\ -1;\ 3)$. Найти отличную от нуля координату четвертой вершины D, если она лежит на оси ОУ.

18. Точки $A(1;\ 3;\ 2)$, $B(1;\ 4;\ 0)$, $C(3;\ -1;\ -2)$ и $D(2;\ 3;\ t)$ лежат в одной плоскости. Найти t.

19. Найти значение t, при котором векторы $\vec{a}\{t;\ 3;\ 2\}$, $\vec{b}\{2;\ -3;\ -4\}$ и $\vec{c}\{-3;\ 12;\ 6\}$ компланарны.

20. Проверить, лежат ли точки $A(2;\ -1;\ 2)$, $B(1;\ 2;\ 1)$, $C(2;\ 3;\ 0)$ и $D(5;\ 0;\ -6)$ в одной плоскости.

21. Найти объем треугольной пирамиды, вершины которой находятся в точках $A(6;\ 1;\ 5)$, $B(-1;\ 3;\ 0)$, $C(4;\ 5;\ -2)$ и $D(1;\ -1;\ 6)$.

22. Даны векторы $\vec{a}\{1;\ 2;\ t\}$, $\vec{b}\{1;\ -3;\ 2\}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{-2i} + \vec{k}$. Найти t, при котором имеет место равенство $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{c}|^2$.

23. Векторы $\vec{a}\{1;\ 1;\ t\}$, $\vec{b}\{2;\ 1;\ 1\}$, $\vec{c} = \vec{i} - \overrightarrow{2j} + 3\vec{k}$ образуют правую тройку. Объем построенной на них треугольной пирамиды равен $5/3$. Найти t.

24. Вершины треугольной пирамиды находятся в точках $A(0; -2; 5)$, $B(6;\ t;\ 0)$, $C(3;\ -3;\ 6)$ и $D(2;\ -1;\ 3)$. Найти значение t, если объем пирамиды равен 45.

25. Даны векторы $\vec{a}\{1;\ -1;\ 1\}$, $\vec{c}\{5;\ t;\ 2\}$, $\vec{b} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$. Найти значение t, если имеет место равенство $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = \left|\vec{b}\right| \cdot |\vec{a}|$.

26. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + t\vec{k}$. Найти значение t, если имеет место равенство $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{a}|$.

27. Определить, при каком значении t векторы $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = t\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ компланарны.

28. Даны векторы $\vec{a} = \{-2;\ 1;\ 1\}$, $\vec{b}\{1;\ 5;\ 0\}$, $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + t\vec{k}$. Найти значение t, при котором имеет место равенство $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{a}|^2$.

29. Векторы $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 7\vec{i} + t\vec{j}$, $\vec{c}\{3;\ 0;\ 1\}$ образуют правую тройку, а объем построенного на них параллелепипеда равен 12. Найти значение t.

30. Даны векторы $\vec{a}\{2;\ t;\ 1\}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + \vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{j} + \vec{k}$. Найти значение t, если имеет место равенство $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = -\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

**Задача № 12.** Пусть вектор $\vec{a} = \alpha\overrightarrow{m} + \beta\overrightarrow{n}$, причем векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ не образуют декартовый базис. Пусть известны $\left|\overrightarrow{m}\right|$, $\left|\vec{n}\right|$, $\widehat{\vec{m}, \vec{n}}$ тогда

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{(\alpha\vec{m} + \beta\vec{n})^2} = \sqrt{\alpha^2 \cdot \vec{m}^2 + 2\alpha \cdot \beta \cdot \widehat{\vec{m} \cdot \vec{n}} + \beta^2 \cdot \vec{n}^2} =$$

$$= \sqrt{\alpha^2|\vec{m}|^2 + 2\alpha\beta|\vec{m}||\vec{n}|\cos\vec{m} \cdot \vec{n} + \beta^2|\vec{n}|^2}.$$

Если векторы $\vec{a} = \alpha_1\vec{m} + \beta_1\vec{n}$ и $\vec{b} = \alpha_2\vec{m} + \beta_2\vec{n}$, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\alpha_1\vec{m} + \beta_1\vec{n}) \cdot (\alpha_2\vec{m} + \beta_2\vec{n}) = \alpha_1 \cdot \alpha_2\vec{m}^2 + \alpha_1 \cdot \beta_2\vec{m} \cdot \vec{n} + \beta_1 \cdot \alpha_1\vec{n} \cdot \vec{m} + \beta_1 \cdot \beta_2\vec{n}^2 =$$

$$= \alpha_1 \cdot \alpha_2\vec{m}^2 + (\alpha_1 \cdot \beta_2 + \alpha_2 \cdot \beta_1)\vec{m} \cdot \vec{n} + \beta_1 \cdot \beta_2\vec{n}^2 =$$

$$= \alpha_1 \cdot \alpha_2|\vec{m}|^2 + (\alpha_1 \cdot \beta_2 + \alpha_2 \cdot \beta_1)|\vec{m}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos\widehat{\vec{m} \cdot \vec{n}} + + \beta_1 \cdot \beta_2|\vec{n}|^2.$$

**Пример 12.** При каком ненулевом значении t вектор $\vec{a} = t\vec{m} + \vec{n}$ будет единичным, если $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = 1$, $\widehat{\vec{m}, \vec{n}} = 2\pi/3$? Вектор будет единичным, если его длина будет равна единице, т. е. $\left|\vec{a}\right|^2 = 1$.

$$|\vec{a}|^2 = (t\vec{m} + \vec{n})^2 = t^2\vec{m}^2 + 2t\vec{m}\cdot\vec{n} + \vec{n}^2 =$$
$$= t^2|\vec{m}|^2 + 2t|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|\cos\widehat{\vec{m}, \vec{n}} + |\vec{n}|^2 = 1,$$
$$t^2 + 2t\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 1, \quad t^2 - t = 0, \quad t \neq 0, \; t = 1.$$

## Контрольные варианты к задаче 12

1. Даны векторы $\vec{a} = 4\vec{m} - \vec{n}$ и $\vec{b} = 2\vec{m} + 2\vec{n}$, где $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 3$, $\vec{a} \perp \vec{b}$. Найти косинус угла между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$.

2. Найти $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$, если $\vec{a} = \vec{s} - \vec{t}$, $\vec{b} = \vec{s} + 5\vec{t}$, $|\vec{s}| = 4$, $|\vec{t}| = 2$, $(\widehat{\vec{s}, \vec{t}}) = \pi/3$.

3. Даны векторы $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ и $\vec{b} = 2\vec{m} - \vec{n}$, найти $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$, если $|\vec{m}| = 1/\sqrt{8}$, $|\vec{n}| = 1/4$, $(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = \pi/4$.

4. Даны векторы $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ и $\vec{b} = 2\vec{m} - \vec{n}$. Найти косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{m}| = \dfrac{1}{\sqrt{8}}$, $|\vec{n}| = \dfrac{1}{4}$, $(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = \pi/4$.

5. При каком отличном от нуля значении параметра $\ell$ вектор $\vec{a} = \ell\vec{m} + 2\vec{n}$ будет единичным, если $|\vec{m}| = 3$, $|\vec{n}| = 1/2$, $(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = 2\pi/3$?

6. Даны векторы $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ и $\vec{b} = 2\vec{m} - \vec{n}$, найти $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$, если $|\vec{m}| = 1/\sqrt{8}$, $|\vec{n}| = 1/4$, $(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = \pi/4$.

7. Векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{t} - 2\vec{s}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{s} - \vec{t}$ служат сторонами параллелограмма. Найти косинус угла между диагональю $\overrightarrow{BC}$ и стороной $\overrightarrow{AC}$, если $|\vec{s}| = \sqrt{3}$, $|\vec{t}| = \sqrt{6}$, $(\widehat{\vec{s}, \vec{t}}) = \pi/4$.

8. Даны векторы $\vec{a} = \dfrac{1}{2}\vec{p} + \ell\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - \vec{q}$. При каком значении параметра $\ell$ вектор $\vec{a} \perp \vec{b}$, если $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = \sqrt{8}$, $(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = 3\pi/4$?

9. В параллелограмме ABCD найти длину диагонали $\overrightarrow{BD}$, если
$$\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\vec{a} + \vec{b}, \quad \overrightarrow{AD} = \frac{\vec{b}}{2}, \quad |\vec{a}| = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad |\vec{b}| = \frac{1}{2}, (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{5}{6}\pi.$$

10. В треугольнике ABC найти косинус внутреннего угла B, если

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}+4\vec{b},\ \overrightarrow{BC} = -\vec{a}-\vec{b},\ |\vec{a}| = 1,\ |\vec{b}| = \sqrt{2},\ (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 3\pi/4$ .

11. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{m} - \vec{n},\ \vec{b} = \vec{m} + 4\vec{n}$. Вычислить $\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}$, если

$$|\vec{m}| = \frac{1}{2\sqrt{2}},\ |\vec{n}| = \frac{1}{4},\ (\widehat{\vec{m},\vec{n}}) = 3\pi/4.$$

12. При каком положительном значении параметра $\ell$ векторы $\vec{a} = \vec{p}-\vec{q}$ и $\vec{b} = \ell\vec{p} + 2\vec{q}$ имеют одинаковую длину, если $|\vec{p}| = \sqrt{3}, |\vec{q}| = 0{,}5$, $\vec{p}\perp\vec{q}$?

13. Даны векторы $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n},\ \vec{b} = 4\vec{m}-5\vec{n}$. Найти $|\vec{a}+\vec{b}|$, если $|\vec{m}| = 1/\sqrt{8},\ |\vec{n}| = 1/4,\ (\widehat{\vec{m},\vec{n}}) = \pi/4$.

14. В треугольнике ABC найти длину $\overrightarrow{AC}$, если $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},\ \overrightarrow{CB} = \vec{a}+\vec{b}$, $|\vec{a}| = \sqrt{3},\ |\vec{b}| = 1,\quad (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \pi/6$.

15. Даны векторы $\vec{a} = 7\vec{m} + 2\vec{n},\ \vec{b} = -2\vec{m}-\vec{n}$. Найти $|\vec{a}-\vec{b}|$, если

$$|\vec{m}| = 1/(3\sqrt{2}),\ |\vec{n}| = 1/4,\ (\widehat{\vec{m},\vec{n}}) = \pi/4.$$

16. Дан вектор $\vec{b} = 3\vec{m}-\vec{n}$. Найти косинус угла между векторами $\vec{b}$ и $\vec{m}$, если $|\vec{m}| = 1/\sqrt{18},\ |\vec{n}| = 1/2,\ (\widehat{\vec{m},\vec{n}}) = 3\pi/4$.

17. Даны векторы $\vec{a} = \vec{m}+2\vec{n},\ \vec{b} = 2\vec{m}-\vec{n}$. Найти $\text{пр}_{\vec{a}}3\vec{b}$, если $|\vec{m}|=1/\sqrt{18},\ |\vec{n}|=1/4,,\ (\widehat{\vec{m},\vec{n}})=3\pi/4$.

18. Даны векторы $\vec{a} = \vec{m}+2\vec{n},\ \vec{b} = 2\vec{m}-\vec{n}$. Найти $\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{m} - \vec{a}\cdot\vec{n}$, $|\vec{m}| = 1/\sqrt{8},\ |\vec{n}| = 1/4,\quad (\widehat{\vec{m},\vec{n}}) = 5\pi/4$.

19. Даны векторы $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{p} + \ell\vec{q},\ \vec{b} = 3\vec{p}+\vec{q}$. При каком значении параметра $\ell$ вектор $\vec{a}\perp\vec{b}$, если $|\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = \sqrt{8},\ (\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = 3\pi/4$?

20. Дано: $|\vec{m}| = 3,\ |\vec{n}| = 5,\ (\widehat{\vec{m},\vec{n}}) = \frac{\pi}{3}$. При каком значении параметра $\alpha$ векторы $\vec{m}+\alpha\vec{n}$ и $2\vec{m}-\vec{n}$ взаимно перпендикулярны?

21. Дан вектор $\vec{a} = 2\vec{m}+\vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ - единичные векторы, образующие угол $120^0$. Найти косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{m}$.

22. Даны векторы $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}, \vec{b} = 2\vec{m}-\vec{n}$. Найти $\text{пр}_{\vec{a}}(\vec{a}-3\vec{m})$, если $|\vec{m}| = 1/\sqrt{18},\ |\vec{n}| = 1/2, (\widehat{\vec{m},\vec{n}}) = 5\pi/4$.

23. Дан вектор $\vec{a}=\vec{m}+3\vec{n}$. Найти $\text{пр}_{\vec{m}}(\vec{a}+\vec{n})$, если $|\vec{m}| = 1/\sqrt{8},\ |\vec{n}| = 1/4$, $(\widehat{\vec{m},\vec{n}}) = \pi/4$.

24. Даны векторы $\vec{a} = \vec{m}+2\vec{n},\ \vec{b} = 2\vec{m}-\vec{n}$. Найти длину вектора $2\vec{a}+3\vec{b}$, если $|\vec{m}| = 1/\sqrt{18},\ |\vec{n}| = 1/4,\ (\widehat{\vec{m},\vec{n}}) = 5\pi/4$.

25. Даны векторы $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n},\ \vec{b} = 3\vec{m} - \vec{n}$. Найти $3\vec{m}\cdot\vec{a} - \vec{b}\cdot\vec{a}$, если $|\vec{m}| = 1/\sqrt{18},\ |\vec{n}| = 1/4,\ (\vec{m},\widehat{\ }\vec{n}) = \pi/4$.

26. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\pi/3$. Зная, что $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4$, найти длину вектора $\vec{c} = 3\vec{a} + 3\vec{b}$.

27. При каком значении параметра $\alpha \neq 0$ вектор $\vec{a} = \alpha\vec{p} + 5\vec{q}$ будет единичным, если $|\vec{p}| = 3, |\vec{q}| = 1/2,\ (\vec{p},\widehat{\ }\vec{q}) = 2\pi/3$?

28. При каком значении $\alpha$ векторы $\vec{p} = 2\vec{a} + 3\vec{b},\ \vec{q} = \alpha\vec{a} + 3\vec{b}$ имеют одинаковую длину, если $|\vec{a}| = \sqrt{2},\ |\vec{b}| = 2,\ (\vec{a},\widehat{\ }\vec{b}) = 3\pi/4$ ?

29. В треугольнике ABC найти косинус внутреннего угла при вершине B, если $\overrightarrow{AB} = 3\vec{m} - 2\vec{n},\ \overrightarrow{BC} = 2\vec{m} - \vec{n}$, где $|\vec{m}| = 2,\ |\vec{n}| = \frac{1}{3},\ (\vec{m},\widehat{\ }\vec{n}) = 120^0$.

30. Даны векторы $\vec{S} = 2\vec{m} + \alpha\vec{n},\ \vec{t} = 3\vec{m} - 2\vec{n}$. При каком значении параметра $\alpha$ вектор $\vec{S} \perp \vec{t}$, если $|\vec{m}| = 1,\ |\vec{n}| = \sqrt{2},\ (\vec{m},\widehat{\ }\vec{n}) = 3\pi/4$.

**Задача 13.** При решении этой задачи будем использовать свойства векторного произведения двух векторов. Модуль векторного произведения двух векторов $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin \vec{a},\widehat{\ }\vec{b}$, поэтому $|\vec{a}\times\vec{a}| = 0$. По свойствам векторного произведения $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$, $(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b})\times\vec{c} = \alpha\cdot\vec{a}\times\vec{c} + \beta\cdot\vec{b}\times\vec{c}$. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равна $S_n = |\vec{a}\times\vec{b}|$. Площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $S_T = \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$.

**Пример 13.** В параллелограмме ABCD даны векторы $\overrightarrow{AB} = 2\vec{m} - \vec{n}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{m} + 3\vec{n}$. Найти $|\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{BD}|$, если $|\vec{m}| = 4,\ |\vec{n}| = \sqrt{2},\ (\vec{m},\widehat{\ }\vec{n}) = \frac{\pi}{6}$. Это условие в параллелограмме ABCD вектор $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\vec{m} - \vec{n} + \vec{m} + 3\vec{n} = 3\vec{m} + 2\vec{n}$. Тогда $\overrightarrow{CA} = -2\vec{n} - 3\vec{m}$. Вектор $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \vec{m} + 3\vec{n} - 2\vec{m} + \vec{n} = 4\vec{n} - \vec{m}$;

$$\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{BD} = (-2\vec{n} - 3\vec{m})\times(4\vec{n} - \vec{m}) = -8\vec{n}\times\vec{n} + 2\vec{n}\times\vec{m} - 3\vec{m}\times 4\vec{n} + \vec{m}\times\vec{m} =$$

$$= 2\vec{n}\times\vec{m} + 12\vec{n}\times\vec{m} = 14\vec{n}\times\vec{m};$$

$$|\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{BD}|\ |14\vec{n}\times\vec{m}| = 14\,|\vec{n}|\cdot|\vec{m}|\cdot\sin\frac{\pi}{6} = 14\cdot 4\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2} = 28\sqrt{2}.$$

## Контрольные варианты к задаче 13

1. На векторах $\vec{a}=2\vec{m}-5\vec{n}$ и $\vec{b}=3\vec{m}+\vec{n}$ построен треугольник. Найти его площадь, если $|\vec{m}|=1$, $|\vec{n}|=\sqrt{3}$, $(\vec{m},\hat{\ }\vec{n}) = \dfrac{\pi}{6}$.

2. Даны векторы $\vec{a} = \vec{m}+3\vec{n}$, $\vec{b} = 4\vec{m}-\vec{n}$ и $\vec{c} = 3\vec{m}+\vec{n}$. Найти модуль векторного произведения $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}$, если $|\vec{m}|=2$, , $|\vec{n}|=\sqrt{3}$, $(\vec{m},\hat{\ }\vec{n})=\dfrac{\pi}{6}$.

3. Даны векторы $\vec{a}=2\vec{m}+\vec{n}$, $\vec{b}=\vec{m}+2\vec{n}$. Найти $|\vec{a}\times\vec{b}+5\vec{m}\times\vec{n}|$, если $|\vec{m}| = 1$, , $|\vec{n}| = \sqrt{3}$, $(\vec{m},\hat{\ }\vec{n}) = \dfrac{\pi}{6}$.

4. В треугольнике ABC даны векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{m}-6\vec{n}$ и $\overrightarrow{BC} = 3\vec{m}+2\vec{n}$. Найти $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CA}|$, если $|\vec{m}| = 2$, , $|\vec{n}| = \sqrt{3}$, $(\vec{m},\hat{\ }\vec{n}) = \dfrac{\pi}{6}$.

5. В параллелограмме ABCD даны векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{n}-0{,}5\vec{m}$ и $\overrightarrow{AD} = 5{,}5\vec{m}$. Найти $|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BD}|$, если $|\vec{m}|=3$, $|\vec{n}|=2$, $(\vec{m},\hat{\ }\vec{n}) = \dfrac{\pi}{4}$.

6. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}=5\vec{m}+2\vec{n}$ и $\vec{b}=3\vec{m}+\vec{n}$, если $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = \sqrt{3}$, $(\vec{m},\hat{\ }\vec{n}) = \pi/6$.

7. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}=5\vec{n}+4\vec{m}$ и $\overrightarrow{AD}=2\vec{m}-\vec{n}$, если $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}|=\sqrt{3}$, $(\vec{m},\hat{\ }\vec{n}) = \pi/6$.

8. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{m}-4\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m}+12\vec{n}$, где $|\vec{m}|=2$, $|\vec{n}|=1$, $(\vec{m},\hat{\ }\vec{n})=\pi/4$. Найти $|\vec{a}\times(\vec{a}+\vec{b})|$.

9. В параллелограмме ABCD даны векторы $\overrightarrow{AB}=3\vec{a}+5\vec{b}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{a}-2\vec{b}$. Найти $|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BD}|$, если $|\vec{a}| = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$, $|\vec{b}| = \sqrt{8}$, $(\vec{a},\hat{\ }\vec{b}) = \pi/3$.

10. Даны векторы $\vec{a}=\dfrac{1}{2}\vec{m}+4\vec{n}$ и $\vec{b}=-\vec{m}+3\vec{n}$. Найти $|(\vec{a}+2\vec{b})\times\vec{b}|$, если $|\vec{m}| = 5$, $|\vec{n}| = 1$, $(\vec{m},\hat{\ }\vec{n}) = \pi/4$.

11. Даны векторы $\vec{a}=2\vec{m}-\vec{n}$, $\vec{b}=4\vec{m}-\vec{n}$, и $\vec{c}=\vec{m}+2\vec{n}$. Найти $|(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}|$, если $|\vec{m}|=2$, $|\vec{n}| = \sqrt{3}$, $(\vec{m},\hat{\ }\vec{n}) = \pi/6$.

12. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{m}-\vec{n}$, $\vec{b} = -\vec{m}+2\vec{n}$. Найти $|\vec{a}\times\vec{b}+5\vec{m}\times\vec{n}-3\vec{n}\times m|$, если $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = \sqrt{3}$, $(\vec{m},\hat{\ }\vec{n}) = \pi/6$.

13. В параллелограмме ABCD даны векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{n}-0{,}5\vec{m}$ и $\overrightarrow{AD}=5{,}5\vec{m}$.

Найти $\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BD}\right|$, если $|\vec{m}| = 2,\ |\vec{n}| = \sqrt{3},\ (\vec{m},\widehat{\ }\vec{n}) = 5\pi/6.$

14. В треугольнике ABC даны векторы $\overrightarrow{AB} = -6\vec{n} + \vec{m}$ и $\overrightarrow{BC} = 3\vec{m} + 2\vec{n}$. Найти $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CA}\right|$, если $|\vec{m}| = 2,\ |\vec{n}| = \sqrt{3},\ (\vec{m},\widehat{\ }\vec{n}) = \pi/6.$

15. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{m} + \vec{n}$ и $\vec{b} = \vec{m} - 3\vec{n}$. Найти $\left|\vec{a}\times\vec{b} + 3\vec{m}\times\vec{n} - 2\vec{n}\times\vec{m}\right|$, если $|\vec{m}| = 4,\ |\vec{n}| = \sqrt{3},\ (\vec{m},\widehat{\ }\vec{n}) = \pi/6.$

16. Даны векторы $\vec{a} = 4\vec{m} + \vec{n}$, $\vec{b} = 3\vec{m} + \vec{n}$. Найти $\left|\vec{a}\times(\vec{b} - \vec{a})\right|$, если $|\vec{m}| = 2,\ |\vec{n}| = \sqrt{12},\ (\vec{m},\widehat{\ }\vec{n}) = \pi/6.$

17. В параллелограмме ABCD даны векторы $\overrightarrow{AB} = -3{,}5\vec{n} + \vec{m}$ и $\overrightarrow{AD} = 5{,}5\vec{n}$. Найти $\left|\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{BD}\right|$, если $|\vec{m}| = 2,\ |\vec{n}| = \sqrt{12},\ (\vec{m},\widehat{\ }\vec{n}) = \pi/6.$

18. В треугольнике ABC даны векторы $\overrightarrow{AB} = 3\vec{n} + 2\vec{m}$ и $\overrightarrow{BC} = 3\vec{m} + 2\vec{n}$. Найти $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CA}\right|$, если $|\vec{m}| = 3,\ |\vec{n}| = \sqrt{12},\ (\vec{m},\widehat{\ }\vec{n}) = \pi/3.$

19. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{p} - \frac{1}{3}\vec{q}$ и $\vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q}$. Найти $\left|(5\vec{a} - 3\vec{b})\times(\vec{b} - 4\vec{a})\right|$, если $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3,\ (\vec{p},\widehat{\ }\vec{q}) = 5\pi/6$.

20. Даны векторы $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{m} + 3\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} + 2\vec{n}$. Найти $\left|(3\vec{a} + \vec{b})\times\vec{b}\right|$, если $|\vec{m}| = 4,\ |\vec{n}| = 2,\ (\vec{m},\widehat{\ }\vec{n}) = \pi/4.$

21. В параллелограмме ABCD даны векторы $\overrightarrow{AB} = 5\vec{a} + 7\vec{b}$ и $\overrightarrow{AD} = -3\vec{a} + \vec{b}$. Найти $\left|\overrightarrow{AC}\times(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD})\right|$, если $|\vec{a}| = \sqrt{3},\ |\vec{b}| = 3,\ (\vec{a},\widehat{\ }\vec{b}) = \pi/3.$

22. Даны векторы $\vec{a} = \vec{m} + \vec{n}$, $\vec{b} = -\vec{m} + 3\vec{n}$ и $\vec{c} = 5\vec{m} - \vec{n}$. Найти $\left|2\vec{a}\times\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}\times\vec{b}\right|$, если $|\vec{m}| = 2,\ |\vec{n}| = \sqrt{18},\ (\vec{m},\widehat{\ }\vec{n}) = \pi/4.$

23. Даны векторы $\vec{a} = \vec{m} - 2\vec{n}$, $\vec{b} = 5\vec{m} + 3\vec{n}$ и $\vec{c} = -\vec{m} + \vec{n}$. Найти $\left|\vec{a}\times\vec{b} - 3\vec{c}\times(\vec{a} + \vec{b})\right|$, если $|\vec{m}| = 2,\ |\vec{n}| = \sqrt{8},\ (\vec{m},\widehat{\ }\vec{n}) = 3\pi/4.$

24. Даны векторы $\vec{p} = 2\vec{m} - 3\vec{n}$, $\vec{q} = 7\vec{m} + \vec{n}$. Найти $\left|(8\vec{p} - 2\vec{q})\times\left(\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q}\right)\right|$, если $|\vec{m}| = 2,\ |\vec{n}| = 3,\ (\vec{m},\widehat{\ }\vec{n}) = 5\pi/6.$

25. Даны векторы $\vec{a} = 4\vec{m} - \frac{1}{2}\vec{n}$ и $\vec{b} = 3\vec{m} - \vec{n}$. Найти $\left|(2\vec{a} + 3\vec{b})\times\left(\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right)\right|$, если $|\vec{m}| = 3,\ |\vec{n}| = 2,\ (\vec{p},\widehat{\ }\vec{q}) = 3\pi/4.$

26. Даны векторы $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{m} + 6\vec{n}$ и $\vec{b} = -2\vec{m} + 3\vec{n}$. Найти $\left|\left(3\vec{a} + 2\vec{b}\right) \times \vec{b}\right|$, если $|\vec{m}| = 5$, $|\vec{n}| = 2\sqrt{2}$, $(\vec{m},\widehat{\ }\vec{n}) = \pi/4$.

27. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{m} - 4\vec{n}$ и $\vec{b} = \vec{m} + 5\vec{n}$. Найти $\left|\vec{a} \times \left(2\vec{a} + 3\vec{b}\right)\right|$, если $|\vec{m}| = 5$, $|\vec{n}| = \sqrt{12}$, $(\vec{m},\widehat{\ }\vec{n}) = \pi/3$.

28. Векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{n} + 2\vec{m}$ и $\overrightarrow{BC} = 6\vec{m} - 2\vec{n}$ служат сторонами треугольника ABC. Найти $\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CA}\right|$, если $|\vec{m}| = \sqrt{3}$, $|\vec{n}| = 2$, $(\vec{m},\widehat{\ }\vec{n}) = \pi/6$.

29. В параллелограмме ABCD даны векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{n} + 2\vec{m}$ и $\overrightarrow{AD} = 4\vec{m} - 6\vec{n}$. Найти $\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD}\right|$,, если $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = \sqrt{12}$, $(\vec{m},\widehat{\ }\vec{n}) = \pi/3$.

30. В треугольнике ABC даны векторы $\overrightarrow{AB} = -\vec{n} + 4\vec{m}$ и $\overrightarrow{BC} = 3\vec{m} + \vec{n}$. Найти $\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\right|$, если $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 3$, $(\vec{m},\widehat{\ }\vec{n}) = \pi/6$.

**Задача 14.** Даны координаты вершин пирамиды
$A(1,\ 1,\ 1)$; $B(5;\ 3;\ 1)$; $C(3;\ 2;\ 3)$; $D(-2,\ -1,\ 6)$.

1. Найти длину вектора $\overrightarrow{AD}$.
2. Найти угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.
3. Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$.
4. Найти площадь грани ABC.
5. Найти объем пирамиды ABCD.

Координаты векторов: $\overrightarrow{AB}\{4,\ 2,\ 0\}$; $\overrightarrow{AC}\{2,\ 1,\ 2\}$; $\overrightarrow{AD}\{-3,\ -2,\ 5\}$.

1. Длина вектора $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{38}.$

2. $$\cos \overrightarrow{AB},\widehat{\ }\overrightarrow{AC} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}. \qquad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 10;$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}; \qquad \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3.$$

$$\cos \overrightarrow{AB},\widehat{\ }\overrightarrow{AC} = \frac{10}{2\sqrt{5} \cdot 3} = \frac{\sqrt{5}}{3}; \qquad \left(\overrightarrow{AB},\widehat{\ }\overrightarrow{AC}\right) = \arccos\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

3. Проекция вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$: $\quad \text{Пр}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AD} = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}.$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=4\cdot(-3)+2(-2)+0\cdot 5=-16; \qquad \left|\overrightarrow{AB}\right|=2\sqrt{5};$$

$$\text{Пр}_{\overrightarrow{AB}}\ \overrightarrow{AD}=-\frac{16}{2\sqrt{5}}=-\frac{8\sqrt{5}}{5}.$$

4. $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|;\qquad \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{vmatrix}=4\vec{i}-8\vec{j}-0\cdot\vec{k}=4\left(\vec{i}-2\vec{j}\right).$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=4\sqrt{1^2+2^2}=4\sqrt{5};\qquad S_{ABC}=2\sqrt{5}.$$

5. $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\right)\right|;\qquad \left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix}4 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 2\\ -3 & -2 & 5\end{vmatrix}=4.\qquad V_{ABCD}=\frac{2}{3}.$

## Контрольные варианты к задаче 14

**Задача.** Даны координаты вершин пирамиды ABCD. Требуется найти:

1) длины векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$;
2) угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$;
3) проекцию вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$;
4) площадь грани ABC ;
5) объем пирамиды ABCD.

1. $A(-2;\ 0;\ 4)$, $B(4;\ -3;\ -2)$, $C(7;-2;\ 2)$, $D(-1;\ 2;\ 6)$.

2. $A(0;-1;\ 1)$, $B(6;\ -4;\ -5)$, $C(9;-3;\ -1)$, $D(1;\ 1;\ 3)$.

3. $A(-5;\ 1;\ 3)$, $B(1-2;\ -3)$, $C(4;-1;\ 1)$, $D(-4;\ 3;\ 5)$.

4. $A(-1;\ -3;\ 0)$, $B(5;\ -6;\ -6)$, $C(8;-5;\ -2)$, $D(0;\ -1;\ 2)$.

5. $A(1;\ 2;\ 5)$, $B(7;\ -1;\ -1)$, $C(10;0;\ 3)$, $D(2;\ 4;\ 7)$.

6. $A(-3;\ -2;-1)$, $B(3;\ -5;\ -7)$, $C(6;-4;\ -3)$, $D(-2;\ 0;\ 1)$.

7. $A(2;\ 3;\ 2)$, $B(8;\ 0;\ -4)$, $C(11;1;\ 0)$, $D(3;\ 5;\ 4)$.

8. $A(-4;\ 4;\ -2)$, $B(2;\ 1;\ -8)$, $C(5;\ 2;\ -4)$, $D(-3;\ 6;\ 0)$.

9. $A(3;\ 5;\ -3)$, $B(9;\ 2;\ -9)$, $C(12;\ 3;\ -5)$, $D(4;\ 7;\ -1)$.

10. $A(4;\ -4;\ 1)$, $B(10;\ -7;\ -5)$, $C(13;\ -6;\ -1)$, $D(5;\ -2;\ 3)$.

11. $A(4;\ 0;\ 4)$, $B(0;\ 5;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ 6)$, $D(1;\ 3;\ -1)$.

12. $A(-1;\ -3;\ 4)$, $B(2;\ 3;\ -4)$, $C(-3;\ 1;\ -2)$, $D(4;\ -1;\ 3)$.

13. $A(0;\ 0;\ 0)$, $B(2;\ 3;\ -1)$, $C(-2;\ 4;\ 5)$, $D(3;\ -1;\ 4)$.

14. $A(3;\ 2;\ -4)$, $B(2;\ -5;\ 3)$, $C(-5;\ 6;\ -1)$, $D(5;\ 2;\ 4)$.

15. $A(6;\ 0;\ 1)$, $B(-6;\ 2;\ -3)$, $C(2;\ 2;\ 4)$, $D(3;\ 4;\ -2)$.

16. $A(-4;\ 1;\ -4)$, $B(0;\ -5;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ -2)$, $D(-1;\ 3;\ 1)$.

17. $A(2;\ 3;\ 5)$, $B(3;\ -2;\ 6)$, $C(2;\ 2;\ -5)$, $D(6;\ 3;\ -3)$.

18. $A(5;\ -2;\ -1)$, $B(3;\ 3;\ 4)$, $C(3;\ -1;\ -2)$, $D(0;\ -1;\ 2)$.

19. $A(3;\ -1;\ -2)$, $B(5;\ -2;\ -1)$, $C(0;\ -1;\ 2)$, $D(3;\ 3;\ 4)$.

20. $A(5;\ 2;\ 4)$, $B(-5;\ 6;\ -1)$, $C(3;\ 2;\ -4)$, $D(2;\ -5;\ 3)$.

21. $A(4;\ 0;\ 0)$, $B(-2;\ 1;\ 2)$, $C(1;\ 3;\ 2)$, $D(3;\ 2;\ 7)$.

22. $A(4;\ 2;\ 5)$, $B(0;\ 7;\ 1)$, $C(0;\ 2;\ 7)$, $D(1;\ 5;\ 0)$.

23. $A(4;\ 4;\ 10)$, $B(7;\ 10;\ 2)$, $C(2;\ 8;\ 4)$, $D(9;\ 6;\ 9)$.

24. $A(4;\ 6;\ 5)$, $B(6;\ 9;\ 4)$, $C(2;\ 10;\ 10)$, $D(7;\ 5;\ 9)$.

25. $A(3;\ 5;\ 4)$, $B(8;\ 7;\ 4)$, $C(5;\ 10;\ 4)$, $D(4;\ 7;\ 8)$.

26. $A(10;\ 6;\ 6)$, $B(-2;\ 8;\ 2)$, $C(6;\ 8;\ 9)$, $D(7;\ 10;\ 3)$.

27. $A(1;\ 8;\ 2)$, $B(5;\ 2;\ 6)$, $C(5;\ 7;\ 4)$, $D(4;\ 10;\ 9)$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 28. | $A(6;\ 6;\ 5)$, | $B(4;\ 9;\ 5)$, | $C(4;6;\ 11)$, | $D(6;\ 9;\ 3)$. |
| 29. | $A(7;\ 2;\ 2)$, | $B(5;\ 7;\ 7)$, | $C(5;3;\ 1)$, | $D(2;\ 3;\ 7)$. |
| 30. | $A(8;\ 6;\ 4)$, | $B(10;\ 5;\ 5)$, | $C(5;\ 6;\ 8)$, | $D(8;\ 10;\ 7)$. |

## Библиографический список

1. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1984.

2. Бугров Я. С., Никольский Е. М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М.: Наука, 1988.

3. Головина Л. И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. М.: Наука, 1985.

4. Крутицкая Н. Ч., Шишкин А. А. Линейная алгебра в вопросах и задачах. М.: Высш. шк., 1985.

Редактор Г. М. Кляут
ИД 06039 от 12.10. 01
Сводный темплан 2004 г.
Подписано в печать 19.07.04. Бумага офсетная. Формат 60х84 1/16.
Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ. л. 3,0. Уч.-изд. л. 3,0.
Тираж 100 экз. Заказ .

Издательство ОмГТУ. 644050, г. Омск, пр-т Мира, 11
Типография ОмГТУ