Министерство образования Российской Федерации
Омский государственный технический университет

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Методические указания к практическим занятиям
для студентов экономического факультета

Омск – 2004

Составители: Бояркин Геннадий Николаевич,
канд. физ.-мат. наук, профессор

Котюргина Александра Станиславовна,
канд. техн. наук, доцент

Редактор Г. М. Кляут
ИД 06039 от 12.10.01.
Подписано в печать 11.03.04. Бумага офсетная. Формат 60х84 1/16.
Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ. л. 2,25 . Уч. – изд. л. 2,25 .
Тираж 100 экз. Заказ .

Издательство ОмГТУ. 644050, г. Омск, пр-т Мира, 11
Типография ОмГТУ

1. Общая задача линейного программирования

Задача вида

$$z = (c,\ x) \to \max \tag{1}$$

$$Ax \le b \tag{2}$$

$$x \ge 0 \tag{3}$$

называется задачей линейного программирования (ЗЛП) на максимум, где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ – вектор неизвестных, $c = (c_1, \ldots, c_n)$ - вектор коэффициентов целевой функции, $A = (a_{ij})$ – прямоугольная матрица размером $m \times n$, $b = (b_1, \ldots, b_m)$ – вектор правых частей системы, $x \ge 0$ – условия неотрицательности. Таким образом, задача ЛП состоит в нахождении **оптимального (максимального)** решения (1) **на допустимой области (области допустимых решений)** (2) и (3).

2. Преобразование исходной модели

Модель ЗЛП может быть задана в одной из следующих форм (табл.1).

Таблица 1

Каноническая	Стандартная	Общая
1. Ограничения		
Уравнения $\sum_j^n a_{ij}\ x_i = b_i$	Неравенства $\sum_j^n a_j\ x_j \le b_i$	Уравнения и неравенства $\sum_j^n a_{ij}\ x_j \begin{Bmatrix} \le \\ \ge \\ = \end{Bmatrix} b_i$
2. Условия неотрицательности		
Все переменные $x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1, n}\right)$	Все переменные $x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1, n}\right)$	Часть переменных $x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1, s}, \quad s \le n\right)$
3. Цель задачи		
max z	max z или min z	max z или min z

Рассмотрим на примерах сведение ЗЛП от одной формы к другой.

Пример 1. Привести к канонической форме следующую ЗЛП:

$$z = -2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 \ge 2, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 \le 4, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Решение. В этой задаче нарушены все три признака канонической задачи (табл. 1).

1. Начнем с преобразования смешанной системы ограничений в систему уравнений. Это преобразование выполняется путем введения неотрицательных «слабых» переменных $(x_5,\ x_6,\ x_7)$ в левые части неравенств со знаком плюс или минус в зависимости от знака неравенства. Таким образом, получим

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 2, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + x_6 = 6, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_7 = 4, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_5 \ge 0, \quad x_6 \ge 0, \quad x_7 \ge 0. \end{cases}$$

3. Перейдем к преобразованию условий неотрицательности.

Первый прием. Этим условиям не удовлетворяют переменные x_3 и x_4. Для приведения задачи к однородным условиям введем две новые переменные

$$x_3 = x_3' - x_3'' \text{ и } x_4 = x_4' - x_4'',$$

где $x_3' \ge 0$, $x_3'' \ge 0$, $x_4' \ge 0$, $x_4'' \ge 0$. В результате получим задачу, содержащую не 7, а 9 переменных.

Второй прием. Из второго уравнения выразим $x_3 = 6 - 5x_1 - 3x_2 - x_6$, подставим это выражение во все уравнения и целевую функцию. Затем из первого уравнения найдем $x_4 = -14 - 13x_1 + 10x_2 + 3x_6$ и также подставим во все оставшиеся уравнения.

Итак, оставшиеся уравнения и целевая функция не зависят от переменных x_3 и x_4:

$$z = -43x_1 - 30x_2 - 9x_6 + 46 \to \min,$$

$$\begin{cases} 12x_1 + 13x_2 + 3x_5 = 16, \\ 13x_1 - 10x_2 - 3x_6 + x_7 = 28, \\ -13x_1 - 10x_2 - 3x_6 + x_7 = -6, \\ x_1 \ge 0, \quad i = 1,\ 2,\ 5,\ 6,\ 7. \end{cases}$$

Чтобы перейти к задаче на максимум, необходимо ввести новую функцию $z_1 = -z$. Таким образом, получили задачу проще исходной, так как она содержит три уравнения и пять переменных.

Пример 2. Привести следующую каноническую форму ЗЛП к задаче в стандартной форме:

$$z = 2x_1 - x_2 + 3x_4 + 2x_5 + 4 \to \max,$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_5 = 6 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 4 \end{array}\right\}$$

$$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,\ 5}.$$

Решение. В данном случае матрица системы ограничений-равенств имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ее ранг $r = 3$, причем минор, образованный первыми тремя столбцами, может быть выбран в качестве базисного. Число свободных переменных $n - m = 2$.

Применяя метод Гаусса, получим

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 8 & -4 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 5 & -3 & 6 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 8 & -4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & -18 & 13 & -17 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 8 & -4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -13/18 & 17/18 & -2/18 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 5/9 & -10/9 & 16/9 \\ 0 & 1 & 0 & 16/9 & -5/9 & 26/9 \\ 0 & 0 & 1 & -13/18 & 17/18 & -2/18 \end{array}\right)$$

или в виде системы уравнений

$$x_1 + 5x_4/9 - 10x_5/9 = 16/9,$$

$$x_2 + 16\,x_4/9 - 5\,x_5/9 = 26/9,$$

$$x_3 - 13\,x_4/18 - 17\,x_5/18 = -1/9.$$

Выразив x_1, x_2 и x_3 через x_4 и x_5, найдем

$$z = 11/3 + 11/3x_5 + 14/3 \to \max.$$

Отбросив $x_i \geq 0$, $i = \overline{1,\ 3}$, получим систему неравенств

$$\left.\begin{aligned} 5x_4 - 10x_5 &\leq 16 \\ 16x_4 \quad + 5x_5 &\leq 26 \\ -13x_4 + 17x_5 &\leq -2 \end{aligned}\right\}$$

$$x_4,\quad x_5 \geq 0.$$

В данной модели фигурируют только две переменные x_4 и x_5, которые после приведения исходной системы к единичному базису оказались свободными. Следовательно, решив задачу в последней формулировке и найдя оптимальные значения x_4^* и x_5^*, однозначно определим значения остальных переменных $(x_1^*,\ x_2^*,\ x_3^*)$, т.е. найдем оптимальное решение $x_{опт} = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*)$.
В этом смысле говорят, что последняя модель эквивалентна исходной.

Задачи

1. Привести к канонической форме следующие ЗЛП:

а) $z = x_1 - x_2 + 3x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 5, \\ x_1 \qquad + 2x_3 = 8, \\ -x_1 - 2x_2 \qquad \geq 1, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

б) $z = 2x_1 + x_2 - x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 4, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 9, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\quad x_3 \geq 0.$$

в) $z = x_1 + 2x_2 - 2x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \le 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_3 \ge 0. \end{cases}$$

г) $x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ -x_1 - x_4 \le 5, \\ x_2 + x_3 \ge 10, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$

2. Привести к стандартной модели следующие ЗЛП:

а) $z = x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 6, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0.$

б) $z = x_1 - x_2 + 3x_4 + x_5 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 = 15, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_5 = 8, \end{cases}$$

$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,\ 5}.$

в) $z = x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = -2, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 - x_5 = 6, \end{cases}$$

$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1, 5}.$

г) $z = 3x_1 + x_2 + x_4 - x_5 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 - x_5 = 9 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_5 = 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_5 = 6, \end{cases}$$

д) $z = x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 \le 1, \\ -x_1 + x_2 + x_4 \le 1, \\ x_2 + x_3 = 1, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

е) $z = x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \le 1, \\ x_2 + x_3 \ge 0, \end{cases}$$

$x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$

ж) $z = -3x_1 + 2x_2 + 3x_4 - x_5 \to \min,$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_6 = 3, \\ 4x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 19, \\ 4x_1 - x_2 - x_4 + x_5 = 13, \end{cases}$$

$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,\ 6}.$

3. Графическое решение. Пусть ЗЛП имеет две неизвестные

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max,$$

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \le b_1$$

$$\vdots$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 \le b_2$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Рассмотрим сначала графический метод решения ЗЛП на примерах, а затем сформулируем общие его положения.

Пример 3. Решить графически ЗЛП

$$z = 4x_1 + 2x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 18, \\ -x_1 + 3x_2 \le 9, \\ 2x_1 - x_2 \le 10, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Решение. Прежде всего построим область, задаваемую системой неравенств. На плоскости $x_1 o x_2$ проведем прямую $2x_1 + 3x_2 = 18$. Затем в неравенство поставим, например, точку (0, 0). Очевидно, что $0 < 18$, поэтому неравенству будет удовлетворять та полуплоскость, в которую эта точка входит. Аналогично поступая с оставшимися неравенствами, получим пятиугольник (рис. 1).

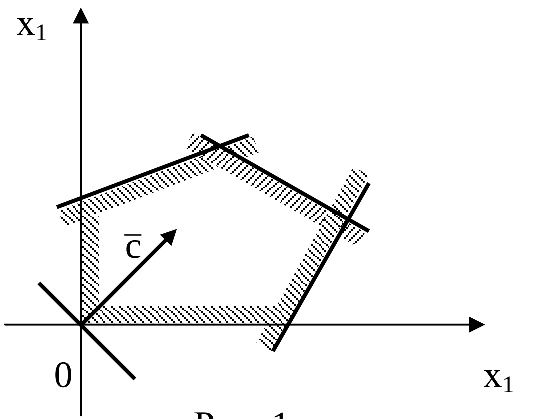


Рис. 1

Далее в этой же системе координат построим вектор $\bar{c} \equiv (4, 2)$, который задает направление наибольшего возрастания функции, т. к он является нормальным к линиям уровня

$$4x_1 + 2x_2 = z.$$

Прямая, проходящая через начало координат перпендикулярно вектору $\bar{c}$, представляет собой линию уровня, соответствующую значению $z = 0$. Перемещая эту прямую параллельно самой себе в направлении вектора $\bar{c}$ до тех пор, пока она будет сохранять общие точки с областью допустимых решений, найдем, что в крайнем возможном положении линия уровня пройдет через точку $\bar{x}_{опт}$. Этому положению линии уровня соответствует $z = z_{max}$. Для нахождения координат точки $\bar{x}_{опт}$ необходимо совместно решить систему уравнений граничных прямых:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 18 \\ 2x_1 - x_2 &= 10 \end{aligned}\right\}.$$

В результате получим $\bar{x}_{опт} = (6, 2)$, $z_{max} = 28$.

Пример 4. Решить графически ЗЛП

$$z = x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 - x_5 + 88 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ -x_1 + 5x_2 + x_4 = 37, \\ 5x_1 + x_2 + x_5 = 49, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_6 = 11, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_7 = 19, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,7}.$$

Решение. В этой задаче необходимо от канонической формы перейти к общей. Отбрасывая базисные переменные x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 и подставляя их выражения в целевую функцию, получим

$$z = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ -x_1 + 5x_2 \leq 37, \\ 5x_1 + x_2 \leq 49, \\ 3x_1 - 4x_2 \leq 11, \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 19, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

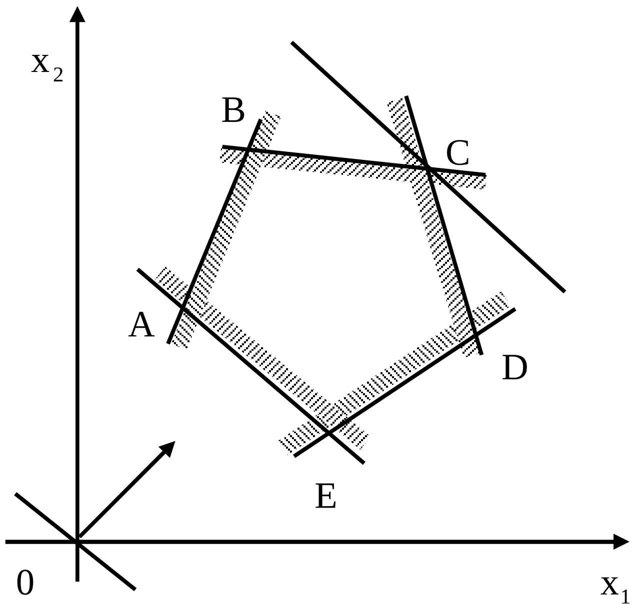


Рис. 2

Видно, (рис. 2), что в точке $\overline{x}_{опт}\,(8,\ 9,\ 9,\ 0,\ 23,\ 41)\ z_{max} = 60$. При решении этой же задачи на минимум получаем бесчисленное множество решений, т. к. целевая функция совпадает с гранью AE.

Пример 5. Решить графически ЗЛП $z = x_1 + x_2 \rightarrow \max,$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 - 2x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решение. Построим область допустимых решений (рис. 3).

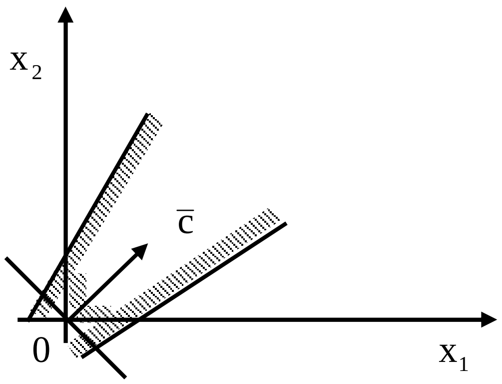


Рис. 3

Она не ограничена, поэтому задача не имеет решения.

Пример 6. Решить графически ЗЛП $z = x_1 + x_2 \to \max$,

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 - 2x_2 \le 1, \\ x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение. Построим область допустимых решений (рис. 4.

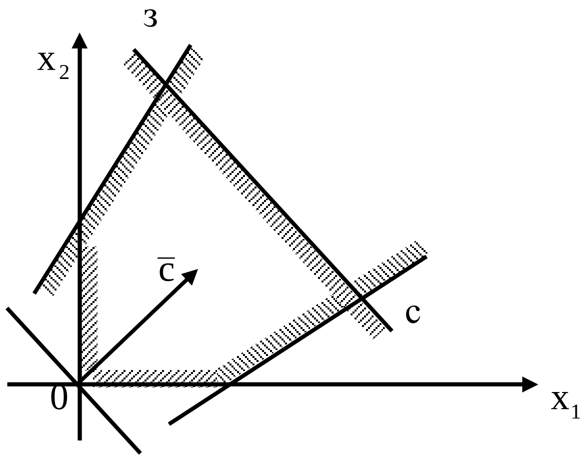


Рис. 4

Целевая функция совпадает с прямой ВС, поэтому имеет бесчисленное множество решений.

Пример 7. Решить графически ЗЛП $z = x_1 + 2x_2 \to \max$,

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 1, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение. Построим область допустимых решений (рис. 5).

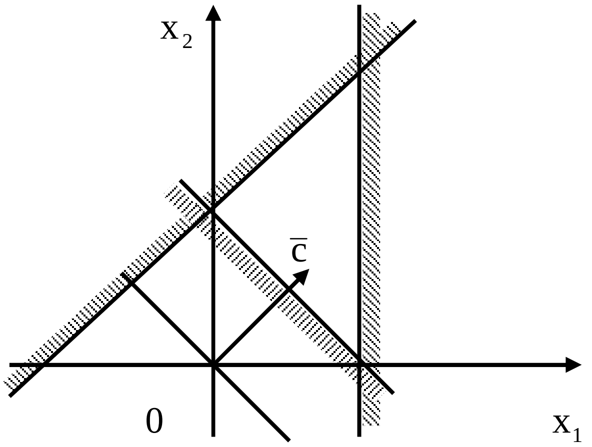


Рис. 5

Она пуста, поэтому ЗЛП решений не имеет.

Пример 8. Решить графически ЗЛП $z = 2x_1 + 4x_2 \to \max$,

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 11, \\ -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 3x_2 \le 0, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \le 0. \end{cases}$$

Решение. Построить область допустимых решений (рис. 6).

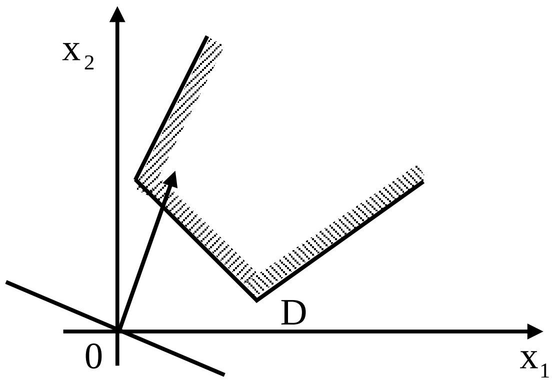


Рис. 6

Она не ограничена. При параллельном переносе линии уровня устанавливаем, что такое перемещение можно производить неограниченно, т. е. $z_{\max} = \infty$. Если же эту задачу решать на минимум, то получим $z_{\min} = 10$, который достигается в точке $D(3,\ 1)$.

Итак, сформулируем общие положения к графическому решению ЗЛП.

1. Графически могут решаться:

а) задачи, заданные в стандартной форме, содержащие не более двух переменных;

б) задачи, заданные в канонической форме с числом свободных переменных $n - r \le 2$;

в) задачи общего вида, которые после приведения к канонической форме будут содержать не более двух свободных переменных.

2. Основной формой для графического решения является 1-й тип задач. Поэтому, если встречаются 2-й или 3-й тип задач, то предварительно их модель должна быть приведена к 1-му типу.

3. Решение задачи первого типа осуществляется в два этапа:
- построение области допустимых решений;
- нахождение в этой области оптимального решения.

4. При построении области допустимых решений могут встретиться:
а) пустая область;
б) многоугольник;
в) неограниченная многоугольная область.

В пустой области задача не имеет решения из-за несовместности системы ограничений в области допустимых решений. Для многоугольника задача всегда имеет решение. В случае в) в зависимости от направления вектора $\bar{c}$ (от коэффициентов функции z) задача может иметь или не иметь решения. Последнее связано с неограниченностью функции z в области допустимых решений.

5. Задача может иметь единственное оптимальное решение, совпадающее с одной из вершин области, и бесчисленное множество решений (ребро многоугольника допустимой области).

Задачи

3. Решить ЗЛП графическим методом. Все $x_i \geq 0$.

а) $z = x_1 - 2x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 0, \\ 2x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 - x_2 \leq 1. \end{cases}$$

б) $z = -x_1 - 3x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 - x_2 \leq 0, \\ x_1 - x_2 \leq 1. \end{cases}$$

в) $z = -x_1 - x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 \leq 3, \\ x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 1. \end{cases}$$

г) $z = -x_1 - 4x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 \leq 0, \\ x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 3. \end{cases}$$

д) $z = 4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 3. \end{cases}$$

е) $z = x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 6, \\ 10x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 25. \end{cases}$$

ж) $z = -3x_1 + 2x_2 - 3x_4 - x_5 \rightarrow \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 4x_1 - x_2 - x_4 + x_5 = 21, \\ 4x_1 - x_2 - x_4 + x_5 = 13. \\ x_1 + x_2 - x_6 = 3. \end{cases}$$

4. Симплекс-метод

Из геометрических соображений понятно, что ЗЛП имеют решение в вершине многогранного множества (или не имеют совсем). Поэтому нужен алгоритм перебора всех вершин, чтобы нужную найти за наименьшее число шагов.

Во-первых, нужно привести задачу на минимум к такому виду, чтобы можно было внести в симплексную таблицу.

Вначале рассмотрим задачу в канонической форме:

$$z = \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j \, x_j \rightarrow \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} = \bar{b}_i, \quad i = 1, \overline{m},$$

$$x_j \geq 0, \ j = \overline{1, n}.$$

Как известно из линейной алгебры, если $m = n$, то система ограничений имеет единственное решение, которое при неотрицательности $x_j, \ j = \overline{1, n}$ будет допустимым и оптимальным.

Если $m < n$, то система ограничений-равенств может быть приведена к виду

$$\begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots \quad \ldots \quad \ldots + a_{1\,n-m} x_{n-m} + x_{n-m+1} = b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots \quad \ldots \quad \ldots + a_{2\,n-m} x_{n-m} + x_{n-m+1} + x_{n-m+2} = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots \quad \ldots \quad \ldots + a_{m\,n-m} x_{n-m} + x_n = b_m, \end{array}$$

где коэффициенты a_{ij}, b_i однозначно определяются исходными данными.

Если переменные $x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_{n-m}$ приравнять нулю, то

$$x_{n-m+1} = b_1; \qquad x_{n-m+2} = b_2; \qquad x_n = b_n.$$

Это решение $(0,\dots,0,b_1,\dots,b_m)$ называется **базисным.** Переменные $x_{n-m+1},\dots,x_n$ называются **базисными переменными (базисом).** Остальные переменные называются **небазисными** или **свободными.**

Если среди переменных базисного решения есть отрицательные переменные, то такое решение называется **недопустимым.**

Допустимым базисным решением или опорным планом называется такое базисное решение, которое одновременно и допустимо.

Переобозначим базисные переменные через $y_1, \dots, y_m$, тогда система ограничений-равенств будет иметь вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots \quad \dots + a_{1\,n-m}x_{n-m} + y_1 \qquad = b_1, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots \dots + a_{m\,m-n}x_{n-m} + \dots + y_m = b_m, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}(-x_1) + a_{12}(-x_2) + \dots \quad \dots \quad \dots + a_{1\,n-m}(-x_{n-m}) + b_1, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_m = a_{m1}(-x_1) + a_2(-x_2) + \dots \quad \dots + a_{m\,n-m}(-x_{n-m}) + b_m. \end{cases}$$

Целевая функция $z = -c_1(-x_1) - c_2(-x_2) - \dots - c_{n-m}(-x_{n-m})$.

Если же ЗЛП задана в стандартной форме на максимум

$$z = (c,\ x) \to \max$$

$$A\,x \le b,$$

$$x \ge 0,$$

то, переходя к канонической форме, получим

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots \quad \dots + a_{1\,n}x_n + y_1 \qquad = b_1, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots \dots + a_{m\,n}x_n + \dots + y_m = b_1, \end{cases}$$

где $y_1, \dots, y_m$ принимают положительные значения.

Выразим базисные переменные:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}(-x_1) + \dots \quad \dots + a_{1n}(-x_n) + b_1, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_m = a_{m1}(-x_1) + \dots \quad \dots + a_{mn}(-x_n) + b_m, \end{cases}$$

и целевая функция имеет вид $z = -c_1(-x_1) - c_2(-x_2) - \dots - c_n(-x_n)$.

Таким образом, задачи в канонической и стандартной формах могут быть приведены к одинаковому виду.

Внесем полученные данные в симплексную таблицу (табл. 2).

Таблица 2

Базисные переменные	Свободные переменные						
	$-x_1$	$-x_2$	…	$-x_s$	…	$-x_n$	
$y_1 =$	a_{11}	a_{12}	…	a_{1s}	…	a_{1n}	b_1
$y_2 =$	a_{21}	a_{22}	…	a_{2s}	…	a_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…	…	…
$y_r =$	a_{r1}	a_{r2}	…	a_{rs}	…	a_{rn}	b_r
…	…	…	…	…	…	…	…
$y_m =$	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mr}	…	a_{mn}	b_m
	$-c_1$	$-c_2$	…	$-c_3$	…	$-c_n$	0

В таблице 2 все b_i, $i = \overline{1, m}$, неотрицательны, иначе допустимого базисного решения нет. Если в последней строке нет ни одного отрицательного элемента, то задача решена. Пересчет таблицы будем производить следующим образом.

1. В первой строке находим наибольшее по модулю отрицательное число

$$-c_s = \max_{-c_j<0} \left|-c_j\right|.$$

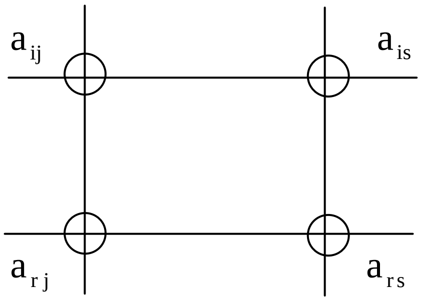
Соответствующий столбец опорный (ведущий).

2. Из строк с положительными элементами на пересечении берем строку с наименьшим отношением свободного члена к соответствующему элементу опорного столбца

$$\frac{b_r}{a_{rs}} = \min_{a_{is}} \frac{b_i}{a_{is}}.$$

Строка r – опорная (ведущая). Элемент a_{rs} – разрешающий (ведущий).

3. Меняем местами неизвестные, отвечающие опорным строкам и столбцу.
4. Разрешающий элемент заменяем обратным числом.
5. Остальные элементы опорной строки делим на разрешающий элемент. Остальные элементы опорного столбца делим на разрешающий элемент с противоположным знаком.
6. Остальные элементы следующей таблицы находим по правилу прямоугольника



$$a'_{ij} = \frac{a_{ij} \cdot a_{rs} - a_{rj} \cdot a_{is}}{a_{rs}}$$

$(i\ j)$ – место искомого элемента,
$(i\ s)$ – место разрешающего элемента

План решения ЗЛП симплекс-методом.

1. Вводим вспомогательные неизвестные и составляем первую симплексную таблицу.
2. Переход от первой таблицы ко второй осуществляется по пп. 1 – 6.
3. Решение заканчивается тогда, когда элементы последней строки (за исключением последнего элемента, характеризующего значение целевой функции) положительны. Последний столбец последней таблицы дает оптимальный план и оптимальное значение целевой функции.

Замечание. При переходе к следующей таблице полезно после отыскания разрешающего элемента прежде всего вычислить нижнюю строку: если ее элементы больше нуля, то достаточно перечислить последний столбец.

Пример 9. Решить задачу линейного программирования $z = x_1 + x_2 \to \max$:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 - 2x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение. Запишем данные в симплексную таблицу:

	$-x_1$	$-x_2$	
y_1	-1	$\boxed{1}$	1
y_2	1	-2	1
	-1	-1	
		↑	

←

	$-x_1$	$-y_1$	
x_2	-1	1	1
y_2	-1	2	3
	-12	-1	1

Вторую таблицу невозможно пересчитать: в разрешающем столбце нет ни одного положительного элемента. Такой случай возможен, когда область допустимых решений не ограничена (см. пример 5).

Пример 10. Решить ЗЛП $x_1 + x_2 \to \max$:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 - 2x_2 \le 1, \\ x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение.

$$
\begin{array}{r|cc|c}
 & -x_1 & -x_2 & \\
\hline
\to y_1 & -1 & \boxed{1} & 1 \\
y_2 & 1 & -2 & 1 \\
y_3 & 1 & 1 & 2 \\
\hline
 & -1 & -1 & \\
 & & \uparrow &
\end{array}
\;\to\;
\begin{array}{r|cc|c}
 & -x_1 & -y_1 & \\
\hline
x_2 & -1 & 1 & 1 \\
y_2 & -1 & 2 & 3 \\
y_3 & \boxed{2} & -1 & 1 \\
\hline
 & -2 & -1 & \\
 & \uparrow & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|cc|c}
 & -y_3 & -y_1 & \\
\hline
x_2 & -1/2 & 1/2 & 1/3 \\
y_2 & 1/2 & 3/2 & 7/2 \\
x_1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\
\hline
 & 1 & 0 & 2
\end{array}.
$$

Здесь в строке с коэффициентами целевой функции появился ноль. Это говорит о том, что задача имеет бесчисленное множество решений (целевая функция параллельна грани) $z_{max} = 2$ (см. пример 6).

Пример 11. Решить ЗЛП $z = x_1 + x_2 \to \max$:

$$
\begin{cases}
-x_1 + x_2 \ge 1, \\
x_1 + x_2 \le 1, \\
x_1 \ge 1, \\
x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.
\end{cases}
$$

Решение. Эта задача задана в общей форме. Приведем систему ограничений сначала к канонической форме, а затем к стандартной.

Введем слабые переменные $x_3,\ x_4,\ x_5$:

$$
\begin{aligned}
-x_1 + x_2 - x_3 \qquad &= 1 \\
x_1 + x_2 \qquad + x_4 \quad &= 1 \\
x_1 \qquad\qquad - x_5 &= 1.
\end{aligned}
$$

Затем выделим базис:

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
-1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1
\end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -3
\end{array}\right).
$$

Здесь базисные переменные: $x_1,\ x_2,\ x_4$. Но этот базис не является допустимым, так как в столбце свободных членов появилось отрицательное число. Всего базисов c_5^3. Перебирая их, получим, что при любом из них в столбце свободных членов появляются отрицательные числа. А это невозможно по условию ЗЛП. Такой результат говорит о пустой допустимой области (см. пример 7).

На основании рассмотренных примеров можно сформулировать такие правила.

1. Если в последней строке есть отрицательные элементы, а в соответствующих столбцах нет положительных членов, то ЗЛП не имеет решений ввиду неограниченности допустимой области.

2. Если в последней строке появились нули, то целевая функция совпадает с одной из граней допустимой области.

3. Если задачу невозможно привести к стандартному виду (в столбце свободных членов есть отрицательные числа), то область допустимых решений пуста.

Пример 12. Рассмотрим ЗЛП $z = x_1 + 2x_2 \to \max$:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 150, \\ x_1 + 3x_2 &\le 300, \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

Решение. Запишем данные в симплексную таблицу:

$$\begin{array}{r|cc|c} & -x_1 & -x_2 & \\ \hline y_1 & 1 & 1 & 150 \\ \to y_2 & 1 & \boxed{3} & 300 \\ \hline & -1 & -2 & 0 \\ & & \uparrow & \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{r|cc|c} & -x_2 & -y_2 & \\ \hline y_1 & \boxed{2/3} & -1/3 & 50 \\ x_2 & 1/3 & 1/3 & 100 \\ \hline z & -1/3 & 2/3 & 200 \\ & \uparrow & & \end{array} \quad \begin{array}{r|cc|c} & -y & y_2 & \\ \hline x_1 & & -1/2 & 75 \\ x_2 & & & 75 \\ \hline z & 1/2 & 1/2 & 225 \end{array}$$

$x_1 = 75,\ \ x_2 = 75,\ \ z_{max} = 225.$

Пример 13. $z = -2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 \to \min$:

$$\begin{cases} -2x_2 + x_4 + x_5 = -3, \\ x_3 - 2x_4 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - x_4 \le 5, \\ x_1 + x_2 \ge -3 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j \ge \overline{1,5}.$$

Решение. Вначале сведем данную задачу к стандартной задаче на максимум. Два первых ограничения-равенства приведем к ограничениям-неравенствам:

$$\begin{cases} 2x_2 - x_4 - x_5 = 3, \\ x_3 - 2x_4 = 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 - x_{4/2} - x_{5/2} = 3/2, \\ x_3 - 2x_4 = 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 3/2 + x_4/2 + x_5/2, \\ x_3 = 2 + 2x_{4,} \end{cases} \qquad \begin{cases} -x_4/2 - x_5/2 \le 3/2 \\ -2x_4 \le 2. \end{cases}$$

Четвертое неравенство умножим на (-1), чтобы изменить его знак:

$$-x_1 - x_2 \le 3.$$

Теперь в целевую функцию подставим x_3 и x_2, выраженные через x_4 и x_5. Домножив целевую функцию на (-1), получим задачу на максимум:

$$z_1 = 2x_1 + 3/2x_4 - 3/2x_5 + 1/2 \to \max,$$

$$\begin{cases} -x_4/2 - x_5/2 \le 3/2, \\ -2x_4 \le 2 \\ x_1 + 1/2x_4 + 3/2x_5 \le 1/2, \\ -x_1 - x_4/2 - x_5/2 \le 9/2, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ \ x_4 \ge 0,\ \ x_5 \ge 0.$$

Теперь данные задачи внесем в симплексную таблицу:

		$-x_1$	$-x_4$	$-x_5$	
	y_1	0	$-1/2$	$-1/2$	$3/2$
	y_2	0	-2	0	2
$\to$	y_3	$\boxed{1}$	$1/2$	$3/2$	$1/2$
	y_4	-1	$-1/2$	$-1/2$	$9/2$
	z_1	-2	$-3/2$	$3/2$	$1/2$
		$\uparrow$			

		$-y_3$	$-x_4$	$-x_5$	
	y_1	0	$-1/2$	$-1/2$	$3/2$
	y_2	0	-2	0	2
$\to$	x_1	1	$\boxed{1/2}$	$3/2$	$1/2$
	y_4	1	0	1	5
	z_1	2	$-1/2$	$9/2$	$3/2$
			$\uparrow$		

		$-y_3$	$-x_1$	$-x_5$	6
	y_1				2
	y_2				2
$\Rightarrow$	x_4				1
	y_4				5
	z	3	1	6	22

$x_4 = 1, \quad x_1 = x_5 = 0,$

$z_{max} = 2,$ тогда $x_2 = 2,\ x_3 = 4,$

$z_{min} = -2.$

4.1. **Двойственный симплекс-метод**

Метод работает с теми же симплексными таблицами, что и прямой метод. Но исследование начинается с двойственного допустимого решения.

Начинаем с симплексной таблицы:

	$-x_1$	$\dots$	$-x_n$	
y_1	a_{11}	$\dots$	a_{1n}	b_1
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
y_m	a_{m1}	$\dots$	a_{mn}	b_m
z	$-c_1$	$\dots$	$-c_n$	c_0

,

где $-c_1 \ge 0, \quad -c_n \ge 0.$

Если все $b_i \ge 0, \quad i = \overline{1, m}$, то задача решена. Решение $x^*(y_1,\ \cdots,\ y_m,\ 0 \dots 0)$ оптимальные.

Если среди b_i, $i = \overline{i, m}$, есть отрицательные числа, то поступаем так.

1. В последнем столбце находим наибольшее по модулю отрицательное число $b_r = \max\limits_{b_i<0}(b_i)$. Соответствующая строка - опорная (ведущая).

2. Если в этой строке нет отрицательных элементов, то целевая функция не ограничена и задача не имеет решений.

3. Среди отрицательных элементов ведущей строки находим элемент с наименьшим отношением элементов целевой функции к модулю соответствующего элемента:

$$\frac{-c_s}{a_{rs}} = \min_{a_{rj}<0} \frac{-c_s}{|a_{rj}|},$$

соответствующий столбец - опорный. Выбранный элемент – разрешающий. Далее проводим стандартное преобразование симплексной таблицы: шаги 3 – 6 прямого метода.

Пример 14. $z = -2x_1 - x_2 \to \max$:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 \ge 6, \\ x_2 + 3x_3 \ge 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 \ge 1. \end{cases}$$

Или

$L = +2(-x_1) + (-x_2) \to \max$:

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + x_3 \le -6, \\ -x_2 - 3x_3 \le -4, \\ -x_1 + x_2 - x_3 \le -1. \end{cases}$$

Введем базисные переменные

$$y_1 = -6 - (-x_1) - 3(-x_2) + (-x_3) \ge 0,$$
$$y_2 = -4 - (-x_2) - 3(-x_3) \ge 0,$$
$$y_3 = -1 - (-x_1) + (-x_2) + (-x_3) \ge 0.$$

Тогда симплексная таблица имеет вид

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$		
y_1	-1	$\boxed{-3}$	1	-6	$\leftarrow$
y_2	0	-1	-3	-4	
y_3	-1	1	-1	-1	
	2	1	0	0	
		$\uparrow$			

Выбираем опорную строку – это строка переменной $y_1\left(\max\left(|-6|,\ |-4|,\ |-1|\right)=6\right)$.

Затем выбираем опорный столбец: $\min\left(\dfrac{2}{|-1|};\ \dfrac{1}{|-3|}\right)=+\dfrac{1}{3}$, т. е. столбец переменной x_2. Пересчитываем таблицу:

	$-x_1$	$-y_1$	$-x_3$		
x_2	$1/3$	$-1/3$	$-1/3$	2	
y_2	$1/3$	$-1/3$	$-10/3$	-2	
y_3	$-4/3$	$1/3$	$\boxed{-2/3}$	-3	$\leftarrow$
	$5/3$	$1/3$	$1/3$	-2	
			$\uparrow$		

Так как среди элементов столбца b есть отрицательные, то повторяем процедуру:

	$-x_1$	$-y_1$	$-y_3$	
x_2				$7/2$
y_2				13
x_3				$9/2$
	1	$1/2$	$1/2$	$-7/2$

Из таблицы видно, что решение $x^*(0,\ 7/2,\ 9/2)$ $L=-7/2$ является оптимальным (в последней строке – положительные числа, в последнем столбце – положительные числа).

Задачи

4. Решить симплекс-методом и двойственным симплекс-методом ЗЛП. Во всех примерах $x_i \ge 0$.

а) $z=3x_1+x_2 \to \max$,

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3 = 2, \\ x_1+x_2+x_4 = 2, \end{cases}$$

б) $z=2x_1-x_2+3x_3-2x_4+x_5 \to \max$,

$$\begin{cases} -x_1+x_2+x_3 = 1, \\ x_1-x_2+x_4 = 1, \\ x_1+x_2+x_5 = 2, \end{cases}$$

в) $z=-3x_1+2x_2-2x_3+2x_4-x_5 \to \min$,

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3 = 1, \\ x_2+x_3+x_4 = 1, \\ x_2+x_3+x_5 = 2, \end{cases}$$

г) $z=-6x_1-8x_2 \to \min$,

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2+x_3 = 20, \\ 12x_1+6x_2+x_4 = 2, \end{cases}$$

д) $z = -x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ -x_1 + x_2 \ge -1, \\ 2x_1 - x_2 \ge 0, \end{cases}$$

е) $z = x_2 - 3x_3 + 2x_5 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7, \\ -2x_1 + 4x_3 + x_4 = 2, \\ -4x_1 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 10, \end{cases}$$

ж) $z = 4x_1 - x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \end{cases}$$

з) $z = x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \to \min,$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4, \\ -x_2 + 4x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_2 + x_3 + x_5 = 1, \end{cases}$$

и) $z = x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 2, \end{cases}$$

к) $z = x_1 - 3x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 1, \end{cases}$$

л) $z = -6x_1 - x_2 - 4x_3 + 5x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 5x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4, \end{cases}$$

м) $z = -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 9, \end{cases}$$

н) $z = x_3 - x_4 - x_5 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + 2x_4 - x_5 = 1, \\ x_2 - 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 1, \end{cases}$$

0) $z = x_1 + x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + 4x_2 = 4, \end{cases}$$

п) $z = 2x_2 + x_3 - 4x_5 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_5 = 4, \\ -2x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ -x_2 + 3x_3 + 4x_5 + x_6 = 10, \end{cases}$$

р) $z = -x_1 - 4x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 13, \\ -2x_1 + 2x_2 + 4x_4 + x_5 = 5, \\ -x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 5, \end{cases}$$

с) $z = -2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 - x_5 \to \min,$

$$\begin{cases} x_2 + 2x_4 - x_5 = 4, \\ x_1 + x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_2 + 3x_3 + 2x_5 = 4, \end{cases}$$

т) $z = -5x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4 - 5x_5 \to \min,$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_4 + x_5 = 5, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_5 = 9, \end{cases}$$

у) $z = 2x_1 + x_2 + x_3 - 7x_4 - 2x_5 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 7x_4 + x_5 = 6, \end{cases}$$

ф) $z = x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - 3x_5 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 2_5 = 1, \\ -3x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 1, \end{cases}$$

х) $z = 4x_1 + 3x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -2, \\ 5x_1 + 3x_2 \le 15, \\ x_2 \le 2{,}5, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ 2x_1 - x_2 \ge -2, \end{cases}$$

ц) $z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 = 2, \end{cases}$$

ч) $z = 2x_1 + 3x_2 + 5/2x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \ge 12, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 6, \\ x_1 + 2x_2 + 3/2x_3 \ge 8, \end{cases}$$

ш) $z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -1, \end{cases}$$

щ) $z = x_1 + 2x_2 + x_5 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5, \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2, \\ x_3 - x_4 + x_5 = 1, \end{cases}$$

э) $z = x_1 + 2x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 1, \\ x_2 - x_3 \ge 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \ge 1, \end{cases}$$

ю) $z = x_1 + x_2 + 2x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 4, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 3, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 \ge 1, \end{cases}$$

я) $z = x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 \ge 5, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 10, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \ge 2. \end{cases}$$

5. Составление двойственных задач

Общая форма модели имеет следующий вид:

Исходная задача 1	Двойственная задача 1
1. $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\ x_k \le b_i, \qquad i=\overline{1,\ e}$	$y_i \ge 0, \quad i=\overline{1,\ e}$
2. $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\ x_k \le b_i, \qquad i=\overline{1+1,\ m}$	y_i – произвольные, $i=\overline{1+1,\ m}$
3. $x_n \ge 0,\ k=\overline{1,s}, \quad s \le n$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ik}\ y_i \ge c_k, \qquad k=\overline{1,\ s}$
4. x_k – произвольные $k=\overline{s+1,\ \dots\ n}$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ik}\ y_i = c_k, \qquad k=\overline{s+1,\ n}$
5. $z=\sum_{k=1}^{n} c_k\ x_k \ \to\ \max$	$T=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \ \to\ \min$

Общее правило построения двойственной пары

1. Каждому i-му ограничению исходной задачи соответствует переменная y_i двойственной задачи и наоборот, каждому k-му ограничению двойственной задачи соответствует переменная x_k исходной задачи.

2. Матрицы А ограничений 1- 2 и $A^{/}$ ограничений $3^{/}-4^{/}$ взаимно транспонированы.

3. Свободные члены ограничений одной из задач являются коэффициентами при соответствующих переменных в целевой функции другой задачи. При этом максимизация меняется на минимизацию и наоборот.

4. В исходной задаче ограничения-неравенства следует записать со знаком $"\le"$ при максимизации и со знаком $"\ge"$ при минимизации.

5. Каждому i-му ограничению-неравенству исходной задачи соответствует в двойственной задаче условие неотрицательности $(y_i \ge 0)$, а равенству – переменная y_i без ограничения на знак и наоборот.

Замечание. Соотношение двойственности взаимное, т. е. задача, двойственная по отношению к двойственной, совпадает с исходной.

Пример 14. Построить двойственную задачу к следующей, заданной в форме общей модели.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 \le 4, \\ x_1 + 3x_3 - 4x_5 \ge 8, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_3 \ge 0, \quad x_5 \ge 0$$

$$z = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \to \min.$$

Решение. Упорядочим запись исходной задачи. Так как целевая функция минимизируется, неравенства должны быть записаны с помощью знака "$\ge$", для этого второе неравенство умножим на (–1), после чего оно запишется в виде

$$-2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5.$$

Теперь введем переменные y_1, y_2, y_3 и запишем в соответствии с указанным правилом двойственную задачу:

$$\begin{cases} y_1 - 2y_2 + y_3 \le 1, \\ -2y_1 - 3y_2 = -2, \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 \le 1, \\ 3y_1 + y_2 = -1, \\ -2y_1 - y_2 - 4y_3 \le 1, \end{cases}$$

$$y_2 \ge 0, \quad y_3 \ge 0.$$

$$T = 6y_1 - 4y_2 + 8y_3 \to \max,$$

второе и четвертое ограничения выражены в виде равенств, т. к. соответствующие им переменные x_2 и x_4 не подчинены условиям неотрицательности. Условия неотрицательности в двойственной задаче наложены только на переменные y_2 и y_3, т. к. им соответствуют в исходной задаче ограничения в виде неравенств.

Первая теорема двойственности

Теорема 1. Допустимый вектор (x^*) прямой ЗЛП оптимален тогда и только тогда, когда существует допустимый вектор (y_i^*) двойственной ЗЛП, такой, что

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \, y_i^* = \sum_{i=1}^{m} b_i \, y_i^*.$$

В этом случае (y_i^*) – оптимальный вектор. При этом обе задачи имеют оптимальное решение и только тогда, когда они имеют допустимые решения.

Теорема дает возможность проверить оптимальность данной пары векторов.

Пример 15. Даны векторы $x^* = (8, 0)$, $y^* = (0, 3)$. Покажем, что они оптимальны для следующей пары двойственных задач:

$$z = 3x_1 + 2x_2 \to \max_{(x_1, x_2)} \qquad\qquad T = 2y_1 + 8y_2 \to \min_{(y_1, y_2)}$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 + 2x_2 \le 8, \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} -2y_1 + y_2 \ge 3, \\ y_1 + 2y_2 \ge 2, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0. \qquad\qquad y_1, y_2 \ge 0.$$

Решение. Вектор x^* допустим в 1-й задаче, y^*– во 2-й. Значения целевых функций $z = (x^*) = T(y^*) = 24$ совпадают. Следовательно, каждый из векторов оптимален в своей задаче.

Задачи

5. Составить двойственные задачи к следующим исходным:

$$z = x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 \to \max,$$

$$\text{а)} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \le 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \le 3, \\ x_1 \ge 0, \ \ldots, \ x_4 \ge 0. \end{cases}$$

$$z = 2x_1 - x_2 + 5x_4 \to \min,$$

$$\text{б)} \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 3x_3 - 3x_4 = 8, \\ x_i \ge 0, \quad i = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

$$z = 3x_2 - x_4 \to \max,$$

$$\text{в)} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 8, \\ x_2 + x_3 - 3x_4 = 6, \\ x_i \ge 0, \ \ldots, \ i = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

$$z = 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 \to \min$$

$$\text{г)} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 = 10, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 + x_5 \ge 8, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 \le 4 \end{cases}$$

6. На основании графического анализа двойственных задач исследовать разрешимость ЗЛП и при разрешимости найти экстремальные значения целевой функции:

$$z = 6x_1 + 9x_2 + 3x_3 \to \min,$$

$$\text{а)} \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 \ge 1, \\ x_i \ge 0, \ i = \overline{1, 3}. \end{cases}$$

$$z = 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 \to \min,$$

$$\text{б)} \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 1, \\ x_i \ge 0, \quad i = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

$$z = 2x_1 + x_2 + 2x_3 \to \min,$$

$$\text{в)} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$$

$$z = 2x_1 + 4x_2 + 23x_3 + 4x_4 \to \min,$$

$$\text{г)} \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_4 \le -2, \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 \le 2. \end{cases}$$

7. В следующих задачах дать геометрическую интерпретацию исходной и двойственных задач и найти оптимальные решения для разрешаемых задач:

$$z = x_1 + x_2 \to \max,$$
$$\text{а) } \begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 3x_1 - x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$z = 2x_1 + x_2 \to \max,$$
$$\text{б) } \begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$z = 3x_1 + x_2 \to \max,$$
$$\text{в) } \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 \ldots + x_4 = 3, \\ x_1 \ge 0, \ \ldots, \ x_4 \ge 0. \end{cases}$$

$$z = 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \to \max$$
$$\text{г) } \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 32, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = -8, \\ x_i \ge 0, \ i = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

8. Определить, являются ли данные векторы $(\bar{x}$ и $\bar{y})$ оптимальными решениями данной задачи и двойственной к ней:

$$z = x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max,$$
$$\text{а) } \begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 2x_3 = 9, \\ 3x_1 + 10x_2 + 4x_3 = 11, \\ x_i \ge 0, \ \ldots, \ i = \overline{1, 3}. \end{cases}$$
$$\bar{x} = (1, \ 0, \ 2), \quad \bar{y} = (3/14, \ 1/14).$$

$$z = x_1 + 10x_2 + 8x_3 \to \max,$$
$$\text{б) } \begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_i \ge 0, \ x_2 \ge 0, \ x_3 \ge 0. \end{cases}$$
$$\bar{x} = (1, \ 0, \ 1), \quad \bar{y} = (9/2, \ -7/2).$$

Пример 16. Проиллюстрируем **полезность метода двойственности.** Рассмотрим математическую модель задачи о раскрое.

Листы материала 6×13 м необходимо раскроить так, чтобы получить заготовки двух видов: 4×5м, 2×3 м, согласно таблице.

Размер заготовки, м	Способ раскроя			
	1	П	Ш	1У
4×5	3	2	1	0
2×3	1	6	9	13
Количество затраченных листов	x_1	x_2	x_3	x_4

Всего необходимо 800 первых заготовок и 400 вторых. При этом расход материала должен быть минимальным.

Математическая модель ЗЛП имеет вид

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 800, \\ x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 13x_4 \ge 400, \\ x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,\,4}. \end{cases}$$

Непосредственному применению симплекс-метода мешают обратные знаки неравенства и то, что целевую функцию нужно минимизировать. Следовательно, перейдем к двойственной задаче и введем базисные переменные

$$\begin{aligned} 3y_1 + y_2 &\le 1, \\ 2y_1 + 6y_2 &\le 1, \\ y_1 + 9y_2 &\le 1, \\ 13y_2 &\le 1. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3y_1 + y_2 + x_1 &= 1, \\ 2y_2 + 6y_2 + x_2 &= 1, \\ y_1 + 9y_2 + x_3 &= 1, \\ 13y_2 + x_4 &= 1. \end{aligned}$$

$$T = 800y_1 + 400y_2 \to \max.$$

		$-y_1$	$-y_2$	
$\to$	x_1	$\boxed{3}$	1	1
	x_2	2	6	1
	x_3	1	9	1
	x_4	0	13	1
		-800	-400	0
		$\uparrow$		

$\to$

	$-x_1$	$-y_2$	
y_1	$1/3$	$1/3$	$1/3$
x_2	$-2/3$	$16/3$	$1/3$
x_3	$-1/3$	$26/3$	$2/3$
x_4	0	13	1
	$800/3$	$-400/4$	$800/3$
		$\uparrow$	

	$-x_1$	$-x_2$	
y_1			
y_2			
x_3			
x_4			
	250	25	275

В силу первой теоремы двойственности оптимальный план исходной задачи таков: $x_1 = 250$ листов, $x_2 = 25$ листов, $x_3 = x_4 = 0$.

Задача 9. Используя теорему двойственности, решить исходную и двойственную задачи. $(\text{Все } x_i \ge 0.)$

а) $z = x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_5 \ge 5, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 10, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 \ge 2. \end{cases}$$

б) $z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 \ge 6, \\ -x_1 + 2x_3 \le 2, \\ 2x_1 - 3x_3 + 2x_4 \ge 8. \end{cases}$$

в) $z = -2x_2 - 4x_3 + 2x_5 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 + 10x_5 + x_6 = 29, \\ x_1 + 5x_2 - 5x_3 - x_4 + 2x_5 = -5, \\ 2x_1 + x_3 + x_4 - 8x_5 - x_6 = 2. \end{cases}$$

г) $z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 10, \\ x_1 + x_3 + x_4 = 7, \\ -3x_1 - 2x_3 + x_5 = 4. \end{cases}$$

д) $z = -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 6, \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 6. \end{cases}$$

е) $z = 3x_1 + x_2 + x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \end{cases}$$

ж) $z = x_1 - 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 - 4x_2 = 2, \\ x_1 - x_2 \le 5. \end{cases}$$

з) $z = 6x_1 + 9x_2 + 15x_3 \to \min$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \ge 2. \end{cases}$$

6. Транспортная задача линейного программирования

Имеются m пунктов производства (отправления) и n пунктов потребления (назначения) однородного продукта в количествах $a_1, \dots, a_m$ и $b_1, \dots, b_n$. Предполагается, что сумма запасов равна сумме заявок: $a_1 + a_2 + \ldots + a_m = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$. Известна стоимость c_{ij} перевозки единицы товара от i-го поставщика j-му потребителю.

Требуется составить такой план перевозок, при котором все заявки были бы выполнены и при этом общая стоимость всех перевозок была минимальна.

Математическая модель транспортной задачи выглядит следующим образом:

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \to \min:$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = \overline{1,\ m}; \qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1,\ n};$$

$$x_{ij} \ge 0,\ i = \overline{1,\ m};\ \ j = \overline{1,\ n},$$

где x_{ij} – количество груза, направляемого из пункта i в пункт j.

Если $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, то транспортная задача называется закрытой моделью, если нет – то открытой. Мы будем решать только открытые транспортные задачи.

а) Нахождение опорного плана

Рассмотрим транспортную таблицу:

	1	… …	n	a_i
1	c_{11}	… …	c_{1n}	a_1
…	…	… …	…	…
m	c_{m1}	… …	c_{mn}	a_m
b_j	b_1	… …	b_n	

Базисными клетками транспортной таблицы называются клетки с отличными от нуля положительными перевозками, остальные клетки свободные. Базисные клетки образуют опорный план транспортной задачи, если выполняются два условия:

1) сумма перевозки в каждой строке равна запасу a_i в данной строке;

2) сумма перевозок в каждом столбце равна соответствующему столбцу спроса b_j.

Опорный план транспортной задачи содержит не более $(n+m-1)$ отличных от нуля перевозок x_i.

Опорный план называется вырожденным, если число ненулевых перевозок x_{ij} меньше $(n+m-1)$, опорный план не вырожден, если число ненулевых перевозок равно $(n+m-1)$.

Решение транспортной задачи начинается с построения опорного плана.

б) Правило «Минимального элемента»

Рассмотрим на примере это правило. Пусть дана транспортная задача. Требуется найти какой-нибудь опорный план:

	1	2	3	4	5	6	
1	7	3	8	4	5	2	100
2	5	7	3	8	4	6	60
3	3	8	4	2	6	9	40
4	1	6	7	5	3	4	50
	30	70	20	60	40	30	

В матрице затрат найдем наименьший элемент $c_{41}=1$. Поэтому примем $x_{41}=\min\{30, 50\}=30$ и исключим из дальнейшего рассмотрения первый столбец.

После этого шага получим матрицу c_1, отличающуюся от исходной отсутствием элементов первого столбца:

$$c_1 = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 4 & 5 & 2 \\ 7 & 3 & 8 & 4 & 6 \\ 8 & 4 & 2 & 6 & 9 \\ 6 & 7 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Находим в этой матрице наименьший элемент:

$$c_{34} = 2, \quad \text{т. е.} \quad x_{34} = \min(40,\ 60) = 40.$$

Теперь исключаем из рассмотрения третью строку и получаем матрицу c_2

$$c_2 = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 4 & 5 & 2 \\ 7 & 3 & 8 & 4 & 6 \\ 6 & 7 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Здесь минимальный элемент $c_{16} = 2$, поэтому $x_{16} = \min(100,\ 30) = 30$ и исключаем шестой столбец. Новый минимальный элемент $c_{13} = 3$, тогда $x_{12} = \min\{70, 70\}$, т. к. в первой строке осталось нераспределенными 70 единиц.

Следующий минимальный элемент $c_{23} = 3$, откуда $x_{23} = \min\ \{60,\ 20\} = 20$.

В последних двух столбцах минимальный элемент $c_{45} = 3$, отсюда $x_{45} = \min\ \{20,\ 40\} = 20$.

Последний минимальный элемент $c_{25} = 4$, т. е. $x_{25} = \min\{40,\ 20\} = 20$. На последнем шаге $x_{24} = 20$.

Получим опорное решение:

	1	2	3	4	5	6	a_i
1	7	3 70	8	4	5	2 30	100
2	5	7	3 20	8 20	4 20	6	60
3	3	8	4	2 40	6	9	40
4	1 30	6	7	5	3 20	4	50
b_j	30	70	20	60	40	30	

Стоимость $z = 3 \cdot 70 + 2 \cdot 30 + 3 \cdot 20 + 8 \cdot 20 + 4 \cdot 20 + 40 \cdot 2 + 1 \cdot 30 + 20 \cdot 3 = 740.$

в) Метод потенциалов

Циклом в транспортной таблице называются несколько клеток, соединенных замкнутой ломаной линией, которая в каждой клетке совершает поворот на 90^0. Знаком плюс отмечают те вершины цикла, в которых перевозки увеличиваются, а знаком минус те вершины, в которых перевозки уменьшаются.

Ценой цикла называется увеличение стоимости перевозок при перемещении груза по этому циклу.

Идея метода потенциалов состоит в следующем. Для любой свободной клетки транспортной таблицы всегда существует единственный цикл, положительная вершина которого лежит в этой свободной клетке, а все остальные – в базисных. Для нахождения циклов, по которым в результате перевозок общая стоимость задачи становится меньше, вводится система платежей $\alpha_i,\ i=\overline{1,m},\ \ \beta_j\ \ j=\overline{1,n}$, и определяются величины $c_{ij}=\alpha_i+\beta,$ называемые «псевдостоимостями перевозок» единиц груза. Цена цикла пересчета для каждой клетки равна $c_{ij}-\tilde{c}_{ij}$, если платежи $\alpha_i,\ i=\overline{1,m},\ \ \beta_j,\ j=\overline{1,n}$, определять из условий $\alpha_i+\beta_j=c_{ij}$ для всех ба зисных клеток $(i,\ j)$.

Алгоритм решения транспортной задачи методом потенциалов

1) взять любой опорный план перевозок с $(m+n-1)$ базисными клетками;

2) определить для этого плана платежи (α_i,β_i) из условий, чтобы в любой базисной клетке псевдостоимости были равны стоимостям

$$\alpha_i+\beta_j=c_{ij}.$$

Один из платежей можно назначить произвольно, например положить равным нулю;

3) подсчитать псевдостоимости для всех свободных клеток: $\tilde{c}_{ij}=\alpha_i+\beta_j$. Если окажется, что все они не превышают стоимостей, то план оптимален;

4) если есть свободная клетка, где $\tilde{c}_{ij}>c_{ij}$, то улучшаем план, перебрасывая перевозки по циклу свободной клетки;

5) после этого пересчитываем платежи и псевдостоимости опорного плана.

Пример 17. Решить методом потенциалов транспортную задачу

	1	2	3	4	5	a_i
1	10	8	9	6	5	25
2	5	6	4	3	8	32
3	9	7	5	4	3	40
4	14	10	8	8	8	20
b_j	17	21	41	14	24	117

Составим опорный план

	1	2	3	4	5	
1	10 4	8 21	9	6	5	25
2	5	6	4 18	3 14	8	32
3	9	7	5 16	4	3 24	40
4	14 13	10	8 7	8	8	20
	17	21	41	14	24	117

$z = 714.$

Снизу и справа добавим дополнительные строки для платежей α_i и β. Псевдостоимости $\tilde{c}_{ij} = \alpha_i + \beta$ записываем в левом верхнем углу:

$$\alpha_1 + \beta_1 = 10; \quad \alpha_1 + \beta_2 = 8; \quad \alpha_2 + \beta_3 = 4; \quad \alpha_2 + \beta_4 = 3;$$

$$\alpha_3 + \beta_3 = 5; \quad \alpha_3 + \beta_5 = 3; \quad \alpha_4 + \beta_1 = 14; \quad \alpha_4 + \beta_3 = 8.$$

Положив $\alpha_1 = 0$, получим $\alpha_{22} = 0;$ $\alpha_3 = 1;$ $\alpha_4 = 4;$

$$\beta_1 = 10; \quad \beta_2 = 8; \quad \beta_3 = 4; \quad \beta_4 = 4; \quad \beta_5 = 2.$$

Транспортная матрица будет иметь вид

	1	2	3	4	5	a_i	α_i
1	10 10 4	8 8 21	4 9	4 6	2 5	21	0
2	10 5 +	8 6	4 4 – 18	4 3 14	2 8	32	0
3	11 9	9 7	5 5 16	5 4	3 3 24	40	1
4	14 14 – 13	12 10	8 8 + 7	8 8	6 8	20	4
b_i	17	21	41	14	24	117	
β_j	10	8	4	4	2		

В этой таблице в клетке (2, 1) не выполнено условие $\tilde{c}_{ij} \le c_{ij}$, поэтому таблица не является оптимальной. Перебросим по циклу 13 единиц груза и продолжим аналогично построение транспортных матриц

	1	2	3	4	5	a_i	α_i
1	10 10 – 4	8 8 21	9 9	8 6 +	7 5	25	0
2	5 5 + 13	3 6	4 4 5	3 3 – 14	2 8	32	-5
3	6 9	4 7	5 5 16	4 4	3 3 24	40	-4
4	9 14	7 10	8 8 20	7 8	6 6	20	-1
b_j	17	21	41	14	24	117	
β	10	8	9	8	7		

$\alpha_1 + \beta_1 = 10;$ $\alpha_1 + \beta_2 = 8;$ $\alpha_2 + \beta_1 = 5;$ $\alpha_2 + \beta_3 = 4;$

$\alpha_2 + \beta_{41} = 3;$ $\alpha_3 + \beta_3 = 5;$ $\alpha_3 + \beta_5 = 3;$ $\alpha_4 + \beta_3 = 8;$

$\alpha_1 = 0;$ $\beta_1 = 10;$ $\alpha_2 = -5;$ $\beta_3 = 9;$ $\alpha_3 = -4;$ $\beta_5 = 7;$ $\alpha_4 = -1;$ $\beta_2 = 8,$ $\beta_4 = 8.$

Клетка $(1,4)$ не удовлетворяет условию оптимальности.
Перебросим по циклу 4 единицы груза

	1	2	3	4	5	a_i	α
1	8 10	8 8 21	7 9	6 6 4	5 5	25	0
2	5 5 17	5 6	4 4 5	3 3 10	2 8	32	-3
3	6 9	6 7	5 5 16	4 4	3 3 24	40	-2
4	9 14	9 10	8 8 20	7 8	6 8	20	1
b_j	17	21	41	14	24	117	
β	8	8	7	6	5		

$\alpha_1+\beta_2=8;\quad \alpha_1+\beta_4=6;\quad \alpha_2+\beta_1=5;\quad \alpha_2+\beta_3=4;$

$\alpha_2+\beta_4=3;\quad \alpha_3+\beta_3=5;\quad \alpha_3+\beta_5=3;\quad \alpha_4+\beta_3=8;$

$\alpha_1=0;\quad \beta_1=8;\quad \beta_4=6;\quad \beta_2=-3;\quad \beta_3=7;\quad \alpha_3=-2;\quad \beta_5=5;\quad \alpha_4=1.$

Критерий оптимальности выполнен, т. е. для всех клеток $c_{ij} \ge \tilde{c}_{ij}$.

Стоимость перевозки задачи $z=639$.

Задача 10. Решить транспортную задачу методом потенциалов. В клетках таблицы проставлены транспортные затраты на перевозку единицы продукции справа от таблицы – объем производства поставщиков, внизу – величины спроса потребителей.

а)

12	6	29	19	21	13
14	3	30	10	10	27
15	27	28	11	24	16
1	23	26	15	13	14
14	14	14	14	14	

б)

4	21	12	8	1	21
20	8	25	15	23	21
17	1	1	5	3	23
23	10	10	6	5	23
22	22	22	11	11	

в)

5	3	24	10	25	24
30	2	22	16	7	15
30	24	27	29	10	16
15	17	21	2	3	24
12	13	14	31	9	

г)

21	19	11	12	12	24
26	29	14	1	26	12
39	1	22	8	25	18
53	23	40	26	28	16
11	13	26	10	10	

д)

25	28	20	15	7	16
27	5	11	23	10	12
1	25	14	16	16	14
8	6	4	16	18	18
7	8	4	11	30	

е)

14	25	18	19	23	33
2	17	16	24	2	25
29	3	7	15	22	25
5	2	17	23	10	17
33	11	11	11	34	

ж)

8	1	19	1	15	18
8	27	30	7	7	23
10	20	19	26	20	17
18	28	25	7	22	22
21	21	9	9	20	

з)

30	20	27	15	26	33
25	6	28	20	5	33
19	24	11	29	23	33
1	4	6	6	8	11
22	22	22	22	22	

и)

11	10	15	8	7	24
12	14	29	20	20	15
18	7	5	25	28	16
24	4	30	24	26	24
15	15	15	15	10	

к)

29	53	39	29	22	33
15	33	16	3	3	18
16	21	16	3	5	32
35	50	39	20	23	17
20	20	20	20	20	

Ответы

3. **а**) (1, 1), z = -1**;** **б)** (2/3, 2/3), z = -8/3; **в)** бесконечное множество решений $(\alpha, 1-\alpha)$, $\alpha \in [0,\ 1]$, z = 1; **г)** (1, 2), z = –9; **д)** (0, 2, 1, 0), z = –3; **е)** (10/3, 7/3, 5/3, 0, 0), z = 34/3; **ж)** (1, 2, 0, 14, 0), z = –22; **з)** (3, 6, 0, 0, 7, 3), z = 21; **и)** $\varnothing$; **к)** (10, 0, 30, 10, 50, 0), z = 390.

4. **а)** (0, 2 4, 0), z = 6; **б)** (1, 0, 2, 0, 1), z = 9; **в)** (2 0, 1, 0, 1), z = –9; **г)** (5, 2, 0, 0), z = –46; **д)** $z_{max} = \infty$; **е)** (15, 0, 8, 0, 0, 46), z = –24; **ж)** функция не ограничена; **з)** (22/9, 2/9, 5/9, 0, 0) , z = 34/9; **и)** (0, 0, 11), z = 0; **к)** $\varnothing$; **л)** (1, 0, 0, 1), z = –1; **м)** (1, 0, 1, 0), z = –3; **н)** функция не ограничена; **о)** (8/5, 3/5), z = 11/5; **п)** (0, 0, 1/2, 11/2, 9/4, 0), z = 17/2; **р)** (1/2, 0, 6, 3/2, 0), z= –6,5; **с)** (9/2, 0, 0, 3/2, 2), z=-25/2; **т)** (1, 0, 2, 0, 2), z = 7; **у)** (3, 0, 2, 0, 1), z = 6; **ф)** (0, 0, 11/10, 12/5, 3/5), z = –5/3; **х)** (1, 5, 2, 5), z = 13,5; **ц)** (0, 2, 0, 7, 0), z = 4; **ч)** (0, 10/3, 8/9), z = 110/9; **ш)** (1, 1, 0, 0), z = 2; **щ)** (0, 3, 0, 1/2, 3/2), z = 3/2; **э)** (1, 2, 1), z = 5; **ю)** (10/7, 9/7, 10/7), z = 39/7; **я)** (7/2, 7/2, 3/2), z = 17.

9. **а)** 757; **б)** 638; **в)** 642; **г)** 1045; **д)** 511; **е)** 837; **ж)** 742; **з)** 1188; **и)** 658; **к)** 2096.

10. **а)** 757; **б)** 638; **в)** 642; **г)** 1045; **д)** 511; **е)** 837; **ж)** 742; **з)** 1188; **и)** 658; **k)** 2096.

Библиографический список

1. Вентцель Е. С. Исследование операций. М.: Сов. радио, 1972.
2. Калихман И. Л. Сборник задач по математическому программированию. М.: Высш. шк., 1975.
3. Сборник задач по математике для втузов. Ч.4: Методы оптимизации. Уравнения в частных производных. Интегральные уравнения: Учеб. пособие / Э.А.Вуколов, А. В. Ефимов, В.Н. Зелесков и др. 2-е изд., перераб. М.: Наука, 1990.