Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

«Омский государственный технический университет»

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Методические указания к типовому расчета.
Методические указания для студентов 1-2 курса технических специальностей.

Омск – 2005

Составители: Квасова Галина Ефимовна, к.ф.-м.н., доцент,
Макаров Сергей Евгеньевич, канд. физ.-мат. наук, доцент,
Макарова Ирина Дмитриевна, старший преподаватель

Методические указания содержат краткие теоретические сведения, примеры с решениями задач, а также типовые расчеты для самостоятельной работы студентов ОмГТУ.

Редактор Г. М. Кляут
ИД 06039 от 12.10.01
Подписано в печать 31.03.05. Формат 60х84 1/16 Бумага офсетная.
Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ. л.2,25 Уч.-изд. л.2 ,25
Тираж 200 экз. Заказ

Издательство ОмГТУ. 644050, г. Омск, пр-т Мира, 11
Типография ОмГТУ

Для выполнения типового расчета по обыкновенным дифференциальным уравнения (д. у.) рекомендуется изучить теоретический материал по следующим вопросам:

Дифференциальные уравнения первого и высших порядков [1-10].

1. Основные понятия теории д.у. Задача Коши для д.у. первого порядка. Формулировка теоремы существования и единственности решения задачи Коши.

2. Д.у. первого порядка: с разделяющимися переменными, однородные и приводящиеся к однородным.

3. Линейные уравнения первого порядка, уравнения Бернулли.

4. Уравнения в полных дифференциалах.

5. Д.у. высших порядков, допускающие понижение порядка.

6. Линейный дифференциальный оператор, его свойства. Линейное однородное дифференциальное уравнение, свойства его решений.

7. Условие линейной независимости решений линейного однородного дифференциального уравнения.

8. Линейное однородное д.у. Фундаментальная система решений. Структура общего решения.

9. Линейное неоднородное д.у. Структура общего решения.

10. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных.

11. Линейные однородные д.у. с постоянными коэффициентами (случай простых и кратных корней характеристического уравнения вещественных и комплексных).

12. Линейные неоднородные д.у. с постоянными коэффициентами с правыми частями специального вида. Метод подбора частного решения по виду правой части с помощью неопределенных коэффициентов.

13. Решение линейных неоднородных уравнений с правой частью неспециального вида методом Коши.

ЗАДАЧИ № 1-16

Задачи № 1-№ 5. Уравнения первого порядка: с разделяющимися переменными и приводящиеся к ним, однородные и приводящиеся к однородным, линейным уравнения, уравнение Бернулли, уравнение в полных дифференциалах.

Задача № 6. Смешанные задачи на д.у. первого порядка. Определить тип уравнения и указать в общем виде метод решения.

Задача № 7. Смешанные задачи на д.у. первого порядка. Определить тип уравнения и решить.

Задача № 8. Уравнения, допускающие понижение порядка.

Задача № 9. Однородные линейные д.у. второго и высших порядков.

Задача № 10 - №11. Неоднородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами с правой частью специального вида.

Задача № 12. Метод Лагранжа, метод вариации постоянных.

Задача № 13. Решить методом Коши задачу Коши для линейных неоднородных д.у. с непрерывной правой частью неспециального вида.

Задача № 14. Решить методом Коши задачу Коши.

Задача № 15. Решить методом Коши задачу Коши для д.у. с разрывной правой частью.

Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной. Общие сведения

Д.У. первого порядка это равенство, содержащее неизвестную функцию y, производную y' и переменную x, от которой зависит y. Общий вид д.у. первого порядка

$$F(x,\ y,\ y') = 0 \tag{1}$$

Обычно уравнение (1) стараются представить в форме, разрешенной относительно производной:

$$y' = f\ (x,\ y) \tag{2}$$

или в форме, содержащей дифференциалы:

$$M(x,\ y)dx + N(x,\ y)\ dy = 0 \tag{3}$$

От формы (2) можно перейти к форме (3) и наоборот.

В самом деле, если в уравнении (2) заменить y' через $\dfrac{dy}{dx}$, умножить обе части уравнения на dx и перенести все члены в одну сторону, то получим

$$f\ (x,\ y)dx - dy = 0,$$

Что представляет собой форму (3), где $M(x,\ y) = f\ (x, y)$, а $N(x,\ y) = -1$.

Наоборот, член уравнения (3) вправо и разделить обе части уравнения на $N(x,\ y)\ dx$, предполагая, что $N(x,\ y) \neq 0$, то получим $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{M(x,\ y)}{N(x, y)}$, т.е. форму (2), где $f\ (x,\ y) = -\dfrac{M(x,\ y)}{N(x, y)}$.

Таким образом, Формы (2) и (3) совершенно равноправны, в дальнейшем используется та или другая форма.

Еще раз подчеркнем, что для того, чтобы от формы (2), перейти к форме (3) надо y' записать как отношение dy и dx, т.е. dy деленное на dx.

Чтобы от формы (3) перейти к форме (2), из равенства (3) надо выразить отношение (частное) $\dfrac{dy}{dx}$.

Дифференциальному уравнению удовлетворяет, вообще говоря, целая система функций.

Для выделения одной из них следует указать ее значение при каком-либо значении аргумента x_0, т.е. задать условие вида $y = y_0$ при $x = x_0$, которое называют начальным условием. Часто его записывают в виде

$$y\Big|_{x = x_0} = y_0 \tag{4}$$

Решение уравнения (2) с условием (4) называют еще задачей Коши.

Решение.

$y=\varphi(x, C)$ (или интеграл $\Phi(x, y, C)=0$) д.у. (2), зависящие от произвольного постоянного C, называется общим решением (общим интегралом) д.у. (2), если путем подбора значений произвольного постоянного из него можно получить частное решение (частный интеграл), удовлетворяющее любому возможному начальному условию $y\Big|_{x=x_0}=y_0$. (смотри теоремы существования и единственного решения задачи Коши).

Практически для определения C следует подставить в общее решение (общий интеграл) вместо x или y заданные значения x_0 и y_0 и разрешить уравнение

$$y_0=\varphi(x_0, C) \quad \left(\Phi(x_0, y_0, C)=0\right)$$

Относительно произвольного C. Пусть $C=C_0$, тогда частное решение будет $y=\varphi(x, C_0)$ (соответственно частный интеграл $\Phi(x, y, C_0)=0$).

Перейдем к рассмотрению отдельных типов дифференциальных уравнений, нахождение общих решений (общих интегралов) которых сводится к выполнению обычных операций вычисления интегралов.

В задачах № 1 - № 5 найти общее решение $y=\varphi(x, C)$ или общий интеграл $\Phi(x, y, C)=0$ и, где указано, решить задачу Коши.

Задача № 1. Уравнения с разделяющимися переменными и приводящиеся к ним.

Дифференциальное уравнение $\varphi(y)\,dy=f(x)dx$ называется уравнением с разделенными переменными, его общий интеграл имеет вид

$$\int\varphi(y)\,dy=\int f(x)\,dx+C.$$

Уравнение $\varphi_1(x)\,\psi_1(y)\,dx=\varphi_2(x)\psi_2(y)\,dy$, в котором коэффициенты при дифференциалах распадаются на множители, зависящие только от x и только от y называется уравнением с разделяющимися переменными.

Путем деления на произведение $\varphi_1(y)\cdot\varphi_2(x)$ оно приводится к уравнению с разделенными переменными:

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}dx=\frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}dy.$$

Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$\int\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}dx-\frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}dy=C.$$

Замечание. Деление на $\psi_1(y)\cdot\varphi_2(x)$ может привести к потере частных решений, обращающих в ноль произведение $\psi_1(y)\cdot\varphi_2(x)$.

Дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx}=f(ax+by+C),$$

где a, b, c - постоянные, заменой переменных $z=ax+by+C$ преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными.

Пример 1.

Решить уравнение $3e^x \cdot \operatorname{tg} y\,dx + (2 - e^x)\sec^2 y\,dy = 0$.

Решение. Разделим обе части уравнения на произведение $\operatorname{tg} y \cdot (2-e^x)$

$$\frac{3e^x\,dx}{2-e^x} + \frac{\sec^2 y\,dy}{\operatorname{tg} y} = 0.$$

Получим уравнение с разделенными переменными. Интегрируя его, найдем

$$-3\ln\left|2 - e^x\right| + \ln\left|\operatorname{tg} y\right| = C_1.$$

После потенцирования получим

$$\frac{\left|\operatorname{tg} y\right|}{\left|2 - e^x\right|^3} = e^{C_1} \quad \text{или} \quad \frac{\left|\operatorname{tg} y\right|}{\left|(2 - e^x)^3\right|^3} = e^{C_1}.$$

Откуда $\dfrac{\operatorname{tg} y}{(2 - e^x)^3} = \pm e^{C_1}$.

Обозначая $\pm e^{C_1} = C$, будем иметь $\dfrac{\operatorname{tg} y}{(2-e^x)^3} = C$ или $\operatorname{tg} y - C\,(2-e^x)^3 = 0$.

Получили общий интеграл этого уравнения. Функции $y = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и $x = \ln 2$ - являются частными решениями.

Ответ: $\operatorname{tg} y - C(2 - e^x)^3 = 0$ - общий интеграл.

Пример 2.

Найти частное решение уравнения $y'\sin x = y\ln y$, удовлетворяющее начальному условию $y\Big|_{x=\pi/2} = e$.

Решение. Имеем $\dfrac{dy}{dx}\sin x = y\ln y$ или $dy\sin x = y\ln y\,dx$.

Разделяем переменные, для этого обе части уравнения делим на произведение $\sin x \cdot y\ln y$

$$\frac{dy}{y\ln y} = \frac{dx}{\sin x}.$$

Интегрируя, найдем общий интеграл

$$\ln\left|\ln y\right| = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \ln C$$

в качестве производной константы C взяли $\ln C$.

После потенцирования, получим $\ln y = C \cdot \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ или $y = e^{C\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$ - общее решение исходного уравнения.

Найдем константу C, используя начальное условие $y\,(\pi/2) = e$, $e = e^{C\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}}$ или

$e = e^{C}$ отсюда $C = 1$.

Искомое частное решение или решение задачи Коши $y = e^{\operatorname{tg} x/2}$.

Ответ: $y = e^{\operatorname{tg} x/2}$.

Упражнения. Решить уравнения

1. $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$. Ответ: $\arcsin + \arcsin y = C$.

2. $2x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\,dy = 0$. Ответ: $x^2 - \sqrt{1-y^2} = C;\ y \pm 1$.

3. $y' = e^{x-y}$. Ответ: $e^{y} - e^{x} = C$.

4. $y' = \dfrac{y-1}{x+1}$. Ответ: $\left|\dfrac{y-1}{x+1}\right| = C$ или $y = C(x+1)+1;\ x \neq -1$.

Решить уравнения с разделяющимися переменными:

1. $(1+y^2)\,dx + (1+x^2)\,dy = 0$.
2. $(1+y^2)\,dx - xy\,dy = 0;\ y(1) = 0$.
3. $(1+y^2)\,dx + xy\,dy = 0$.
4. $(xy^2+x)\,dy + (x^2y - y)\,dx = 0;\ y(1) = 1$.
5. $y' \cdot \sin x - y\cos x = 0$.
6. $y' \cdot \operatorname{tg} x = y;\ y(\pi/2) = 1$.
7. $(1+y^2)\,dx = x\,dy$.
8. $y' \cdot \sin x - y \cdot \cos x = 0;\ y(\pi/2) = 1$.
9. $x \cdot \sqrt{1+y^2} + y \cdot y'\sqrt{1+x^2} = 0$.
10. $x \cdot \sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0;\ y(0) = 1$.
11. $e^{-y}(1+y') = 1$.
12. $y\ln y\,dx + x\,dy = 0;\ y(1) = 1$.
13. $e^{y}(1+x^2)\,dy - 2x(1+e^{y})\,dx = 0$.
14. $y'\sin x = y\ln y;\ y(\pi/2) = e$.
15. $2x\sqrt{1-y^2} = y'(1+x^2)$.
16. $y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2};\ y(0) = 1$.
17. $y' = x/y$.
18. $\sin y \cdot \cos x\,dy = \cos y \cdot \sin x\,dx;\ y(0) = \pi/4$.
19. $y^2 \cdot y' + x^2 = 1$.
20. $y \cdot e^{2x}\,dx - (1+e^{2x})\,dy = 0;\ y(0) = \sqrt{2}$.
21. $y \cdot y' + x = 0$.
22. $2e^{x} \cdot \operatorname{tg} y\,dx + (1+e^{x})\sec^2 y\,dy = 0;\ y(0) = \pi/4$.
23. $(x+1)\,y' + xy = 0$.

24. $y' = \cos(x + y);\ y(0) = 0$.

25. $y' \cdot \sqrt{1 - x^2} = 1 + y^2$.

26. $y' = \dfrac{1}{2x + y};\ y(0) = 0$.

27. $y' = \dfrac{x \sin x}{y \cos y} = 0$.

28. $y \cdot y' = \dfrac{1 - 2x}{y};\ y(0) = 1$.

29. $(1 + y^2)\, x\, dx + (1 + x^2)\, dy = (0)$.

30. $x y' + y = y^2;\ y(1) = 2$.

Задача 2. Однородные дифференциальные уравнения.

Дифференциальное уравнение (д.у.)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Называется однородным д.у. относительно x и y, если функция $f(x, y)$ является однородной функцией своих аргументов нулевого измерения. Это значит $f(t \cdot x, t \cdot y) = t^0 f(x, y) = f(x, y)$. Например функция $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x y}$ - однородная функция нулевого измерения.

Однородное д.у. всегда можно представить в виде

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (1)$$

Введя новую искомую функцию $z = \dfrac{y}{x}$, уравнение (1) можно привести к уравнению с разделяющимися переменными: $y = x \cdot z$, $y' = z + x z'$

$$z + x z' = \varphi(z) \quad \text{или} \quad x \frac{dz}{dx} = \varphi(z) - z \quad \text{переменные разделяются.}$$

Пример 3.

Решить уравнение $x y' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$.

Решение. Запишем уравнение в виде $y' = \sqrt{1 - \dfrac{y^2}{x_2}} + \dfrac{y}{x}$, разделив на x обе части уравнения. Сделаем замену $\dfrac{y}{x} = z(x)$. Тогда $y = x \cdot z$, $y' = z + x z'$. Получим $z + x \cdot z' = \sqrt{1 - z^2} + z$ или $x z' = \sqrt{1 - z^2}$.

Разделяя переменные, будем иметь $\dfrac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \dfrac{dx}{x}$.

Отсюда интегрированием находим

$\arcsin z = \ln|x| + \ln C_1 \quad (C_1 > 0)$ или

$\arcsin Z = \ln C_1|x|$, так как $C_1|x| = \pm C_1 x$, то обозначая $\pm C_1 = C$, получим

$\arcsin z = \ln Cx$. Заменяя z на $\dfrac{y}{x}$, будем иметь общий интеграл

$\arcsin \dfrac{y}{x} = \ln Cx$, отсюда $y = x \sin \ln Cx$ - общее решение.

Ответ: $y = x \sin \ln Cx$.

Упражнения. Решить уравнения

1. $x(x+2y)dx + (x^2 - y^2)dy = 0$. Ответ: $y^3 - 3yx^2 - x^3 = C$.
2. $y' = \dfrac{x+3y}{2x}$. Ответ: $y = C|x|^{3/2} - x$.
3. $y' = \dfrac{x-y}{x-2y}$. Ответ: $x^2 - 2xy + 2y^2 = C$.
4. $x dy - y dx = y dy$. Соберем коэффициенты при dx и dy $(x-y)dy = y dx$. Ответ: $x = y(C - \ln|y|)$; $y \neq 0$.

Решить однородные дифференциальные уравнения.

1. $(x-y)dx + xdy = 0$.
2. $xy' = y \ln \dfrac{y}{x}$; $y(1) = 1$.
3. $xy' = y(\ln y - \ln x)$.
4. $(\sqrt{xy} - x)dy + ydx = 0$; $y(1)=1$.
5. $x^3 dy = (y^3 - xy + x^2)\, dx$.
6. $(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - x dy = 0$; $y(1) = 0$.
7. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$.
8. $y' = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$; $y(1) = 0$.
9. $2x^2 \cdot y' = x^2 + y^2$.
10. $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$; $y(0) = 1$.
11. $(4x - 3y)\, dx + (2y - 3x)\, dy = 0$.
12. $(xy' - y)\operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} = x$; $y(1) = 0$.
13. $(y - x)dx + (y + x)dy = 0$.
14. $(y^2 - 3x^2)\, dy + 2xy\, dx = 0$; $y(0) = 1$.
15. $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$.

16. $xy'\cdot\sin\left(\frac{y}{x}\right)+x=y\sin\left(\frac{y}{x}\right);\ y(1)=0.$

17. $y'=\frac{y}{x}+\sin\left(\frac{y}{x}\right).$

18. $xy'-y=x\,\mathrm{tg}\left(\frac{y}{x}\right);\ y(1)=\frac{\pi}{2}.$

19. $y'=\frac{x-y}{x+y}.$

20. $(x^2+y^2)dx-xy\,dy=0;\ y(1)=1.$

21. $(x-y)\,dx+x\,dy=0.$

22. $xy'=xe^{\frac{y}{x}}+y;\ y(1)=0.$

23. $y^2dx+x^2dy=xy\,dy.$

24. $xy+y^2=(2x^2+xy)\cdot y';\ y(1)=0.$

25. $x(y'+e^{\frac{y}{x}})=y.$

26. $xy\cdot y'=y^2+2x^2;\ y(1)=1.$

27. $xy'=y+x\,\mathrm{tg}\frac{y}{x}.$

28. $y'=\frac{x+y}{x-y};\ y(1)=0.$

29. $xy'-y=\sqrt{x^2-y^2}.$

30. $(x^2+y^2)\,dy-2xy\,dx=0;\ y(0)=1.$

Задача 3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение линейное относительно неизвестной функции и ее производной. Оно имеет вид

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x) \qquad (1)$$

где $p(x)$ и $q(x)$ - заданные функции от x, непрерывные в той области, в которой требуется проинтегрировать уравнение (1).

Если $q(x)=0$, то уравнение (1) называется линейным однородным. Оно является уравнением с разделяющимися переменным и имеет общее решение

$$y=Ce^{-\int p(x)dx}.$$

Общее решение неоднородного уравнения можно найти следующими способами:

1) методом вариации произвольной постоянной, который состоит в том, что решение уравнения (1) находится в виде

$y=C(x)e^{-\int p(x)dx}$, где $C(x)$ - новая неизвестная функция.

2) уравнение (1) может быть проинтегрирован с помощью подстановки $y=U(x)\cdot V(x)$, где $U(x)$ и $V(x)$ - неизвестные функции от x.

3) решение уравнения (1) можно найти еще и по формуле

$$y=e^{-\int p(x)dx}\cdot\left(C+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right).$$

Замечание. Может оказаться, что дифференциальное уравнение линейно относительно x как функции от y. Нормальный вид (коэффициент при $\frac{dx}{dy}$ равен 1) такого уравнения

$$\frac{dx}{dy}+r(y)\cdot x=\varphi(y) \qquad (1')$$

Пример 4.

Решить уравнение $y'+2xy=2xe^{-x^2}$.

Решение. Вид уравнения нормальный

$p(x)=2x,\ q(x)=2xe^{-x^2}$.

$$y(x)=e^{-\int 2x\,dx}\cdot\left(C+2\int xe^{-x^2}\cdot e^{\int 2x\,dx}dx\right)=$$

$$=e^{-x^2}\left(C+2\int xe^{-x^2}\cdot e^{x^3}dx\right)=e^{-x^2}\left(C+2\int x\,dx\right)=$$

$$=e^{-x^2}\left(C+x^2\right).$$

Ответ: $e^{-x^2}\left(C+x^2\right)$.

Упражнения. Решить уравнения

1. $y'-y\sin x=\sin x\cos x$. Ответ: $y=Ce^{-\cos x}-\cos x+1$.

2. $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$.

Приводим к виду $y'+p(x)y=q(x)$, $y'-\frac{2x}{1+x^2}y=1+x^2$ и решаем по формуле

$y=e^{-\int p(x)dx}\left(C+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right)$. Ответ: $y=(1+x^2)(C+x)$.

3. $y'+y=e^x$. Ответ: $y=Ce^{-x}+\frac{1}{2}e^x$.

4. $y\,dx+2(x+y)dy=0$. Ответ: $x=\frac{C}{y^2}-\frac{2}{3}y$.

Уравнение линейное относительно функции $x=x(y)$. Приводим его к виду

$y\cdot x'(y)+2x=-2y$ или $x'+\frac{2}{y}x=-2$.

Решить линейные дифференциальные уравнения первого порядка:

1. $x \cdot y' = y + x^2 \cos x;\ \ y(\pi/2) = 0.$
2. $y' + 2y = e^{-x}.$
3. $xy' = e^x + xy;\ \ y(1) = e.$
4. $y' - 2xy = 2xe^{x^2}.$
5. $y' + y \cdot \operatorname{tg} x + \dfrac{1}{\cos x};\ y(0) = 0.$
6. $y' + 2xy = e^{-x^2}.$
7. $y' = 2y + e^x - x;\ \ y(0) = 1/4.$
8. $xy' - 2y = x^3 \cos x.$
9. $y \cdot xy' + x^2 + xy = y;\ y(1) = 0.$
10. $y' \cdot x \ln x - y = 3x^3 \ln^2 x.$
11. $y' \cdot \cos x + y = 1 - \sin x;\ y(0) = 1.$
12. $\left(2x - y^2\right) \cdot y' = 2y.$
13. $\left(1 + x^2\right) y' + y = \operatorname{arctg} x;\ \ y(0) = 0.$
14. $y' = \dfrac{y}{2y \ln y + y - x}.$
15. $y' \sqrt{1 - x^2} + y = \arcsin x;\ y(0) = 0.$
16. $y' - ye^x = 2xe^{ex}.$
17. $y' - \dfrac{y}{x \ln x} = x \ln x = x \ln x;\ y(e) = e^2/2.$
18. $y' + 2xy = xe^{-x^2}.$
19. $y' \sin x - y \cos x = 1;\ \ y(\pi/2) = 0.$
20. $y' = \dfrac{3y}{x} + x.$
21. $y' - y \operatorname{tg} x = \sec x;\ y(0) = 0.$
22. $y' + y \cdot \operatorname{tg} x = 1/\cos x.$
23. $xy' + y - e^x = 0;\ \ y(a) = b.$
24. $(1 + x^2) \cdot y' - 2xy = (1 + x^2)^2.$
25. $y' + y = \cos x;\ \ y(0) = 1.$
26. $y' + 2y = e^{3x}.$
27. $y' + \dfrac{1 - 2x}{x^2} y = 1;\ y(1) = 0.$
28. $y' + y/x = 2 \ln x + 1.$
29. $y' + y = e^{2x};\ y(0) = 1.$
30. $(1 + y^2)\, dx = (\operatorname{arctg} y - x)\, dy.$

Задача 4. Уравнение Бернулли.

Уравнение Бернулли имеет вид

$$y' + p(x)\,y = q(x)\,y^{\alpha}\ ,\ \alpha \neq 0;1 \qquad (1)$$

(при $\alpha=0$ и $\alpha=1$ это уравнение является линейным).

Уравнение (1) умножим на $y^{-\alpha}$

$$y^{-\alpha}\cdot\frac{dy}{dx} + p(x)\,y^{1-\alpha} = q(x) \qquad (2)$$

Обозначим $y^{1-\alpha} = z(x);\ z' = (1-\alpha)\,y^{-\alpha}\cdot y'$.

Уравнение (2) умножим на $(1-\alpha)$

$(1-\alpha)\,y^{-\alpha}\cdot y' + (1-\alpha)\,p(x)\cdot y^{1-\alpha} = (1-\alpha)\,q(x)$ или

$$z' + (1-\alpha)\,p(x)\,z = (1-\alpha)\,q(x) \qquad (3)$$

(3) – линейное уравнение относительно переменной $z(x)$.

Таким образом, уравнение Бернулли можно привести к линейному уравнению.

Замечание. Уравнение Бернулли может быть проинтегрировано также методом вариации постоянной, как линейное уравнение и с помощью подстановки $y(x) = u(x)\cdot v(x)$.

Пример 5.

Решить уравнение Бернулли $x\,y' + y = y^2 \ln x$.

Приведем уравнение к виду

$$y' + p(x)\cdot y = q(x)\,y^{\alpha}$$

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\ln x}{x}\cdot y^2;\ \alpha = 2\,.$$

Обе части уравнения умножим на y^{-2} и сделаем замену $y^{-1} = z(x)$, причем, $z'(x) = -\,y^{-2}\cdot y'$, получим $z' - \frac{1}{x}z = -\frac{\ln x}{x}$ - это линейное уравнение относительно $z(x)$.

$$z(x) = e^{-\int p(x)dx}\cdot\left(C + \int q(x)e^{\int p(x\{dx}dx\right) =$$

$$= e^{\int\frac{dx}{x}}\left(C + \int\left(-\frac{\ln x}{x}\right)\cdot e^{-\int\frac{dx}{x}}dx\right) =$$

$$= x\cdot\left(C - \int\frac{\ln x}{x^2}dx\right) = x\left(C + \frac{1}{x}\ln x + \frac{1}{x}\right).$$

Получили $z = x\cdot\left(C + \frac{1}{x}\ln x + \frac{1}{x}\right)$.

Поэтому $y = \frac{1}{z} = \frac{1}{Cx + \ln x + 1}$.

Ответ: $y = \frac{1}{Cx + \ln x + 1}$.

Упражнения. Решить уравнения

1. $xy' - y = y^2$. Ответ: $y = \dfrac{x}{C - x}$; $y = 0$.

2. $xy' + \ = xy^2$. Ответ: $\dfrac{1}{y} = x\left(C - \ln|x|\right)$.

3. $\left(xy + x^2y^3\right)y' = 1;\ y(1) = 0$. Ответ: $x = \dfrac{1}{-e^{-\frac{y^2}{2}} - y^2 + 2}$.

Уравнение следует переписать в виде $\dfrac{dx}{dy} = xy + x^2y^3$ или $x' - xy = x^2y^3$ - это уравнение Бернулли относительно функции $x = x(y)$.

4. $y' - \dfrac{1}{x}y = \dfrac{1}{2y}$. Ответ: $y^2\ Cx^2 - x$.

Обе части уравнения следует умножить на y и сделать замену $y^2 = z(x)$.

Решить уравнения Бернулли:

1. $y' + \dfrac{x}{1-x^2}y = x\sqrt{y};\ y(0) = 0$.
2. $y' + 2xy = 2xy^2$.
3. $y' - \dfrac{1}{x}y = \dfrac{1}{2y};\ y(1) = 1$.
4. $3xy^2 \cdot y' - 2y^3 = x^3$.
5. $\left(xy + x^2y^3\right)y' = 1;\ x = x(y),\ x(0) = 1$.
6. $y' + 2xy = y^2e^{x^2}$.
7. $xy' + y = y^2\ln x;\ y(1) = 1$.
8. $y' - 2ye^x = 2\sqrt{y}\cdot e^x$.
9. $y' - 9x^2y = \left(x^5 + x^2\right)y^{2/3};\ y(0) = 0$.
10. $2y'\ln x + \dfrac{y}{x} = y^{-1}\cdot\cos x$.
11. $y' - y = xy^2;\ y(0) = 1$.
12. $2y'\cdot\sin x + y\cdot\cos x = y^3\cdot\sin^2 x$.
13. $xy' - y = y^2;\ y(1) = 1$.
14. $y' - y\cdot\cos x = y^2\cdot\cos x$.
15. $y' + 2xy = 2x^3y^3;\ y(0) = 1$.
16. $y' + 4xy = 2xe^{-x^2}\cdot\sqrt{y}$.
17. $3y^2\cdot y' + y^3 + x = 0;\ y(0) = 0$.

18. $y' + y = y^2 e^x$.

19. $y' - y = (1 + x^2) y^2;\ y(0) = 1$.

20. $y' - \operatorname{tg} x \cdot y = y^4 \cdot \cos x$.

21. $y' - \dfrac{3}{2x} y = \dfrac{3}{2} x y^{1/3};\ y(1) = 0$.

22. $y' + 2xy = 2x^3 y^3$.

23. $y' + 2y = e^x \cdot y^2;\ y(0) = 1$.

24. $y' + \dfrac{y}{x+1} + y^2 = 0$.

25. $xy' - y = -xy^2;\ y(1) = 1$.

26. $y' - y \operatorname{tg} x + y^2 \cdot \cos x = 0$.

27. $y' + 4x^3 y^3 + 2xy = 0;\ y(1) = 1$.

28. $xy' - 4y - x^2 \sqrt{y} = 0$.

29. $y' - 3xy = xy^2;\ y(0) = 1$.

30. $y' - 2xy = 2x^3 y^2$.

Задача 5. Уравнения в полных дифференциалах.

Дифференциальное уравнение вида

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \qquad (1)$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть представляет полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$, т.е.

$$M dx + N dy \equiv du \equiv \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy.$$

Для того, чтобы уравнение (1) являлось уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы в некоторой области D изменения переменных x и y выполнялось условие

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x} \qquad (2)$$

В этом случае общий интеграл имеет вид $u(x, y) = C$ или

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\, dy = C.$$

Пример 6.

Решить уравнение $(\sin xy + xy \cdot \cos xy)dx + x^2 \cdot \cos xy \cdot dy = 0$.

Решение. Проверим является ли данное уравнение уравнением в полных дифференциалах

$$M(x, y) = \sin xy + xy \cdot \cos xy;\ N(x, y) = x^2 \cdot \cos xy.$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x\cos xy + x\cos xy - x^2 y\sin xy = 2x\cos xy - x^2 y\sin xy,$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x\cos xy - x^2 y\sin xy.$$

Получили, что $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, условие (2) выполнено, значит данное уравнение в полных дифференциалах.

Найдем функцию $u(x, y)$. Для этого имеем систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} \equiv M(x, y) = \sin xy + xy\cos xy, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) = x^2 \cdot \cos xy. \end{cases}$$

Из первого уравнения, интегрированием по x при постоянном y, определяем $u(x, y)$:

$$u(x, y) = \int (\sin xy + xy \cdot \cos xy) dx + \varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ - произвольная функция (вместо постоянной интегрирования C берем функцию $\varphi(y)$)

Частная производная $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, найденной функции $u(x, y)$ должна равняться в силу второго уравнения системы, $x^2 \cos xy$, что дает

$$u(x, y) = x\sin xy + \varphi(y); \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2\cos xy + \varphi'(y),$$

$$x^2\cos xy + \varphi'(y) = x^2 \cdot \cos xy.$$

Отсюда $\varphi'(y) = 0, \varphi(y) = C_1,$

$u(x, y) = x\sin xy + C_1$; $x\sin xy + C_1 = C_2$ - общий интеграл.

Ответ: $x\sin xy = C$, где $C = C_2 - C_1$.

Упражнения. Решить уравнения

1. $\dfrac{1}{y}dx - \dfrac{x}{y^2}dy = 0$. Ответ: $\dfrac{x}{y} = C$.

2. $\dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = 0$. Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = C$.

3. $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$. Ответ: $x^2 + y^2 - xy + x - y = C$.

4. $\dfrac{1}{x}dy - \dfrac{y}{x^2}dx = 0$. Ответ: $\dfrac{y}{x} = C$.

$$-\frac{y}{x^2}dx + \frac{1}{x}dy = 0,$$

$$M(x,y)=-\frac{y}{x^2};\; N(x,y)=\frac{1}{x},$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{1}{x^2};\; \frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}\Rightarrow$$ уравнение в полных дифференциалах.

Проинтегрировать уравнения в полных дифференциалах:

1. $x(2x^2+y^2+y\left(x^2+2y^2\right))\cdot y'=0.$
2. $(3x^2+6xy^2)\,dx\;+(6x^2+4y^3)\,dy=0.$
3. $\left(3x^2\operatorname{tg}y-\frac{2y^2}{x^3}\right)dx+\left(x^3\sec^2 y+4y^3+\frac{3y^2}{x^2}\right)dy=0.$
4. $\left(\frac{\sin 2x}{y}+x\right)dx+\left(y-\frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy=0.$
5. $\left(3x^2-2x-y\right)dx+\left(2y-x+3y^2\right)dy=0.$
6. $\left(\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}}+2xy-\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sqrt{1+x^2}+x^2-\ln x\right)dy=0.$
7. $\left(\sin y+y\sin x+1/x\right)dx+\left(x\cos y-\cos x+1/y\right)dy=0.$
8. $y\left(x^2+y^2+a^2\right)dy+x\left(x^2+y^2-a^2\right)dx=0.$
9. $\left(3x^2y+y^3\right)dx+\left(x^3+3xy^2\right)dy=0.$
10. $\left(2xy+3y^2\right)dx+\left(x^2+6xy-3y^2\right)dy=0.$
11. $\left(3y^2+2xy+2x\right)dx+\left(6xy+x^2+3\right)dy=0.$
12. $2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)dx-\sqrt{x^2-y}\;dy=0.$
13. $\left(y\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}y\right)dx+\left(x\operatorname{ch}y+\operatorname{sh}x\right)dy=0.$
14. $x\,dx+y\,dy=0.$
15. $\frac{1}{y}dx-\frac{x}{y^2}\,dy=0.$
16. $\left(1+e^{\frac{y}{x}}\right)dx+e^{\frac{y}{x}}\left(1-x/y\right)dy=0.$
17. $\left(x-y\right)dx+\left(2y-x\right)dy=0.$
18. $\frac{2x}{y^3}dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0.$
19. $\left(2x+y\right)dx+\left(x+2y\right)dy=0.$
20. $\left(10xy-8y+1\right)dx+\left(5x^2-8x+3\right)dy=0.$
21. $\left(3x^2+6xy-2y^2\right)dx+\left(3x^2-4xy-3y^2\right)d\;=0\;.$
22. $\left(y+\frac{2}{x^2}\right)dx+\left(x-\frac{3}{y^2}\right)dy=0.$

23. $\left(2x - ye^{-x}\right)dx + e^{-x}\,dy = 0$.

24. $\left(2x + e^{\frac{x}{y}}\right)dx + (1 - x/y)e^{\frac{x}{y}}\,dy = 0$.

25. $2x\cos^2 y\,dx + \left(2y - x^2\sin 2y\right)dy = 0$.

26. $(\sin y - y\sin x + 1/x)\,dx + (x\cos y - \cos x - 1/y)\,dy = 0$.

27. $\left(2x^3 - xy^2\right)dx + \left(2y^3 - x^2y\right)dy = 0$.

28. $e^y\,dx + \left(xe^y - 2y\right)dy = 0$.

29. $\dfrac{x\,dy}{x^2 + y^2} = \left(\dfrac{y}{x^2 + y^2} - 1\right)dx$.

30. $\left(1 + x\sqrt{x^2 + y^2}\right)dx + \left(-1 + \sqrt{x^2 + y^2}\right)y\,dy = 0$.

Задача 6. Смешанные задачи на дифференциальные уравнения первого порядка.

Смешанные задачи на дифференциальные уравнения первого порядка.

Определить тип дифференциального уравнения и указать в общем виде метод его решения:

Пример 7.

а) $y' = \sin\dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{x}$. Ответ: однородное: $y = x\cdot z$.

б) $\left(\dfrac{x}{y} - x + y^2\right)dx + \left(-\dfrac{x^2}{2y^2} + 2xy + y\right)dy = 0$. Ответ: в полных дифференциалах.

в) $\left(x + x^2\right)y' - (1 + 2x)y = 1 + 2x$. Ответ: линейное, $y = u\cdot v$.

г) $y' - y = xy^2$.

Ответ: Бернулли, $y = u\cdot v$.

Упражнения.

Определить тип уравнения и указать в общем виде метод решения:

1. $\left(x + x^2\right)y' - (1 + 2x)y = 1 + x$. Ответ: линейное, $y = u\cdot v$ или $y = e^{-\int p(x)dx}\left(C + \int q(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx\right)$.

2. $2\left(y - 2xy - x^2\sqrt{y}\right) = x^2y'$. Ответ: Бернулли, $y = u\cdot v$.

3. $\left(x^2 + y^2\right)dy + xy\,dx = 0$. Ответ: однородное, $\dfrac{y}{x} = z(x)$.

4. $\left(\dfrac{x}{y} - x + y^2\right)dx + \left(-\dfrac{x^2}{2y^2} + 2xy + y\right)dy = 0$. Ответ: в полных дифференциалах.

Определить тип уравнения и указать в общем виде метод решения:

1. $\sin x^3 = e^{\frac{y' - x^2}{y}}$.

2. $\sqrt{x^2 + y^2} = \dfrac{2x^2}{y - 3x + xy'}$.

3. $1 + x + (1 + x^2)(e^x - e^{2y} \cdot y') = 0$.

4. $2y'(1 - x^2) - xy - 2xy^2 + 2x^3 y^2 = 0$.

5. $y\,dx + (2x - y^2)\,dy = 0$.

6. $\left(\dfrac{x}{y} - x + y^2\right)dx + \left(2xy + y - \dfrac{x^2}{2y^2}\right)dy = 0$.

7. $y\,dx + \left(x - 2\sqrt{xy}\right)dy = 0$.

8. $(x^2 + y^2 + 1)\,dy + xy\,dx = 0$.

9. $y' = \sin(y - x)$.

10. $x = \arccos\dfrac{y' - ax}{y}$.

11. $\sqrt{y} = \dfrac{y' - y\,e^{x^2 \sin x}}{x^2 + 2x - 1}$.

12. $y' = \dfrac{y^2 + xy - x^2}{y^2}$.

13. $y'(y^2 - x) = y$

14. $y' = x\sqrt{y} + \dfrac{xy}{x^2 - 1}$.

15. $y \sin x + y' \cos x = 1$.

16. $y' - y + y^2 \cos x = 0$.

17. $xy' \cos\dfrac{y}{x} = y \cos\dfrac{y}{x} - x$.

18. $\left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right)dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \dfrac{x}{y}\right)dy = 0$.

19. $\left(1 + x\sqrt{x^2 + y^2}\right)dx + \left(-1 + \sqrt{x^2 + y^2}\right)y\,dy = 0$.

20. $xy' \cos\dfrac{y}{x} = y \cos\dfrac{y}{x} - x$.

21. $y' = (x - y)^2 + 1$.

22. $x \sin x\, y' + (\sin x - x \cos x)y = \sin x \cos x - x$.

23. $y' + y \cos x = y^n \sin 2x$.

24. $(x^3 - 3xy^2)\,dx + (y^3 - 3x^2 y)\,dy = 0$.

25. $\left(5xy-4y^2-6x^2\right)dx+\left(y^2-8xy+2{,}5x^2\right)dy=0$.

26. $y'=\dfrac{1}{2x-y^2}$.

27. $x^2+xy'=3x+y'$.

28. $\left(2x-1\right)-2y=\dfrac{1-4x}{x^2}$.

29. $y'+\cos\dfrac{x+y}{2}=\cos\dfrac{x-y}{2}$.

30. $\dfrac{dx}{x^2-xy+y^2}=\dfrac{d}{2y^2-xy}$.

Задача 7. Смешанные задачи на дифференциальные уравнения первого порядка.

Упражнения. Определить тип уравнения и решить его:

1. $y'=\dfrac{xy}{\sqrt{1-x^2}}$. Ответ: с разделяющимися переменными, $y=Ce^{-\sqrt{1-x^2}}$.

2. $y'=\sin\dfrac{y}{x}+\dfrac{y}{x};\ y(1)=\dfrac{\pi}{2}$. Ответ: однородное, $\operatorname{tg}\dfrac{y}{2x}=x$.

3. $y'-\dfrac{1}{x}y=x$. Ответ: линейное, $y=Cx+x^2$.

4. $y'-y=xy^2$. Ответ: Бернулли, $y=\dfrac{1}{Ce^{-x}-x+1}$.

Определить тип уравнения и решить:

1. $y'\left(3x^2-2x\right)-y\left(6x-2\right)=0$.
2. $xy^2\cdot y'-y^3=x^4/3$.
3. $\left(x^2+y^2\right)dx-xy\,dy=0$.
4. $y'+xy=x^3$.
5. $\left(x-y\right)dy-y\,dx=0$.
6. $\left(x\cos 2y+1\right)dx-x^2\sin 2y\,dy=0$.
7. $y'=y\operatorname{tg}x-y^2\cos x$.
8. $y'=\dfrac{1-2x}{y^2}$.
9. $2y\,dx+\left(y^2-6x\right)dy=0$.
10. $\left(xye^{\frac{x}{y}}+y^2\right)dx=x^2e^{\frac{x}{y}}\,dy$.

11. $\left(2x^3 - xy^2\right)dx + \left(2y^3 - x^2y\right)dy = 0$.

12. $xy' + y = y^2 \ln x$.

13. $3x + y - 2 + y'(x-1) = 0$.

14. $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.

15 $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x$.

16. $\left(2x + \ln y\right)dx + \left(x/y + \sin y\right)dy = 0$.

17. $y' = \dfrac{1}{xy + x^2y^3}$.

18. $\dfrac{dx}{x^2 - xy + y^2} = \dfrac{dy}{2y^2 - xy}$.

19. $\left(2xye^{x^2} - x\sin x\right)dx + e^{x^2}dy = 0$.

20. $\left(5xy - 4y^2 - 6x^2\right)dx + \left(y^2 - 8xy + 2{,}5x^2\right)dy = 0$.

21. $\left(x^3 - 3xy^2\right)dx + \left(y^3 - 3x^2y\right)dy = 0$.

22. $\left(xy^2 + y\right)dx - x\,dy = 0$.

23. $\left(x^2 + y^2 + 2x\right)dx + 2y\,dy = 0$.

24. $xy' + y = y^2 \ln x$.

25. $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$.

26. $y' + y\operatorname{tg} x = \sin 2x$.

27. $y' + 4x^3y^3 + 2xy = 0$.

28. $xy' + xy^2 = y$.

29. $xy' - y^2 \ln x + y = 0$.

30. $\left(y^2 + xy^2\right)dx + \left(x^2 - yx^2\right)dy = 0$.

Задача 8. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.

Укажем три вида дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка

I. Уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x) \tag{1}$$

После n– кратного интегрирования получается общее решение.

II. Уравнение не содержащее искомой функции и ее производных до порядка $k-1$ включительно

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{2}$$

Порядок такого уравнения можно понизить на k единиц заменой

$$y^{(k)}(x) = z(x).$$

Тогда уравнение (2) примет вид $F\left(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}\right) = 0$.

Из последнего уравнения, если это возможно, определяют $z = f\left(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k}\right)$, а затем находят y из уравнения

$$y^{(k)} = f\left(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k}\right),$$

k – кратным интегрированием.

III. Уравнение не содержит независимого переменного

$$F\left(y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0. \tag{3}$$

Подстановка $y' = p(y)$, позволяет понизить порядок уравнения на единицу. Все производные выражаются через производные от новой функции p по y:

$$y' = p(y),$$
$$y'' = p'_y \cdot y'_x = p'_y \cdot p,$$
$$y''' = \frac{d}{dx}\left(p'_y \cdot p\right) = \frac{d}{dy}\left(p \cdot p'_y\right) \cdot p = p^2 p''_y + p'^2_y.$$

Пример 8.

Найти общее решение уравнения $y''' = \sin x + \cos x$.

Решение.

$y'' = -\cos x + \sin x + C_1,$

$y' = -\sin x - \cos x + C_1 x + C_2,$

$y = \cos x - \sin x + C_1 \dfrac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$

Пример 9. Решить уравнение $y''' = \sqrt{1 + (y'')^2}$.

Решение.

Данное уравнение не содержит искомой функции y и ее производной, уравнение II типа. Полагаем $y'' = z(x)$, тогда $y''' = z'$. После этого уравнения примет вид $z' = \sqrt{1 + z^2}$.

Разделяя переменные, найдем $z = \operatorname{sh}(x + C_1)$, заменяя на y'', получим $y'' = \operatorname{sh}(x + C_1)$. Интегрируя последовательно, будем иметь

$$y' = \operatorname{ch}(x + C_1) + C_2;$$
$$y = \operatorname{sh}(x + C_1) + C_2 x + C_3.$$

Ответ: $y = \operatorname{sh}(x + C_1) + C_2 x + C_3$.

Пример 10. Решить уравнение $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$.

Решение.

Данное уравнение III типа. Введем обозначение $y' = p(y)$, $y'' = p'_y \cdot p$, получим $p'_y \cdot p + p^2 = 2e^{-y}$ - уравнение Бернулли. Подстановкой $p^2 = z(y)$ оно сводится к линейному уравнению $z' + 2z = 4e^{-y}$.

$$z = e^{-\int 2dy} \cdot \left(C_1 + \int 4e^{-y} \cdot e^{\int 2dy} dy\right) = e^{-2y} \cdot \left(C_1 + 4\int 4 \int e^{y} dy\right) =$$
$$= C_1 e^{-2y} + 4e^{-y}.$$

Заменяя z на p^2, получим $y' = \pm\sqrt{4e^{-y} + C_1 e^{-2y}}$. Интегрируя, будем иметь

$$x + C_2 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{4e^{y} + C_1} \quad \text{или} \quad (x + C_2)^2 = e^{y} + \tilde{C}_1; \quad \tilde{C}_1 = \frac{C_1}{4}.$$

Замечание. При решении задачи Коши для уравнений высших порядков целесообразно определять значения постоянных C_i в процессе решения, а не после нахождения общего решения уравнения.

Пример 11. Решить задачу Коши $y'' = 2y^3;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$.

Решение.

Полагая $y' = p(y)$, получим $p_1 p' = 2y^3$ или $p\,dp = 2y^3\,dy$ откуда $p^2 = y^4 + C_1$; $y' = \sqrt{y^4 + C_1}$.

Разделяя переменные, найдем $x + C_2 = \int (y^4 + C_1)^{-1/2}\,dy$. Интеграл в правой части в элементарных функциях не вычисляется, как интеграл от дифференциального бинома, случай неберущегося интеграла.

Но если использовать начальные условия $y'(0)=1,\ y(0) = 1$, то $C_1 = 0$ и тогда

$$y' = y^2;\ -\frac{1}{y} = x + C_2;\ y = -\frac{1}{x + C_2};\ C_2 = -1;\ y = \frac{1}{1-x};$$

Ответ: $y = \dfrac{1}{1-x}$.

Упражнения. Решить уравнения.

1) $y''' = \dfrac{2}{x^3}$. Ответ: $y = \ln|x| + C_1\dfrac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$.

2) $y''' = -\dfrac{1}{2}y''^3$. Ответ: $y = \pm\dfrac{4}{3}(x + C_1)^{3/2} + C_2 x + C_3$.

3) $y \cdot y'' = y'^3$. Ответ: $y\ln y + x + C_1 y + C_2 = 0$.

4) $y''(x^2 + 1) = 2xy';\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3$. Ответ: $y = x^3 + 3x + 1$.

Решить уравнения, допускающие понижение порядка

1. $y^{IV} = x$.
2. $y'' = xe^x;\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.
3. $y''' = x + \cos x$.
4. $y''' = \dfrac{\ln x}{x^2};\ y(1) = 0,\ y'(1) = 1$.
5. $y'' = x + \sin x$.
6. $y'' \cdot (x+2)^5 = 1;\quad y(-1) = 1/12;\quad y'(-1) = -1/4$.
7. $y'' = \dfrac{1}{1 + x^2}$.
8. $y'' = x \cdot e^x;\ y(0) = y'(0) = 0$.
9. $x\,y''' = 2x + 3$.

10. $y''' = e^{-x}$; $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

11. $y'' + y' \cdot \operatorname{tg} x = \sin 2x$.

12. $2y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'}$; $y(1) = \dfrac{\sqrt{2}}{5}$; $y'(1) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

13. $x y'' - y' = e^x \cdot x^2$.

14. $x y''' - y'' = 0$; $y(1) = 0$; $y'(1) = 0$.

15. $y'' + 2x \cdot y'^2 = 0$.

16. $y''\left(x^2 + 1\right) = 2xy'$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

17. $x^3 y'' + x^2 y' - 1 = 0$.

18. $y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'}$; $y(2) = 0$, $y'(2) = 4$.

19. $\left(1 + e^x\right) y'' + y' = 0$.

20. $x y'' + x(y')^2 = y'$; $y(2) = 2$, $y'(2) = 1$.

21. $y^3 \cdot y'' + 1 = 0$.

22. $2y'' - 3y^2 = 0$; $y(-2) = 1$, $y'(-2) = -1$.

23. $y'' \cdot \operatorname{tg} y = 2y'^2$.

24. $y^3 \cdot y'' = -1$; $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

25. $(y - 1)y'' = 2y'^2$.

26. $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

27. $y y'' + (y')^2 = 1$.

28. $y y'' + y'^2 = 1$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

29. $y y'' = y'^2$.

30. $4 y'' \cdot \sqrt{y} = 1$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

Задача 9. Линейные дифференциальные уравнения 2– го и n–го порядка. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0, \tag{1}$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ - вещественные постоянные числа. Решение уравнения (1) находим в виде

$$y = e^{\lambda x} \text{ - подстановка Эйлера} \tag{2}$$

λ - неизвестная постоянная. Подставляя (2) в (1), получим уравнение

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \tag{3}$$

которому удовлетворяет λ.

Уравнение (3) называется характеристическим уравнением.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ - корни уравнения (3), причем среди них могут быть и кратные.

Возможны следующие случаи:

1) $\lambda_1,\ \lambda_2,\ ...,\ \lambda_n$ - вещественные и различные

Тогда фундаментальная система решений уравнения (1) имеет вид $e^{\lambda_1 x},\ e^{\lambda_2 x},\ ...,\ e^{\lambda_n x}$ и общим решением искомого уравнения будем

$$y_{о.о.} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + ... + C_n e^{\lambda_n x}.$$

2) Корни характеристического уравнения вещественные, но среди них есть кратные. Пусть, например,

$\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = \tilde{\lambda}$, т. е. $\tilde{\lambda}$ – является k – кратным корнем уравнения (3), а остальные $n-k$ корнем различные.

Фундаментальная система решений в этом случае имеет вид

$$e^{\tilde{\lambda}x},\ xe^{\tilde{\lambda}x},\ x^2 e^{\tilde{\lambda}x},\ ...,\ x^{k-1}\cdot e^{\tilde{\lambda}x},\ e^{\lambda_{n+...+x}},\ ...,\ e^{\lambda_n x},$$

а общее решение

$$y_{о.о} = C_1\, e^{\tilde{\lambda}x} + C_2 x e^{\tilde{\lambda}x} + ... + C_k\ x^{k-1} e^{\tilde{\lambda}x} + C_{k+1} e^{\lambda_{k+1}\cdot x}, + ... +\ x^{k-1}\cdot C_n\, e^{\lambda_n x}.$$

3) среди корней характеристического уравнения есть комплексные числа.

Пусть для определенности

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta,\ \ \lambda_2 = \alpha - i\beta,\ \ \ \lambda_3 = \gamma + i\delta,\ \ \lambda_4 = \gamma - i\delta,$$

А остальные корни вещественные (комплексные корни попарно сопряженные, т. к. по предположению коэффициенты уравнения (3) a_i – вещественные).

Фундаментальная система решений имеет вид

$$e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x,\ \ e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x,\ \ e^{\gamma x}\cdot\cos\delta x,\ \ e^{\gamma x}\cdot\sin\delta x,$$
$$e^{\lambda_5 x},\ \ e^{\lambda_6 x},\ \ ...,\ \ e^{\lambda_n x},$$

а общее решение

$$y_{о.о.} = C_1 e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x + C_3 e^{\gamma x}\cdot\cos\delta x + C_4 e^{\gamma x}\cdot\sin\delta x +$$
$$+\ C_5 e^{\lambda_5 x} + C_6 e^{\lambda_6 x} + ... + C_n e^{\lambda_n x}.$$

4) в случае, если $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ является k– кратным корнем уравнения (3), то $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ также будет k– кратным корнем и фундаментальная система решений будет иметь вид

$$e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x,\ \ e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x,\ \ x\cdot e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x,\ \ x\cdot e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x,\ ...,$$
$$x^{k-1}\cdot e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x,\ x^{k-1} e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x,\ e^{\lambda_{2k+1}\cdot x},...,\ e^{\lambda_n x},$$

а общее решение

$$y_{о.о.} = C_1 e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x + C_3\, x\cdot e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x + C_4\, x\cdot e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x + ... +$$
$$+\ C_{2k-1} x^{k-1} e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x + C_{2k}\, x^{k-1}\cdot e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x + C_{2k+1} e^{\lambda_{2k+1}\cdot x} + ... + C_n\ e^{\lambda_n\cdot x}.$$

Пример 12. Найти общее решение уравнения $y''' - 2y'' - 3y' = 0$.

Решение.

Составляем характеристическое уравнение $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda = 0$.

Находим $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 3$. Так как все они действительные и различные, то общее решение имеет вид $y_{о.о.} = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{3x}$.

Пример 13. Найти общее решение уравнения $y''' + 2y'' + y' = 0$.

Решение.

Характеристическое уравнение имеет вид

$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0;\ \lambda\left(\lambda^2 + 2\lambda + 1\right) = 0$.

Отсюда $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Корни вещественные, причем один из них $\lambda = -1$ – двукратный, поэтому общее решение имеет вид

$$y_{o.o.} = C_1 e^{-x} + C_2\, x \cdot e^{-x} + C_3\ .$$

Пример 14. Решить уравнение $y''' + 4y'' + 13y' = 0$.

Решение.

Характеристическое уравнение $\lambda^3 + 4\lambda^2 + 13\lambda = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2 - 3i$, $\lambda_3 = -2 + 3i$.

Общее решение

$$y_{o.o.} = C_1 + C_2 \cdot e^{-2x} \cdot \cos 3x + C_3\, e^{-2x} \cdot \sin 3x .$$

Пример 15. Решить уравнение $y^{v} - 2y^{IV} + 2y''' - 4y'' + y' - 2y = 0$.

Решение.

Характеристическое уравнение $\lambda^5 - 2\lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ или $(\lambda - 2)\left(\lambda^2 + 1\right)^2 = 0$ имеет корни $\lambda = 2$ – однократный и $\lambda = \pm\, i$ – пара двукратных мнимых корней. Общее решение

$$y_{o.o.} = C_1 e^{2x} + \left(C_2 + C_3 x\right)\cos x + \left(C_4 + C_5\, x\right)\sin x .$$

Упражнения. Проинтегрировать следующие однородные линейные уравнения.

1) $y'' - 6y' + 8y = 0$. Ответ: $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 4,\ \ y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}$.

2) $y''' - 2y'' + y' = 0$. Ответ: $\lambda_1 = 0,\ \lambda_{2,3} = 1,\ \ y = C_1 + C_2 e^{x} + C_3\, x\, e^{x}$.

3) $y^{V} - 2y^{IV} + 2y''' = 0$. Ответ: $\lambda_{1,2,3} = 0,\ \lambda_{4,5} = 1 + i$,

$$y = C_1 + C_2\, x + C_3\, x^2 + C_4\, e^{x} \cdot \cos x + C_5\, e^{x} \sin x .$$

4) $y^{V} + 8y''' + 16y' = 0$ Ответ: $\lambda_1 = 0,\ \lambda_{2,3} = \pm 2i, ,\ \lambda_{4,5} = \pm 2i$,

$$y = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x + C_4\, x \cdot \cos 2x + C_5\, x \sin 2x .$$

.

Решить однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами:

1. $y'' - 4y' + 3y = 0;\ \ y(0) = 6,\ \ y'(0) = 10$.
2. $3y'' - 2y' - 8y = 0$.
3. $y'' - 2y' + 2y = 0;\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1$.
4. $y'' - 2y' + 2y = 0$.
5. $y'' - 2y' + 3y = 0;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3$.

6 $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$.

7. $y''' + y'' = 0;\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0,\ y''(0) = 1$.
8. $y^{IV} + 2y^{V} + y^{IV} = 0$.
9. $y'' - 5y' + 4y = 0$.

10. $4y'' - 8y' + 5y = 0$.

11. $y'' - 2y' + y = 0; \quad y(2) = 1, \; y'(2) = -2$.

12. $y''' - 8y = 0$.

13. $y''' - y' = 0; \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 1$.

14. $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$.

15. $y'' - 5y' + 4y = 0; \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 1$.

16. $y''' - 2y'' + 2y' = 0$.

17. $y'' - y = 0; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$.

18. $y^{IV} - y = 0$.

19. $y'' + y = 0; \quad y(\pi/2) = 1, \; y'(\pi/2) = 0$.

20. $y''' - 3y' - 2y = 0$.

21. $y'' + 2y = 0; \quad y(3) = 0, \; y'(3) = 0$.

22. $2y''' - 3y'' + y' = 0$.

23. $y'' - 6y' + 8y = 0; \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 2$.

24. $2y'' + 4y' + 8y = 0$.

25. $y'' + 3y' + 2y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$.

26. $y^{V} - 6y^{IV} + 9y''' = 0$.

27. $y''' \; 13y' - 12y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0$.

28. $y^{IV} - 8y''' + 16y = 0$.

29. $y'' - y' + y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$.

30. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 0$.

Указание. Воспользоваться формулой извлечения корня n–й степени из комплексного числа

$$z = \rho \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + k\pi}{n}\right], \; k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Задача 10. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида. Метод подбора или метод неопределенных коэффициентов.

Дано уравнение

$$L[y] \equiv a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x) \qquad (1)$$

С постоянными вещественными коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Общее решение неоднородного уравнения или уравнения с правой частью $f(x)$ равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения неоднородного уравнения $y_{\text{ч.н.}}$

$$y_{\text{о.н.}} = y_{\text{о.о.}} + y_{\text{ч.н.}}.$$

Для правых частей специального вида частное решение можно найти так называемым методом подбора.

Общий вид правой части $f(x)$ уравнения (1), при котором возможно применить метод подбора, следующий:

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot \left[P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x \right] \qquad (2),$$

где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ многочлены степени m и n соответственно.

В этом случае частное решение $y_{ч.н.}$ уравнения (1) находится в виде

$$y_{ч.н.} = x^r \cdot e^{\alpha x} \cdot \left[\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + Q_k(x)\sin\beta x \right] \qquad (3),$$

где $k = \max(m,n)$, $\tilde{P}_k(x)$ и $\tilde{Q}_k(x)$ – многочлены от x k –й степени общего вида с неопределенными коэффициентами, а r – кратность корня $\lambda = \alpha \pm i\beta$ характеристического уравнения (если $\alpha \pm i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, то $r = 0$).

Частные случаи $f(x)$, определяемые формулой (2):

I. $f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_m(x)$.

1) если число α не является корнем х.у., то

$$y_{ч.н.} = e^{\alpha x} \cdot Q_m(x),$$

где $Q_m(x)$ – многочлен той же степени, что и $P_m(x)$, но с неопределенными коэффициентами.

2) число α является корнем $x_0 y$ кратности r, то

$$y_{ч.н.} = x^r \cdot e^{\alpha x} \cdot Q_m(x).$$

II. $f(x) = P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x$, то

если

1) $\pm i\beta$ не является корнем х.у., то

$$y_{ч.н.} = \tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)\sin\beta x, \quad k = \max(m,n).$$

2) число $\pm i\beta$ является корнем х.у. кратности r, то

$$y_{ч.н.} = x^r \cdot \left(\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)\sin\beta x \right).$$

III. $f(x) = e^{\alpha x} \cdot \left[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x \right]$, то

если

1) число $\alpha \pm i\beta$ не является корнем х.у., то

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot \left[\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)\sin\beta x \right].$$

2) число $\alpha \pm i\beta$ является корнем х.у. кратности r, то

$$y_{х.у.} = x^r \cdot e^{\alpha x} \cdot \left[\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)\sin\beta x \right].$$

Замечание. Первые два вида являются частными случаями III вида.

Пример 16. Найти общее решение уравнения $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$.

Решение.

Характеристической уравнение (х.у.) $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$ имеет различные корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -i$, $\lambda_3 = i$, поэтому общее решение

$$y_{о.о.} = C_1 e^x + C_2\cos x + C_3\sin x.$$

Находим частное решение $y_{ч.н.}$ $f(x)=x^2+x$; это многочлен $P_2(x)=x^2+x$; $\alpha=0$ – не является корнем х.у., поэтому

$$y_{ч.н.}=\tilde{P}_2(x)=Ax^2+Bx+C,$$

A, B, C – неопределенные (неизвестные) коэффициенты.

Подставляя $y_{ч.н.}$ в уравнение, получим

$$-Ax^2+(2A-B)\cdot x+(B-2A-C)=x^2+x.$$

Откуда

$$\begin{array}{c|l} x^2 & \\ x & \\ x^0 & \end{array}\!\!\begin{cases} A=-1, \\ 2A-B=1, \\ B-2A-C=0. \end{cases}$$

Решая систему, находим $A=-1, B=-3, C=-1$. Следовательно, $y_{ч.н.}=-x^2-3x-1$ и общее решение будет

$$y_{о.н.}=C_1e^x+C_2\cos x+C_3\sin x-x^2-3x-1.$$

Пример 17. Решить уравнение $y'''+3y'+2y=\sin x$.

Решение.

$y_{о.о.}$: $y''+3y'+2y=0$; $\lambda^2+3\lambda+2=0$ – х.у.

$\lambda_{1б2}=-2;-1.$ $\quad y_{о.о.}=C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}$.

$y_{ч.н.}$: $f(x)=\sin x$; $\alpha=0, \alpha\pm i\rho=\pm i$ – нее является корнем х.у., поэтому

$y_{ч.н.}=A\sin x+B\cos x$.

Подставляя $y_{ч.н.}$ в уравнение

$-A\sin x-B\cos x+3(A\cos x-B\sin x)+2(A\sin x+B\cos x)=\sin x$.

Приравнивая коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$ слева и справа, получим систему уравнений относительно неизвестных A и B.

$$\begin{array}{c|l} \sin x & \\ \cos x & \end{array}\!\!\begin{cases} A-3B=1, & A=1+3, \\ 3A+B=0. & 10B=-3, \end{cases} \quad B=-\frac{3}{10},\ A=\frac{1}{10}.$$

$$y_{ч.н.}=\frac{1}{10}\sin x-\frac{3}{10}\cos x.$$

$$y_{о.н.}=y_{о.о.}+y_{ч.н.}=C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}+\frac{1}{10}\sin x-\frac{3}{10}\cos x.$$

<u>Замечание.</u> Если правая часть уравнения $L[y]=f(x)$ (1) имеет вид: $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, то частное решение уравнения (1) $y_{ч.н.}=y^{I}_{ч.н.}+y^{II}_{ч.н.}$, где $y^{I}_{ч.н.}$ – частное решение уравнения $L[y]=f_1(x)$; $y^{II}_{ч.н.}$ – частное решение уравнения $L[y]=f_2(x)$.

Упражнения. Определить вид частного решения.

1) $y''+y'+2y=x$. $\quad$ Ответ: $y_{ч.н.}=Ax+B$.

2) $y''+y'+2y=xe^{3x}$. $\quad$ Ответ: $y_{ч.н.}=e^{3x}(Ax+B)$.

3) $y'' + y' = x^2$. Ответ: $y_{ч.н.} = x\left(Ax^2 + Bx + C\right)$.

4) $y''' + 2y'' + y' = (2x+1)\sin x$. Ответ: $y_{ч.н.} = (Ax + B)\sin x + (Cx + Д)\cos x$.

Для следующих линейных неоднородных дифференциальных уравнений определить вид частного решения не находя числовых значений коэффициентов:

1. $y'' + 3y' = e^{x}$.
2. $y'' + 7y' = e^{-7x}$.
3. $y'' - 8y' + 16y = (1 - x)e^{4x}$.
4. $y'' - 10y' + 25y = e^{5x}$.
5. $4y'' - 3y' = x \cdot e^{\frac{3}{4}x}$.
6. $y'' - 4y' = x \cdot e^{4x}$.
7. $y'' + 25y = \cos 5x$.
8. $y'' + y = \sin x - \cos x$.
9. $y'' + 4y' + 8y = e^{2x}(\sin 2x + \cos 2x)$.
10. $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}(\sin 2x - \cos 2x)$.
11. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cdot \cos 2x$.
12. $y''' + y = x$.
13. $y'' - y = e^{x} \cdot x \cdot \sin x$.
14. $y'' + y = x \cdot \cos x$.
15. $y''' - y' = e^{x}\sin x + 2x^2$.
16. $y'' - 2y' + 2y = e^{x} \cdot \sin x$.
17. $y'' + 4y = x^2 \cdot \sin^2 x$.
18. $y'' - 4y' = \cos^2 4x$.
19. $y'' - 7y' = (x-1)^2$.
20. $y'' - 4y' + 13y = e^{2x}\left(x^2\cos 3x - x\sin 3x\right)$.
21. $y'' - 2y' + 2y = e^{x} + x\cos x$.
22. $y'' - 8y' + 20y = 5xe^{4x} \cdot \sin 2x$.
23. $y''' + y' = \sin x + x\cos x$.
24. $y''' - y'' - y' + y = 3e^{x} + 5\sin x$.
25. $y''' + 4y' + 3y = \ln x$.
26. $y''' - 4y'' + 5y = e^{2x} \cdot \sin x$.
27. $y''' - 4y'' + 3y = x^2 + xe^{2x}$.
28. $y'' - 2y' + 2y = (x + e^{x})\sin x$.
29. $y'' + 2y' + y = x \cdot (e^{-x} - \cos x)$.
30. $y'' - 6y' + 8y = 5 \cdot x e^{2x}$.

Упражнения. Решить уравнения.

1) $y'' - y = x^2 - x + 1$. Ответ: $y = y_{о.о.} + y_{ч.н.} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x^2 + x - 3$.

2) $y'' - 2y' + y = 4e^x$. Ответ: $y = e^x \left(C_1 + C_2 x\right) + 2x^2 e^x$.

3) $y'' + y = 6\sin 2x$. Ответ: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - 2\sin 2x$.

4) $y'' + y = e^x + \cos x$. Ответ: $y = 1/2\left(e^x + x\sin x\right) + C_1\cos x + C_2 \sin x$.

Замечание. Следует найти отдельно два частных решения $\overset{\mathrm{I}}{y}_{ч.н.}$ и $\overset{\mathrm{II}}{y}_{ч.н.}$ соответствующие $f^{\mathrm{I}}(x) = e^x$ и $f^{\mathrm{II}}(x) = \cos x$, но можно найти их и вместе.

Задача 11. Решить следующие линейные неоднородные уравнения с правой частью специального вида методом подбора частного решения по виду правой части.

1. $y'' + 4y' + 4y = 8\,e^{-2e}$.
2. $y'' + y = 2\,(1 - x);\quad y(0) = 2,\ y'(0) = -2$.
3. $y'' + 4y' + 3y = 9e^{-3x}$.
4. $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 12x + 2;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3$.
5. $7y'' - y' = 14x$.
6. $y'' + 9y = 36e^{3x};\ y(0) = 2,\ y'(0) = 6$.
7. $y'' + 3y' = 3xe^{-3x}$.
8. $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x};\ y(0) = y'(0) = 0$.
9. $y'' + 5y' + 6y = 10\,(1 - x)\ e^{-2x}$.
10. $y'' + y' = e^{-x};\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = -1$.
11. $y'' + 2y' + 2y = 1 + x$.
12. $y'' + 6y' + 9y = 10\sin x;\quad y(0) = y'(0) = 0$.
13. $y'' + y' + y = \left(x + x^2\right)e^x$.
14. $y'' + y = 2\cos x;\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.
15. $y'' + 4y' - 2y = 8\sin 2x$.
16. $y'' + 4y = \sin x;\ y(0) = y'(0) = 1$.
17. $y'' + y = 4x\cos x$.
18. $y'' + y = 4x \cdot \cos x;\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 1$.
19. $4y'' + 8y' = x\sin x$.
20. $y''' - y' = -2x;\quad y(0)\ 0,\quad y'(0) = 1,\ y''(0) = 2$.
21. $y'' - 3y' + 2y = x\,e^x$.
22. $y^{IV} - y = 8e^x;\quad y(0) = -1,\quad y'(0) = 0,\ y''(0) = 1,\ y'''(0) = 0$.
23. $y''' - y'' + y' = x^2 + x$.
24. $y''' - y = 2x;\ y(0) = y'(0) = 0,\quad y''(0) = 2$.
25. $y^{IV} + y'' = x^2 + x$.

26. $y'' - 2y' \ \ 2e^x$; $y(1) = -1, \quad y'(1) = 0$.

27. $y''' - y = \sin x$.

28. $y'' + y = 4e^x; \quad y(0) = 4, \ y'(0) = -3$.

29. $y^{IV} - 2y'' + y = \cos x$.

30. $y^{IV} - y = 8e^x; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 4, \ y'''(0) = 6$.

Задача 12. Метод вариации произвольных постоянных, метод Лагранжа.

Рассмотрим метод вариации произвольных постоянных для уравнения второго порядка

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)\,y = f(x) \tag{1}$$

Если известна фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)\,y = 0, \qquad (2),$$

то общее решение неоднородного уравнения (1) может быть найдено методом вариации постоянных (метод Лагранжа).

Общее решение уравнения (2) имеет вид

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \tag{3}$$

где $y_1(x), \ y_2(x)$ – фундаментальная система решений (ф.с.р.),

C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Решение уравнения (1) будем находить в виде

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2, \tag{4}$$

где $C_1(x), C_2(x)$ – некоторые пока неизвестные функции от x. Для их определения получаем систему

$$\begin{cases} y_1\,C_1'(x) + y_2\,C_2'(x) = 0, \\ y_1'\,C_1'(x) + y_2'\,C_2'(x) = f(x). \end{cases} \tag{5}$$

Решая (5) относительно $C_1'(x), C_2'(x)$, получим

$$C_1'(x) = -\frac{y_2 f(x)}{W[y_1, y_2]}, \qquad C_2'(x) = \frac{y_1 f(x)}{W[y_1, y_2]} \tag{6}$$

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \text{ – определитель Вронского.}$$

$$W[y_1, y_2] \neq 0, \text{ т. к. } \ y_1(x), \ y_2(x) \text{ – ф. с. р.}$$

Из (6) находим

$$C_1(x) = -\int \frac{y_2 f(x)}{W[y_1, y_2]}\,dx + \tilde{C}_1; \qquad C_2'(x) = \int \frac{y_1 f(x)}{W[y_1, y_2]}\,dx + \tilde{C}_2',$$

где $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$ – постоянные интегрирования.

Пример 18. Решить уравнение $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$.

Решение.

Соответствующее однородное уравнение будет $y'' + y = 0$.

Его характеристическое уравнение $\lambda^2+1=0$; $\lambda_1=-i$, $\lambda_2=i$ и общее решение имеет вид $y_{о.о.}\ C_1\cos x+C_2\sin x$.
Общее решение исходного уравнения имеем в виде

$$y=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x \qquad (*)$$

$y_1=\cos x$, $y_2=\sin x$ – ф. с. р.
$C_1(x)$ и $C_2(x)$ – неизвестные функции от x.

Для их нахождения составим систему

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x+C_2'(x)\sin x=0, \\ -C_1'(x)\sin x+C_2'(x)\cos x=\dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Решаем эту систему относительно $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$:

$$C_1'(x)=-\operatorname{tg}x, \qquad C_2'(x)=1.$$

Интегрируя, находим

$$C_1(x)=\ln|\cos x|+\tilde{C}_1, \quad C_2(x)=x+\tilde{C}_2.$$

Подставляя выражения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в (*), получаем общее решение искомого уравнения

$$y=\tilde{C}_1\cos x+\tilde{C}_2\sin x+\cos x\cdot\ln|\cos x|+x\cdot\sin x.$$

Здесь $\cos x\cdot\ln|\cos x|+x\cdot\sin x$ – частное решение исходного уравнения.

Упражнения. Решить уравнения.

1) $y''-y'=\dfrac{1-x}{x^2}e^x$. Ответ: $y=C_1+C_2e^x-e^x\ln|x|$.

2) $y''+y=\dfrac{1}{\sin^3 x}e^x$. Ответ: $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\dfrac{\cos 2x}{2\sin x}$.

3) $y''+y=\operatorname{ctg}x$. Ответ: $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|\sin x$.

4) $y''+4y=\operatorname{tg}2x$. Ответ: $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\dfrac{1}{4}\cos 2x\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)\right|$,

или $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\dfrac{1}{4}\cos 2x\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right|$.

Решить методом вариации произвольных постоянных следующие уравнения:

1. $y''+y=\dfrac{1}{\sin x}$.

2. $y''-y=\dfrac{1}{e^x+1}$.

3. $y''+y=\dfrac{1}{\cos^3 x}$.

4. $y''+y=\dfrac{1}{\sqrt{\sin^5 x\cdot\cos x}}$.

5. $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x^2+1}$.

6. $y''+2y'+2y=\dfrac{1}{e^x\sin x}$.

7. $y'' + y = \dfrac{2}{\sin^3 x}$.

8. $y'' - y' = e^{2x} \cdot \cos e^x$.

9. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x + 1}$.

10. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

11. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}$.

12. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \cdot \ln x$.

13. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$.

14. $y'' + 4y = 2\,\mathrm{tg}\, x$.

15. $y'' + 2y' + y = 3 \cdot e^{-x} \cdot \sqrt{x+1}$.

16. $y'' + y = 2\sec^3 x$.

17. $y'' + y = -\mathrm{ctg}^2 x$.

18. $y'' - y' = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$.

19. $y'' - y' = e^{2x} \cdot \sqrt{1 - e^{2x}}$.

20. $y'' - y' = e^{2x} \cdot \cos e^x$.

21. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$.

22. $y'' + y = \mathrm{tg}\, x$.

23. $y'' + y = \mathrm{tg}\, x$.

24. $y'' - y' = \dfrac{2 - x}{x^3} e^x$.

25. $y'' - y = 4\sqrt{x} + \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$.

26. $y'' + y = -\dfrac{1}{\sin 2x \sqrt{\sin 2x}}$.

27. $y'' + y = \dfrac{1}{\sqrt{\cos 2x}}$.

28. $y'' + 5y' + 6y = \dfrac{1}{1 + e^{2x}}$.

29. $y'' + 4y = \mathrm{ctg}\, 2x$.

30. $y'' + y = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$.

Рассмотрим задачу $y'' + P_1 y' + P_2 y = f(x)$, (1)

$$y(0) = y_0,\; y'(0) = y'_0, \quad (2)$$

$$y_{\text{о.н.}} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_{\text{ч.н.}}, \quad (3)$$

где $y_1 y_2$ – ф.с.р. Если $V_1(x), V_2(x)$ – нормированная ф.с.р., т. е $V_1(0) = 1$, $V_2(0) = 0$, $V'_1(0) = 0$, $V'_2(0) = 1$, то решение задачи Коши (1), (2) запишется в виде

$$y = y_0 V_1(x) + y'_0 V_2(x) + \int_0^x f(t)\, V_2(x - 1)\, dt. \quad (4)$$

Пример 19. Решить методом Коши

$$y'' + 4y' + 4y = 3e^{-x},\; y(0) = 1,\; y'(0) = 2.$$

Решение.

$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ – корни х.у., $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = x e^{-2x}$ – ф.с.р.

Найдем нормированную ф.с.р.:

$$\left.\begin{matrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} V_1(x) \\ V_2(x) \end{matrix}\right.;\; V_1 V_2 : \left\{\begin{matrix} V_1(0) = 1 \;\; V_2(0) = 0 \\ V'_1(0) = 0 \;\; V'_2(0) = 1. \end{matrix}\right.$$

$V_1(x),\ V_2(x)$ будем находить в виде линейной комбинации решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$:

а) $V_1 = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{-2x} + C_2\, x e^{-2x}$, $\quad V_1' = -2C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-2x} - 2C_2\, x e^{-2x}$,

$$\left.\begin{aligned} &V_1(0): C_1 + C_2\cdot 0 = 1 \ \Rightarrow\ C_1 = 1\\ &V_1'(0): -2C_1 + C_2 = 0 \ \Rightarrow C_2 = 2\end{aligned}\right\} \Rightarrow V_1(x) = e^{-2x} + 2x e^{-2x};$$

б) $V_2 = C_3 y_1 + C_4 y_2 = C_3 e^{-2x} + C_4\, x e^{-2x}$,

$$\left.\begin{aligned} &V_2(0): C_3 + C_4\cdot 0 = 1 \ \Rightarrow\ C_3 = 0\\ &V_2'(0): -2C_3 + C_4 = 1 \ \Rightarrow C_4 = 1\end{aligned}\right\} \Rightarrow V_2(x) = x e^{-2x}.$$

$$y = y_0 V_1 + y_0' V_2 + \int\limits_0^x f(t)\, V_2(x-t)\,dt = e^{-2x} + 4x e^{-2x} + 3\int\limits_0^x (x-t)\, e^{-2(x-t)}\cdot e^{-t}\ dt.$$

Вычислим интеграл:

$$x\int\limits_0^x (x-t)\, e^{-2(x-t)}\ \cdot e^{-t} dt = \int\limits_0^x (x-t)\, e^{-2x+2t-t}\, dt =$$

$$= e^{-2x}\int\limits_0^x (x-t)e^{t}\,dt = \left|\begin{aligned} &u = x - t\\ &du = -dt\\ &v = e^{t}\\ &dv = e^{tdt}\end{aligned}\right| = e^{-2x}\left[\left.(x-t)e^{t}\right|_0^x + \int\limits_0^x e^{t}\ dt\right]\ e^{-2x}\left(-x + e^{x} - 1\right).$$

Подставим в решение $y = e^{-2x}\left(x + 3e^{x}\right) - 2$.

Задача 13. Решить неоднородные линейные дифференциальные уравнения с правой частью неспециального вида методом Коши.

1. $y'' - 2y' + 2y = 2e^{x}$, $\quad y(0) = 2,\ y'(0) = 6$.
2. $y'' - \ = 2\operatorname{sh} x$, $\quad y(0)$, $\quad y(0) = 1$.
3. $y'' + 16y = \dfrac{16}{\cos\ 4x}$, $\ y(0) = 3,\ \ y'(0) = 0$.
4. $y'' + y = 3\sin\ x$, $\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0{,}5$.
5. $y'' -\ 3y' + 2y\ = \dfrac{1}{2 + e^{-x}}$, $\quad y(0) = 1 + 3\ln 3,\ y'(0) = 5\ln 3$.
6. $y'' - 4\,y = \operatorname{ch} 2x$, $\quad y(0) = 3,\quad y'(0) = -2$.
7. $y'' + 2y' + y = e^{x} + e^{\ -x}$, $\quad y(0) = \dfrac{5}{4},\ \ y'(0) = \dfrac{1}{4}$.
8. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{3 + e^{-x}}$, $\quad y(0) = 1 + 8\ln 2,\quad y'(0) = 14\ln 2$.
9. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$, $\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 0$.

10. $y'' + 9y = \dfrac{1}{\cos 3x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

11. $y'' + 4y = 4\,\mathrm{tg}\,2x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

12. $y'' + 4y' + 4y = 3e^{-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

13. $y'' + 4y = \sin 2x$, $y(0) = 0$, $y''(0) = 0$.

14. $y'' + \pi^2 y = \dfrac{\pi^2}{\cos \pi x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.

15. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{e^{-x}}{2 + e^{x}}$, $y(0) = y'(0) = 0$.

16. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{e^{-x}}{2 + e^{x}}$, $y(0) = y'(0) = 0$.

17. $y'' + 4y = \dfrac{4}{\cos 2x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

18. $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4e^{2x}}{1 + e^{-2x}}$, $y(0) = y'(0) = 0$.

19. $y'' + 16y = \dfrac{16}{\sin 4(x + \pi/8)}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

20. $y'' + 4y = 4\,\mathrm{tg}\,2x$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$.

21. $y'' - y' = e^{-x}$, $y(0) = \ln 27$, $y'(0) = \ln 9 - 1$.

22. $y'' = 9y = x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

23. $y'' + 9y = \dfrac{9}{\cos 3x}$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 3\pi/2$.

24. $y'' + 6y' + 8y = 4e^{-2x}$, $y(0) = 6$, $y'(0) = 3$.

25. $y'' + y = 4e^{x}$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -3$.

26. $y'' - y' = \dfrac{1}{1 + e^{x}}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

27. $y'' + 4y = \sin x$, $y(0) = y'(0) = 1$.

28. $y'' - 5y' + 6y = 13 \sin 3x$, $y(0) = y'(0) = 0$.

29. $y'' - y' = 2(1 - x)$, $y(0) = y'(0) = 1$.

30. $y'' - 8y' + 6y = \sin x$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Задача 14. Решить неоднородные линейные дифференциальные уравнения с разрывной правой частью методом Коши.

Пример 20. Решить методом Коши

$$y'' + 3y' - 4y = f(x), \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 2,$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & 0 < x \le 1, \\ 0, \; x > 1. \end{cases}$$

Решение. Составим характеристическое уравнение: $\lambda^2+3\lambda-4=0$, $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-4$; $y_1=e^x$, $y_2=e^{-4x}$ – ф.с.р.

Найдем нормированную ф.с.р. V_1, V_2:

а) $V_1=C_1e^x+C_2e^{-4x}$; $V_1'=C_1e^x-4C_2e^{-4x}$,

$$\left.\begin{array}{l}V_1(0)=1\\ V_1'(0)=0\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}C_1+C_2=1\\ C_1-4C_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=4/5\\ C_2=1/5\end{cases}\Rightarrow\ V_1=\frac{1}{5}\left(4e^x+e^{-4x}\right);$$

б) $V_2(x)=C_3e^x+C_4e^{-4x}$;

$$\left.\begin{array}{l}V_2(0)=0\\ V_2'(0)=1\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}C_3+C_4=0\\ C_3-4C_4=1\end{cases}\Rightarrow\ V_2=\frac{1}{5}\left(e^x-e^{-4x}\right);$$

$$y(x)=A_1V_1+A_2V_2+\int_0^x f(t)\,V_2(x-t)\,dt=\left|\begin{array}{l}A_1=y(0)=1\\ A_2=y'(0)=2\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{5}\left(4e^x+e^{-4x}\right)+\frac{2}{5}\left(e^x-e^{-4x}\right)+I,$$

где $I=\begin{cases}I_1,\ x\in[0,1)\\ I_2,\ x\in[1,+\infty).\end{cases}$

$$1.\ x\in[0,1),\ I_1=\frac{1}{5}\int_0^x\left(1-t^2\right)\cdot\left(e^{x-t}\right)-e^{-4(x-t)}\,dt=\frac{1}{5}e^x+\frac{7}{160}e^{-4x}+\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{8}x+\frac{5}{32};$$

$$2.\ x\in[1,\infty),\ I_2=\frac{1}{5}\int_0^1\left(1-t^2\right)\cdot\left(e^{x-t}-e^{-4(x-t)}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{7}{32}e^{-4x}-e^x+4e^{x-1}-\frac{3}{32}e^{-4(x-1)}\right).$$

1. $y''-5y'+6y=f(x)$, $y(0)=1,\ y'(0)=1,$ $\quad f(x)=\begin{cases}x, & 0<x\le1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$

2. $y''-4y'+3y=f(x)$, $y(0)=2,\ y'(0)=1,$ $\quad f(x)=\begin{cases}1-x, & 0<x\le1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$

3. $y''+y=f(x)$, $y(0)=1,\ y'(0)=2,$ $\quad f(x)=\begin{cases}x^2, & 0<x\le1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$

4. $y''-y=f(x)$, $y(0)=y'(0)=1,$ $\quad f(x)=\begin{cases}1-x^2, & 0<x\le1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$

5. $y''+4y=f(x)$, $y(0)=1,\ y'(0)=3,$ $\quad f(x)=\begin{cases}\sin x^2, & 0<x\le\pi/2,\\ 0, & x>\pi/2.\end{cases}$

6. $y''+9y=f(x)$, $y(0)=2,\ y'(0)=1,$ $\quad f(x)=\begin{cases}\cos x, & 0<x\le\pi/2,\\ 0, & x>\pi/2.\end{cases}$

7. $y'' - 4y + 3y = f(x)$, $y(0) = 1/2$, $y'(0) = 3/2$, $f(x) = \begin{cases} x^3, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$

8. $y'' - 9y' = f(x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1/2$, $f(x) = \begin{cases} 1 - x^3, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$

9. $y'' + 16y = f(x)$, $y(0) = 1/2$, $y'(0) = 1$, $f(x) = \begin{cases} 1 - \sin x, & 0 < x \le \pi/2, \\ 0, & x > \pi/2. \end{cases}$

10. $y'' + 25y = f(x)$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$, $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x, & 0 < x \le \pi/2, \\ 0, & x > \pi/2. \end{cases}$

11. $y'' + 9 = f(x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$, $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$

12. $y'' - 9y' + 18y = f(x)$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$, $f(x) = \begin{cases} e^{3x}, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$

13. $y'' - 7y' + 10y = f(x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$, $f(x) = \begin{cases} 1 - e^{x}, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$

14. $y'' + 36y = f(x)$, $y(0) = y'(0) = 2$, $f(x) = \begin{cases} 1/2(1 - \sin x), & 0 < x \le \pi/2, \\ 0, & x > \pi/2. \end{cases}$

15. $y'' - 3y' + 2y = f(x)$, $y(0) = 1/2$, $y'(0) = 1$, $f(x) = \begin{cases} 2 - x - x^2, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$

16. $y'' + 3y' - 4y = f(x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$

17. $y'' + 4y' + 4y = f(x)$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$, $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$

18. $y'' + \frac{1}{\pi^2} y = f(x)$, $y(0) = 6$, $y'(0) = 4$, $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$

19. $y'' + \pi y = f(x)$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 7$, $f(x) = \begin{cases} x + 2, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$

20. $y'' - 3y' = f(x)$, $y(0) = \ln 4$, $y'(0) = 2\ln 4$, $f(x) = \begin{cases} e^{x}, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$

21. $y'' + \frac{1}{\pi^2} y = f(x)$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$, $f(x) = \begin{cases} \pi, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$

22. $y'' - 9y' + 18y = f(x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $f(x) = \begin{cases} e^{2x}, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$

23. $\begin{array}{l} y'' - 6y' + 8y = f(x), \\ y(0) = \ln 2,\ y'(0) = 3\ln 2, \end{array}$ $\quad f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$

24. $\begin{array}{l} y'' + 6y' + 8y = f(x), \\ y(0) = 3\ln 3,\ y'(0) = \ln 3, \end{array}$ $\quad f(x) = \begin{cases} x - 1, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$

25. $\begin{array}{l} y'' - y' = f(x), \\ y(0) = y'(0) = 1, \end{array}$ $\quad f(x) = \begin{cases} 4 + x, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$

26. $\begin{array}{l} y'' + 4y' = f(x), \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2, \end{array}$ $\quad f(x) = \begin{cases} \cos 2x, & 0 < x \le \pi/2, \\ 0, & x > \pi/2. \end{cases}$

27. $\begin{array}{l} y'' + 3y' = f(x), \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2/3, \end{array}$ $\quad f(x) = \begin{cases} e^{-3x}, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$

28. $\begin{array}{l} y'' - 2y' = f(x), \\ y(0) = y'(0) = 2, \end{array}$ $\quad f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$

29. $\begin{array}{l} y'' + 3y' + 2y = f(x), \\ y(0) = 0,\ y'(0) = -1, \end{array}$ $\quad f(x) = \begin{cases} 5e^{5x}, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$

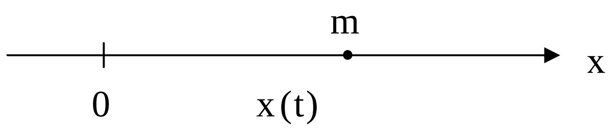
30. $\begin{array}{l} y'' + y' = f(x), \\ y(0) = (0) = 0, \end{array}$ $\quad f(x) = \begin{cases} e^{x}, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$

Задача 15. По условию задачи составить дифференциальное уравнение и решить его.

Дифференциальные уравнения являются математической моделью реальных процессов. При составлении д.у. мы пользуемся законами конкретных наук, таких как физика, химия, биология, экономика. Рассмотрим несколько примеров.

Механический смысл д.у. второго порядка.

Предположим, что материальная точка массы m движется вдоль оси Ox под влиянием сил:



1) сила сопротивления среды $-a x'(t)$, определяемая опытным путем. При малых скоростях сила сопротивления среды пропорциональна первой степени скорости, a – коэффициент пропорциональности. При больших скоростях сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости;

2) восстанавливающая сила, стремящаяся вернуть точку в положение равновесия, т. е. сила упругости $-b x'(t)$ $(b>0)$;

3) $F(t)$ - внешняя сила, направленная вдоль оси Ox.

По второму закону Ньютона сила инерции $m\dfrac{d^2x}{dt^2}$ уравновешивается всеми силами, действующими на точку. Поэтому уравнение

$$m x''(t) = -a x'(t) - b x(t) + F(t) \qquad (1)$$

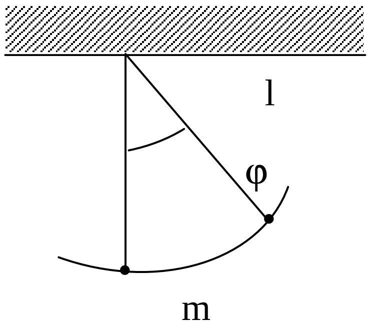
Есть дифференциальное уравнение движения материальной точки. Разделим на m обе части уравнения (1) и введем обозначения:

$$h = \frac{a}{2m}, \quad k^2 = \frac{b}{m}, \quad f(t) = \frac{F(t)}{m}. \qquad (2)$$

Тогда получим $\quad x''(t) + 2hx'(t) + k^2 x(t) = f(t) \qquad (3)$

К уравнению (1) или (3) приводят следующие задачи:

а) колебания математического маятника



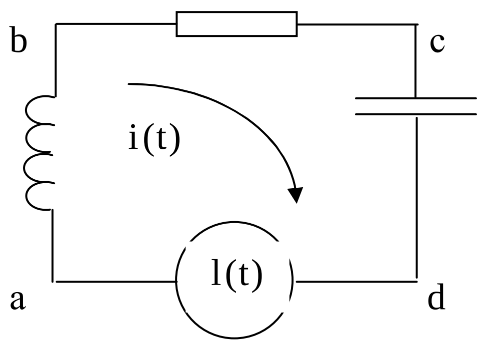
φ – малое отклонение от положения равновесия.

$ml \dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg\sin\varphi$, g – ускорение свободного падения,

$\sin\varphi \sim \varphi$. Получим $\varphi'' + \omega^2\varphi = 0$, $\omega^2 = \dfrac{g}{l}$ – уравнение свободных гармонических колебаний;

б) колебательный контур

Последовательный колебательный контур состоит из последовательно включенных источника тока, напряжение которого изменяется по закону $e(t)$, например,



$l(t) = E\sin(vt + \varphi)$, сопротивления R, индуктивности L и емкости C ($E > 0$, $R > 0$, $C > 0$, $L > 0$, v и φ – постоянные).

Найти силу тока в контуре в установившемся (периодическом) режиме.

Последовательный колебательный контур представляет собой электрическую цепь с четырьмя узлами a, b, c, d. Применив первый закон Кирхгофа, получим

$$J_{da} + J_{ba} = 0, \qquad J_{ab} + J_{cb} = 0, \qquad J_{вс} + J_{dc} = 0, \qquad J_{cd} + J_{ad} = 0.$$

Откуда $J_{da} = J_{ab} = J_{bc} = J_{cd} = i(t)$, где $i(t)$ – искомая сила тока (символом J_{xy} обозначена сила тока, идущего от узла x к узлу y).

Для падения напряжения U_{xy} от узла x к узлу y имеем

$$U_{ab} = J\frac{di}{d}, \quad U_{bc} = Ri, \quad U_{cd} = \frac{1}{c}\int i\,dt, \quad U_{da} = e(t).$$

Согласно второму закону Кирхгофа электродвижущая сила в цепи равна сумме падений напряжения на индуктивности, сопротивлении и емкости

$$e(t) = L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{c}\int i\,dt. \qquad (1)$$

Получилось интегро-дифференциальное уравнение, которое относится к одному из наиболее сложных типов уравнений.

Продифференцировав уравнение (1), придем к обычному дифференциальному уравнению для определения силы тока для $i(t)$

$$L\frac{d^{2i}}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{c}i = \frac{de}{dt}. \qquad (2)$$

Замечание. Если общее решение линейного уравнение

$$L[y] \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = H\sin(vt + \varphi), \qquad (3)$$

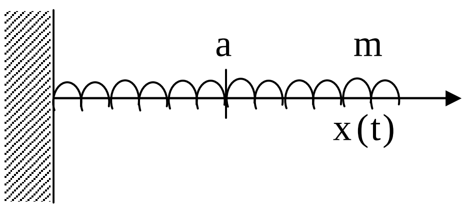
$(H > 0,\ v > 0,\ \varphi,\ a_j \in R,\ j = 1, 2, \ldots, n)$

имеет вид $y = \bar{y} + \tilde{y}$, где общее решение уравнения $L[y] = 0$

$\bar{y} = y_{о.о.} \to$ при $t \to \infty$, а $\tilde{y} = y_{ч.н.}$ – периодическое с периодом $T = \frac{2\pi}{v}$ – частное решение уравнения (3), то говорят, что решение $\bar{y}$ – описывает переходный режим, а решение $\tilde{y}$ – установившийся режим .

Можно доказать, что если все корни характеристического уравнения $D(\lambda) = 0$ оператора $L[y]$ имеют отрицательные действительные части, то уравнение (3) имеет единственное $T = \frac{2\pi}{v}$ – периодическое (установившееся) решение.

в) упругие колебания материальной точки массы m около положения равновесия



$x(t)$ – отклонение от положения равновесия

$mx''(t) = -kx(t)$, где $-kx(t)$ - сила упругости.

Обозначая $\frac{k}{m}\omega^2$, получим $x'' + \omega^2 x = 0$ - свободные упругие колебания;

г) задача о радиоактивном распаде.

Из опыта известно, что скорость распада радиоактивного вещества пропорциональна количеству вещества в данный момент. Если $y(t)$ – количество вещества, то $y' = -ky$. Берется знак «минус», т. к. количество вещества уменьшается. Интегрируя, получим $y = C \cdot e^{-kx}$ – решение уравнения;

д) системы дифференциальных уравнений.

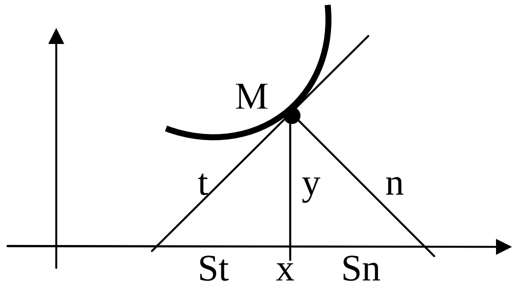
При описании некоторых процессов получаются системы д.у. Например, в химической кинетике получается система уравнений следующего вида: пусть C_1 и C_2 – концентрации двух веществ, участвующих в реакции, тогда

$$\frac{dC_1}{dt} = -k_1C_1 + k_2C_2, \qquad \frac{dC_2}{dt} = k_1C_1 - k_2C_2,$$

где k_1, k_2 – константы.

Геометрические приложения.

В геометрических задачах, в которых требуется найти уравнение кривой по данному свойству ее касательной, нормали или площади криволинейной трапеции, используется геометрическое истолкование производной (угловой коэффициент касательной) и интеграл с переменным пределом (площадь криволинейной трапеции с подвижной ограничивающей ординатой), а так же следующие общие формулы для определения длин отрезков касательной t, нормали n, подкасательной St и поднормали Sn.



$$|t| = \left|\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}\right|, \qquad n = \left|y\cdot\sqrt{1+y'^2}\right|,$$

$$S_t = \left|\frac{y}{y'}\right|, \qquad S_n = |y\cdot y'|.$$

Пример 21. Найти такую кривую, проходящую через точку (0, - 2), чтобы угловой коэффициент касательной в любой ее точке равнялся ординате этой точки, увеличенной в три раза.

Решение.

Допустим, что искомая кривая описывается функций $y(x)$. Найдем ее. Угловой коэффициент $\operatorname{tg}\alpha$ равен y'. Имеем $y' = 3y$ и начальное условие $y(0) = -2$. Решим уравнение $\dfrac{dy}{y} = 3\,dx$; $\ln|y| = 3x + \ln C$ или $y + Ce^{3x}$. Используя начальное условие, получим $y = -2e^{3x}$.

Пример 22. материальная точка массой 10^{-3}кг движется прямолинейно под действием силы, прямо пропорциональной времени, отсчитываемому от момента $t = 0$, и обратно пропорционально скорости движения точки. В момент $t = 0$ с скорости равнялась $5\cdot10^{-2}$ м/с , а сила $4\cdot10^{-5}$ Н. Какова будет скорость спустя минуту после начала движения?

Решение.

По второму закону Ньютона $m\dfrac{dv}{dt} = F(t)$, $F(t) = k\dfrac{t}{v}$, где k – коэффициент пропорциональности. Найдем k из условия, что в момент $t = 10c$ скорость равнялась $5\cdot10^{-2}$ м/с, а сила $4\cdot10^{-5}$ Н, $1Н = 1\,кг\cdot м/с^2$.

Имеем $4\cdot10^{-5}$ $кг\cdot м/с^2 = k\cdot10c\cdot5^{-1}\cdot10^2\ м^{-1}/c \Rightarrow k = 20\cdot10^{-8}\ кг\cdot м^2/c^4$. Решим уравнение $v_t = \dfrac{kt}{v}$, $v\,dv = k\,t\,dt$, $v^2 = kt^2 + 2C$.Произвольную постоянную C найдем из условия: в момент $t = 10c$ скорость $v = 5\cdot10^{-2}\ м/с$, т.е. $v(10) = 5\cdot10^{-2}$,
$25\cdot10^{-4} = 20\cdot10^{-8}\cdot10^2 + 2C \Rightarrow 2C = 25\cdot10^{-4} - 20\cdot10^{-6}$.

Найдем скорость, которая будет спустя минуту после начала движения:

$$v^2 = 20 \cdot 10^{-8} \cdot 36\,10^2 + 25 \cdot 10^{-4} - 20 \cdot 10^6 = 32 \cdot 10^{-4}; \quad v = 4\sqrt{2} \cdot 10^{-2} \text{ м/с}.$$

Пример 23. Тело массы m скользит по горизонтальной плоскости под действием толчка, давшего начальную скорость v_0. На тело действует сила трения, равная $-km$. Найти расстояние, которое тело способно пройти.

Решение.

Уравнение движения имеет вид $m \cdot s''_{tt} = -km$. Найдем решение этого уравнения при начальных $s(0) = 0, s'(0) = v_0$. Имеем $s'' = -k,\ s' = -kt + C_1$,

$s(t) = -\dfrac{kt^2}{2} + C_1 t + C_2$; C_1, C_2 найдем из начальных условий: $C_1 = v_0$, $C_2 = 0$.

Получим $s(t) = -\dfrac{kt^2}{2} + v_0 t$. Найдем момент времени t, при котором тело остановится: $s' = -kt + v_0 = 0 \Rightarrow t = \dfrac{v_0}{k}$. За время $t = \dfrac{v_0}{k}$ пройденный путь $s = \dfrac{v_0^2}{2k}$.

Пример 24. К источнику с э. д. с. равной $l(t) = E - \text{const}$ подключается контур, состоящий из последовательно соединенных катушки индуктивности L, омического сопротивления R и емкости C. Найти ток I в цепи как функцию времени t, если в начальный момент ток в контуре и заряд конденсатора равны нулю.

Решение.

По условию задачи $L(t) = E = \text{const}$. В этом случае $\dfrac{de}{dt} = 0$ и уравнение (2) получается однородным

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0 \tag{4}$$

Уравнение (4) аналогично уравнению свободных механических колебаний с учетом сопротивления среды. Решим уравнение (4).

Характеристическое уравнение $\lambda^2 + \dfrac{R}{L}\lambda + \dfrac{1}{LC} = 0$

имеет корни $\lambda_{1,2} = -\dfrac{R}{2L} \pm \sqrt{\dfrac{R^2}{4L^2} - \dfrac{1}{LC}} = -\dfrac{R}{2L} \pm \sqrt{\dfrac{R^2 c - 4L}{4L^2 C}}$.

Если $R^2 C - 4L > 0$, то оба корня x, y действительные и общее решение есть функция непериодическая. Соответственно апериодическим будет и ток. Никаких электрических колебаний в цепи не произойдет так же и при $R^2 C - 4L = 0$.

Если же $R^2 C - 4L < 0$, то корни x.y. будут комплексно-сопряженными и общее решение $i(t) = e^{-\delta t} \cdot \left(C_1 \cos\omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t\right)$,

где положено $\delta = \dfrac{R}{2L}$, $\omega_1^2 = \dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{(4L)^2}$, определяет электрические колебания.

$$L \cdot \left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = E, \text{ откуда } \left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = \frac{E}{L},$$

и, таким образом, начальные условия запишутся в виде

$$i\Big|_{t=0}=0, \qquad \frac{di}{dt}\Big|_{t=0}=\frac{E}{L}. \tag{5}$$

C_1 и C_2 найдем, используя начальные условия (5)

$$C_1=0 \quad \text{и} \quad C_2=\frac{E}{L\omega_1}.$$

Таким образом $i(t)=\dfrac{E}{L\omega_1}e^{-\delta t}\cdot\sin\omega_1 t$.

Упражнения. Составить дифференциальное уравнение и решить его.

1) На материальную точку масса m действует постоянная сила, сообщая точке ускорение a. Окружающая среда оказывает движущейся точке сопротивление, пропорциональное скорости ее движения, коэффициент пропорциональности равен k. Как изменяется скорость движения со временем, если в начальный момент точка находилась в покое?

Ответ: $V(t)=\dfrac{m}{k}a\left(1-e^{=\frac{k}{m}t}\right)$.

2) Найти кривые, у которых поднормаль повсюду равна p.

Ответ: $y^2=2p\,(x+C)$.

3) Кривая проходит через точку (0; 1) и обладает тем свойством, что в каждой ее точке тангенс угла касательной к этой кривой равен удвоенному произведению координат точки касания. Найти кривую.

Ответ: $y=e^{x^2}$.

4) Сила тока в электрической цепи с омическим сопротивлением R и коэффициентом самоиндукции L удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$L\frac{di}{dt}+Ri=E,$$

где E– электродвижущая сила. Найти зависимость силы тока $i(t)$ от времени, если E равно E_0 и $i(0)=0$.

Ответ: $i(t)=-\dfrac{E_0}{R}\left(e^{-\frac{R}{L}t}-1\right)$.

Задача 15. По условию задачи составить дифференциальное уравнение и решить его.

1. Определить кривую, проходящую через точку (3,4), если угловой коэффициент касательной в любой точке кривой равен квадрату ординаты точки касания.

2. Материальная точка с массой m движется вдоль оси Oy, и на нее в каждый момент времени действует сила, пропорциональная отклонению точки от начала координат и направленная к началу координат. Найти закон движения точки, если в момент $t=0$ она имела ординату y_0 и скорость v_0.

3. Корабль замедляет свое движение под действием силы сопротивления воды, которая пропорциональна скорости корабля. Начальная скорость корабля 10 м/с, скорость его через 5 с станет 8 м/с. Когда скорость уменьшится до 1 м/с?

4. Доказать, что кривая, угловой коэффициент касательной в любой точке которой пропорционален абсциссе точки касания, есть парабола.

5. Найти кривую, для которой угловой коэффициент касательной в какой-либо точке в n раз больше углового коэффициента прямой, соединяющей ту же точку с началом координат.

6. Определить путь S, пройденный телом за время t, если его скорость пропорциональная проходимому пути и если тело проходит 100 м в 10 с и 200 м в 15 с.

7. Найти кривую, обладающую тем свойством, что отрезок касательной к кривой, заключенный между осями координат, делится в точке касания пополам.

8. Найти кривую, обладающую тем свойством, что величина перпендикуляра, опущенного из начала координат на касательную, равна абсциссе точки касания.

9. Определить кривую, у которой отношение отрезка, отсекаемого касательной на оси к радиусу-вектору, равно постоянной величине.

10. Найти кривую, для которой длина отрезка, отсекаемого на оси ординат нормалью, проведенной в какой-нибудь точке кривой, равна расстоянию этой точки от начала координат.

11. Точка массы m движется прямолинейно. На нее действует сила, пропорциональна времени (коэффициент пропорциональности k_1). Кроме того, точка испытывает сопротивление среды, пропорциональное скорости (коэффициент пропорциональности k_2). Найти зависимость скорости от времени, считая, что в начальный момент скорости равна нулю.

12. Найти кривые, обладающие тем свойством, что отрезок, который касательная в любой точке кривой отсекает на оси Oy, равен квадрату абсциссы точки касания.

13. Найти кривую, в которой отрезок, отсекаемый касательной на оси ординат, равен полусумме координат точки касания.

14. Дана LR – цепь с э.д.с. равной а) $E = \text{const}$, б) $\sin\omega t$. Найдите ток i в цепи как функцию времени t, если в начальный момент ток в контуре равен нулю.

15. Найти кривую, для которой произведение абсциссы какой-нибудь точки на величину отрезка, отсекаемого нормалью на оси Oy, равно удвоенному квадрату расстояния от этой точки до начала координат.

16. Найти время, нужное для того, чтобы упасть на Землю с высоты 400000 км (приблизительно расстояние Луны от центры Земли), если эта высоты исчисляется от центра Земли, и радиус равен приблизительно 6400 км.

17. Материальная точки движется по прямой со скоростью, обратно пропорциональной пройденному пути. В начальный момент движения точка находилась на расстоянии 5 м от начала отсчета пути и имела скорость $v_0 = 20$ м/с. Определить пройденный путь и скорость точки через 10 с после начала движения.

18. Найти закон движения материальной точки массы m по прямой OA под действием отталкивающей силы, обратно пропорциональной третьей степени расстояния точки $x = OM$ от неподвижного центра O.

19. Определить кривую, у которой радиус кривизны равен постоянной величине.

20. Тело массой m падает с некоторой высоты со скоростью v. При падении тело испытывает сопротивление, пропорциональной квадрату скорости. Найти закон движения падающего тела.

21. Материальная точка массы m движется прямолинейно под действием силы F, прямо пропорциональной времени от начала движения и обратно пропорциональной скорости v. Установить зависимость между скоростью v и временем t, если при $t = 0$ $v = 0$.

Указание: согласно второму закону Ньютона, $F = m \cdot \frac{dv}{dt}$ $\left(\frac{dv}{dt} - \text{ ускорение} \right)$.

22. Тело движется прямолинейно с ускорением, пропорциональным произведению скорости движения v на время t. Установить зависимость между скоростью и временем, если при $t = 0$ $v = 0$.

23. Замедляющее действие трения на диск, вращающийся в жидкости, пропорционально угловой скорости ω. Выразить ω как функцию времени, если известно, что за 25 с с начала движения угловая скорость снизилась со 100 об/с до 50 об/с.

24. Найти кривую, проходящую через начало координат, и такую, что площадь треугольника, образованного касательной к кривой в некоторой точке, ординатой этой точки и осью Ox, пропорциональна площади криволинейной трапеции, образованной кривой, осью Ox и ординатой этой точки.

25. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $\left(\sqrt{2}; 0\right)$, если сумма длин ее касательной и подкасательной равна произведению координат точки касания.

26. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (1; 2), если ее подкасательная вдвое больше абсциссы точки касания.

27. Найти уравнения кривых, у которых длина отрезка нормали постоянна и равна a.

28. Найти уравнения кривых, у которых поднормаль имеет постоянную длину a.

29. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(1, 1/2)$, если для любого отрезка $[1; x]$ площадь криволинейной трапеции, ограниченной соответствующей другой этой кривой, равна отношению абсциссы x концевой точки к ординате.

30. Найти уравнение кривой, проходящей через начало координат, если для любого отрезка $[a; x]$ площадь криволинейной трапеции, ограниченной соответствующей дугой этой кривой, равна кубу ординаты концевой точки дуги.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.6 Наука, 1972.

2. Гудыменко Ф. С., Павлюк И. А., Волкова В.А. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – Киев, 1972.

3. Глонтер Н. М., Кузьмин Р. О. Сборник задач по высшей математике. – 1958. – Т. 2.

4. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Высш. школа, 1978.

5. Креер Л. И. Сборник управжнений по дифференциальным уравнениям. – М.: Учпедгиз, 1948.

6. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. – М.: Высш. школа, 1989.

7. Сборник задач по математике для втузов / В. А. Болгов и др.; Под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича. – М.: Наука, 1986.

8. Матвеев Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям . – М., 1961.

9. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1982.

10. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1973.