Министерство образования Российской Федерации
Омский государственный технический университет

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
И
ТИПОВОЙ РАСЧЕТ
ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Для студентов-заочников 1 курса

Омск – 2002

Составители: Назарук Елена Маратовна, преподаватель,
Ананко Алла Александровна, ассистент

ТЕМА 1. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

Уравнение любой прямой ℓ, лежащей в плоскости XOY, является уравнением первой степени относительно текущих координат x, y и имеет вид

$$Ax + By + C = 0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) называется общим уравнением прямой.

Если свободный член C равен нулю, то уравнение прямой имеет вид $Ax + By = 0$, ему удовлетворяют координаты точки O(0; 0), а прямая проходит через начало координат. Если коэффициент A=0, то уравнение принимает вид $By + C = 0$. Его можно переписать в виде $y = -\frac{C}{B}$, и эта прямая проходит через точку $\left(0; -\frac{C}{B}\right)$ параллельно оси OX. Если коэффициент B = 0, то уравнение принимает вид Ax + C = 0. Его можно переписать в виде $x = -\frac{C}{A}$, и эта прямая проходит через точку $\left(-\frac{C}{A};\ 0\right)$ параллельно оси OY.

Из общего уравнения прямой (1) можно получить уравнение прямой в отрезках. Перенесем слагаемое C в правую часть: $Ax + By = -C$. Разделим левую и правую часть уравнения на минус C: $-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1$. Введем обозначения $-\frac{C}{A} = a$, $-\frac{C}{B} = b$.

Получим
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad - \qquad (2)$$
уравнение прямой в отрезках, где a – отрезок, отсекаемый прямой на оси OX, b – отрезок, отсекаемый прямой на оси OY (рис. 1).

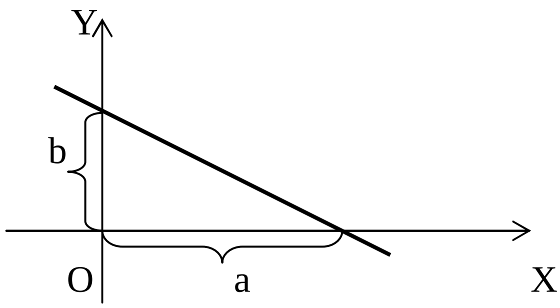


Рис. 1

Всякий ненулевой вектор $\overline{N}\{A, B\}$, перпендикулярный прямой, назовем нормальным вектором этой прямой. Рассмотрим на плоскости XOY произвольную прямую ℓ (рис. 2).

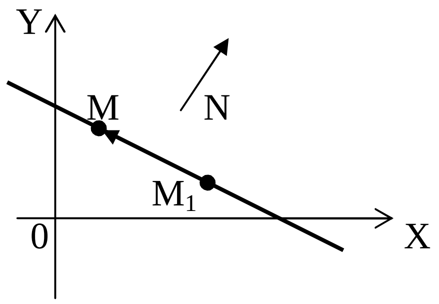


Рис. 2

Пусть точка $M_1(x_1, y_1)$ – некоторая фиксированная ее точка и $M(x, y)$ – произвольная точка. Тогда координаты вектора: $\overline{M_1M}\{x - x_1; y - y_1\}$.
Так как $\overline{N} \perp \overline{M_1M}$, то их скалярное произведение равно нулю $\overline{N} \cdot \overline{M_1M} = 0$. Выражая скалярное произведение через координаты векторов, запишем

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0. \qquad (3)$$

Полученное уравнение является уравнением прямой, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}\{A, B\}$.

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1)$, с данным угловым коэффициентом k (где $k = \operatorname{tg}\alpha$, α – угол между прямой и положительным направлением оси OX) имеет вид $y - y_1 = k(x - x_1)$. (4)

Всякий ненулевой вектор $\overline{S}\{m, n\}$, параллельный данной прямой или лежащий на ней, назовем направляющим вектором этой прямой.

Рассмотрим на плоскости XOY произвольную прямую ℓ (рис. 3). Пусть точка $M_1(x_1, y_1)$ – некоторая фиксированная ее точка, а $M(x, y)$ – произвольная точка. Тогда координаты вектора $\overline{M_1M}\{x - x_1; y - y_1\}$. Так как векторы $\overline{M_1M}$ и $\overline{S}$ коллинеарны, то пропорциональны их соответствующие координаты:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} \qquad (5)$$

Полученное уравнение называется каноническим уравнением прямой.

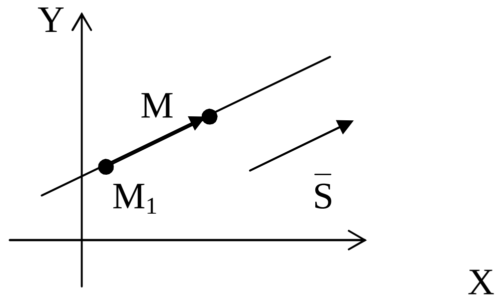


Рис. 3

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, выражается формулой

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \qquad (6)$$

Пусть прямая задана общим уравнением (1). Разрешим его относительно y.

$$By = -Ax - C; \qquad y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Введем обозначения $-\frac{A}{B} = k$; $-\frac{C}{B} = b$. Окончательно получаем $y = kx + b$. (7)

Это уравнение называется уравнением прямой с угловым коэффициентом k.

Условием параллельности двух прямых ℓ_1 и ℓ_2 с угловыми коэффициентами k_1 и k_2 соответственно является равенство этих угловых коэффициентов: $k_1 = k_2$.

Условие перпендикулярности двух прямых выражается равенством $k_1 \cdot k_2 = -1$ или $k_1 = -1/k_2$.

Если две пересекающиеся прямые не перпендикулярны, то тангенс угла φ между ними находится по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}. \qquad (8)$$

Пусть даны две прямые с уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ и требуется найти точку их пересечения. Так как эта точка принадлежит каждой прямой, ее координаты должны удовлетворять уравнению как первой прямой, так и второй. Таким образом, чтобы найти координаты точки пересечения двух прямых, следует решить систему уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Пусть на плоскости XOY заданы прямая $Ax + By + C = 0$ и точка $M_1(x_1, y_1)$. Расстояние от точки до прямой – это длина перпендикуляра, опущенного из точки M_1 на эту прямую. Это расстояние выражается формулой

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (9)$$

Задача 1. Даны координаты точек A(1; 2), B(2; 5), C(-3; 6). Найти:

а) уравнение стороны AC треугольника ABC;
б) уравнение высоты BH, ее длину;
в) уравнения медиан CC_1, AA_1 треугольника ABC;
г) точку пересечения медиан CC_1, AA_1;
д) угол A треугольника ABC;
е) уравнения сторон AD, CD параллелограмма ABCD;
ж) координаты вершины D параллелограмма ABCD.

Решение.

а) Воспользуемся уравнением прямой (5), проходящей через две точки, где x_1, y_1 – координаты точки A, x_2, y_2 – координаты точки C.

$$\frac{x-1}{-3-1}=\frac{y-2}{6-2}; \quad \frac{x-1}{-4}=\frac{y-2}{4}; \quad x-1=-y+2, \qquad x+y-3=0$$

Ответ: Уравнение стороны AC: $x+y-3=0$.

б) Найдем координаты вектора $\overline{AC}$ по формулам $\overline{AC}\{x_C-x_A;\ y_C-y_A\}$, $\overline{AC}\{-4;4\}$. Так как высота BH перпендикулярна вектору $\overline{AC}$, он будет являться нормальным вектором этой прямой. Составим уравнение высоты, используя уравнение прямой, проходящей через данную точку B(2; 5) перпендикулярно вектору нормали $\overline{AC}(3)$, где A=-4; B=4:

$$-4(x-2)+4(y-5)=0; \quad x-y+3=0.$$

Длину высоты найдем, используя формулу (9), как расстояние от точки B до прямой AC (уравнение AC найдено в п. а)):

$$d=\frac{|1\cdot 2+1\cdot 5+(-3)|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}.$$

Ответ: Уравнение высоты BH: x-y+3=0, ее длина $d=2\sqrt{2}$.

в) Найдем координаты точки C_1 – середины отрезка AB:

$$x_{C_1}=\frac{x_A+x_B}{2}; \quad y_{C_1}=\frac{y_A+y_B}{2}.$$

$$x_{C_1}=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}; \quad y_{C_1}=\frac{2+5}{2}=\frac{7}{2}; \quad C_1\left(\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right).$$

Уравнение медианы CC_1 составим, используя уравнение прямой, проходящей через две точки (5):

$$\frac{x+3}{9/2}=\frac{y-6}{-5/2}; \quad -5(x+2)=9(y-6); \quad 5x+9y-39=0.$$

Уравнение медианы AA_1 находится аналогично:

$$x_{A_1}=\frac{x_B+x_C}{2}; \quad y_{A_1}=\frac{y_B+y_C}{2}; \quad A_1\left(-\frac{1}{2};\frac{11}{2}\right).$$

$$\frac{x-1}{-3/2}=\frac{y-2}{7/2}; \quad 7(x-1)=-3(y-2); \quad 7x+3y-13=0.$$

Ответ: Уравнение медианы CC_1: 5x+9y-39=0,
уравнение медианы AA_1: 7x+3y-13=0.

г) Точку пересечения медиан AA_1 и CC_1 найдем, решив систему их уравнений:

$$\begin{array}{r} + \\ (-3) \end{array}\begin{cases} 5x+9y-39=0 \\ 7x+3y-13=0 \end{cases}$$

$$-16x = 0,$$

$$x_0=0; \quad y_0=\frac{13}{3}; \quad M_0\left(0;\frac{13}{3}\right).$$

Ответ: точка пересечения медиан $M_0\left(0;\frac{13}{3}\right)$.

д) Найдем уравнение стороны AB, используя формулу (6)

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{3}; \qquad 3x-y-1=0.$$

Выразим отсюда **y** и найдем k_1 – угловой коэффициент стороны AB:

$$y=3x-1; \qquad k_1=3$$

Уравнение стороны AC найдено в пункте а) : $x+y-3=0$.

Выразим **y** и найдем k_2 – угловой коэффициент стороны AC:

$$y=-x+3; \quad k_2=-1$$

Угол A найдем по формуле (7) как угол между прямой AB и AC:

$$\operatorname{tg}\hat{A}=\frac{-1-3}{1+(-1)\cdot 3}=\frac{-4}{-2}=2$$

$$\hat{A}=\operatorname{arctg}2$$

Ответ: Угол $\hat{A}=\operatorname{arctg}2$.

е) Так как в параллелограмме противоположные стороны параллельны, используем уравнение прямой (5)

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}.$$

Найдем координаты $\{m;n\}$ вектора $\overline{BC}$: $\overline{BC}\{-5;1\}$. Координаты точки A(1;2), т.е. $x_1=1,\ y_1=2$. Следовательно, уравнение стороны AD:

$$\frac{x-1}{-5}=\frac{y-2}{1} \qquad \text{или} \qquad x+5y-11=0.$$

Аналогично находится уравнение стороны CD: $\overline{AB}\{1;3\}$, $C(-3;6)$:

$$\frac{x+3}{1}=\frac{y-6}{3} \quad \text{или} \quad 3x-y+15=0$$

Ответ: AD: $x+5y-11=0$; CD: $3x-y+15=0$.

ж) Координаты четвертой вершины D параллелограмма ABCD найдем как точку пересечения прямых AD и CD. Решим систему

$$-3\begin{cases} x+5y-11=0 \\ 3x-y+15=0 \end{cases}$$
$$-16y+48=0$$
$$y_0=3,\quad x_0=-4,\quad D(-4;3)$$

Ответ: D(-4; 3).

ТЕМА 2. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Линия, которая в декартовой системе координат определяется уравнением второй степени, называется линией второго порядка.

Общее уравнение кривой второго порядка имеет вид

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

Центром линии 2-го порядка называется такая точка плоскости, по отношению к которой точки этой линии расположены симметрично, парами. Линии 2-го порядка, обладающие единственным центром, называются центральными.

Составим определитель вида

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}.$$

Если $\Delta\neq 0,$ то отсюда следует, что линия 2-го порядка является центральной, и координаты центра $C(x_0,y_0)$ могут быть найдены по формулам

$$x_0=\frac{\Delta_{x_0}}{\Delta};\quad y_0=\frac{\Delta_{y_0}}{\Delta},\quad \text{где}\quad \Delta_{x_0}=\begin{vmatrix} B & D \\ C & E \end{vmatrix},\quad \Delta_{y_0}=\begin{vmatrix} D & A \\ E & B \end{vmatrix}.$$

Определитель Δ будет использоваться и в дальнейшем при проведении кривой 2-го порядка к каноническому виду.

Приведение к каноническому виду линии 2-го порядка

Рассмотрим вначале частный случай линии 2-го порядка, при B = 0, то есть отсутствует произведение $x\cdot y$:

$$Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

В этом случае преобразование к каноническому виду сводится к выделению полных квадратов по **x** и **y** и переносу в правую часть свободного члена. Разделив обе части полученного уравнения на свободный член, получим каноническое уравнение соответствующей кривой.

В общем случае для приведения к каноническому виду нужно для матрицы, соответствующей Δ, т. е. $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$, найти собственные значения и собственные векторы, которые и определят новую систему координат, в которой кривая имеет канонический вид.

Этот алгоритм будет рассмотрен подробно на примере.

Классификация линий 2-го порядка. Окружность

Окружность – геометрическое место точек, равноудаленных от одной точки, называемой центром.

Пусть $C(x_0, y_0)$, тогда каноническое уравнение окружности имеет вид (рис. 4) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, где R – радиус окружности.

Если центр совпадает с началом координат, уравнение принимает вид: $x^2 + y^2 = R^2$ (рис.5).

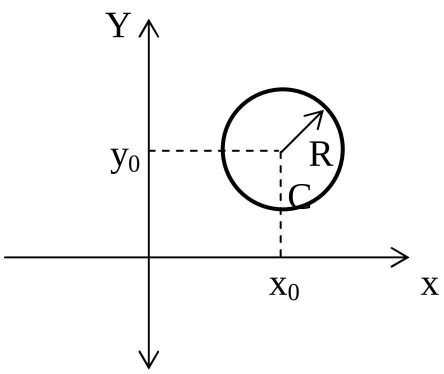


Рис. 4

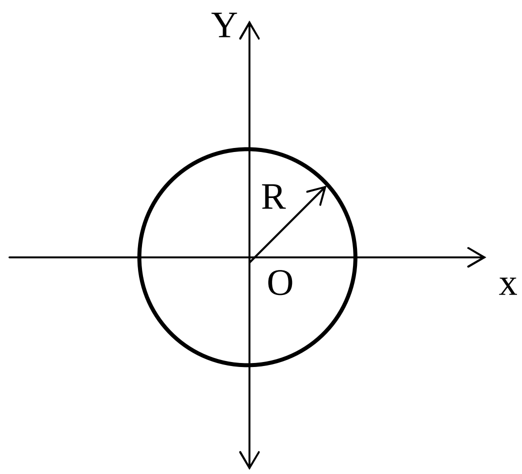


Рис. 5

Эллипс

Эллипс – геометрическое место точек, для которых сумма расстояний от двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Если центр эллипса совпадает с началом координат, то каноническое уравнение имеет вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Если a > b, то эллипс вытянут вдоль оси OX, фокусы расположены также на OX симметрично относительно начала координат, а фокусное расстояние и эксцентриситет определяются по формулам: $c^2=\sqrt{a^2-b^2}$; $\varepsilon=\frac{c}{a}<1$ (рис. 6).

Если b > a, то эллипс вытянут вдоль оси OY, фокусы располагаются на оси OY, симметрично относительно начала координат, а фокусное расстояние и эксцентриситет определяются по следующей формуле: $c^2=\sqrt{b^2-a^2}$; $\varepsilon=\frac{c}{b}<1$ (рис. 7).

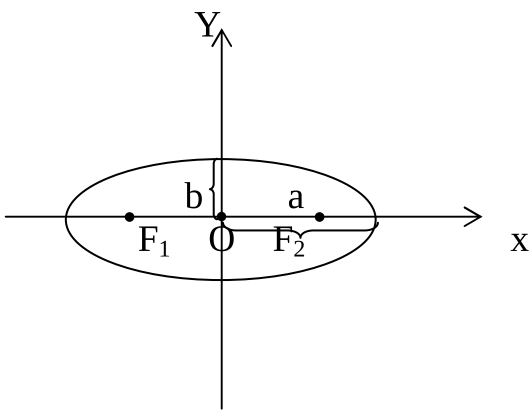


Рис. 6

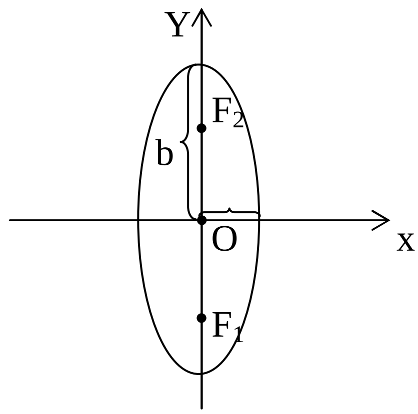


Рис. 7

Гипербола

Гипербола – геометрическое место точек, для которых разность расстояний от двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Если центр гиперболы совпадает с началом координат, то ее уравнение имеет канонический вид:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1.$$

Это уравнение распадается на два уравнения гипербол, которые называются сопряженными: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (рис. 8) и $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ (рис. 9).

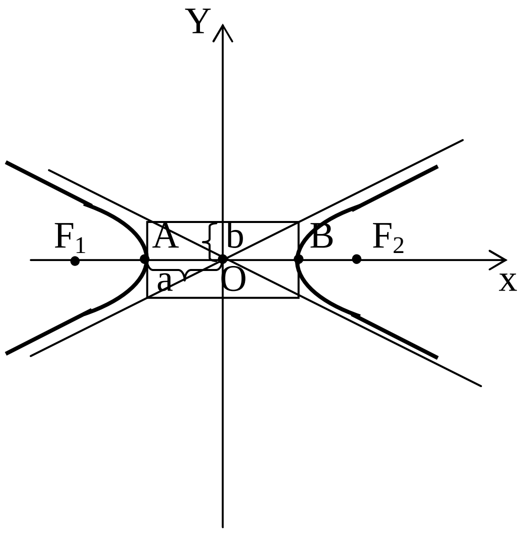


Рис. 8

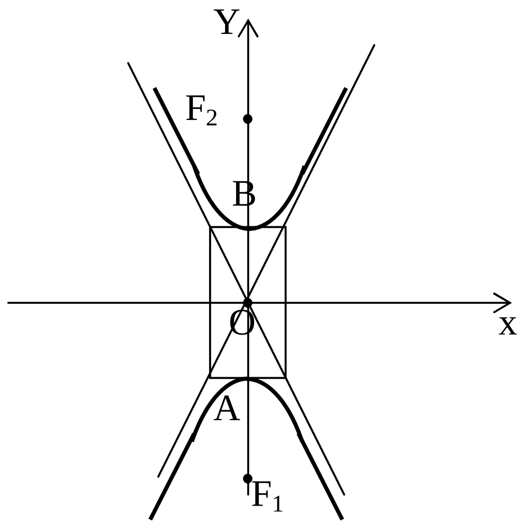


Рис. 9

Точки A и B (рис. 8) – вершины гиперболы. Диагонали основного прямоугольника, являющиеся асимптотами гиперболы имеют уравнения: $y = \pm\frac{b}{a}x$, $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$. Уравнения директрис: $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$.

Уравнения асимптот гиперболы (рис. 9): $y = \pm\frac{a}{b}x$, $\varepsilon = \frac{c}{b} > 1$. Уравнения директрис: $y = \pm\frac{b}{\varepsilon}$.

Парабола

Парабола – геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до некоторой фиксированной точки плоскости, называемой фокусом, равно расстоянию до некоторой прямой, называемой директрисой.

Парабола не является центральной кривой; она имеет одну ось симметрии, с которой она пересекается в единственной точке, называемой ее вершиной.

Если координатная система выбрана так, что вершина находится в начале координат, то канонические уравнения параболы будут иметь вид $y^2 = \pm 2px$ (рис. 10) и $x^2 = \pm 2py$ (рис. 11), где $p > 0$.

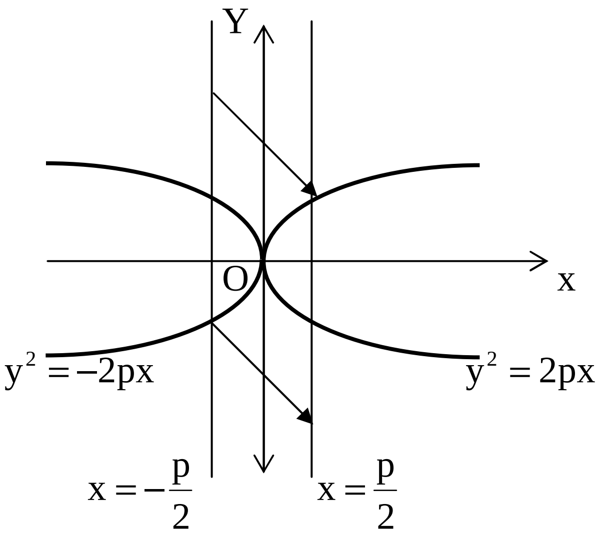


Рис. 10

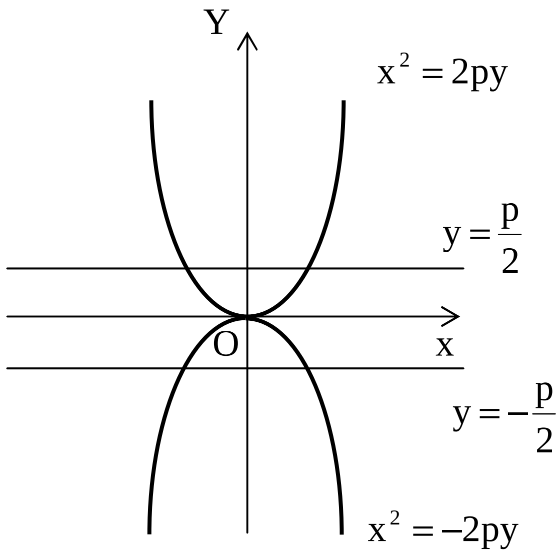


Рис. 11

Осью симметрии парабол (рис. 10) является ось OX, уравнения директрис имеют вид: $x=-\frac{p}{2}$ для $y^2=2px$ и $x=\frac{p}{2}$ для $y^2=-2px$.

Осью симметрии парабол (рис. 11) является ось OY, уравнения директрис имеют вид: $y=-\frac{p}{2}$ для $x^2=2py$ и $y=\frac{p}{2}$ для $x^2=-2py$.

Задача 2. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, что 2c=6, $\varepsilon=3/2$.

Решение. Каноническое уравнение такой гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad c^2=a^2+b^2,\quad \varepsilon=\frac{c}{a}.$$

Из условия $2c=6 \;\Rightarrow\; c=3$. Составим систему

$\begin{cases} a^2+b^2=9 \\ \frac{3}{a}=\frac{3}{2} \end{cases}$. Из системы находим $a=2$; $b=\sqrt{5}$.

Каноническое уравнение будет иметь вид $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$.

Ответ: Каноническое уравнение гиперболы $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$.

Задача 3. Определить точки пересечения прямой $x+y-3=0$ и параболы $x^2=4y$.

Решение. Выразим **y** в уравнении прямой через **x** и подставим в уравнение параболы:

$$y=3-x,$$

$$x^2=4(3-x)\Rightarrow x^2+4x-12=0.$$

По теореме Виета $\begin{cases} x_1+x_2=-4 \\ x_1\cdot x_2=-12 \end{cases}$, откуда $x_1=2;\ x_2=-6.$ Находим ординаты $y_1=3-2=1;\ y_2=3-(-6)=9.$ Точки пересечения имеют координаты $M_1(2,1)$, $M_2(-6,9)$.

Ответ: Точки пересечения прямой и параболы $M_1(2,1)$, $M_2(-6,9)$.

Задача 4. Установить, является ли линия 2-го порядка $3x^2+5xy+y^2-8x-11y-7=0$ центральной и найти координаты ее центра.

Решение. Вычислим определитель матрицы квадратичной формы:

$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 5/2 \\ 5/2 & 1 \end{vmatrix}=3-\dfrac{25}{4}=-\dfrac{13}{4}.$ Так как $\Delta\neq 0$, линия является центральной. Найдем координаты центра $C(x_0,y_0)$.

$$x_0=\frac{\Delta x_0}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} 5/2 & -4 \\ 1 & -11/2 \end{vmatrix}}{-13/4}=\frac{(-55/4+4)}{-13/4}=\frac{-39/4}{-13/4}=3,$$

$$y_0=\frac{\Delta y_0}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -11/2 & 5/2 \end{vmatrix}}{-13/4}=\frac{(-20/2+33/2)}{-13/4}=-\frac{13/2}{13/4}=-2.$$

Ответ: Кривая второго порядка является центральной, центр C(3, -2).

Задача 5. Установить, приведением к каноническому виду какую кривую 2-го порядка определяет следующее уравнение: $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$. Найти координаты центра (вершины), полуоси, эксцентриситет.

Решение. Выделим полные квадраты по **x** и **y**, так как член **xy** отсутствует в уравнении:

$$5\left(x^2-6x+9\right)-5\cdot 9+9\left(y^2+2y+1\right)-9\cdot 1+9=0,$$

$$5(x-3)^2+9(y+1)^2=45.$$

Делим обе части на свободный член:

$$\frac{5(x-3)^2}{45}+\frac{9(y+1)^2}{45}=\frac{45}{45}.$$

Получим каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{5}=1$$

Центр С(3,-1), полуоси $a=3,\ b=\sqrt{5},\ c=\sqrt{9-5}=2;\ \varepsilon=2/3.$

Ответ: Кривая центральная С(3,-1), $a=3,\ b=\sqrt{5},\quad \varepsilon=2/3.$

Задача 6. Следующее уравнение привести к каноническому виду, определить его тип, изобразить на чертеже оси первоначальной и новой системы координат и построить кривую, соответствующую этому уравнению:

$$x^2-2xy+y^2+2x-6y=0.$$

$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=0$. Откуда следует, что кривая не является центральной.

Найдем собственные значения этой матрицы:

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad (1-\lambda)^2-1=0,$$

$$-2\lambda+\lambda^2=0,$$

$$\underline{\lambda_1=0;\ \lambda_2=2}.$$

Найдем собственные векторы, соответствующие найденным собственным значениям.

1. $\lambda_1 = 0 \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$.

$$x_1 - x_0 = 0 \ \Rightarrow \ x_1 = x_2.$$

$$\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. $\lambda_2 = 2 \quad \begin{pmatrix} (1-2) & -1 \\ -1 & (1-2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$

$$-x_1 - x_2 = 0 \ \Rightarrow -x_1 = x_2.$$

$$\overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Проверим $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 > 0$, что означает: ориентация правильная, совпадает с исходным базисом.

Нормируем векторы и вычислим базисные векторы новой системы координат:

$$\overrightarrow{i_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{j_2} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Уравнение в новом базисе имеет вид

$$\Phi = \lambda_1 x_1{}^2 + \lambda_2 y_1{}^2.$$

Системы координат ХОУ с базисом $(\bar{i}, \bar{j})$ и X_1OY_1 с базисом $(\overline{i_1}, \overline{j_1})$ связаны формулами

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} x_1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} y_1, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} x_1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} y_1. \end{cases}$$

Подставляя в исходное уравнение вместо **x** и **y** их выражения, получим

$$2y_1^2 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_1\right) - 6\left(\frac{1}{\sqrt{2}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_1\right) = 0$$

или

$$y_1^2 - 2\sqrt{2}\ y_1 = \sqrt{2}\ x_1.$$

Выделяя полный квадрат по **у**, получим

$$\left(y_1 - \sqrt{2}\right)^2 = \sqrt{2}\left(x_1 + \sqrt{2}\right)$$

Эта парабола симметрична относительно оси O_1X_1(рис.12), O_1 – вершина, находящаяся в точке $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. В новой системе $X_1O_1Y_1$ координат уравнение примет вид

$$y_2^2 = \sqrt{2}\,x_2.$$

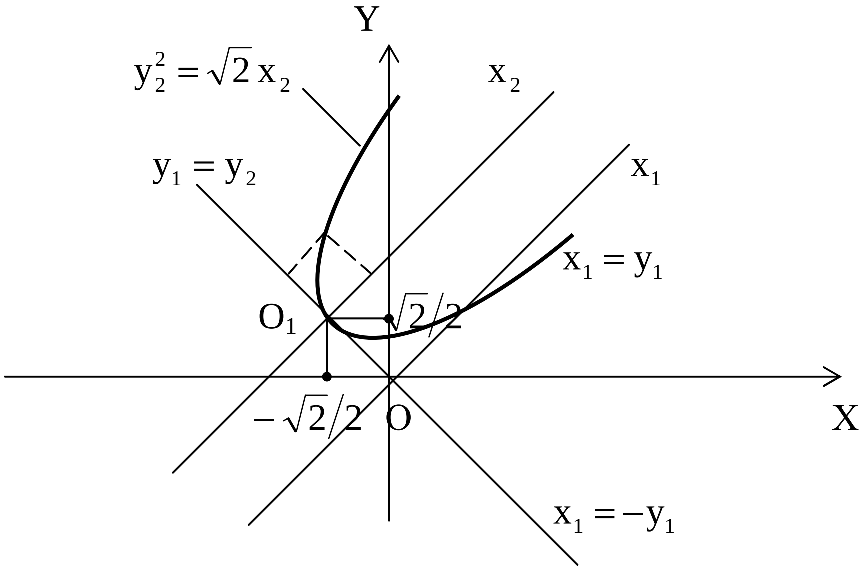


Рис. 12

ТЕМА 3. ПЛОСКОСТЬ

Рассмотрим в пространстве плоскость Q. Всякий ненулевой вектор $\overline{N}$, перпендикулярный этой плоскости назовем <u>вектором нормали</u>. Пусть вектор N имеет координаты $\overline{N}\{A, B, C\}$ и точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ - некоторая фиксированная <u>точка</u> плоскости.

Рассмотрим вектор $\overline{M_1M}$, соединяющий точку M_1 и произвольную точку плоскости $M(x, y, z)$ (рис. 13): $\overline{M_1M}\{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$.

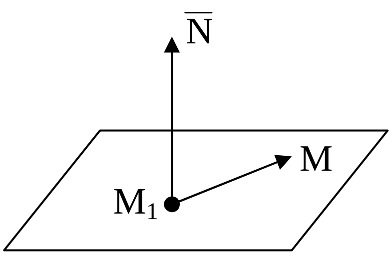


Рис. 13

Так как векторы $\overline{n}$ и $\overline{M_1M}$ взаимно перпендикулярны, их скалярное произведение равно нулю $\overline{N} \cdot \overline{M_1M}$ =0. В координатной форме

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0. \qquad (10)$$

Полученное уравнение является уравнением плоскости, проходящей через точку

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ перпендикулярно вектору нормали $\overline{N}\{A, B, C\}$. Его можно записать как

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{11}$$

где $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$. Следовательно, всякая плоскость определяется уравнением первой степени относительно текущих координат. Справедливо и обратное: всякое уравнение (11) первой степени определяет некоторую плоскость в пространстве.

Уравнение (11) называют общим уравнением плоскости. Преобразуем его следующим образом: перенесем свободный член D в правую часть: $Ax + By + Cz = -D$. Разделим полученное равенство на минус D:

$-\frac{A}{D}x - \frac{B}{D}y - \frac{C}{D}z = 1$. Обозначим $-\frac{A}{D} = a$; $-\frac{B}{D} = b$; $-\frac{C}{D} = c$. Получим

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \tag{12}$$

уравнение плоскости в отрезках, где a – отрезок, отсекаемый плоскостью на оси Ox, b – отрезок, отсекаемый на оси Oy, c – отрезок, отсекаемый на оси Oz (рис. 14).

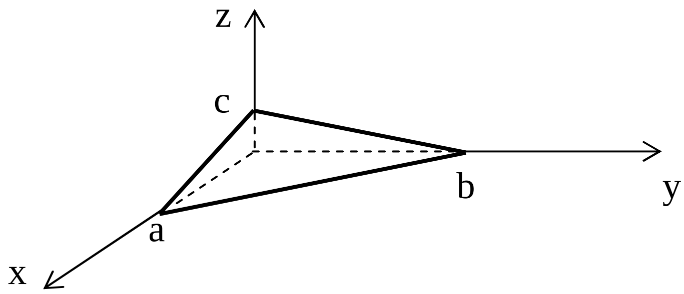


Рис. 14

Пусть даны точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и плоскость Q с уравнением $Ax + By + Cz + {}$ $+ D = 0$. Расстояние d между ними, т. е. длина перпендикуляра, опущенного из точки M_1 на плоскость Q, определяется формулой

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{13}$$

Плоскость Q будет определена, если задать три ее точки, не лежащие на одной прямой: $M_1(x_1, y_1, z_1)$; $M_2(x_2, y_2, z_2)$; $M_3(x_3, y_3, z_3)$. Точка $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости. Тогда векторы $\overline{M_1M}\{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$, $\overline{M_1M_2}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$, $\overline{M_1M_3}\{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}$ компланарны. В координатной форме условие компланарности имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{14}$$

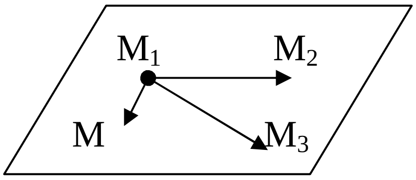


Рис. 15

Уравнение (14) – уравнение плоскости, проходящей через три точки: M_1, M_2, M_3.

Рассмотрим плоскости Q_1 и Q_2, заданные соответственно уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 1$.

Угол φ между плоскостями можно рассматривать как угол между векторами нормали N_1 и N_2. Поэтому

$$\cos\varphi = \cos\left(\widehat{Q_1, Q_2}\right) = \cos\left(\overline{N_1}, \overline{N_2}\right) = \frac{\overline{N_1} \cdot \overline{N_2}}{\left|\overline{N_1}\right| \cdot \left|\overline{N_2}\right|} = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (15)$$

Отметим, что две плоскости Q_1 и Q_2 параллельны тогда и только тогда, когда коллинеарны и векторы нормали $\overline{N_1}$ и $\overline{N_2}$:

$$Q_1 \parallel Q_2 \Rightarrow \overline{N_1} \parallel \overline{N_2} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \qquad (16)$$

И две плоскости Q_1 и Q_2 перпендикулярны тогда и только тогда, когда их нормальные векторы $\overline{N_1}$ и $\overline{N_2}$ перпендикулярны:

$$Q_1 \perp Q_2 \Rightarrow N_1 \perp N_2 \Rightarrow A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0. \qquad (17)$$

Задача 7. Составить уравнение плоскости α, проходящей через точку M(3; -1; -2) параллельно плоскости $2x - y - 2z + 5 = 0$.

Решение. Если две плоскости параллельны, то параллельны их векторы нормали (15) $\overline{N_1} \| \overline{N_2}$. Поэтому в качестве нормали к искомой плоскости α можно взять нормаль к данной плоскости $\overline{N_1}\{2; -1; -2\}$. Воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору (10):

$$2(x-3) - 1(y+1) - 2(z+2) = 0 \text{ или } 2x - y - 2z = 0.$$

Ответ: Уравнение плоскости $2x - y - 2z - 11 = 0$.

Задача 8. Найти объем пирамиды, полученной пересечением плоскости $2x - 3y + z - 6 = 0$ и координатных плоскостей XOY, XOZ, YOZ.

Решение. Приведем уравнение данной плоскости к виду «уравнения в отрезках» (12):

$$2x - 3y + z - 6 = 0 \qquad \text{или} \qquad \frac{x}{3} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{6} = 1.$$

Откуда a = 3, b = -2; c = 6 – отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат, совпадающие с ребрами пирамиды ОАВС (рис. 16). Так как они взаимно перпендикулярны, $V_{пир} = \frac{1}{6}|a \cdot b \cdot c| = \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 6 = 6$.

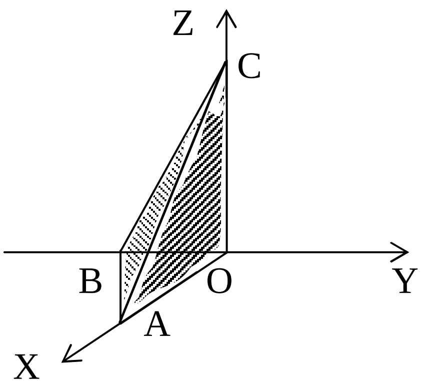


Рис. 16

Ответ: $V_{пир} = 6$ см^3.

Задача 9. Составить уравнение плоскости α , которая проходит через точки $M_1(1; -1; -2)$ и $M_2(3; 1; 1)$ перпендикулярно плоскости $x - 2y + 3z - 5 = 0$ (рис.17).

Решение. Воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через данную точку (например, точку M_1) перпендикулярно вектору (10). В качестве вектора нормали плоскости α можно взять векторное произведение $\overline{M_1M_2}\{2;2;3\}$ и вектора нормали данной плоскости $\overline{N_2}\{1;-2;3\}$. Так как $\overline{N_2}$ параллелен α и $\overline{M_1M_2} \in \alpha$, вектор нормали $\overline{N_1} = \overline{M_1M_2} \times \overline{N_2}$ будет перпендикулярен искомой плоскости α.

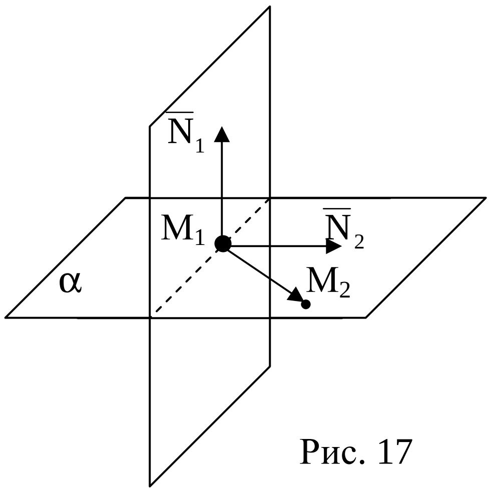


Рис. 17

$$\overline{N_1} = \overline{M_1M_2} \times \overline{N_2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} == 12\bar{i} - 3\bar{j} - 6\bar{k},$$

$$\overline{N_1} = \{12; -3; -6\},$$

$$12(x-1) - 3(y+1) - 6(z+2) = 0$$

$$12x - 3y - 6z - 27 = 0 \quad \text{или} \quad 4x - y - 2z - 9 = 0$$

Ответ: Уравнение плоскости α: $4x - y - 2z - 9 = 0$.

ТЕМА 4. ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим в пространстве прямую ℓ. Точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ – некоторая точка этой прямой. Всякий ненулевой вектор $\overline{S}$, параллельный или лежащий на прямой, назовем направляющим вектором. Пусть вектор $\overline{S}$ имеет координаты $\overline{S}\{m, n, p\}$. Рассмотрим вектор $\overline{M_1M}$, где точка $\overline{M}(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости (рис. 18): $\overline{M_1M}\{x - x_1;\ y - y_1;\ z - z_1\}$.

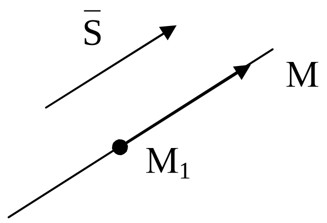


Рис. 18

Так как вектор $\overline{M_1M}$ коллинеарен вектору $\overline{S}$, то их координаты пропорциональны и

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}. \tag{18}$$

Полученное уравнение называется каноническим уравнением прямой.

Заметим, что рис. 18 отражает параллельность прямой ℓ вектору $\overline{S}$, поэтому, например, уравнение $\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$ говорит о том, что прямая, определяемая этим уравнением, перпендикулярна оси OY и лежит в плоскости $y - y_1 = 0$.

Прямая ℓ будет определена, если задать две ее различные точки: $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Вектор $\overline{MM_2}$ в этом случае служит направляющим вектором прямой (рис. 19). Следовательно, $m = x_2 - x_1$, $n = y_2 - y_1$, $p = z_2 - z_1$ и поэтому

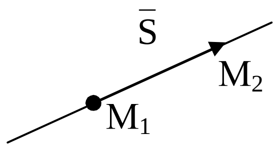


Рис. 19

из уравнения (17) следует

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{19}$$

Уравнение (19) называется уравнением прямой, проходящей через две точки.

Иногда удобно пользоваться параметрическими уравнениями прямой, которые получим из (18), введя параметр t:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p} = t.$$

Перепишем это равенство в виде $\begin{cases} \dfrac{x-x_1}{m}=t \\ \dfrac{y-y_1}{n}=t \\ \dfrac{z-z_1}{p}=t \end{cases}$ или $\begin{cases} x=mt+x_1 \\ y=nt+y_1 \\ z=pt+z_1 \end{cases}$ (20)

Эти уравнения называют <u>параметрическими уравнениями прямой</u>.

Прямая ℓ может быть задана как линия пересечения двух плоскостей Q_1 и Q_2 (рис. 20).

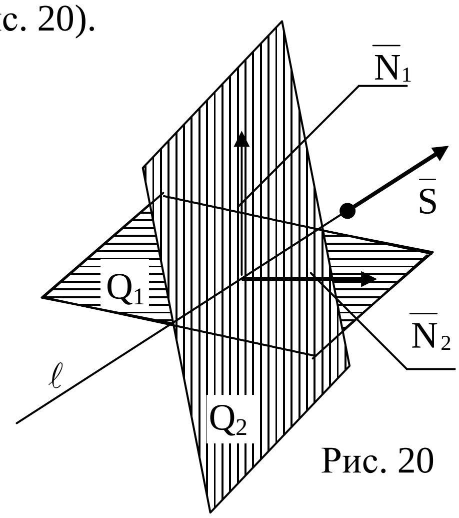


Рис. 20

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 & (Q_1) \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 & (Q_2) \end{cases}. \qquad (21)$$

Эти уравнения называются <u>общими уравнениями прямой.</u> Переход от общих уравнений к каноническому можно выполнить следующим образом: координаты точки M_1, принадлежащих прямой, можно найти как одно из частных решений системы (21). Направляющий вектор $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$ (рис. 20), поэтому в качестве направляющего может быть принят вектор $\overline{N}_1 \times \overline{N}_2$ ($\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$ – нормальные векторы плоскостей Q_1 и Q_2).

Рассмотрим в пространстве две прямые ℓ_1 и ℓ_2, заданные соответственно уравнениями

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

За угол между прямыми принимают угол φ между направляющими векторами $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ данных прямых. По известной формуле косинуса угла между векторами получим

$$\cos\varphi=\cos(\ell_1,\ell_2)=\cos(\overline{S}_1,\overline{S}_2)=\frac{\overline{S}_1\cdot\overline{S}_2}{|\overline{S}_1|\cdot|\overline{S}_2|}=\frac{m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2+p_1\cdot p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}. \qquad (22)$$

Условие параллельности двух прямых равносильно условию коллинеарности их направляющих векторов $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$.

$$\ell_1 \| \ell_2 \Rightarrow \overline{S}_1 \| \overline{S}_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2} \qquad (23)$$

Условие перпендикулярности двух прямых равносильно условию перпендикулярности их направляющих векторов $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$:

$$\ell_1 \perp \ell_2 \Rightarrow \overline{S}_1 \perp \overline{S}_2 \Rightarrow \overline{S}_1 \cdot \overline{S}_2 = 0 \Rightarrow m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2 = 0. \qquad (24)$$

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Углом α между прямой ℓ и плоскостью Q называется острый угол между этой прямой и ее проекцией ℓ' на плоскость Q (рис.21). Пусть прямая ℓ и плоскость Q заданы уравнениями

$$\ell: \frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}; \qquad Q: Ax + By + Cz + D = 0.$$

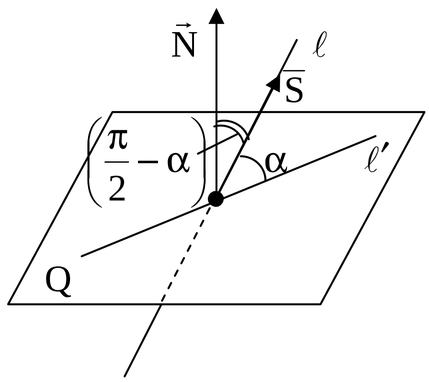


Рис. 21

Векторы $\overline{N}\{A, B, C\}$ и $\overline{S}\{m, n, p\}$ образуют угол $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, значит,

$$\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(\widehat{\overline{N}, \overline{S}}\right) = \frac{\overline{N} \cdot \overline{S}}{\left|\overline{N}\right| \cdot \left|\overline{S}\right|} =$$

$$= \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \qquad (25)$$

Очевидно, что прямая ℓ и плоскость Q перпендикулярны друг другу тогда и только тогда, когда направляющий вектор $\overline{S}$ прямой и вектор нормали $\overline{N}$ плоскости коллинеарны: $\ell \perp Q \Rightarrow \overline{N} \| \overline{S} \Rightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$. (26)

Прямая и плоскость параллельны друг другу, когда векторы $\overline{S}$ и $\overline{N}$ перпендикулярны: $\ell \| Q \Rightarrow \overline{N} \perp \overline{S} \Rightarrow \overline{N} \cdot \overline{S} = 0 \Rightarrow Am + Bn + Cp = 0$. (27)

Точку пересечения прямой ℓ и плоскости Q можно найти, решив совместно систему:

$$\begin{cases} \frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p} & (\ell) \\ Ax + By + Cz + D = 0 & (Q) \end{cases}$$

Проще всего это сделать с помощью параметрических уравнений прямой (20).

Каждому значению параметра t соответствует точка плоскости. Нужно выбрать такое t, при котором точка прямой будет лежать в плоскости. Подставляя x, y, z из соотношений (20) в уравнение плоскости, получим уравнение, из которого найдем значение параметра t.

$$A(mt + x_1) + B(nt + y_1) + C(pt + z_1) + D = 0$$

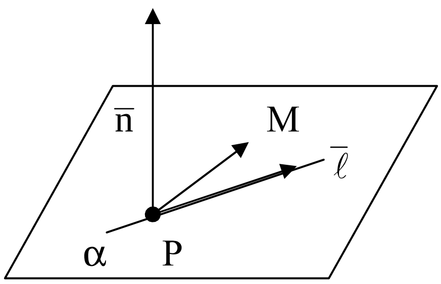
или

$$t(Am + Bn + Cp) = -(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D),$$

$$t = -\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Am + Bn + Cp}.$$

Задача 10. Составить уравнение плоскости α, проходящей через точку $M(1; 0; -2)$ и прямую с уравнением $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-1}{-3}$.

Решение. Известна точка, принадлежащая прямой $P(3; -2; 1)$. Так как вектор нормали плоскости α перпендикулярен вектору $\overline{PM}$ и вектору $\overline{\ell}$, его можно найти как векторное произведение $\overline{PM} \times \overline{\ell}$. Координаты $\overline{PM}\{-2; 2; -3\}$.



$$\overline{n} = \overline{PM} \times \overline{\ell} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -2 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -9\overline{j} - 6\overline{k},$$

$\overline{n}\{-9; -6\}$.

Воспользуемся уравнением плоскости по точке и вектору нормали:

$0(x-1) - 9(y-0) - 6(z+2) = 0$ или $-9y - 6z - 12 = 0$ или $9y + 6z + 12 = 0$.

Ответ: Уравнение плоскости $\alpha : 9y + 6z + 12 = 0$.

Задача 11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x + 3y + z + 1 = 0 \\ 3x + y + 2z - 3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Канонические уравнения прямой имеют вид (формула 17)

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p},$$

где $M_1(x_1, y_1, z_1)$ - точка, принадлежащая прямой, а вектор $\overline{S}\{m, n, p\}$ - направляющий вектор прямой. Точку M_1 выберем произвольно на прямой, т. е. найдем одно из бесчисленного множества решений системы уравнений

$$\begin{cases} 2x+3y+z+1=0 \\ 3x+y+2z-3=0 \end{cases}.$$

Примем x=0, тогда система примет вид:

$$\begin{array}{r} \\ + \\ (-3) \end{array}\begin{cases} 3x+z+1=0 \\ \\ y+2z-3=0\,. \end{cases}$$

Второе уравнение умножаем на (-3) и складываем оба уравнения. Получим $-5z+10=0;\ z_1=2;\ y_1=-1;$ координаты точки $M_1(0; -1; 2)$.

Направляющий вектор $\overline{S}$ можно найти как векторное произведение нормалей к плоскостям, при пересечении которых образуется данная прямая: $\overline{N}_1\{2;3;1\}$ и $\overline{N}_2\{3;1;2\}$.

Тогда $\overline{S}=\overline{N}_1\times\overline{N}_2=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=5\bar{i}-\bar{j}-7\bar{k}, \quad \overline{S}=\{5;-1;-7\}.$

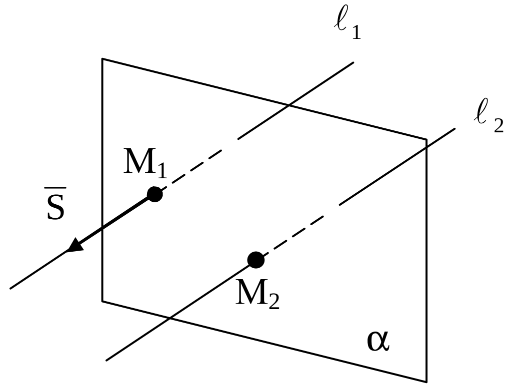
Канонические уравнения прямой: $\dfrac{x}{5}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{-7}.$

Ответ: $\dfrac{x}{5}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{-7}.$

Задача 12. Найти расстояние между параллельными прямыми

$$\ell_1:\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+4}{-1} \quad \text{и} \quad \ell_2:\frac{x+2}{2}=\frac{y+4}{-1}=\frac{z-3}{-1}.$$

Решение: Расстояние между двумя прямыми найдем как расстояние между точкой $M_1(2;-1;-4)$ прямой ℓ_1 и точкой M_2, являющейся проекцией M_1 на прямую ℓ_2. Найдем проекцию точки M_1 на прямую ℓ_2. Для этого введем плоскость α, перпендикулярную данным прямым, проходящую через точки M_1, M_2. Составим ее уравнение по точке $M_1(2;-1;-4)$ и вектору нормали



$\overline{N}=\overline{S}=\{2;-1;-1\}$: $2(x-2)-1(y+1)-1(z+4)=0$ или $2x-y-z-9=0$.

Точку M_2 найдем как точку пересечения прямой и плоскости, решая систему

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y+4}{-1} = \dfrac{z-3}{-1} \\ 2x - y - z - 9 = 0\,. \end{cases}$$

Уравнения прямой запишем в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = 2t - 2 \\ y = -t - 4 \\ z = -t + 3. \end{cases}$$

Подставим x, y, z, выраженные через параметр t, в уравнение плоскости

$$2(2t-2) - (-t-4) - (-t+3) - 9 = 0;$$

$6t = 12, \quad t = 2$ - значение параметра, соответствующее точке M_2.

Подставим его в параметрические уравнения прямой, получим $M_2(2; -6; 1)$.

Расстояние между точками найдем по формуле

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$|M_1M_2| = \sqrt{(2-2)^2 + (-6+1)^2 + (1+4)^2} = \sqrt{50}$$

Ответ: Расстояние между параллельными прямыми равно $\sqrt{50}$ м.

ТЕМА 5. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В декартовой системе координат общее уравнение поверхности второго порядка имеет вид

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 6x + Hy + Kz + L = 0, \qquad (28)$$

где коэффициенты $A, B, C \ldots L \in R$ и A, B, C, D, E, F не равны нулю одновременно.

Уравнение (28) называется общим уравнением поверхности второго порядка.

В некоторых случаях это уравнение определяет так называемые вырожденные поверхности (пустое множество, точку, прямую, плоскость или пару плоскостей). Уравнение невырожденной поверхности преобразованием системы координат можно привести к одному из перечисленных ниже видов, называемых каноническими.

1. Эллипсоид. Каноническое уравнение эллипсоида имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (29)$$

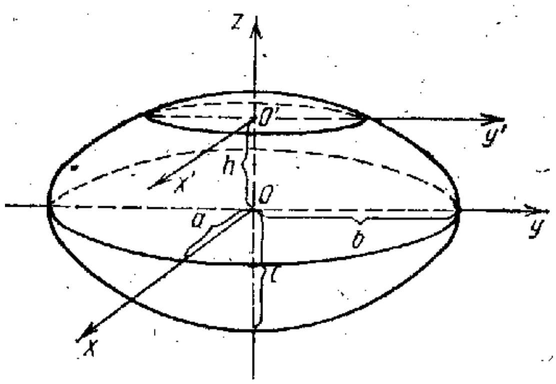


Рис. 22

Числа a, b, c называются полуосями эллипсоида. Если $a \neq b \neq c$ - эллипсоид называют трехосным, если две полуоси равны, эллипсоид называют эллипсои-дом вращения, так как этот эллипсоид может быть получен вращением эллипса вокруг одной из его осей. Если a = b = c, уравнение (29) определяет сферу.

2. Гиперболоиды. Каноническое уравнение гиперболоида имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1.$$

Однополостный гиперболоид (рис.23) определяется уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

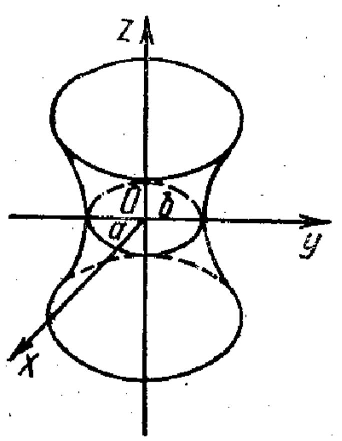


Рис. 23

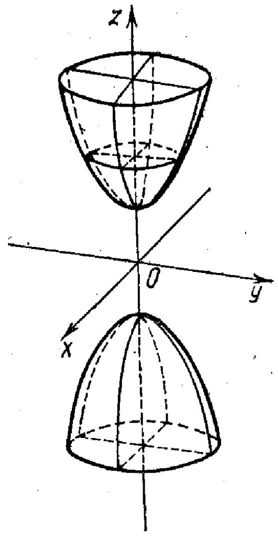


Рис. 24

Двуполостный гиперболоид (рис. 24) определяется уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$. Поверхности, которые задаются уравнениями $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1$ и $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\pm 1$, также являются однополостными гиперболоидами, только иначе расположены относительно системы координат.

3. Конус второго порядка (рис. 25). Каноническое уравнение конуса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

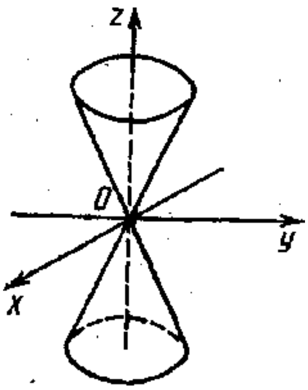


Рис. 25

Поверхности, заданные уравнениями $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ и $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$, также определяют конические поверхности, только иначе расположены относительно системы координат.

4. Параболоиды. Каноническое уравнение параболоида имеет вид $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=z.$ Эллиптический параболоид (рис. 26) определяется уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$, а гиперболический (рис. 27) – уравнением $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$.

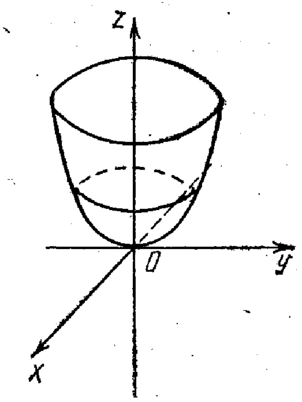


Рис. 26

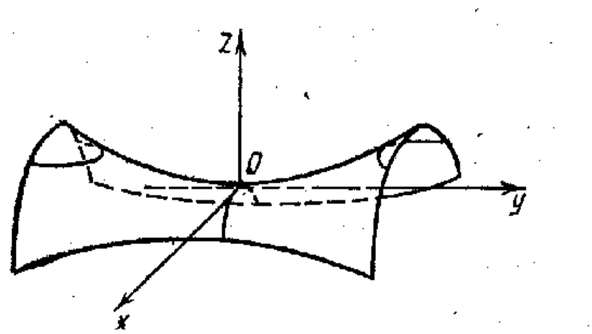


Рис. 27

Поверхности, заданные в декартовой системе координат уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{z^2}{b^2}=y \quad \text{или} \quad \frac{z^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=x,$$

также определяют эллиптический и гиперболический параболоиды, иначе расположенные относительно системы координат.

5. Цилиндры второго порядка. Уравнения эллиптического (рис. 28), гиперболического (рис. 29) и параболического (рис. 30) цилиндров имеют вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ и $y^2=2px$ соответственно.

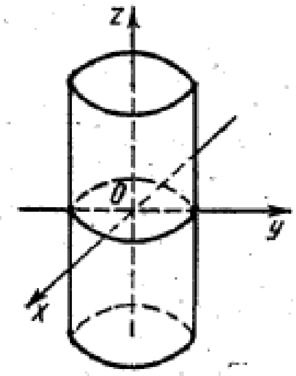


Рис. 28

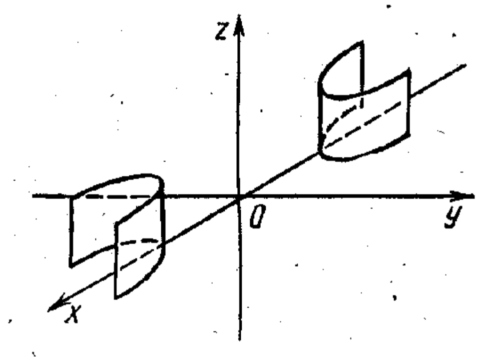


Рис. 29

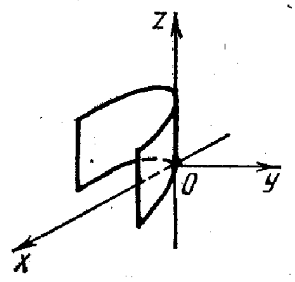


Рис. 30

Поверхности, которые задаются уравнениями $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{z^2}{b^2} = 1$ или $\frac{y^2}{a^2} \pm \frac{z^2}{b^2} = 1$, а также $x^2 = 2px,\ x^2 = 2pz,\ y^2 = 2pz,\ z^2 = 2px,\ z^2 = 2py$, являются иначе расположенными относительно системы координат цилиндрами.

Общие методы приведения уравнения поверхности второго порядка используют теорию квадратичных форм и здесь на рассматриваются. Рассмотрим только случай, когда коэффициенты D, E и F (при xy, yz, xz соответственно) равны нулю. В этом случае уравнения (28) с помощью параллельного переноса осей координат легко приводятся к каноническому виду.

Пример 1. Установить, какая поверхность задана уравнением

$$4x^2 + y^2 - z^2 - 24x + 4y + 2z + 35 = 0.$$

Решение. $4(x^2 - 6x)+ (y^2 + 4y) - (z^2 + 2z)= -35$.
Выражения в скобках дополняем до полных квадратов

$$4\left(x^2 - 6x + 9\right) + \left(y^2 + 4y + 4\right) - \left(z^2 + 2z + 1\right) = -35 + 36 + 4 - 1,$$

$$4(x-3)^2 + (y+2)^2 - (z+1)^2 = 4.$$

Переносим параллельно систему координат, приняв за новый центр точку $O'(3,-2,-1)$: $x = x' + 3$; $y' = y - 2$; $z = z' - 1$.

В новой системе координат данное уравнение имеет вид

$$\frac{(x')^2}{1} + \frac{(y')^2}{4} - \frac{(z')^2}{4} = 1.$$

Это однополостный гиперболоид.

Пример 2. Составить каноническое уравнение эллипсоида, если оси совпадают с осями координат, который проходит через точку M(2; 0; 1) и пересекает плоскость XOY по эллипсу $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{1}=1.$

Решение. Так как оси эллипсоида совпадают с осями координат, его уравнение будет иметь вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. Из условия пересечения эллипсоидом плоскости XOY по эллипсу $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{1}=1$, следует система $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$, откуда $a^2 = 8$; $b^2 = 1$.

Далее следует, что $\frac{2^2}{8}+\frac{0}{1}+\frac{1^2}{c^2}=1,\quad c^2=2$, так как эллипсоид по условию проходит через точку M(2; 0; 1).

Итак, каноническое уравнение искомого эллипсоида будет иметь вид

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{1}+\frac{z^2}{2}=1.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

ЗАДАЧА 1

Даны координаты точек A,B,C. Найти:

a) уравнение стороны AC треугольника ABC;
b) уравнение высоты BH треугольника ABC, ее длину;
c) уравнения медиан CC_1 и AA_1 Δ ABC;
d) точку пересечения медиан CC_1 и AA_1;
e) угол A в Δ ABC;
f) уравнения сторон AD, CD параллелограмма ABCD;
g) координаты вершины D параллелограмма ABCD.

1. A(-1;0) B(0;4) C(4;2)	2. A(-2;0) B(0;3) C(3;-1)
3. A(0;4) B(4;2) C(-1;0)	4. A(2;3) B(-5;-4) C(6;1)
5. A(2;-1) B(4;1) C(5;-5)	6. A(2;0) B(0;3) C(-2;-8)
7. A(3;4) B(0;-3) C(-2;0)	8. A(5;2) B(2;5) C(1;-2)
9. A(3;1) B(-4;0) C(1;-5)	10. A(1;-3) B(2;) C(-1;2)
11. A(2;-1) B(1;4) C(-3;1)	12. A(5;1) B(-7;3) C(-1;-3)
13. A(3;3) B(2;-4) C(-3;7)	14. A(-5;-4) B(6;3) C(1;4)
15. A(4;0) B(-2;1) C(1;7)	16. A(2;2) B(4;0) C(-2;-4)
17. A(-2;1) B(4;0) C(3;7)	18. A(1;3) B(3;2) C(-2;-1)

19. A(10;5) B(-2;10) C(-2;-4)	20. A(3;1) B(1;5) C(-2;-5)
21. A(1;3) B(-3;2) C(3;-4)	22. A(3;-1) B(1;4) C(-3;-4)
23. A(2;1) B(4;2) C(-2;5)	24. A(1;1) B(3;4) C(-4;5)
25. A(3;2) B(1;5) C(-4;-7)	26. A(4;2) B(3;0) C(-5;1)
27. A(1;-3) B(-3;2) C(3;4)	28. A(4;2) B(3;0) C(0;4)
29. A(4;1) B(3;2) C(-2;-3)	30. A(3;1) B(-4;8) C(3;7)
31. A(4;1) B(3;-2) C(-2;3)	32. A(-1;1) B(1;3) C(5;-4)
33. A(3;0) B(0;6) C(-2;3)	34. A(1;0) B(2;2) C(3;-1)
35. A(2;5) B(5;3) C(-2;-3)	

ЗАДАЧА 2

Составить уравнение окружности в каждом из следующих случаев.

1. Центр окружности находится в точке C(2;-3), R=7.
2. Окружность проходит через начало координат, центр окружности находится в точке C(6,8).
3. Окружность проходит через точку A(-1;2) и ее центр находится в точке C(-1;2).
4. Окружность проходит через точки A(3;1) и B(-1;3), а ее центр лежит на прямой $3x - y - 2 = 0$.

Определить полуоси, эксцентриситет и построить следующие эллипсы:

5. $x^2 + 25y^2 = 25.$
6. $x^2 + 5y^2 = 15.$
7. $25x^2 + 9y^2 = 1.$
8. $9x^2 + y^2 = 1.$

Составить уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси абсцисс симметрично относительно точки O, если

9) точка $M_1(2;-2)$ лежит на эллипсе и a = 4;

10) точка $M_1\left(2;-\frac{5}{3}\right)$ лежит на эллипсе и $\varepsilon = 2/3$;

11) расстояние между фокусами 2c = 6 см, $\varepsilon = 5/3$;

12) малая полуось b = 10см, а $\varepsilon = 12/13$.

Найти точки пересечения прямой и эллипса.

13. $x^2 + 4y^2 = 25; \quad x + 2y - 7 = 0.$

14. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1; \quad 3x - 4y - 40 = 0.$

Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены симметрично относительно точки O на оси ординат, зная, что:

15. Расстояние между фокусами 2c = 10 см, $\varepsilon = 5/3$.

16. Уравнения асимптот $y = \pm\frac{12}{5}x$ и расстояние между вершинами равно 48 м.

17. Дана гипербола $16x^2 - 9y^2 = 144$. Найти: 1) каноническое уравнение; 2) полуоси; 3) фокусы; 4) эксцентриситет; 5) уравнения асимптот; 6) уравнения директрис.

Найти точки пересечения прямой и гиперболы:

18. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1;\quad 4x - 3y - 16 = 0.$

19. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1;\quad x - 2y + 1 = 0.$

Определить полуоси a и b, эксцентриситет, асимптоты следующих гипербол:

20. $x^2 - 4y^2 = 16.$

21. $x^2 - y^2 = 1.$

22. $9x^2 - 64y^2 = 1.$

23. $25x^2 - 16y^2 = 1.$

Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, если:

24) парабола симметрична относительно OX и проходит через точку A(9; 6);

25) парабола симметрична относительно OY и проходит через точку D(4; -8);

26) парабола симметрична относительно OY и проходит через точку C(1; 1).

Установить, что каждое из следующих уравнений определяет параболу. Найти координаты ее вершины O_1, величину параметра **p** и построить параболы:

27. $y = 4x^2 - 8x + 7.$

28. $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 2.$

29. $x = 2y^2 - 12y + 14.$

30. $x = -y^2 + 2y - 1.$

Определить точки пересечения прямой и параболы:

31. $y^2 = -9x;\quad 3x + 4y - 12 = 0$.

32. $y^2 = 6x;\quad 3x - 2y + 6 = 0$.

33. $x^2 = 16y;\quad 2x + 4y + 7 = 0$.

34. Определить точки пересечения двух парабол:

$y = x^2 - 2x + 1$ и $x = y^2 - 6y + 7.$

35. Определить точки пересечения эллипса и параболы:

$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{225} = 1$ и $y^2 = 24x.$

ЗАДАЧА 3

Привести к каноническому виду, установить, является ли линия центральной. Найти, если является, координаты центра, полуоси, эксцентриситет для центральной кривой, вершину, параметр **p** и уравнение директрисы для параболы:

1. $x^2+y^2-2x+4y-20=0$	2. $x^2+y^2+x=0$
3. $x^2+y^2+y=0$	4. $4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$
5. $16x^2+25y^2+32x-100y-284=0$	6. $9x^2-16y^2+90x+32y-367=0$
7. $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$	8. $16x^2-9y^2-64x-18y+199=0$
9. $2x^2+3y^2-8x-6y+5=0$	10. $4x^2+5y^2-8x+10y-11=0$
11. $3x^2+2y^2-12x-4y+8=0$	12. $3x^2+3y^2-6x+8y=0$
13. $x^2-y^2-4x+2y+7=0$	14. $3y^2+5x+6y+13=0$
15. $7x^2-5y^2-14x-20y+22=0$	16. $4x^2+3y^2+18y+15=0$
17. $5x^2-4y^2+16y-36=0$	18. $9x^2+4y^2+30x-12y-2=0$
19. $y^2-2x+4y+2=0$	20. $2x^2+4x-2y-10=0$
21. $3x^2+4y^2+6x-16y+7=0$	22. $2y^2-4x-6y+1=0$
23. $9x^2+16y^2-90x+32y+97=0$	24. $x^2-2x-3y-8=0$
25. $4x^2+3y^2-8x+12y+4=0$	26. $x^2-2y^2+4x-8y-6=0$
27. $4x^2-8x+3y-1=0$	28. $5x^2-4y^2+10x+16y-41=0$
29. $3y^2-6y+x-10=0$	30. $3x^2+3y^2+12x+18y+3=0$
31. $x^2+4x-2y+2=0$	32. $4x^2+9y^2-12x+30y-2=0$
33. $5x^2+10x-2y-4=0$	34. $7x^2-y^2-14x+4y-4=0$
35. $3x^2+6x-2y+12=0$	

ЗАДАЧА 4

Привести уравнение кривой к каноническому виду и построить эту кривую:

1. $2x^2+2y^2-2xy-2x-2y+1=0$	2. $2xy+9x-9y=0$
3. $-2x^2-2y^2+2xy-6x+6y+3=0$	4. $-3x^2-3y^2+4xy-6x+4y+z=0$
5. $-4xy-4x-4y+1=0$	6. $-x^2-y^2-4xy-4x-2y+2=0$
7. $-4x^2-4y^2+2xy+10x-10y+1=0$	8. $4xy+4x-4y-2=0$
9. $x^2+y^2+2xy-8x-8y+1=0$	10. $x^2+y^2+4xy-8x-4y+1=0$
11. $x^2+y^2-2xy-2x+2y-7=0$	12. $3xy+3x+3y-3=0$

13. $4x^2+4y^2+2xy+12x+12y+1=0$	14. $3x^2+3y^2+4xy+8x+12y+1=0$
15. $x^2+y^2-8xy-20x+20y+1=0$	16. $3x^2+3y^2-2xy-6x+2y+1=0$
17. $4xy+4x+4y+1=0$	18. $3x^2+3y^2-4xy+6x-4y-7=0$
19. $-4xy-4x+4y+6=0$	20. $5x^2+5y^2-2xy+10x-2y+1=0$
21. $2x^2+2y^2+4xy+8x+8y+1=0$	22. $-x^2-y^2+2xy+2x-2y+1=0$
23. $2x^2+2y^2-4xy-8x+8y+1=0$	24. $3x^2+3y^2+2xy-12x-4y+1=0$
25. $-4xy+8x+8y+1=0$	26. $2x^2+2y^2-2xy+6x-6y-6=0$
27. $x^2+y^2+4xy+4x+2y-5=0$	28. $4xy+4x-4y+4=0$
29. $3x^2+3y^2-4xy+4x+4y+1=0$	30. $x^2+y^2-4xy+2x-2y+1=0$
31. $x^2+4y^2-4xy+2x-2y-1=0$	32. $x^2+y^2+3xy+x+4y=0$
33. $2x^2+2y^2+4xy+3x-5y+2=0$	34. $9x^2+6y^2-4xy+6x-8y+2=0$
35. $8y^2+6xy-12x-26y+11=0$	

ЗАДАЧА 5

Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M параллельно плоскости

1.	M(1; 0; 1)	4x+6y+4z=0
2.	M(-1; 0; -1)	2x+6y-2z+11=0
3.	M(0; 2; 1)	2x+4y-3=0
4.	M(2; 1; 0)	y+z+2=0
5.	M(-1; 2; 0)	4x-5y-z-7=0
6.	M(2; -1; 1)	x-y+2z=0
7.	M(1; 1; 1)	x+4y+3z+5=0
8.	M(1; 2; 3)	2x+10y+10z-1=0
9.	M(0; -3; -2)	2x+10y+10z-1=0
10.	M(1; 0; -1)	2y+4z-1=0
11.	M(3; -3; -1)	2x-4y-4z-13=0
12.	M(-2; -3; 0)	x+5y+4=0
13.	M(2; -2; -3)	y+z+2=0
14.	M(-1; 0; 1)	2x+4y-3=0
15.	M(3; 3; 3)	8x+6y+8z-25=0
16.	M(-2; 0; 3)	2x-2y+10z+1=0
17.	M(-3; 4; -7)	2x-y+5z-16=0
18.	M(1; 5; -4)	x-3y+z-1=0
19.	M(-5; -2; 0)	4x-5y+3z-1=0
20.	M(-12; 7; 1)	x-4y-z+9=0

21. M(-1; 2; -3)	3x-y+2z+15=0
22. M(4; -1; 0)	5x+9y-3z-1=0
23. M(2; 1; -2)	6x+2y-4z+17=0
24. M(1; -6; -5)	9x+3y-6z-4=0
25. M(-3; -1; 1)	x-3y+5=0
26. M(-9; 1; -2)	6x+3y-2z=0
27. M(3; -5; 4)	x+2y+6z-12=0
28. M(-7; 0; -1)	x+2y+2z-3=0
29. M(1; -1; 1)	16x+12y-15z-1=0
30. M(-2; 0; 3)	2x-y+5z+16=0
31. M(2; 1; -1)	x+2y+3z+8=0
32. M(-2; 4; 2)	2x+2y+z-1=0
33. M(1; 2; 0)	x+z-1=0
34. M(1; -1; 2)	3x+y+z-4=0
35. M(0; 1; -1)	y+z+5=0

ЗАДАЧА 6

Найти объем пирамиды, полученной пересечением данной плоскости и координатных плоскостей XOY, XOZ, YOZ.

1. 2x-y+5z+16=0
2. x-y+7z-1=0
3. 2x+2y+z-4=0
4. 3x+y+z-4=0
5. 3x-2y-2z-16=0
6. 2x+2y+z+8=0
7. x-y+3x-1=0
8. 3x-2y-2z-12=0
9. x+y-3z-7=0
10. x+y+z-7=0
11. 3x-2y+3z+23=0
12. 2x+y+7z-3=0
13. 5x+7y+9z-32=0
14. 3x-7y-2z+7=0
15. x+2y-5z+16=0
16. 3x-2y+5z-3=0
17. x+4y+13z-23=0
18. x-2y+2z+18=0
19. x+y+3z-21=0
20. 5x+3y+z-15=0
21. 5x+2y+z-9=0
22. 4x+y+3z-12=0
23. x+2y+2z+5=0
24. x+4y-z+4=0
25. 2x+y+4z-3=0
26. x+2y+z-9=0
27. x-y+2z-1=0
28. 2x-6y+14z-1=0
29. 5x-15y+35z-5=0
30. x-y+7z-1=0
31. 2x-2y+z-5=0
32. 3x-y+2z-5=0
33. 2x+y-z-3=0
34. x+2y-2z-7=0
35. x+y-5z-15=0

ЗАДАЧА 7

Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 и M_2 перпендикулярно данной плоскости.

1. $M_1(1; 3; 6)$	$M_2(2; 2; 1)$	$x+2y+3z-14=0$
2. $M_1(-1; 0; 1)$	$M_2(-4; 6; -3)$	$x+2y-5z+20=0$
3. $M_1(-4; 2; 6)$	$M_2(2; -3; 0)$	$x-3y+7z-24=0$
4. $M_1(-10; 5; 8)$	$M_2(-5; 2; 4)$	$2x-y+4z=0$
5. $M_1(7; 2; 4)$	$M_2(7; -1; -2)$	$3x+y-5z-12=0$
6. $M_1(3; 3; 1)$	$M_2(-4; 2; 1)$	$x+3y-5z+9=0$
7. $M_1(2; 1; 4)$	$M_2(-1; 5; -2)$	$x-2y+5z+17=0$
8. $M_1(-7; -3; 2)$	$M_2(-6; -3; 6)$	$x-2y+4z-19=0$
9. $M_1(-1; -5; 2)$	$M_2(-6; 0; -3)$	$2x-y+3z+23=0$
10. $M_1(3; 6; -3)$	$M_2(10; 6; -7)$	$2x-3y-5z-7=0$
11. $M_1(0; -1; -1)$	$M_2(-2; 3; 5)$	$4x+2y-z-11=0$
12. $M_1(1; -5; -9)$	$M_2(-1; -6; 3)$	$3x-2y-4z-8=0$
13. $M_1(5; 2; 0)$	$M_2(2; 5; 0)$	$x+2y-z-2=0$
14. $M_1(1; 2; 4)$	$M_2(-1; 1; 1)$	$5x-y+4z+3=0$
15. $M_1(2; -1; -2)$	$M_2(1; 2; 1)$	$x+3y+5z-42=0$
16. $M_1(5; 0; -6)$	$M_2(10; 9; -7)$	$x+y+4z-47=0$
17. $M_1(-2; 0; -4)$	$M_2(-1; 7; 1)$	$2x+3y+z-52=0$
18. $M_1(4; -8; -4)$	$M_2(1; -4; -6)$	$3x+4y+2z-16=0$
19. $M_1(1; 4; 5)$	$M_2(-5; 3; 2)$	$2x-y+3z+24=0$
20. $M_1(-2; 6; -3)$	$M_2(-2; 2; -1)$	$x-2y-3z+18=0$
21. $M_1(1; 2; 0)$	$M_2(3; 0; -3)$	$x+7y+3z+11=0$
22. $M_1(5; 2; 6)$	$M_2(8; 4; 9)$	$3x+7y-5z-11=0$
23. $M_1(2; -1; 2)$	$M_2(1; 2; -1)$	$4x+y-6z-5=0$
24. $M_1(3; 2; 1)$	$M_2(-4; 2; 5)$	$5x+9y+4z-25=0$
25. $M_1(1; 1; 2)$	$M_2(-1; 1; 3)$	$x+4y+13z-23=0$
26. $M_1(2; -2; 4)$	$M_2(-1; 0; -2)$	$3x-2y+5z-3=0$
27. $M_1(2; 3; 1)$	$M_2(4; 1; -2)$	$3x-y+4z=0$
28. $M_1(6; 3; 7)$	$M_2(7; 5; 3)$	$x+2y-5z+16=0$
29. $M_1(1; 1; -1)$	$M_2(2; 3; 1)$	$3x-7y-2z+7=0$
30. $M_1(3; 2; 1)$	$M_2(5; 2; -8)$	$5x+y+9z-32=0$
31. $M_1(1; 5; 7)$	$M_2(-3; 6; 3)$	$2x+y+7z-3=0$
32. $M_1(2; 7; 3)$	$M_2(-4; 8; -1)$	$2x+4y+z-3=0$
33. $M_1(-3; 4; -7)$	$M_2(1; 5; -4)$	$x+5y+3z+1=0$
34. $M_1(-3; 4; -7)$	$M_2(1; 5; -4)$	$x+5y+3z+1=0$
35. $M_1(-1; 2; -3)$	$M_2(4; -1; 0)$	$x+2y+3z+5=0$

ЗАДАЧА 8

Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M и прямую.

1.	M(0; -3; -2)	$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{1}$	2.	M(2; -1; 1)	$\frac{x-4}{1}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-2}{1}$
3.	M(1; 1; 1)	$\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{1}$	4.	M(1; 2; 3)	$\frac{x-1}{0}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{1}$
5.	M(0; 0; -1)	$\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{0}$	6.	M(2; 1; 0)	$\frac{x-2}{0}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{1}$
7.	M(-2; -3; 0)	$\frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-1}{1}$	8.	M(-1; 0; -1)	$\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{1}$
9.	M(0; 2; 1)	$\frac{x+5}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-3}{1}$	10.	M(3; -3; -1)	$\frac{x-6}{5}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+1}{0}$
11.	M(3; 3; 3)	$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-3}{1}$	12.	M(-1; 2; 0)	$\frac{x+5}{1}=\frac{y-7}{-2}=\frac{z-2}{2}$
13.	M(2; -2; -3)	$\frac{x-1}{-1}=\frac{y+5}{0}=\frac{z+5}{0}$	14.	M(1; 5; -7)	$\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{0}$
15.	M(-3; 6; 3)	$\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+1}{2}$	16.	M(-2; -7; 3)	$\frac{x-1}{-1}=\frac{y+5}{4}=\frac{z-1}{2}$
17.	M(-3; 4; -7)	$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{2}$	18.	M(1; 5; -4)	$\frac{x-5}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+2}{0}$
19.	M(-5; -2; 0)	$\frac{x+1}{-3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-2}$	20.	M(2; 5; 4)	$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-1}$
21.	M(-1; 2; -3)	$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+4}{1}$	22.	M(4; -1; 0)	$\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+4}{-1}$
23.	M(2; 1; -2)	$\frac{x+2}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+3}{0}$	24.	M(3; 4; 5)	$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{3}$
25.	M(4; -1; 3)	$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-1}{-1}$	26.	M(-2; 1; 0)	$\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+3}{2}$
27.	M(0; -5; 1)	$\frac{x+3}{1}=\frac{y+2}{-5}=\frac{z+2}{3}$	28.	M(3; 2; -6)	$\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+4}{3}$
29.	M(1; -1; 1)	$\frac{x-3}{1}=\frac{y+4}{5}=\frac{z+4}{2}$	30.	M(-2; 0; 3)	$\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{5}$
31.	M(2; 1; -1)	$\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+3}{2}$	32.	M(2; -2; -4)	$\frac{x-5}{-2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+4}{-1}$
33.	M(1; 2; 0)	$\frac{x-1}{8}=\frac{y+8}{-5}=\frac{z+5}{12}$	34.	M(1; -1; 2)	$\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+5}{0}$
35.	M(0; 1; -1)	$\frac{x-5}{-1}=\frac{y+3}{5}=\frac{z-1}{2}$			

ЗАДАЧА 9

Привести общие уравнения прямой к каноническому виду.

1. $2x-3y-2z+6=0, \quad x-3y+z+3=0$
2. $6x-5y+3z+8=0, \quad 6x+5y-4z+4=0$
3. $3x+3y+z-1=0, \quad 2x-3y-2z+6=0$
4. $3x+4y+3z+1=0, \quad 2x-4y-2z+4=0$
5. $2x+3y-2z+6=0, \quad x-3y+z+3=0$
6. $x-3y+z+2=0, \quad x+3y+2z+14=0$
7. $x+5y+2z-5=0, \quad 2x-5y-z+5=0$
8. $6x-7y-z-2=0, \quad x+7y-4z-5=0$
9. $x-y+z-2=0, \quad x-2y-z+4=0$
10. $x+5y-z+11=0, \quad x-y+2z-1=0$
11. $x+y-2z-2=0, \quad x-y+z+2=0$
12. $2x+y-3z-2=0, \quad 2x-y+z+6=0$
13. $4x+y+z+2=0, \quad 2x-y-3z-8=0$
14. $5x+y+2z+4=0, \quad x-y-3z+2=0$
15. $2x-3y+z+6=0, \quad x-3y-2z+3=0$
16. $x+5y-z-5=0, \quad 2x-5y+2z+5=0$
17. $6x-5y-4z+8=0, \quad 6x+5y+3z+4=0$
18. $8x-y-3z-1=0, \quad x+y+z+10=0$
19. $6x-7y-4z-2=0, \quad x+7y-z-5=0$
20. $3x+3y-2z-1=0, \quad 2x-3y+z+6=0$
21. $4x+y-3z+2=0, \quad 2x-y+z-8=0$
22. $x-y-z-2=0, \quad x-2y+z+4=0$
23. $5x+y-3z+4=0, \quad x-y+2z+2=0$
24. $3x+4y-2z+1=0, \quad 2x-4y+3z+4=0$
25. $x+5y+2z+11=0, \quad x-y-z-1=0$
26. $3x+y-z-6=0, \quad 3x-y+2z=0$
27. $2x+3y+z+6=0, \quad x-3y-2z+3=0$
28. $x+y+z-2=0, \quad x-y-2z+2=0$
29. $x-2y+z-4=0, \quad 2x+2y-z-8=0$
30. $x-3y+2z+2=0, \quad x+3y+z+14=0$
31. $2x+y+z-2=0, \quad 2x-y-3z+6=0$
32. $3x+y-8z+6=0, \quad 2x-2y-3z-1=0$
33. $7x+2y-z-1=0, \quad x-3y+z+2=0$
34. $x+y+10z-21=0, \quad 5x-y+8z-15=0$
35. $x+4y-3z-1=0, \quad 6x+2y+2z-4=0$

ЗАДАЧА 10

Найти расстояние между параллельными прямыми.

1. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-9}{1}=\frac{z-2}{7}$; $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+4}{7}$	2. $\frac{x+5}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-3}{3}$; $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-7}{3}$	3. $\frac{x+9}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{-1}$; $\frac{x+2}{1}=\frac{y+4}{2}=\frac{z+1}{-1}$
4. $\frac{x+4}{1}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z+1}{7}$; $\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z+8}{7}$	5. $\frac{x+3}{2}=\frac{y+7}{1}=\frac{z+2}{-7}$; $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-16}{-7}$	6. $\frac{x+2}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-2}$; $\frac{x+1}{3}=\frac{y+5}{1}=\frac{z-7}{-2}$
7. $\frac{x+5}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-3}{3}$; $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-7}{3}$	8. $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-7}{-2}$; $\frac{x+1}{4}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z-7}{-2}$	9. $\frac{x-1}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{-5}$; $\frac{x+4}{3}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z-2}{-5}$
10. $\frac{x+1}{4}=\frac{y-4}{1}=\frac{z+1}{-6}$; $\frac{x-7}{4}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+5}{-6}$	11. $\frac{x+4}{1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{-3}$; $\frac{x+5}{1}=\frac{y-6}{-2}=\frac{z-5}{-3}$	12. $\frac{x}{3}=\frac{y+5}{-2}=\frac{z+1}{7}$; $\frac{x+5}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+4}{5}$
13. $\frac{x+4}{2}=\frac{y+9}{-1}=\frac{z-1}{4}$; $\frac{x-4}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-4}{4}$	14. $\frac{x-11}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-4}{-1}$; $\frac{x+2}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-7}{-1}$	15. $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{1}$; $\frac{x+3}{3}=\frac{y+4}{3}=\frac{z+7}{1}$
16. $\frac{x+2}{1}=\frac{y+2}{5}=\frac{z+1}{2}$; $\frac{x-5}{1}=\frac{y+7}{5}=\frac{z+7}{2}$	17. $\frac{x-7}{1}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z+2}{7}$; $\frac{x-8}{1}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-5}{7}$	18. $\frac{x-4}{1}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-1}{-2}$; $\frac{x-3}{1}=\frac{y-11}{1}=\frac{z-2}{-2}$
19. $\frac{x+6}{2}=\frac{y-4}{1}=\frac{z+15}{7}$; $\frac{x}{2}=\frac{y-8}{1}=\frac{z-7}{-1}$	20. $\frac{x-2}{2}=\frac{y+5}{-1}=\frac{z-1}{3}$; $\frac{x+3}{2}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-3}{3}$	21. $\frac{x+4}{1}=\frac{y+5}{-1}=\frac{z+3}{-2}$; $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-7}{3}$

22. $\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z+1}{-2}$; $\frac{x-2}{1}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z+3}{-2}$	23. $\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{1}=\frac{z-5}{1}$; $\frac{x+2}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+7}{1}$	24. $\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-1}{3}$; $\frac{x-2}{2}=\frac{y-6}{-4}=\frac{z}{3}$
25. $\frac{x-5}{-5}=\frac{y+13}{-1}=\frac{z-5}{3}$; $\frac{x-6}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+2}{-3}$	26. $\frac{x+5}{1}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-3}{2}$; $\frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+3}{2}$	27. $\frac{x+4}{1}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-4}{2}$; $\frac{x+1}{1}=\frac{y+10}{5}=\frac{z+5}{2}$
28. $\frac{x-5}{-5}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+5}{3}$; $\frac{x+2}{5}=\frac{y-7}{1}=\frac{z+2}{-3}$	29. $\frac{x+1}{3}=\frac{y+5}{3}=\frac{z+1}{-2}$; $\frac{x+1}{-3}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-3}{2}$	30. $\frac{x+1}{-6}=\frac{y+2}{7}=\frac{z-4}{4}$; $\frac{x-11}{6}=\frac{y+12}{-7}=\frac{z+8}{-4}$
31. $\frac{x-3}{-8}=\frac{y-24}{1}=\frac{z-4}{3}$; $\frac{x+5}{8}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z-6}{-3}$	32. $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-2}{1}$; $\frac{x+3}{1}=\frac{y+4}{1}=\frac{z-5}{1}$	33. $\frac{x-1}{6}=\frac{y+2}{5}=\frac{z-3}{1}$; $\frac{x-1}{-6}=\frac{y+2}{-5}=\frac{z-5}{-1}$
34. $\frac{x-6}{1}=\frac{y+3}{5}=\frac{z-2}{-1}$; $\frac{x-2}{1}=\frac{y+8}{5}=\frac{z}{-1}$	35. $\frac{x-4}{2}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z}{2}$; $\frac{x+1}{2}=\frac{y-7}{-5}=\frac{z-1}{2}$	

ЗАДАЧА 11

1.	Установить, что плоскость x–2=0 пересекает эллипсоид $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1$ по эллипсу. Найти его полуоси, вершины, сделать чертеж.
2.	Установить, что плоскость z+1=0 пересекает однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{18}+\frac{z^2}{2}=1$ по гиперболе. Найти ее полуоси, вершины, сделать чертеж.
3.	Установить, что плоскость y+6=0 пересекает гиперболический параболоид $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=6z$ по параболе. Найти ее параметр **p**, вершину, сделать чертеж.

4.	Установить, какая линия является сечением эллипсоида $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{3}=1$ плоскостью 2x–3y+4z–11=0. Сделать чертеж.
5.	Установить, какая линия является сечением гиперболического параболоида $\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}=y$ плоскостью 3x–3y+4z+2=0. Сделать чертеж.
6.	Установить, какая линия является сечением эллиптического параболоида $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{6}=2z$ плоскостью 3x–y+6z–14=0. Сделать чертеж.
7.	Установить, какая линия является сечением гиперболического параболоида $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=2z$ плоскостью x–2y+2=0. Сделать чертеж.
8.	Доказать, что двуполостный гиперболоид $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{25}=-1$ имеет одну общую точку с плоскостью 5x+2z+5=0. Найти ее координаты.
9.	Доказать, что эллипсоид $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1$ имеет одну общую точку с плоскостью 4x–3y+12z–54=0. Найти ее координаты.
10.	Написать уравнение сферы с центром в точке (5; 1; -3), проходящей через точку (2; -3; -3).
11.	Написать уравнение сферы, проходящей через точку (1; 5; 1) и через окружность $x^2+y^2-2x-10y+23=0$.
12.	Написать уравнение эллипсоида, оси которого совпадают с осями координат и который пересекает плоскость YOZ по эллипсу $\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{2}=1$, а плоскость XOY – по окружности $x^2+y^2=25$.
13.	Установить, что плоскость y=3 пересекает сферу $x^2+y^2+z^2-2x+2z-16=0$ по окружности. Найти ее центр и радиус, сделать чертеж.

14.	Установить, что две сферы $x^2+y^2+z^2=16$ и $x^2+y^2+z^2-10z=-21$ пересекаются по окружности. Найти ее центр, радиус, сделать чертеж.
15.	Привести к каноническому виду и определить, какая поверхность задана уравнением $x^2+z^2=1-y$.
16.	Привести к каноническому виду и определить, какая поверхность задана уравнением $x^2-y^2-z^2+4x+2y+3=0$.
17.	Привести к каноническому виду и определить, какая поверхность задана уравнением $x^2+2x+y^2-2y+z^2-4x+6=0$.
18.	Привести к каноническому виду и определить, какая поверхность задана уравнением $x^2+y^2+z^2=z$.
19.	Привести к каноническому виду и определить, какая поверхность задана уравнением $2x^2+y^2-z^2-12x+4y+2z+5=0$.
20.	Привести к каноническому виду и определить, какая поверхность задана уравнением $x^2-4y^2+z^2-4x+6z+12=0$.
21.	Установить, по какой линии пересекаются поверхность $(x-1)^2+y^2+z^2=36$ и плоскость y+z=0. Сделать чертеж ее проекции на плоскость XOY.
22.	Найти точку пересечения эллиптического параболоида $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=z$ и прямой $\frac{x+1}{2}+\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{-2}$.
23.	Найти точку пересечения эллипсоида $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1$ и прямой $\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{-6}=\frac{z+2}{4}$.
24.	Установить, при каких значениях **k** плоскость x+kz=1 пересекает двуполостный гиперболоид $x^2+y^2-z^2=-1$ по эллипсу.
25.	Установить, при каких значениях **k** плоскость x+kz=1 пересекает двуполостный гиперболоид $x^2+y^2-z^2=-1$ по гиперболе.

26.	Установить, при каких значениях **k** плоскость x+ky=2 пересекает эллиптический параболоид $\frac{x^2}{2}+\frac{z^2}{3}=y$ по эллипсу.
27.	Установить, при каких значениях **k** плоскость x+ky=2 пересекает эллиптический параболоид $\frac{x^2}{2}+\frac{z^2}{3}=y$ по параболе.
28.	Найти точку пересечения гиперболического параболоида $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=z$ и прямой $\frac{x^2}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{2}$.
29.	Составить уравнение конуса, вершина которого находится в начале координат, а направляющая задана уравнениями $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ и z=5. Сделать чертеж.
30.	Составить уравнение конуса, вершина которого находится в начале координат, а направляющая задана уравнениями $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ и y=4. Сделать чертеж.
31.	Составить уравнение конуса, вершина которого находится в начале координат, а направляющая задана уравнениями $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ и x=7. Сделать чертеж.
32.	Составить уравнение конуса с вершиной в точке (0; 0; 3), направляющая которого задана уравнениями: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ и z=0. Сделать чертеж.
33.	Составить уравнение цилиндра, образующие которого параллельны вектору $\ell=\{2;-3;4\}$, а направляющая задана уравнениями $x^2+y^2=9;\ z=1$.
34.	Составить уравнение цилиндра, образующие которого перпендикулярны к плоскости направляющей, а направляющая задана уравнениями $x^2-y^2=z;\ x+y+z=0$.
35.	Составить уравнение кругового цилиндра, проходящего через точку A(2; -1; 1), если его осью служит прямая $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-2}{1}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Натансон И. П. Краткий курс высшей математики. СПб.: Лань, 1997. 728 с.

2. Кудрявцев В. А., Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики. М.: Наука, 1989. 320 с.

3. Шнейдер В. Е., Слуцкий А. И., Шумов А. С. Краткий курс высшей математики. М.: Высш. школа, 1978. Т.1. 384 с.

4. Гурский Е. И., Ершова В. В. Основы линейной алгебры и аналитическая геометрия. Минск: Высш. школа, 1965. 184 с.

5. Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика: Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М.: Наука, 1980, 1984.

6. Данко П. Е., Попов А. Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. М.: Высш. школа, 1996. Ч.1. 160 с.

7. Цубербиллер О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. М.: Наука, 1970. 336 с.

8. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Наука, 1986. 240 с.

Редактор Г.М.Кляут
ИД 060 39 от 12.10.01
Подписано в печать 04.11.02. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ.л.2,5. Уч.-изд. л. 2,5.
Тираж экз. Заказ

Издательство ОмГТУ. 644050, г. Омск, проспект Мира, 11
Типография ОмГТУ