Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Омский государственный технический университет»

Н.И. Николаева

РЯДЫ

Конспект лекций
Часть 6

Омск
Издательство ОмГТУ
2012

УДК
ББК

Рецензенты:
Ю.Ф.Стругов, д-р физ.-мат. наук;
С.Е.Макаров, канд. физ.-мат. наук, доцент

Николаева Н.И.
Ряды. Часть 6 / Н.И. Николаева. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2012. – с.

Пособие представляет собой конспект лекций, читаемых автором на втором курсе технического университета, и предназначено для студентов всех форм обучения. Часть 6 является заключительной и включает в себя два раздела: «Числовые ряды» и «Функциональные ряды». Изложение сопровождается достаточным количеством примеров, поясняющих наиболее важные теоретические положения, иллюстрирующих теоретический материал и дающих образцы решения задач.

Автор также выражает признательность А. Лымарю и зав. методическим кабинетом кафедры Царицинской Т.Г. за большую помощь в техническом оформлении рукописи.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Омского государственного технического университета

Оглавление

Глава 13. РЯДЫ

13.1. Числовые ряды

Неверно трактовать ряд как «сумму бесконечного числа слагаемых», так как он является не обычной суммой, для которой справедливы знакомые по элементарной математике законы действий такие как, например, коммутативность, а новым понятием, которое необходимо правильно истолковать. Некритическое применение привычных правил в действиях с рядами может привести к ложным результатам.

Пронаблюдаем основные понятия теории рядов на частном, достаточно простом и известном примере.

13.1.1. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Последовательность вида $a, aq, \dots, aq^{n-1}, \dots$ называется *геометрической прогрессией;* a называется первым членом прогрессии (будем считать, что $a \neq 0$), q – ее знаменателем, aq^{n-1} – n-м, или общим членом.

ПРИМЕРЫ.

а) 6, 12, 24, 48, 96; б) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ – числовые геометрические прогрессии;

в) $x,\ 2x^2,\ 4x^3,\ 8x^4$; г) $\frac{\sin x}{x+1}, \frac{-\sin^2 x}{(x+1)^3}, \frac{\sin^3 x}{(x+1)^5}, \frac{-\sin^4 x}{(x+1)^7}, \dots$ – функциональные геометрические прогрессии.

Если в геометрической прогрессии конечное число членов (примеры а) и в)), то она называется *конечной* и ее сумма легко находится. Если же прогрессия содержит бесконечное число членов (примеры б) и г)), то она называется *бесконечной*.

Выведем формулу для вычисления суммы конечной геометрической прогрессии:

$$S = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}.$$

Умножим это равенство на q и вычтем одно из другого:

$$qS = \quad aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + aq^n \;\Rightarrow\; S = \frac{a - aq^n}{1-q} \;(q \neq 1).$$

Если прогрессия бесконечна, то прежде чем говорить о сумме *всех* ее членов, надо условиться, какой смысл придавать этому выражению.

Рассмотрим сумму S_n первых n членов бесконечной геометрической прогрессии, которую будем называть ее n*-й частичной суммой*:

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1-q} \quad (q \neq 1).$$

Естественно считать суммой S *всех членов бесконечной прогрессии* предел последовательности ее частичных сумм: $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Из определения предела последовательности следует (см.гл.4), что чем больше слагаемых в частичной сумме вида S_n, тем ближе она к своему предельному значению.

Таким образом, о сумме можно говорить лишь тогда, когда существует *конечный* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. В этом случае *бесконечная геометрическая прогрессия* называется *сходящейся*. Если этот предел *не существует* или *бесконечен*, то будем называть прогрессию *расходящейся*.

Итак,

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q} \lim_{n\to\infty} q^n.$$

1. Пусть $|q| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. В этом случае прогрессия называется *бесконечно убывающей*, она *сходится*, а ее сумма

$$S_\infty = \frac{a}{1-q}. \tag{13.1}$$

Для такой прогрессии $S_\infty \approx S_n$ с точностью $\varepsilon = |S_\infty - S_n| = \left|\dfrac{aq^n}{1-q}\right|$.

2. Пусть $|q| > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |q|^n = \infty$. В этом случае геометрическая прогрессия *расходится* и суммы не имеет.

3. Если $q = 1$, то $S_n = na \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$.

4. Если $q = -1$, то суммы с четными номерами $S_{2m} = 0$, а с нечетными – $S_{2m-1} = a$. Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует.

В обоих случаях прогрессия *расходится*.

Таким образом, *бесконечная геометрическая прогрессия сходится, если является бесконечно убывающей, то есть при* $|q| < 1$. *Если* $|q| \geq 1$, *то геометрическая прогрессия расходится и суммы не имеет.*

13.1.2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ. СВОЙСТВА ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

Рассмотрим последовательность действительных чисел $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Числовым рядом называется выражение

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n ,$$

u_1 называется первым членом ряда, u_n – n-м, или *общим* членом.

Ряд считается заданным, если задан его общий член.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Сумма n первых слагаемых ряда называется его n-й *частичной суммой*: $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

ПРИМЕРЫ.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots;$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{n-1} + \dots;$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi n}{2} = 1 + 0 - 1 + 0 + 1 + 0 - 1 + \dots + \sin\frac{\pi n}{2} + \dots.$

Рассмотрим последовательности частичных сумм этих рядов:

а) $S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$. Заметим, что $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, поэтому

$$S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3},$$

$$S_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4},$$

$$S_4 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = 1 - \frac{1}{5}, \dots,$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Естественно считать, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$

б) $S_1=1,\ S_2=3,\ S_3=7,\ldots,\ S_n=\dfrac{1-2^n}{1-2}=2^n-1 \ \Rightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$, поэтому сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{n-1}$ не существует.

в) $S_1=1,\ S_2=1,\ S_3=0,\ S_4=0,\ S_5=1,\ldots \ \Rightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty}S_n$ не существует, значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\pi n}{2}$ суммы не имеет.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Числовой ряд называется *сходящимся*, если существует *конечный предел* S последовательности его частичных сумм S_n. Этот предел называется *суммой* сходящегося ряда: $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ *не существует* или *бесконечен*, то ряд называется *расходящимся*.

Если ряд сходится, то $r_n=S-S_n$ называется n-м *остатком сходящегося ряда*.

Рассмотрим некоторые *свойства числовых рядов*.

1. Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ сходятся, то сходится и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(au_n+bv_n\right),\quad a,b\in\mathbb{R}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $S_n^u=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k,\quad S_n^v=\sum\limits_{k=1}^{n}v_k$.

По условию существуют конечные пределы $\lim\limits_{n\to\infty}S_n^u=S^u$ и $\lim\limits_{n\to\infty}S_n^v=S^v$. Тогда $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(au_k+bv_k\right)=aS_n^u+bS_n^v$, отсюда $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(aS_n^u+bS_n^v\right)=aS^u+bS^v$. Это по определению означает, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(au_n+bv_n\right)$ сходится.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(au_n+bv_n\right)$ не следует сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$.

ПРИМЕР. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{2}=1+0-1+0+1+0-1+\ldots$ расходится, также расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{3\pi n}{2}=-1+0+1+0-1+0+1+\ldots$. Но сумма этих рядов равна нулю, то есть $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{\pi n}{2}+\sin\frac{3\pi n}{2}\right)$ сходится.

2. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится, то сходится любой ряд, полученный из данного отбрасыванием или дописыванием любого *конечного* числа слагаемых.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть отброшено k слагаемых, сумма которых равна C_k. Найдется частичная сумма S_n данного ряда, в которой содержатся все отброшенные слагаемые (во всех суммах с б***о***льшими номерами они тоже содержатся). Поэтому $S_n=C_k+C_{n-k}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}C_{n-k}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(S_n-C_k\right)=S-C_k$, где S – сумма исходного ряда. Это по определению означает, что ряд, полученный после отбрасывания k его членов, сходится.

Случай дописывания конечного числа членов ряда доказывается аналогично.

Из доказательства этого свойства следует, что его можно переформулировать следующим образом: *произвольное изменение конечного числа членов ряда не влияет на его поведение,* то есть сходящийся ряд остается сходящимся, а расходящийся – расходящимся.

13.1.3. НЕОБХОДИМЫЙ ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ РЯДА

Не всегда можно точно найти сумму сходящегося ряда, как это было сделано, например, для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left(n+1\right)}$. Однако, если быть уверенным в том, что рассматриваемый ряд сходится, можно найти его сумму приближенно со сколь угодно большой точностью, так как $S\approx S_n$, где S_n – частичная сумма ряда с достаточно большим номером. Для этого рассмотрим теоремы, которые называются *признаками сходимости* числовых рядов. Они позволяют установить факт сходимости (или расходимости) ряда не по определению, а с помощью более простых и технологичных приемов.

ТЕОРЕМА (*необходимый признак сходимости числового ряда*) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то его общий член стремится к нулю: $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то по определению существует $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, где S_n – частичная сумма ряда.

При $n \to \infty$ число $(n-1)$ также неограниченно растет, поэтому $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$. Отсюда $\lim_{n\to\infty}\left(S_n - S_{n-1}\right) = S - S = 0$, но $S_n - S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=1}^{n-1} u_k = u_n$. Следовательно, $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из теоремы следует, что *если* $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, *то* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *расходится*.

ПРИМЕР. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{1000n+900}$.

Исследовать на сходимость – значит, ответить на вопрос: данный ряд сходится или расходится?

Найдем предел общего члена ряда: $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{1000n+900} = \frac{1}{500} \neq 0$. Так как этот предел отличен от нуля, то *ряд расходится по необходимому признаку*.

ЗАМЕЧАНИЕ. *Необходимый признак сходимости достаточным не является*, то есть из того, что $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, нельзя заключить, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится: в этом случае он может как сходиться, так и расходиться.

ПРИМЕР. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} ... + \frac{1}{n} + ...$. Числовой ряд такого вида называется *гармоническим* рядом.

Заметим, что его общий член стремится к нулю: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Покажем, что, тем не менее, *гармонический ряд расходится*.

Сгруппируем слагаемые гармонического ряда таким образом:

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}_{2\ \textit{слагаемых}}+\underbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)}_{4\ \textit{слагаемых}}+\underbrace{\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{16}\right)}_{8\ \textit{слагаемых}}+\ldots$$

и построим вспомогательный ряд:

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)}_{2\ \textit{слагаемых}}+\underbrace{\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)}_{4\ \textit{слагаемых}}+\underbrace{\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}\right)}_{8\ \textit{слагаемых}}+\ldots.$$

Обозначим частичную сумму гармонического ряда S_n, а $\tilde{S}_n$ – частичную сумму вспомогательного ряда. Тогда

$$\tilde{S}_1=1=S_1,\quad \tilde{S}_2=1+\frac{1}{2}=S_2,\quad \tilde{S}_4=1+\frac{1}{2}\cdot 2<S_4,\quad \tilde{S}_8=1+\frac{1}{2}\cdot 3<S_8,$$

$$\tilde{S}_{16}=1+\frac{1}{2}\cdot 4<S_{16},\ \ldots,\qquad \tilde{S}_{2^k}=1+\frac{1}{2}\cdot k<S_{2^k},\ \ldots.$$

По теореме о предельном переходе в неравенствах (см.гл.4)

$$\lim_{k\to\infty}S_{2^k}\ge\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}k\right)=\infty\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}S_n=\infty.$$

Следовательно, гармонический ряд расходится. Вычисляя его частичные суммы, можно увидеть, что он расходится очень медленно: к примеру, $S_{1000}\approx 7{,}5$, а $S_{10^6}\approx 14{,}4$.

13.1.4. ДОСТАТОЧНЫЕ ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ ЗНАКОПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

Рассмотрим числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, все члены которого положительны. Такой ряд будем называть *знакоположительным*.

Так как $u_n>0$, то $S_n<S_{n+1}$, то есть последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм возрастает.

В таком случае возможны два варианта (см.гл.4):

а) если $\{S_n\}$ неограниченно растет, то $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$, значит, ряд расходится;

б) если $\{S_n\}$ возрастает и остается ограниченной сверху, то существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$ и ряд сходится.

Таким образом, *для доказательства сходимости знакоположительного ряда достаточно доказать ограниченность сверху последовательности* $\{S_n\}$ *его частичных сумм.*

ТЕОРЕМА (*первый признак сравнения сходимости знакоположительных рядов*). Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ – знакоположительные ряды. Если, начиная с некоторого номера, $u_n \le v_n$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как изменение конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость, то будем считать, что неравенство $u_n \le v_n$ выполняется $\forall n \in \mathbb{N}$.

Обозначим $S_n^u = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $S_n^v = \sum_{k=1}^{n} v_k$ – частичные суммы данных рядов. Очевидно, что $S_n^u \le S_n^v$, кроме того, так как $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ – знакоположительный ряд, то $\{S_n^v\}$ возрастает. Этот ряд по условию сходится, поэтому существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^v = S^v$, причем $S_n^v \le S^v$.

Таким образом, $S_n^u \le S_n^v \le S^v$ $\forall n \in \mathbb{N}$, то есть $\{S_n^u\}$ ограничена сверху, поэтому $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится. Что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА (*второй признак сравнения сходимости знакоположительных рядов*). Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ – знакоположительные ряды. Если, начиная с некоторого номера, $u_n \ge v_n$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отбросим члены данных рядов, для которых неравенство $u_n \ge v_n$ неверно.

Так как $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ – расходящийся знакоположительный ряд, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^v = \infty$, $S_n^v = \sum_{k=1}^{n} v_k$. Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^u \ge \lim\limits_{n\to\infty} S_n^v = \infty$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^u = \infty$, $S_n^u = \sum_{k=1}^{n} u_k$. Это означает, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

ПРИМЕР. Исследовать сходимость рядов: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

а) Обозначим $u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$. В качестве ряда для сравнения выберем гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Он расходится и $u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\ge v_n=\frac{1}{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Значит, по второму признаку сравнения $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ также расходится.

б) Обозначив $u_n=\frac{1}{n^2}$, $v_n=\frac{1}{n}$, получим, что $u_n\le v_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Но б***о***льший ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ расходится, а потому сделать вывод о поведении меньшего ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ нельзя.

Попробуем найти другой ряд для сравнения: пусть $v_n=\frac{1}{n(n-1)}$. Этот ряд, как было показано в п.13.1.2, сходится и в таком случае

$$u_n=\frac{1}{n^2}<v_n=\frac{1}{n(n-1)}\quad\forall n=2,3,\ldots.$$

Следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится по первому признаку сравнения.

Рассмотренные примеры показывают, что правильный выбор ряда для сравнения требует опыта и интуиции. Более простым в этом смысле является предельный признак сравнения сходимости.

ТЕОРЕМА (*предельный признак сравнения сходимости знакоположительных рядов*). Пусть $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ – знакоположительные ряды. Если существует *конечный* $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}\neq 0$, то оба ряда сходятся или расходятся одновременно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=k\neq 0$, причем очевидно, что $k>0$. По определению предела последовательности (см.гл.4)

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n>n_0\ \Rightarrow\left|\frac{u_n}{v_n}-k\right|<\varepsilon,$$

или

$$k-\varepsilon<\frac{u_n}{v_n}<k+\varepsilon. \qquad (13.2)$$

1) Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, тогда, так как $v_n>0$, из неравенства (13.2) имеем: $u_n<(k+\varepsilon)v_n \;\; \forall n>n_0$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(k+\varepsilon)v_n$ также сходится по свойству 1, отсюда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится по первому признаку сравнения.

2) Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится, тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(k-\varepsilon)v_n$ также расходится. Выберем $\varepsilon>0$ так, что $k-\varepsilon>0$. Из (13.2) имеем: $u_n>(k-\varepsilon)v_n \;\; \forall n>n_0$. Следовательно, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится по второму признаку сравнения.

Что и требовалось доказать.

ПРИМЕР. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+3n+4}{n^3+2n^2+5n-1}$.

Обозначим $u_n=\frac{2n^2+3n+4}{n^3+2n^2+5n-1}$. Поведение числителя и знаменателя этой дроби определяется их старшими степенями, поэтому ряд для сравнения выберем так: $v_n=\frac{n^2}{n^3}=\frac{1}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – гармонический ряд.

Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n^2+3n+4)n}{n^3+2n^2+5n-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=2$ (см.гл.4). Этот предел конечен и отличен от нуля, значит, оба ряда ведут себя одинаково, то есть расходятся по предельному признаку сравнения.

ТЕОРЕМА (*признак Даламбера*). Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ – знакоположительный ряд и существует $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=q$. Если $q<1$, то *ряд сходится;* если $q>1$ – *ряд расходится.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=q$. По определению предела последовательности (см.гл.4)

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \ \forall n>n_0\ \Rightarrow \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-q\right|<\varepsilon,$$

или

$$q-\varepsilon<\frac{u_{n+1}}{u_n}<q+\varepsilon. \tag{13.3}$$

1) Пусть $q<1$. Выберем $\varepsilon>0$ так, что $\tilde{q}=q+\varepsilon<1$. Тогда из (13.3) имеем: $u_{n+1}<\tilde{q}u_n\ \ \forall n>n_0$. В частности,

$$\begin{aligned}
&u_{n_0+2}<\tilde{q}u_{n_0+1},\\
&u_{n_0+3}<\tilde{q}u_{n_0+2}<\tilde{q}^{2}u_{n_0+1},\\
&u_{n_0+4}<\tilde{q}u_{n_0+3}<\tilde{q}^{3}u_{n_0+1},\\
&\ldots\\
&u_{n_0+k}<\tilde{q}^{k-1}u_{n_0+1}.
\end{aligned}$$

Обозначим $\tilde{q}^{k-1}u_{n_0+1}=v_k$. Это общий член геометрической прогрессии со знаменателем $\tilde{q}<1$ и первым членом u_{n_0+1}. Такая прогрессия сходится, поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится по первому признаку сравнения и свойству 2 числовых рядов (п.13.1.2).

2) Пусть $q>1$. Выберем $\varepsilon>0$ так, что $\hat{q}=q-\varepsilon>1$. Тогда из (13.3) имеем: $u_{n+1}>\hat{q}u_n\ \ \forall n>n_0\ \Rightarrow\ u_{n_0+k}>\hat{q}^{k-1}u_{n_0+1}=w_k$. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}w_k$ – ряд геометрической прогрессии, знаменатель которой $\hat{q}>1$. Такая прогрессия расходится, поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ расходится по второму признаку сравнения и свойству 2 числовых рядов.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказательства следует, что *если* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$, то есть $q=1$, то *с помощью этого признака исследовать поведение ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ *нельзя. Если* $q=1$, *то ряд может, как сходиться, так и расходиться,* а признак Даламбера для его исследования – неподходящий инструмент. Поэтому в таких случаях надо применять другие признаки сходимости.

ПРИМЕРЫ. С помощью признака Даламбера исследовать сходимость рядов: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^3}$.

а) $u_n=\frac{1}{n(n+1)}\Rightarrow u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=1.$

Это означает, что признак Даламбера для исследования сходимости такого ряда не подходит. Ранее было показано, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ сходится.

б) $u_n=\frac{1}{n}\Rightarrow u_{n+1}=\frac{1}{n+1}\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$, следовательно, и в данном случае признаком Даламбера пользоваться нельзя. Но $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – гармонический ряд, который, как было доказано, расходится.

в) Общий член этого ряда содержит функцию натурального аргумента, которая называется «*эн факториал*».

По определению $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ – произведение всех целых чисел от 1 до n. Тогда $(n+1)!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)=n!(n+1)$.

$$u_n=\frac{2n+1}{n!}\Rightarrow u_{n+1}=\frac{2(n+1)+1}{(n+1)!}=\frac{2n+3}{n!(n+1)}\Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)n!}{n!(n+1)(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{(n+1)(2n+1)}=0,$$

так как степень числителя меньше степени знаменателя (см. гл.4).

Таким образом, $q=0<1$, значит, данный ряд сходится по признаку Даламбера.

г) $u_n = \dfrac{3^n}{n^3} \Rightarrow u_{n+1} = \dfrac{3^{n+1}}{(n+1)^3} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}n^3}{(n+1)^3 3^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3}{(n+1)^3} = 3 > 1,$

значит, данный ряд расходится по признаку Даламбера.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из рассмотренных примеров следует, что *с помощью признака Даламбера можно исследовать ряды, общий член которых содержит показательную функцию или (и) факториал.*

ТЕОРЕМА (*радикальный признак Коши*). Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ – знакоположительный ряд и существует $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = q$. Если $q < 1$, то *ряд сходится;*

если $q > 1$ – *ряд расходится.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = q$. По определению предела последовательности (см.гл.4) $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall n > n_0 \Rightarrow \left|\sqrt[n]{u_n} - q\right| < \varepsilon$, или

$$q - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < q + \varepsilon. \tag{13.4}$$

1) Пусть $q < 1$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, что $\tilde{q} = q + \varepsilon < 1$. Тогда из (13.4) имеем: $\sqrt[n]{u_n} < \tilde{q} \Rightarrow u_n < \tilde{q}^n\ \ \forall n > n_0$. Обозначим $v_n = \tilde{q}^n$. $\sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} v_n$ – ряд геометрической прогрессии со знаменателем $\tilde{q} < 1$, поэтому $\sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} v_n$ сходится, значит, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится по первому признаку сравнения и свойству 2 числовых рядов.

2) Пусть $q > 1$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, что $\hat{q} = q - \varepsilon > 1$. Тогда из (13.4) имеем: $\sqrt[n]{u_n} > \hat{q} \Rightarrow u_n > \hat{q}^n = w_n\ \ \forall n > n_0$. w_k – общий член геометрической прогрессии, знаменатель которой $\hat{q} > 1$. Такая прогрессия расходится, поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится по второму признаку сравнения и свойству 2 числовых рядов.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказательств радикального признака Коши и признака Даламбера следует, что с их помощью можно исследовать поведение тех рядов, общий член которых сравним с общим членом геометрической прогрессии. Если это не так, то применение и того, и другого признака не приведет к определенному результату (получим $q = 1$). Поэтому *если* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = q = 1$, *то для исследования ряда надо выбрать другой признак*, но не признак Даламбера.

ПРИМЕРЫ. С помощью радикального признака Коши исследовать сходимость рядов: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^3}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^{2n}$.

При использовании радикального признака Коши полезно вспомнить, что

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = \left(\infty^0\right) = 1,$$

а также что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1^\infty\right) = e \approx 2,7$$

(второй замечательный предел) (см. гл.4).

а) $u_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$, значит, радикальным признаком Коши так же, как и признаком Даламбера, при исследовании гармонического ряда пользоваться нельзя. Он, как известно, расходится.

б) $u_n = \frac{3^n}{n^3} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt[n]{n^3}} = 3 > 1$, значит, данный ряд расходится. Заметим, что ранее этот ряд был исследован с помощью признака Даламбера и, как здесь, так и там $q = 3$.

в) $u_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$ – радикальный признак Коши не подходит для исследования данного ряда. Однако заметим, что $\lim_{n\to\infty}u_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1^\infty\right) = e$.

Так как $e \neq 0$, то ряд расходится по необходимому признаку.

г) $u_n = \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^{2n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^2 = \frac{4}{9} < 1$, значит, ряд сходится по радикальному признаку Коши.

ТЕОРЕМА (*интегральный признак Коши*). Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ – знакоположительный ряд, члены которого не возрастают, то есть $u_n \ge u_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$. Кроме того, существует непрерывная невозрастающая функция $y = f(x)$ такая, что $f(1) = u_1,\ f(2) = u_2, \dots, f(n) = u_n, \dots$. Тогда, если

1) несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ тоже сходится;

2) несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ тоже расходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольное значение $x = n$ и построим график функции $y = f(x),\ x \in [1, n]$.

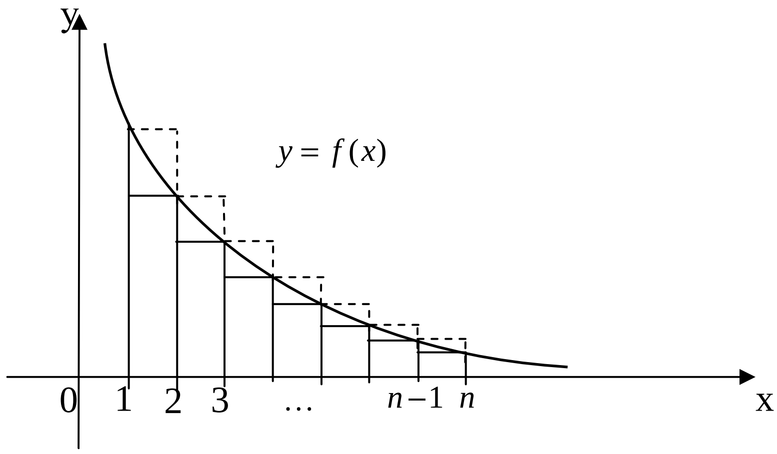


Рис. 1

Рассмотрим две ступенчатые фигуры: вписанную в криволинейную трапецию, ограниченную построенным графиком, осью OX и прямыми $x = 1$ и $x = n$, и описанную вокруг нее (рис.1). Очевидно, что их площади удовлетворяют следующему неравенству (см. п.8.2):

$$S_{впис.} < S_{криволин.тр.} < S_{опис.}$$

Так как по условию $f(n) = u_n\ \forall n \in \mathbb{N}$, то это неравенство можно переписать таким образом:

$$f(2) + f(3) + \dots + f(n) < \int_1^n f(x)dx < f(1) + f(2) + \dots + f(n-1),$$

или

$$S_n - u_1 < \int_1^n f(x)\,dx < S_n - u_n. \tag{13.5}$$

1) Пусть несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится. По определению несобственного интеграла с бесконечным верхним пределом интегрирования (см. п.8.7) существует конечный $\lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$. Кроме того, так как по условию $f(x)\ge 0$, то $\int_1^n f(x)\,dx \le \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$. Тогда из неравенства (13.5) имеем: $S_n < \int_1^n f(x)\,dx + u_1 \le \int_1^{+\infty} f(x)\,dx + u_1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$. Это означает, что $\{S_n\}$ ограничена сверху, то есть $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится.

2) Пусть несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится. Так как по условию функция $y = f(x)$ монотонна, то $\lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)\,dx = +\infty$. Из (13.5) имеем: $S_n > \int_1^n f(x)\,dx + u_n$. Отсюда $\lim_{n\to\infty} S_n \ge \lim_{n\to\infty}\left(\int_1^n f(x)\,dx + u_n\right) = +\infty$, то есть по определению $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Что и требовалось доказать.

ПРИМЕР. Исследовать на сходимость *ряд Дирихле* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}, \quad \alpha > 0.$

Применим интегральный признак Коши: рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$, $\alpha > 0$. Нетрудно проверить, что она удовлетворяет условиям теоремы. Как известно (см. п.8.7), $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $0 < \alpha \le 1$. Поэтому ряд Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\quad \begin{array}{l}\text{при } \alpha>1 \text{ сходится,}\\ \text{при } 0<\alpha\le 1 \text{ расходится.}\end{array}$$

13.1.5. *ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ*

Знакопеременными называются числовые *ряды, имеющие члены разных знаков.*

ПРИМЕРЫ.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n(n+1)}=\frac{\sin 1}{1\cdot 2}+\frac{\sin 2}{2\cdot 3}+\frac{\sin 3}{3\cdot 4}+\frac{\sin 4}{4\cdot 5}+\frac{\sin 5}{5\cdot 6}+\frac{\sin 6}{6\cdot 7}+\ldots$. Так как значения $\sin x$ для углов в первой и второй четвертях положительны, то первые три члена этого ряда также положительны; 4, 5, 6 радиан – углы, принадлежащие промежутку $[\pi;2\pi]$, поэтому следующие три члена отрицательны и т.д.;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}=-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\frac{1}{n^2}=-1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}-\frac{1}{25}-\frac{1}{36}+\ldots$.

Если *знаки* членов ряда *чередуются через один*, то такой знакопеременный ряд называют *знакочередующимся*, то есть знакочередующийся ряд – частный случай знакопеременного.

В рассмотренном выше примере ряд б) – знакочередующийся.

ТЕОРЕМА (*достаточный признак сходимости знакопеременного* ряда). Если для знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$, составленный из модулей его членов, то данный знакопеременный ряд сходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+|u_n|)$. Легко убедиться, что $0\le u_n+|u_n|\le 2|u_n|$, поэтому он является знакоположительным.

По условию $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ сходится, отсюда $\sum_{n=1}^{\infty}2|u_n|$ также сходится, поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+|u_n|)$ сходится по первому признаку сравнения.

Но $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(u_n + |u_n|\right) - \sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$, откуда данный знакопеременный ряд сходится как разность сходящихся рядов (свойство 1 числовых рядов).

Что и требовалось доказать.

ПРИМЕР. Исследовать на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n(n+1)}$.

Рассмотрим ряд, составленный из модулей членов этого ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{n(n+1)}\right|$. Так как $|\sin n| \le 1$, то $\left|\frac{\sin n}{n(n+1)}\right| \le \frac{1}{n(n+1)}$. Ранее было доказано, что знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ сходится. Следовательно, данный знакопеременный ряд сходится.

ЗАМЕЧАНИЕ. Доказанный *достаточный* признак не является *необходимым* признаком сходимости знакопеременного ряда, поэтому из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ нельзя сделать вывод о поведении знакопеременного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$.

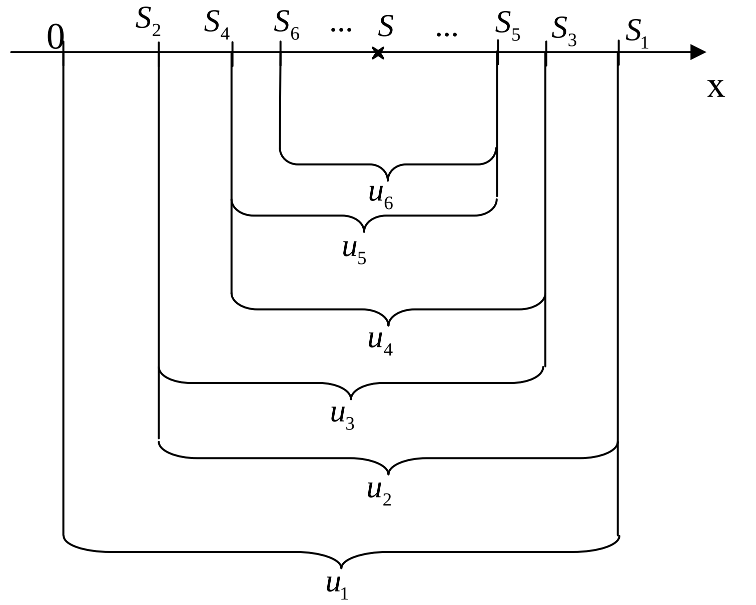
Докажем теперь более простой в применении признак сходимости знакочередующихся рядов. Заметим, что знакочередующиеся ряды – частный случай рядов знакопеременных, поэтому доказанный выше признак может быть тоже использован для исследования поведения таких рядов.

ТЕОРЕМА (*признак Лейбница*). Если для знакочередующегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n,\ u_n \ge 0$ выполнены условия:

1. $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n > u_{n+1} > \ldots,$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0,$

то ряд сходится и его сумма $S < u_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению ряд сходится, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.



$$S_1 = u_1;$$
$$S_2 = u_1 - u_2;$$
$$S_3 = u_1 - u_2 + u_3;$$
$$S_4 = u_1 - u_2 + u_3 - u_4;$$
$$S_5 = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 \ \dots .$$

Рис. 2

По условию теоремы $u_n > u_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, поэтому $S_2 < S_4 < S_6 < \dots$ (рис.2), кроме того, из рисунка ясно, что $S_{2m} < u_1$ $\forall m \in \mathbb{N}$. Таким образом, последовательность частичных сумм $\{S_{2m}\}$ с четными номерами возрастает и ограничена сверху, значит, она имеет конечный предел (см. гл.4): $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = \overline{S}$.

По той же причине $S_1 > S_3 > S_5 > \dots$ (рис.2), но $S_{2m-1} > 0$ $\forall m \in \mathbb{N}$, то есть последовательность частичных сумм с нечетными номерами $\{S_{2m-1}\}$ возрастает и ограничена снизу, значит, и она имеет конечный предел (см. гл.4): $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m-1} = \overline{\overline{S}}$.

Но $S_{2m} = S_{2m-1} + u_{2m}$, откуда $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = \lim\limits_{m\to\infty} S_{2m-1} + \lim\limits_{m\to\infty} u_{2m} = \lim\limits_{m\to\infty} S_{2m-1}$, так как по второму условию теоремы $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{m\to\infty} u_{2m} = 0$. Значит, $\overline{S} = \overline{\overline{S}}$. Следовательно, существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ $(S = \overline{S} = \overline{\overline{S}})$ и потому ряд сходится.

Рис. 2 иллюстрирует тот факт, что сумма ряда $S < u_1$.

Что и требовалось доказать.

ПРИМЕР. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$.

Для этого ряда $u_n = \frac{1}{n}$ и потому оба условия признака Лейбница выполнены: $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Значит, данный знакочередующийся ряд сходится.

Заметим, что ряд, составленный их модулей членов этого ряда, является гармоническим $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, то есть расходящимся.

Возвращаясь к предыдущему примеру, можно сделать вывод, что сходящиеся знакопеременные ряды бывают двух типов: для одних ряд, составленный из модулей их членов, сходится, а для других – расходится.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Знакопеременный ряд называется *условно сходящимся*, если *он сходится, а ряд, составленный из модулей его членов, расходится*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Знакопеременный ряд называется *абсолютно сходящимся*, если *сходится ряд, составленный из модулей его членов*.

Таким образом, можно заключить, что $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ сходится условно, а $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n(n+1)}$ – абсолютно. Нетрудно доказать, что $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\frac{1}{n^2}$ – также абсолютно сходящийся ряд.

Абсолютно сходящиеся ряды обладают свойствами конечных сумм, что утверждает следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Если знакопеременный ряд сходится абсолютно, то он остается абсолютно сходящимся и при любой перестановке его членов, при этом сумма ряда от перестановки не зависит.

Без доказательства.

Условно сходящиеся ряды свойствами конечных сумм не обладают.

ТЕОРЕМА. Если знакопеременный ряд сходится условно, то каково бы ни было число *A*, можно подобрать такую бесконечную перестановку его членов, в результате которой сумма полученного ряда будет равна *A*. Более того, существуют перестановки, делающие условно сходящийся ряд расходящимся.

Без доказательства.

ПРИМЕР. Как было показано выше, знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ сходится условно. Приведем пример бесконечной перестановки его членов, в результате которой сумма возрастет в 1,5 раза.

Обозначим сумму этого ряда S:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+...=S. \qquad (13.6)$$

Умножим обе части (13.6) на $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+...\right)=\frac{S}{2}. \qquad (13.7)$$

Перепишем (13.7) таким образом:

$$0+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}+0-\frac{1}{8}+...=\frac{S}{2}. \qquad (13.8)$$

Складывая теперь (13.6) и (13.8), получим:

$$1+0+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+0+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+...=\frac{3}{2}S,$$

то есть

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}...=\frac{3}{2}S.$$

С одной стороны данный ряд представляет собой сумму рядов (13.6) и (13.7), и потому его сумма равна $1{,}5S$. С другой стороны, как нетрудно увидеть, этот ряд получен бесконечной перестановкой членов исходного условно сходящегося ряда (13.6), именно: при такой перестановке после двух положительных членов ряда берется один отрицательный.

Таким образом, сделанная перестановка изменила сумму ряда.

13.1.6. ОСТАТОК РЯДА И ЕГО ОЦЕНКА

Если ряд сходится, то существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$. Точное значение суммы S ряда, как правило, найти непросто, но из определения предела последовательности следует, что $S_n\approx S$ при достаточно больших n. А это значит, что сумму ряда можно приблизить его частичной суммой S_n с любой наперед заданной точностью, взяв в частичной сумме достаточное число членов ряда.

Напомним, что $r_n=S-S_n$ называется n-м остатком сходящегося ряда и $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(S-S_n\right)=0$. Отсюда следует, что остаток r_n может быть сколь угодно мал при достаточно больших n. Поэтому задача приближенного отыскания суммы ряда с заданной точностью ε сводится к поиску такого номера n, чтобы $\left|r_n\right|=\left|S-S_n\right|<\varepsilon$.

ТЕОРЕМА (*об оценке остатка знакоположительного ряда*). Пусть знакоположительные ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся и $u_n \le v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда $r_n^u \le r_n^v$, где r_n^u – n-й остаток первого ряда, а r_n^v – n-й остаток второго ряда.

Без доказательства.

ПРИМЕР. Найти приближенно сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

Для общего члена данного ряда справедлива, например, такая оценка:

$$u_n = \frac{1}{n2^n} \le \frac{1}{2^n} = v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$v_n = \frac{1}{2^n}$ – общий член ряда геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{2}$, сумма которой находится по формуле (13.1): $S_\infty = \frac{a}{1-q}$. Тогда

$$r_n^v = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots = \frac{1}{2^{n+1}\left(1 - \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2^n}.$$

Решая неравенство $r_n^v < 10^{-3}$, находим, что $n \ge 10$, потому что $\frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} < 10^{-3}$. Так как $r_{10}^u \le r_{10}^v$, то $r_{10}^u < 10^{-3}$, поэтому можно утверждать, что для данного ряда $S \approx S_{10}$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

ПРИМЕР. Оценить точность приближения $S \approx S_{10}$ для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Оценим общий член данного ряда таким образом:

$$u_n = \frac{1}{n^2} \le \frac{1}{n(n-1)} = v_n \quad \forall n > 1.$$

Остаточный член вспомогательного ряда (см. п. 13.1.2)

$$r_{10}^v = \frac{1}{11 \cdot 10} + \frac{1}{12 \cdot 11} + \ldots = \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \ldots < \frac{1}{10},$$

потому $r_n^u < r_n^v < 10^{-1}$. Следовательно, $S \approx S_{10}$ с точностью $\varepsilon = 10^{-1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Сравнивая результаты, полученные в рассмотренных примерах, можно сделать вывод, что $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$ сходится гораздо быстрее ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$: для достижения заданной точности в первом случае необходимо взять меньше членов ряда, чем во втором.

ТЕОРЕМА (*об оценке остатка знакопеременного ряда*). Пусть знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится абсолютно. Тогда модуль его n-го остатка не превосходит n-го остатка ряда, составленного из модулей его членов:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty}\left|u_k\right|.$$

Без доказательства.

ПРИМЕР. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi n}{3}}{3^n}$ с точностью $\varepsilon=10^{-2}$.

Данный ряд является знакопеременным и $\left|u_n\right|=\frac{\left|\cos\frac{\pi n}{3}\right|}{3^n}\le\frac{1}{3^n}=v_n$.

$v_n=\frac{1}{3^n}$ – общий член ряда геометрической прогрессии со знаменателем $q=\frac{1}{3}$, поэтому $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ сходится. Значит, данный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi n}{3}}{3^n}$ сходится абсолютно.

Воспользуемся формулой (13.1):

$$r_n^v=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{3^k}=\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+2}}+\ldots=\frac{1}{3^{n+1}\left(1-\frac{1}{3}\right)}=\frac{1}{3^n\cdot 2}.$$

Решая неравенство $\frac{1}{3^n\cdot 2}<\frac{1}{100}$, находим, что $n\ge 4$. Поэтому можно утверждать, что для исходного ряда $S\approx S_4$ с точностью $\varepsilon=10^{-2}$.

ТЕОРЕМА (*об оценке ряда, сходящегося по признаку Лейбница*). Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$, $u_n>0$ сходится по признаку Лейбница. Тогда $\left|r_n\right|\le u_{n+1}$, или модуль n-го остатка ряда не превосходит модуля первого отброшенного слагаемого.

Утверждение этой теоремы следует из признака Лейбница.

ПРИМЕР. Найти сумму условно сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ с точностью $\varepsilon=10^{-1}$.

Данный ряд является знакочередующимся. Он сходится по признаку Лейбница и $u_{11}=\frac{1}{11}<\frac{1}{10}$, поэтому $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\approx\sum_{n=1}^{10}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...-\frac{1}{10}$ с заданной точностью $\varepsilon=10^{-1}$.

ПРИМЕР. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\pi^{2n-1}}{7^{2n-1}(2n-1)!}$ с точностью $\varepsilon=10^{-3}$.

Данный ряд также является знакочередующимся. Легко проверить, применив к ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^{2n-1}}{7^{2n-1}(2n-1)!}$ признак Даламбера, что он сходится абсолютно. Найдем первый член ряда, модуль которого окажется меньше, чем 0,001:

$$u_2=\frac{\pi^3}{7^3\cdot 3!}\approx 0{,}0150>0{,}001;\qquad u_3=\frac{\pi^5}{7^5\cdot 5!}\approx 0{,}00015<0{,}001.$$

По теореме об оценке остатка знакочередующегося ряда $|r_2|\le u_3<0{,}001$, значит, $S\approx\frac{\pi}{7}-\frac{\pi^3}{7^3\cdot 6}\approx 0{,}4337$.

Далее будет показано, что сумма данного ряда равна $\sin\frac{\pi}{7}$, поэтому в этом примере найдено приближенное значение $\sin\frac{\pi}{7}\approx$ 0,4337 с точностью $\varepsilon=10^{-3}$.

13.2. Функциональные ряды

13.2.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим последовательность функций
$u_1(x),\ u_2(x),\ u_3(x),...,\ u_n(x),...$, определенных $\forall x\in D$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Функциональным рядом* называется выражение

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+...+u_n(x)+...=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x),\quad x\in D.$$

$u_1(x)$ называется первым членом функционального ряда, $u_n(x)$ – его n-м, или *общим* членом.

Функциональный ряд считается заданным, если задан его общий член.

ПРИМЕРЫ.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\quad x\in\mathbb{R}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}=\sin x-\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}-\frac{\sin 7x}{7}+\ldots,\ x\in\mathbb{R}$;

в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(x-2)^{n-1}}=x+\frac{4}{x-2}+\frac{8}{(x-2)^2}+\frac{16}{(x-2)^3}+\ldots,\ x\in\mathbb{R},\, x\neq 2$;

При фиксированном значении $x_0\in D$ функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ становится числовым рядом – сходящимся или расходящимся.

ПРИМЕРЫ. При $x=1$ ряд а) становится сходящимся числовым рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$, ряд в) – расходящимся рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}2^n$.

При $x=\frac{\pi}{2}$ ряд б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ расходится, а при $x=\pi$ сходится, так как $\sin\pi(2n-1)=0$, и сумма ряда в этом случае равна нулю.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ сходится, то точка $x=x_0$ называется *точкой сходимости* функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$.

Совокупность всех точек сходимости функционального ряда называется его *областью сходимости.*

Будем обозначать область сходимости функционального ряда D_{cx}.

Частичная сумма $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)$ является функцией, определенной $\forall x\in D$. Если же $x_0\in D_{cx}$, то по определению суммы числового ряда существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x_0)=S(x_0)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)$, определенная $\forall x\in D_{cx}$, называется *суммой* функционального ряда.

Если $x\in D_{cx}$, то $S(x)-S_n(x)=r_n(x)$ называется n-м *остатком* функционального ряда. *Остаток функционального ряда так же, как и его сумма, является функцией, определенной на области сходимости.*

ПРИМЕР. Найти область сходимости и сумму функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ является рядом геометрической прогрессии со знаменателем $q = x$, поэтому он сходится, если $|q| = |x| < 1$ (см.п.13.1.1). Таким образом, область сходимости этого ряда – интервал $(-1;\,1)$. Сумма ряда определена $\forall x \in (-1;\,1)$ и находится по формуле (13.1): $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Итак, $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots = \dfrac{1}{1-x}$ $\forall x \in (-1;\,1)$. С другой стороны, можно сказать, что во всех точках интервала $(-1;\,1)$ функция $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$, то есть разлагается в ряд, членами которого являются степенн***ы***е функции, и поэтому он называется *степенн**ым***.

13.2.2. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n,\; a_n,\, a \in \mathbb{R},\; n = 0,1,2,\ldots \tag{13.9}$$

называется *степенн**ым** рядом по степеням разности* $(x-a)$.

Если в (13.9) положить $a = 0$, то получим степенной ряд по степеням x:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{13.10}$$

Область сходимости ряда (13.9), очевидно, зависит от коэффициентов ряда, но содержит, по крайней мере, одну точку $x = a$, то есть является непустой.

Найдем, при каких значениях x ряд (13.10) сходится.

При каждом фиксированном значении x (13.10) – числовой и, вообще говоря, знакопеременный ряд. Применим к нему достаточный признак сходимости знакопеременных рядов (см.п.13.1.5): рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left| a_n x^n \right|$, составленный из модулей членов ряда (13.10).

Поведение этого знакоположительного ряда исследуем по признаку Даламбера (см.п.13.1.4): найдем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}||x^{n+1}|}{|a_n||x^n|}=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}. \tag{13.11}$$

Полагая, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ существует, конечен и не равен нулю, обозначим $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{1}{R}$. Тогда, возвращаясь к (13.11), получим: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{|x|}{R}$.

Отсюда ряд (13.10) сходится абсолютно, если $\frac{|x|}{R}<1$, или $-R<x<R$.

Если $\frac{|x|}{R}>1$, или $x<-R$; $x>R$, то ряд из модулей расходится, при этом общий член исходного ряда (13.10) не стремится к нулю, и потому ряд расходится по необходимому признаку сходимости.

Если же $x=\pm R$, то признак Даламбера не подходит для исследования поведения ряда (13.10) (рис.3).

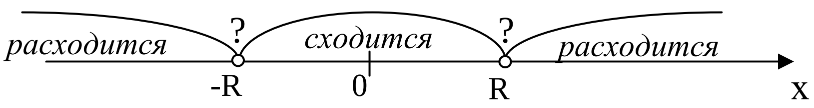


Рис. 3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Число R, определяемое равенством $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{1}{R}$, называется *радиусом сходимости* степенного ряда (13.10). Интервал $(-R;\, R)$ называется *интервалом сходимости* этого ряда.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Областью сходимости* степенного ряда (13.10) называется его интервал сходимости, к которому, быть может, присоединены точки $x=R$ и (или) $x=-R$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=0$, то полагают, что $R=\infty$ и степенной ряд (13.10) сходится на всей числовой прямой.

Если же $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\infty$, то считается, что $R=0$ и область сходимости ряда (13.10) состоит из одной точки $x=0$.

ПРИМЕР. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots. \qquad (13.12)$$

(По определению считается, что $0!=1$).

Применим к ряду, составленному из модулей членов данного, признак Даламбера: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x^{n+1}|n!}{(n+1)!|x^n|}=|x|\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n!(n+1)}=|x|\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$ при любом фиксированном $x\in\mathbb{R}$. Следовательно, ряд (13.12) абсолютно сходится на всей числовой прямой.

Для того чтобы найти интервал сходимости степенного ряда (13.9), обозначим $x-a=y$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n y^n$ абсолютно сходится при $y\in(-R;\,R)$, где $R-$ его радиус сходимости. Отсюда интервал сходимости ряда (13.9) определяется неравенством $-R<x-a<R$, или $a-R<x<a+R$.

ПРИМЕР. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x-2)^{2n}}{3^n(3n+1)}$.

Составим ряд из модулей $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x-2)^{2n}}{3^n(3n+1)}$. Его общий член

$$u_n=\frac{(x-2)^{2n}}{3^n(3n+1)}\Rightarrow u_{n+1}=\frac{(x-2)^{2(n+1)}}{3^{n+1}(3(n+1)+1)}=\frac{(x-2)^{2n+2}}{3^{n+1}(3n+4)}.$$

По признаку Даламбера этот ряд сходится, если

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(x-2)^{2n+2}}{3^{n+1}(3n+4)}\frac{3^n(3n+1)}{(x-2)^{2n}}=\frac{(x-2)^2}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{3n+4}=\frac{(x-2)^2}{3}<1\,.$$

Решим это неравенство:

$$(x-2)^2<3\Rightarrow|x-2|<\sqrt{3}\Rightarrow-\sqrt{3}<x-2<\sqrt{3}\Rightarrow 2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}\,.$$

Следовательно, при всех $x\in\left(2-\sqrt{3};\,2+\sqrt{3}\right)$ ряд сходится абсолютно.

Исследуем поведение ряда в крайних точках его интервала сходимости $\left(2-\sqrt{3};\,2+\sqrt{3}\right)$.

При $x=2-\sqrt{3}$ исходный степенной ряд становится знакочередующимся числовым рядом:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(-\sqrt{3}\right)^{2n}}{3^n(3n+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{3^n(3n+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3n+1}.$$

Легко проверить, что этот ряд сходится по признаку Лейбница (см.п.13.1.5), то есть точка $x=2-\sqrt{3}$ принадлежит области сходимости.

Аналогично при $x=2+\sqrt{3}$ получим числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\sqrt{3}\right)^{2n}}{3^n(3n+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3n+1}.$$

Он совпадает с предыдущим, поэтому точка $x=2+\sqrt{3}$ также принадлежит области сходимости исходного ряда.

Итак, $D_{cx}=\left[2-\sqrt{3};\ 2+\sqrt{3}\right]$.

13.2.3. СВОЙСТВА СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Рассмотрим степенной ряд по степеням x (13.10), который сходится на интервале $(-R;\ R)$.

Ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ называется *степенным рядом*, *полученным* из (13.10) *почленным дифференцированием*.

Ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ называется *степенным рядом*, *полученным* из (13.10) *почленным интегрированием.*

ТЕОРЕМА 1. Почленное дифференцирование или интегрирование степенного ряда не изменяют его интервала сходимости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ сходится $\forall x\in(-R;\ R)$. Радиус сходимости R по определению находится из равенства $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{1}{R}$.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$. Найдем его интервал сходимости, применив признак Даламбера к знакоположительному ряду $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n||x^{n-1}|$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)|a_{n+1}||x|^n}{n|a_n||x|^{n-1}} = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|}{R},\text{ так как } \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1 \text{ (см.гл.4).}$$

Следовательно, ряд сходится, если $\frac{|x|}{R} < 1$, то есть $\forall x \in (-R;\, R)$.

Утверждение теоремы для ряда, полученного из (13.10) почленным интегрированием, доказывается аналогично.

ЗАМЕЧАНИЕ. Несмотря на неизменность *интервала* сходимости степенного ряда при почленном дифференцировании или интегрировании, *область* сходимости при выполнении этих действий может измениться.

ТЕОРЕМА 2. Сумма степенного ряда (13.10) является непрерывной функцией, определенной на интервале сходимости.

Без доказательства.

ТЕОРЕМА 3. Во всех точках интервала сходимости степенной ряд можно почленно дифференцировать, при этом $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n x^n\right)'$.

Без доказательства.

ТЕОРЕМА 4. Во всех точках интервала сходимости степенной ряд можно почленно интегрировать, при этом $\forall x_1, x_2 \in (-R;\, R)$

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{x_1}^{x_2} a_n x^n dx.$$

Без доказательства.

ЗАМЕЧАНИЕ. Две последние теоремы представляют собой аналог хорошо известных фактов: производная суммы равна сумме производных и интеграл от суммы равен сумме интегралов. Однако доказательство этих теорем для степенных рядов гораздо сложнее их конечных аналогов и потому выходит за рамки данного курса.

Рассмотрим пример применения сформулированных свойств.

ПРИМЕР. Найти сумму $S(x)$ степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots.$$

Обратим внимание на то, что после почленного дифференцирования этот ряд станет рядом геометрической прогрессии со знаменателем $q=-x^2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots.$$

Ряд сходится, если $|q|=\left|-x^2\right|<1$, то есть $\forall x\in(-1;1)$. По свойству 1 интервалы сходимости обоих рядов совпадают, а по свойству 3 и формуле (13.1) $S'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}\quad\forall x\in(-1;1)$. Отсюда $S(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\operatorname{arctg}x$.

Таким образом, получено *разложение функции* $y=\operatorname{arctg}x$ в степенной ряд по степеням x:

$$\boxed{\operatorname{arctg}x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots\quad\forall\in(-1;1)}.\qquad(13.13)$$

Этим разложением можно пользоваться для приближенных вычислений.

ПРИМЕР. Вычислить $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$ и $\operatorname{arctg}2$ приближенно с точностью $\varepsilon=10^{-3}$.

Подставив $x=\dfrac{1}{2}$ в (13.13), имеем: $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^3\cdot3}+\dfrac{1}{2^5\cdot5}-\dfrac{1}{2^7\cdot7}+\ldots$. Так как $\dfrac{1}{2^7\cdot7}>10^{-3}$, а $\dfrac{1}{2^9\cdot9}<10^{-3}$, то по теореме об оценке остатка ряда, сходящегося по признаку Лейбница (см.п.13.1.6.),

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\approx\frac{1}{2}-\frac{1}{2^3\cdot3}+\frac{1}{2^5\cdot5}-\frac{1}{2^7\cdot7}=\frac{1}{2}-\frac{1}{24}+\frac{1}{160}-\frac{1}{896}=\frac{6229}{13440}\approx0,4635$$

с точностью $\varepsilon=10^{-3}$.

Ряд (13.13) при $x=2$ расходится, поэтому вычислить приближенно $\operatorname{arctg}2$ по аналогии нельзя. В этом случае следует воспользоваться известным тождеством $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}x=\dfrac{\pi}{2}$ и тем, что $\operatorname{arcctg}x=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$. Таким образом, зная значение $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$, получаем

$$\operatorname{arctg} 2 = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{2} \approx 1,5708 - 0,4635 = 1,1073 \text{ с точностью } \varepsilon = 10^{-3}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Заметим, что область сходимости ряда (13.13) отличается от области сходимости ряда, полученного из него почленным дифференцированием, именно, нетрудно проверить, что (13.13) сходится $\forall x \in [-1;\, 1]$.

13.2.4. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИИ В СТЕПЕННОЙ РЯД. РЯД ТЕЙЛОРА

Пусть $\forall x \in (-R + a;\, R + a)$ функция $y = f(x)$ является суммой степенного ряда:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots \qquad (13.14)$$

или, по-другому, $f(x)$ разложена в степенной ряд (13.14).

Найдем, каким образом коэффициенты этого ряда связаны с $f(x)$.

При $x = a$ имеем: $f(a) = a_0 \;\Rightarrow\; a_0 = f(a)$.

Чтобы найти коэффициент a_1, продифференцируем (13.14) на интервале сходимости:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \ldots + na_n(x-a)^{n-1} + \ldots.$$

Тогда при $x = a$ получим: $a_1 = f'(a)$.

Вычислив вторую производную

$$f''(x) = 2a_2 + 3\cdot 2a_3(x-a) + \ldots + n(n-1)a_n(x-a)^{n-2} + \ldots$$

и полагая $x = a$, имеем: $f''(a) = 2a_2 \;\Rightarrow\; a_2 = \dfrac{f''(a)}{2!}$.

Действуя далее аналогично, получим, что $a_3 = \dfrac{f'''(a)}{3!}, \ldots,$ или $a_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ $\forall n = 0, 1, 2, \ldots$.

Таким образом, *если функцию* $y = f(x)$ *можно разложить в степенной ряд* по степеням разности $(x-a)$, то разложение имеет вид:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots.$$

Этот степенной ряд называется *рядом Тейлора* для функции $y = f(x)$ в *окрестности точки* $x = a$.

Последнее равенство было получено формально, поэтому теперь необходимо ответить на два вопроса:

1. *Каким условиям должна удовлетворять функция* $y = f(x)$, *чтобы для нее можно было составить ряд Тейлора?*
2. *При каких* x *ряд Тейлора сходится, причем именно к той функции, для которой он составлен?*

Ответ на первый вопрос очевиден: если функция имеет производную *любого* порядка, то есть *является бесконечно дифференцируемой в окрестности точки* $x = a$, то коэффициенты ее ряда Тейлора могут быть найдены по формуле $a_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$, $n = 0,1,2,\dots$.

Чтобы ответить на второй вопрос, представим функцию в виде

$f(x) = S_n(x) + R_n(x)$, где $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ – n-я частичная сумма, а $R_n(x)$ назовем *остаточным членом ряда Тейлора.*

ТЕОРЕМА (*необходимое и достаточное условие сходимости ряда Тейлора*). Для того чтобы ряд Тейлора, составленный для бесконечно дифференцируемой в окрестности точки $x = a$ функции $y = f(x)$, сходился к $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. *Необходимость*: сумма ряда $S(x) = f(x) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

По определению суммы ряда

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty}\big(f(x) - S_n(x)\big) = f(x) - S(x) = 0.$$

2. *Достаточность*: $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \;\Rightarrow\; S(x) = f(x)$.

$\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\big(f(x) - S_n(x)\big) = f(x) - \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = 0$. Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$, то есть по определению ряд сходится и его сумма $S(x) = f(x)$.

Что и требовалось доказать.

Таким образом, $f(x)$ *будет суммой составленного для нее ряда Тейлора для всех* x, *при которых* $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Функции, для которых формальный ряд Тейлора составить можно, но он ни при каких значениях x, кроме $x = a$, к ним не сходится, существуют.

Примером такой функции является $y = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ (рис. 4).

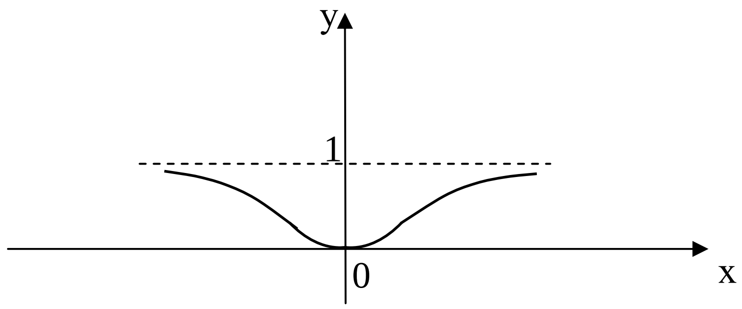


Рис. 4

Можно показать (с помощью довольно трудоемких вычислений), что $f^{(n)}(0) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, поэтому ряд Тейлора для этой функции в окрестности точки $x = 0$ имеет вид: $0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \ldots + 0 \cdot x^n + \ldots$. Сумма этого ряда равна нулю $\forall x \in \mathbb{R}$, то есть формальный ряд сходится, но не к той функции, для которой он составлен.

Остаточный член ряда Тейлора $R_n(x) = f(x) - S_n(x)$, очевидно, сам является рядом. Однако он может быть представлен и в *конечном* виде. Например, можно доказать, что между x и a существует точка $x = c$ такая, что

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} . \qquad (13.15)$$

(13.15) называется *остаточным членом ряда Тейлора в форме Лагранжа*.

13.2.5. РАЗЛОЖЕНИЕ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ В РЯД МАКЛОРЕНА

Если положить $a = 0$, то ряд Тейлора для функции $y = f(x)$ примет вид:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots . \qquad (13.16)$$

Степенной ряд (13.16) называется *рядом Маклорена*.

Остаточный член в форме Лагранжа (13.15) в этом случае имеет вид:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}, \tag{13.17}$$

где $x=c$ находится между 0 и x.

Как было доказано выше, ряд (13.16) сходится к функции $y=f(x)$ для всех x, при которых $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$.

ЛЕММА. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{n!}=0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$. (13.18)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим степенной ряд (13.12) с общим членом $u_n=\dfrac{x^n}{n!}$. В п.13.2.2 было показано, что он сходится на всей числовой прямой, откуда по необходимому признаку сходимости следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{n!}=0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$.

Что и требовалось доказать.

Представим основные элементарные функции в виде ряда Маклорена (13.16).

1. $y=\sin x$.

Вычислим коэффициенты ряда $a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

$y=\sin x$	$f(0)=0$
$y'=\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$	$f'(0)=1$
$y''=-\sin x=\sin(x+\pi)=\sin\left(x+2\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$	$f''(0)=0$
$y'''=-\cos x=\sin\left(x+\dfrac{3\pi}{2}\right)=\sin\left(x+3\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$	$f'''(0)=-1$
$y^{IV}=\sin x=\sin(x+2\pi)=\sin\left(x+4\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$	$f^{IV}(0)=0$
...	...
$y^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$	$\left[\begin{array}{l} f^{(2k)}(0)=0 \\ f^{(2k-1)}(0)=(-1)^{k-1}\end{array}\right.$

Составим формальный ряд:

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+\ldots. \tag{13.19}$$

Его остаточный член (13.17) имеет вид:

$R_n(x)=\sin\left(c+\frac{\pi n}{2}\right)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. Так как $\left|\sin\left(c+\frac{\pi n}{2}\right)\right|\le 1$, то с учетом (13.18) получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$, а это означает, что ряд (13.19) сходится на всей числовой оси к функции, для которой он составлен.

Таким образом,

$$\boxed{\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+\ldots \quad \forall x\in\mathbb{R}}. \tag{13.20}$$

ПРИМЕР. Вычислить приближенно $\int\limits_0^1\frac{\sin x}{x}dx$ с точностью $\varepsilon=10^{-2}$.

Как известно, функция $y=\frac{\sin x}{x}$ не имеет элементарной первообразной (см. гл.7), поэтому нельзя найти точное значение этого интеграла с помощью формулы Ньютона-Лейбница.

Для приближенного вычисления воспользуемся разложением (13.20) и теоремой об оценке остатка знакочередующегося ряда:

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots \Rightarrow \int\limits_0^1\frac{\sin x}{x}dx=\int\limits_0^1\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots\right)dx=$$

$$=\left(x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\frac{x^5}{5\cdot 5!}-\frac{x^7}{7\cdot 7!}+\ldots\right)\Bigg|_0^1=1-\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}-\ldots\approx 1-\frac{1}{18}=\frac{17}{18}\approx 0{,}944$$

с точностью $\varepsilon=10^{-2}$.

2. $y=\cos x$.

Степенной ряд (13.20) можно почленно дифференцировать, при этом его интервал сходимости не изменится. Поэтому, вычислив производную от обеих частей (13.20), получим разложение в ряд Маклорена функции $y=\cos x$:

$$\boxed{\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!}+\ldots \quad \forall x\in\mathbb{R}}. \tag{13.21}$$

3. $y = e^x$.

Так как $y^{(n)} = e^x$, то $f^{(n)}(0) = 1$, и формальный ряд для этой функции имеет вид:

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots.$$

Его остаточный член в форме Лагранжа $R_n(x) = e^c \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, где $x = c$ находится между 0 и x. Исследуем поведение остаточного члена ряда.

Если $x \le 0$, то $c \in (x,0) \Rightarrow e^c < e^0 = 1 \Rightarrow \left|R_n(x)\right| < \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ при всех $x \le 0$.

Если $x > 0$, то $c \in (0,x) \Rightarrow e^c < e^x \Rightarrow R_n(x) < e^x \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ при любом фиксированном x. Следовательно, и при всех $x > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Таким образом, составленный формальный ряд сходится на всей числовой оси к функции $y = e^x$. Поэтому

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad \forall x \in \mathbb{R}}. \tag{13.22}$$

Из (13.22), в частности, следует, что

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \ldots \approx 2{,}7182\ldots.$$

4. $y = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ – гиперболический косинус x.

Заменив в (13.22) x на $-x$, получим:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{13.23}$$

Найдем теперь полусумму абсолютно сходящихся рядов (13.22) и (13.23):

$$\boxed{\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} + \ldots \quad \forall x \in \mathbb{R}}.$$

5. $y = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ – гиперболический синус x.

Разложение в ряд этой функции может быть получено как полуразность рядов (13.22) и (13.23):

$$\boxed{\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \ldots \quad \forall x \in \mathbb{R}}.$$

6. $y = \ln(1+x)$.

Заметим, что $\left(\ln(1+x)\right)' = \dfrac{1}{1+x}$, а выражение $\dfrac{1}{1+x}$ можно трактовать как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой в соответствии с (13.1) первый член $a = 1$, а знаменатель $q = -x$, причем $|q| = |x| < 1$. Следовательно,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots \quad \forall x \in (-1; 1).$$

Так как $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+x)$, то, проинтегрировав этот ряд почленно на интервале сходимости, получим:

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots \quad \forall x \in (-1; 1)}. \tag{13.24}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Ряд (13.24) сходится не только во всех точках интервала $(-1; 1)$, то и при $x = 1$, что легко проверяется с помощью признака Лейбница. Поэтому можно заключить, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots = \ln 2.$$

7. $y = (1+x)^m$, $m \in \mathbb{R}$.

Вычислим коэффициенты ряда $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

$$\begin{array}{l|l}
y=(1+x)^m & f(0)=1 \\
y'=m(1+x)^{m-1} & f'(0)=m \\
y''=m(m-1)(1+x)^{m-2} & f''(0)=m(m-1) \\
y'''=m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3} & f'''(0)=m(m-1)(m-2) \\
\quad\ldots & \quad\ldots \\
y^{(n)}=m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)(1+x)^{m-n} & f^{(n)}(0)=m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)
\end{array}$$

Составим формальный ряд:

$$1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots.$$

Поведение при $n\to\infty$ остаточного члена этого ряда

$$R_n(x)=\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n)}{(n+1)!}(1+c)^{m-n-1}x^{n+1} \tag{13.25}$$

весьма трудоемко. Поэтому найдем его интервал сходимости: составим ряд из модулей членов ряда и применим признак Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)\cdot(m-n)||x|^{n+1}n!}{(n+1)!|m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)||x|^n}=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{|m-n|}{n+1}=|x|,$$

так как $|m-n|=n-m$ при достаточно больших n, а $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-m}{n+1}=1$ (см.гл.4).

Отсюда полученный ряд сходится, когда $|x|<1$, то есть $\forall x\in(-1;1)$.

Можно доказать, что остаточный член (13.25) при таких x стремится к нулю, если $n\to\infty$.

Таким образом,

$$\boxed{\begin{array}{l}(1+x)^m=1+\dfrac{m}{1!}x+\dfrac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\dfrac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots \\ \forall x\in(-1;1),\ m\in\mathbb{R}.\end{array}} \tag{13.26}$$

Функция $y=(1+x)^m$ называется *биномом*, поэтому полученный ряд (13.26) называется *биномиальным*.

При натуральных значениях m разложение будет конечным. В частности, при $m=2, m=3$ можно получить известные формулы сокращенного умножения:

$$(1+x)^2 = 1+2x+\frac{2\cdot 1}{1\cdot 2}x^2+0 = 1+2x+x^2;$$

$$(1+x)^3 = 1+3x+\frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}x^2+\frac{3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+0 = 1+3x+3x^2+x^3.$$

8. $y=\arcsin x$.

Так как $y'=(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$, то разложение в ряд Маклорена функции $y=\arcsin x$ можно получить, используя биномиальный ряд (13.26).

Обозначим $t=-x^2$ и напишем биномиальный ряд для $m=-\dfrac{1}{2}$:

$$(1+t)^{-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}t+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2!}t^2-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{3!}t^3+\ldots+(-1)^n\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2}}{n!}t^n+\ldots.$$

Упростим это выражение. Во-первых, заметим, что $2\cdot 2\cdot 2! = 2\cdot 4$, $2\cdot 2\cdot 2\cdot 3! = 2\cdot 4\cdot 6$, ..., $2^n\cdot n! = 2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n$. Во-вторых, воспользуемся обозначениями $2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n=(2n)!!$ – произведение всех четных чисел от 2 до $2n$ – и $1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)=(2n-1)!!$ – произведение всех нечетных чисел от 1 до $(2n-1)$.

Теперь имеем:

$$(1+t)^{-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1!!}{2!!}t+\frac{3!!}{4!!}t^2-\frac{5!!}{6!!}t^3+\ldots+(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^n+\ldots,$$

отсюда

$$\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 1+\frac{1!!}{2!!}x^2+\frac{3!!}{4!!}x^4+\frac{5!!}{6!!}x^6+\ldots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}+\ldots \quad \forall x\in(-1;1).$$

Так как $\arcsin x=\int\limits_0^x\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, то, проинтегрировав полученный ряд почленно на интервале сходимости, получим:

$$\boxed{\arcsin x = x+\frac{1!!}{2!!}\frac{x^3}{3}+\frac{3!!}{4!!}\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots \quad \forall x\in(-1;1)}.$$

13.2.6. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ ФУРЬЕ

Разложение функций в ряды Тейлора и Маклорена, кроме несомненных достоинств, обладает и рядом недостатков. К их числу относится то обстоятельство, что суммами сходящихся степенных рядов могут быть лишь бесконечно дифференцируемые функции. Однако в математике и ее приложениях приходится исследовать не только недифференцируемые функции, но и функции, имеющие «скачки», то есть разрывы первого рода.

Кроме того, многие процессы в физике и технике являются периодическими (например, переменный ток) и потому описываются периодическими функциями, характеризуемыми равенством $f(x+T)=f(x)$, где $T-$ период.

Простейшими периодическими функциями являются $y=\sin kx$, $y=\cos kx$, $k\in\mathbb{N}$ с наименьшим периодом $T_0=\dfrac{2\pi}{k}$ (коэффициент k называется частотой) и $y=\mathrm{const}$, для которой любое действительное число является периодом. Из таких простых функций могут быть составлены и более сложные, причем при их составлении необходимо использовать синусоидальные величины разных частот. Например, функция $y=\sin x+\dfrac{\sin 3x}{3}+\dfrac{\sin 5x}{5}+\dfrac{\sin 7x}{7}$ является периодической с наименьшим периодом $T_0=2\pi$, однако она существенно отличается от функций, из которых составлена.

Поставим вопрос: можно ли данную периодическую функцию $f(x)$ с периодом T представить в виде суммы конечного или хотя бы бесконечного числа простейших периодических функций?

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right) \tag{13.27}$$

называется *тригонометрическим рядом*. Постоянные числа a_0, a_n, b_n, $n\in\mathbb{N}$ называются *коэффициентами* тригонометрического ряда.

Если ряд (13.27) сходится, то его сумма является 2π-периодической функцией $f(x)$.

Пусть 2π-периодическая функция $f(x)$ является суммой тригонометрического ряда (13.27):

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right). \tag{13.28}$$

Предположим, что $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$ существует и равен сумме интегралов от членов ряда в правой части равенства (13.28).

Чтобы найти коэффициенты этого ряда, проинтегрируем обе части (13.28):

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nxdx + \int\limits_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nxdx\right).$$

Так как

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos kxdx = 0, \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin kxdx = 0, \tag{13.29}$$

а $\int\limits_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi$, то $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = a_0\pi$, откуда

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx. \tag{13.30}$$

Для вычисления остальных коэффициентов нам потребуются следующие интегралы (см. п.8.5):

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin mxdx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\sin(m+k)x + \sin(m-k)x\right)dx = 0, \quad m,k \in \mathbb{N}, \tag{13.31}$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mxdx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\cos(m-k)x + \cos(m+k)x\right)dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq k \\ \pi, & \text{если } m = k \end{cases}, \tag{13.32}$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin mxdx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\cos(m-k)x - \cos(m+k)x\right)dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq k \\ \pi, & \text{если } m = k \end{cases}. \tag{13.33}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функции $\varphi(x)$ и $g(x)$ называются *ортогональными на отрезке* $[a;b]$, если $\int\limits_{a}^{b} \varphi(x)g(x)dx = 0$.

Равенства (13.29), (13.31) – (13.33) означают, что система функций $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$ является *ортогональной* на отрезке $[-\pi; \pi]$, так как функции этой системы попарно ортогональны. Поэтому представление функции $f(x)$ в виде ряда (13.28) можно назвать *разложением ее по системе ортогональных* на отрезке $[-\pi; \pi]$ *функций*.

Чтобы найти коэффициент $a_k,\ k \neq 0$, умножим обе части равенства (13.28) на $\cos kx$ и проинтегрируем на отрезке $[-\pi;\ \pi]$, предполагая, что это возможно сделать:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\cos kx dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx \cos kx dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx \cos kx dx\right).$$

Тогда в соответствии с (13.29), (13.31) и (13.32), получим:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_k \cos^2 kx dx = a_k \pi,$$

откуда

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx,\quad k \in \mathbb{N}. \tag{13.34}$$

Аналогично, умножая обе части (13.28) на $\sin kx$ и интегрируя на $[-\pi;\ \pi]$, с учетом (13.29), (13.31) и (13.33) найдем, что

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx,\quad k \in \mathbb{N}. \tag{13.35}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Коэффициенты, определенные по формулам (13.30), (13.34) и (13.35), называются *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$, а тригонометрический ряд (13.27) с такими коэффициентами называется *тригонометрическим рядом Фурье функции* $f(x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Название «тригонометрический» некоторого функционального ряда означает, что этот ряд имеет вполне определенный вид: его членами являются тригонометрические функции вида $\cos nx$ и $\sin nx$ с теми или иными коэффициентами. Название же «ряд Фурье» указывает на вполне определенное происхождение его коэффициентов: формулы (13.30), (13.34) и (13.35).

Переход от отрезка $[-\pi;\ \pi]$ к любому другому не является принципиальным и, как будет показано позже, может быть легко осуществлен.

Теперь так же, как и при изучении ряда Тейлора, поставим вопрос: какими свойствами должна обладать функция $f(x)$, чтобы составленный для нее ряд Фурье сходился, причем именно к той функции, для которой он составлен?

Ответ на этот вопрос содержится в теореме Дирихле.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $y = f(x)$ называется *кусочно-монотонной* на отрезке $[a;b]$, если этот отрезок можно разбить на конечное число частей так, что на каждой из них функция монотонна, то есть либо убывает, либо возрастает, либо постоянна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $y = f(x)$ называется *кусочно-непрерывной* на отрезке $[a;b]$, если она имеет на этом отрезке конечное число точек разрыва первого рода.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $y = f(x)$ *удовлетворяет условиям Дирихле* на отрезке $[a;\, b]$, если она на этом отрезке *кусочно-монотонна* и *кусочно-непрерывна*.

ПРИМЕР. а) Функция $y = \dfrac{1}{x}$ удовлетворяет условиям Дирихле на отрезке $[1;\, 4]$ и не удовлетворяет этим условиям на $[-1;\, 1]$: в точке $x = 0$ она имеет разрыв второго рода (рис. 5).

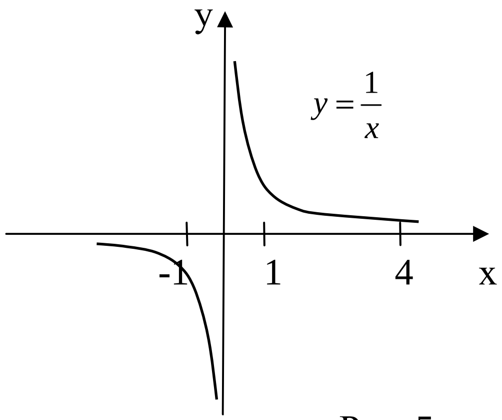


Рис. 5

б) Функция $y = \begin{cases} x, & -1 \le x < 1 \\ x-3, & 1 \le x \le 3 \end{cases}$ (рис. 6) удовлетворяет условиям Дирихле на отрезке $[-1;\, 3]$.

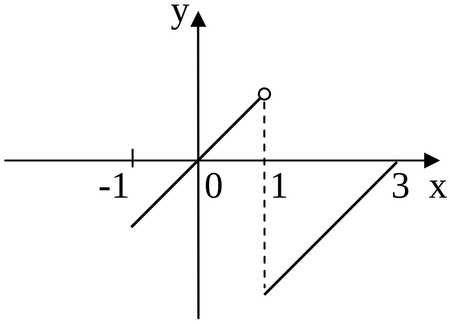


Рис. 6

в) Функция $y=\sin\dfrac{\pi}{x}$ на отрезке $[0;1]$ имеет бесконечное множество интервалов монотонности, так как монотонна на отрезках $\left[\dfrac{2}{2n+3},\dfrac{2}{2n+1}\right],\quad n=0,1,2,\ldots$. Из этого следует, что она не является кусочно-монотонной на $[0;1]$. Кроме того, точка $x=0$ – точка разрыва второго рода: $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{\pi}{x}$ не существует (см.гл.4). Значит, эта функция не удовлетворяет условиям Дирихле на отрезке $[0;1]$. На любом отрезке, не содержащем точку $x=0$, условия Дирихле для этой функции выполнены.

ТЕОРЕМА Дирихле (*достаточное условие разложимости функции в ряд Фурье*). Пусть 2π-периодическая функция $f(x)$ удовлетворяет на отрезке $[-\pi;\pi]$ условиям Дирихле. Тогда составленный для нее тригонометрический ряд Фурье сходится $\forall x\in\mathbb{R}$. При этом, если x_0 – точка непрерывности $f(x)$, то его сумма $S(x_0)=f(x_0)$; если же x_0 – точка разрыва первого рода, то сумма ряда $S(x_0)=\dfrac{1}{2}\big(f(x_0-)+f(x_0+)\big)$, где $f(x_0-)$ и $f(x_0+)$ – левый и правый пределы $f(x)$ в этой точке.

Без доказательства.

ПРИМЕР. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\begin{cases}1, & -\pi\le x<0\\ 2, & 0\le x<\pi\end{cases}$.

Такая постановка задачи означает, что задан *один период* 2π-периодической функции (рис.7), которую нужно разложить в ряд Фурье.

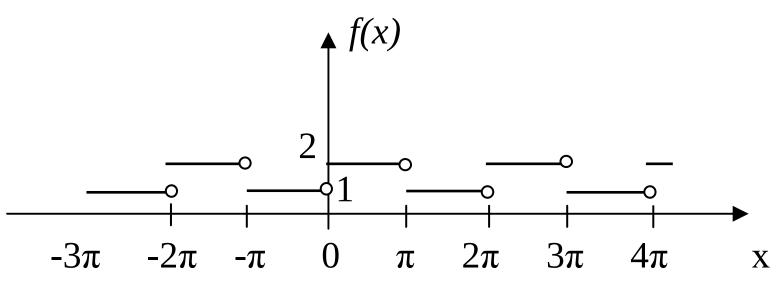


Рис. 7

Найдем коэффициенты ряда по формулам (13.30), (13.34) и (13.35).

$$a_0=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}dx+\int_{0}^{\pi}2dx\right)=\frac{1}{\pi}(\pi+2\pi)=3;\qquad a_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\cos nxdx+2\int_{0}^{\pi}\cos nxdx\right)=0;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\sin nxdx+2\int_{0}^{\pi}\sin nxdx\right)=-\frac{1}{\pi n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{2}{\pi n}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}=$$

$$=-\frac{1}{\pi n}(1-\cos\pi n)-\frac{2}{\pi n}(\cos\pi n-1)=\frac{1}{\pi n}(1-\cos\pi n)=\frac{1}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right).$$

Следовательно, в соответствии с (13.28)

$$f(x)=\frac{3}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-(-1)^n\right)\frac{\sin nx}{n}=\frac{3}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\ldots+\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}+\ldots\right).$$

По теореме Дирихле сумма этого ряда в точках разрыва отличается от значений функции в этих точках, в остальных точках они совпадают. Например, $S(0)=S(\pi)=\frac{3}{2}$, $f(0)=2$, $f(\pi)=1$. График суммы ряда представлен на рис.8.

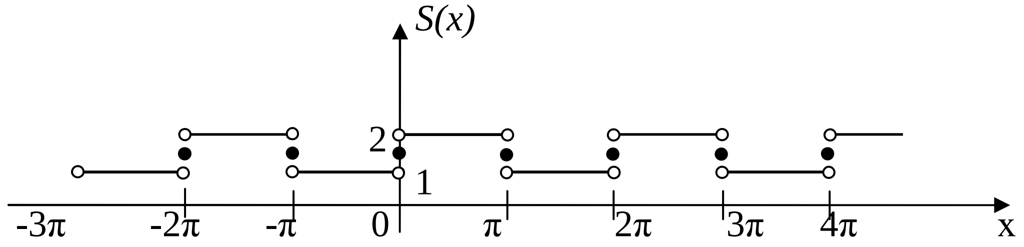


Рис. 8

По определению сходимости ряда его частичные суммы приближают сумму с различной точностью: чем больше номер n частичной суммы, тем точнее приближение $S(x)\approx S_n(x)$. На рис. 9 показан характер приближения данной функции $f(x)$ частичными суммами построенного ряда Фурье.

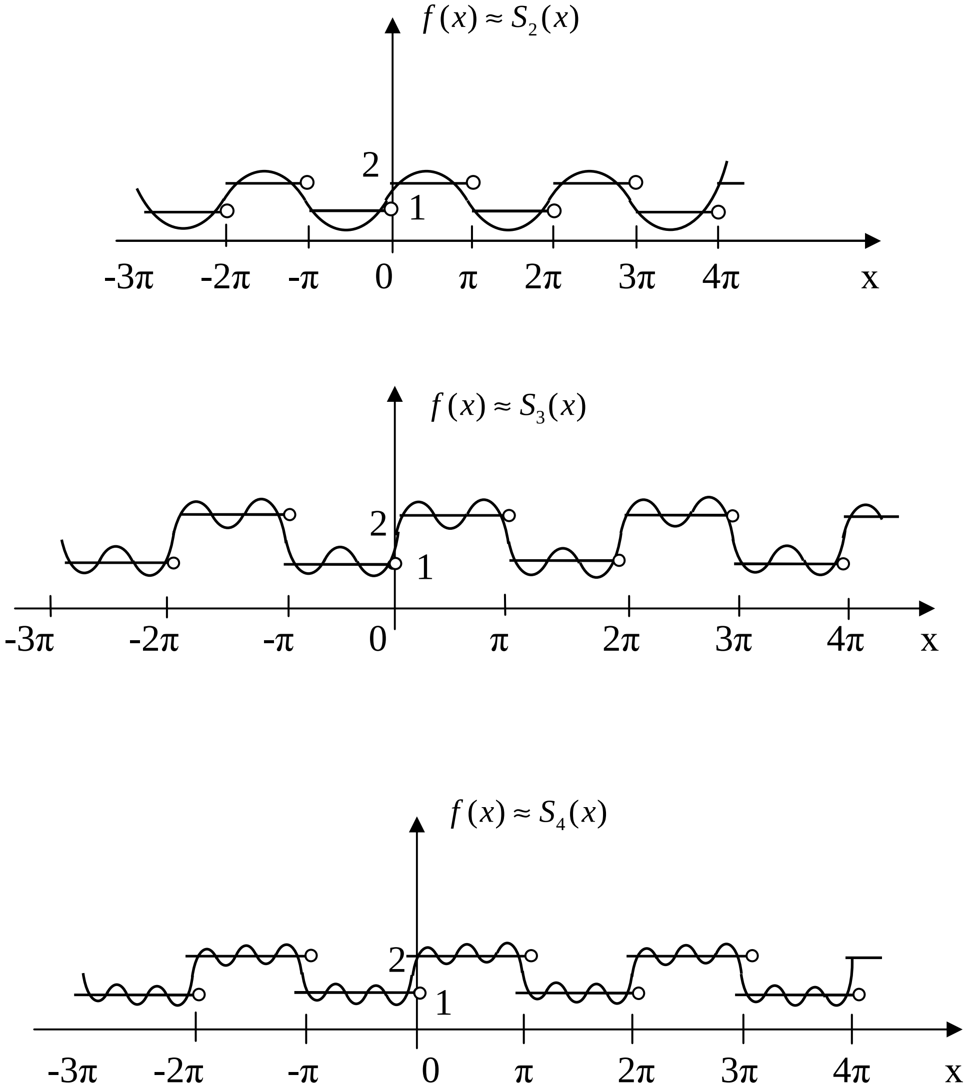


Рис. 9

ЗАМЕЧАНИЕ. Полученный ряд сходится по теореме Дирихле $\forall x \in (-\infty; +\infty)$, например, в точке $x = 1$. Сумма ряда в этой точке равна $f(1) = 2$, то есть $2 = \frac{3}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)}{2n-1}$. Отсюда следует, что знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)}{2n-1}$ сходится.

Заметим, что признаки сходимости рядов, изученные в п.13.1, не позволяли исследовать поведение такого ряда. Кроме того, легко находится и его сумма:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)}{2n-1} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Для 2π-периодической функции $f(x)$ коэффициенты Фурье находятся по формулам (13.30), (13.34) и (13.35). Но из свойств определенного интеграла от периодической функции (см.п.8.5) следует, что отрезок интегрирования при вычислении коэффициентов ряда можно произвольно сдвигать, если это удобно, не изменяя его длины:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)dx=\int_{0}^{2\pi}\varphi(x)dx=\int_{a}^{a+2\pi}\varphi(x)dx.$$

13.2.7. РЯД ФУРЬЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ С ПЕРИОДОМ $2l$

Пусть $f(x)$ – $2l$-периодическая функция, удовлетворяющая условиям Дирихле на отрезке $[-l;\, l]$. По определению периода $f(x+2l)=f(x)$. Введем новую переменную t по формуле $x=\dfrac{lt}{\pi}$ и покажем, что относительно t рассматриваемая функция будет 2π-периодической.

Действительно, $f\left(\dfrac{l(t+2\pi)}{\pi}\right)=f\left(\dfrac{lt+2\pi l}{\pi}\right)f\left(\dfrac{lt}{\pi}+2l\right)=f\left(\dfrac{lt}{\pi}\right)$.

Следовательно, $f\left(\dfrac{lt}{\pi}\right)$ можно разложить в ряд Фурье на отрезке $[-\pi;\, \pi]$:

$$f\left(\frac{lt}{\pi}\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nt+b_n\sin nt\right), \tag{13.36}$$

где $a_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{lt}{\pi}\right)dt,\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{lt}{\pi}\right)\cos nt\,dt,\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{lt}{\pi}\right)\sin nt\,dt$.

Возвратимся теперь к старой переменной x:

$$x=\frac{lt}{\pi}\ \Rightarrow\ t=\frac{\pi x}{l}\ \Rightarrow\ dt=\frac{\pi}{l}dx;\quad t=\pm\pi\ \Rightarrow\ x=\pm l.$$

Тогда имеем:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx,\quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx, \tag{13.37}$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx. \tag{13.38}$$

Равенство (13.36) можно переписать:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right), \tag{13.39}$$

где коэффициенты a_0, a_n, b_n вычисляются по формулам (13.37), (13.38).

Это и есть ряд Фурье для $2l$-периодической функции.

ПРИМЕР. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\begin{cases}0, & -5\le x<1\\ 5-x, & 1\le x<5\end{cases}$.

Найти сумму ряда в точках $x_1=6,\ x_2=-8,\ x_3=11$.

График этой функции представлен на рис.10. Ее период $T=2l=10$.

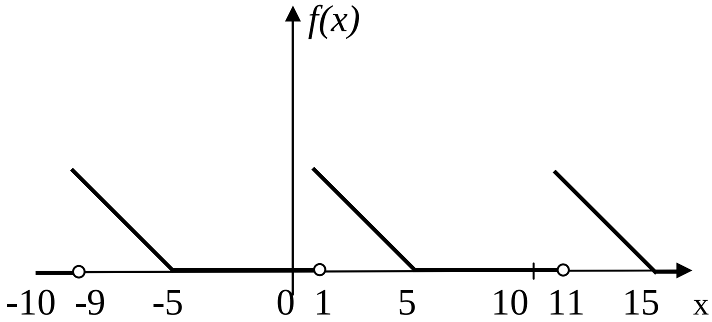


Рис. 10

Чтобы найти сумму ряда в указанных точках, воспользуемся теоремой Дирихле. Заметим, что сделать это можно, не вычисляя коэффициентов ряда и, соответственно, не зная его общего члена.

Точки $x_1=6$ и $x_2=-8$ являются точками непрерывности заданной периодической функции (рис.10), поэтому

$$S(6)=f(6)=f(6-10)=f(-4)=0;\ S(-8)=f(-8)=f(10-8)=f(2)=3.$$

Точка $x_3=11$ является точкой разрыва (рис.10), поэтому по теореме Дирихле

$$S(11)=S(1)=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to1-}f(x)+\lim_{x\to1+}f(x)\right)=\frac{1}{2}(0+4)=2.$$

Найдем теперь коэффициенты Фурье данной функции.

$$a_0=\frac{1}{5}\int_{-5}^{5}f(x)dx=\frac{1}{5}\int_{1}^{5}(5-x)dx=-\frac{1}{5}\frac{(5-x)^2}{2}\Bigg|_1^5=\frac{8}{5}.$$

При вычислении a_n, b_n применим формулу интегрирования по частям (см.п.7.4):

$$a_n = \frac{1}{5}\int\limits_{-5}^{5} f(x)\cos\frac{\pi nx}{5}dx = \frac{1}{5}\int\limits_{1}^{5}(5-x)\cos\frac{\pi nx}{5}dx =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{(5-x)\cdot 5}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{5}\Bigg|_1^5 + \frac{5}{\pi n}\int\limits_1^5 \sin\frac{\pi nx}{5}dx\right) = -\frac{4}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{5} - \frac{5}{\pi^2 n^2}\cos\frac{\pi nx}{5}\Bigg|_1^5 =$$

$$= -\frac{4}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{5} - \frac{5}{\pi^2 n^2}\left(\cos\pi n - \cos\frac{\pi n}{5}\right);$$

$$b_n = \frac{1}{5}\int\limits_{-5}^{5} f(x)\sin\frac{\pi nx}{5}dx = \frac{1}{5}\int\limits_{1}^{5}(5-x)\sin\frac{\pi nx}{5}dx =$$

$$= \frac{1}{5}\left(-\frac{5(5-x)}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{5}\Bigg|_1^5 - \frac{5}{\pi n}\int\limits_1^5 \cos\frac{\pi nx}{5}dx\right) = \frac{4}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{5} - \frac{5}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi nx}{5}\Bigg|_1^5 =$$

$$= \frac{4}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{5} + \frac{5}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{5}.$$

Таким образом, разложение заданной функции в ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \frac{4}{5} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{4}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{5} - \frac{5}{\pi^2 n^2}\left((-1)^n - \cos\frac{\pi n}{5}\right)\right)\cos\frac{\pi nx}{5} +$$
$$+\left(\frac{4}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{5} + \frac{5}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n}{5}\right)\sin\frac{\pi nx}{5}.$$

13.2.8. РЯД ФУРЬЕ ДЛЯ ЧЕТНЫХ И НЕЧЕТНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $f(x)$ – *четная* $2l$-периодическая функция, удовлетворяющая условиям Дирихле на отрезке $[-l;\, l]$. Тогда $f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}$ – четная, а $f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}$ – нечетная функции. Поэтому в соответствии со свойствами определенного интеграла по симметричному отрезку (см.п.8.5) имеем:

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx = 0,$$

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx. \tag{13.40}$$

Таким образом, четная функция представляется рядом Фурье вида

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l},$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам (13.40).

Аналогично, если $f(x)$ – *нечетная* $2l$-периодическая функция, то $f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}$ – нечетная, а $f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}$ – четная функции. Отсюда $a_n = 0 \ \forall n = 0,1,2,\ldots$, а

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx, \tag{13.41}$$

и ряд Фурье такой функции содержит только нечетные синусы:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Коэффициенты этого ряда находятся по формуле (13.41).

13.2.9. РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ФУРЬЕ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

При решении различных прикладных задач возникает необходимость разложения в ряд Фурье непериодических функций.

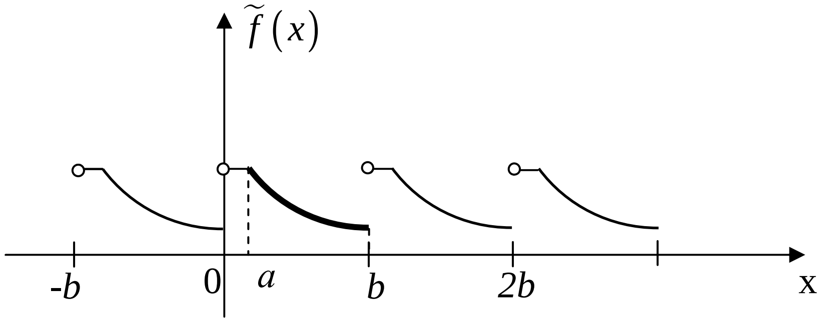
Пусть функция $f(x)$, определенная лишь для всех $x \in [a;b]$, удовлетворяет условиям Дирихле на этом отрезке. Чтобы разложить ее в ряд Фурье, построим *периодическое продолжение* $f(x)$ на всю числовую прямую, то есть найдем функцию $\widetilde{f}(x)$, удовлетворяющую таким условиям:

1. $\widetilde{f}(x) = f(x) \ \forall x \in [a;b]$,

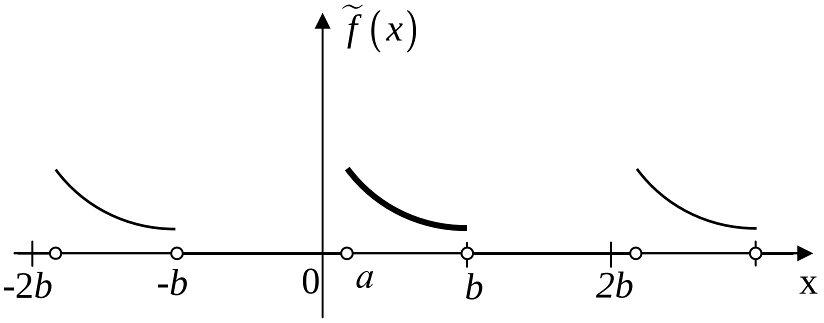
2. $\widetilde{f}(x+T) = \widetilde{f}(x), \ T \ge b-a$,

3. $\widetilde{f}(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле на любом отрезке оси OX.

Понятно, что таких функций существует бесконечно много: при их построении может меняться и величина периода T, и способ определения функции в пределах одного периода (рис.11).



$T=b$



$T=2b$

Рис. 11

Продолжив таким образом $f(x)$, разложим периодическую функцию $\widetilde{f}(x)$ в ряд Фурье. Так как реально заданной является лишь часть этой функции при $x \in [a;b]$, то полученное разложение будем рассматривать только в точках этого отрезка. При этом во всех точках $x \in (a;b)$, где $f(x)$ непрерывна, согласно теореме Дирихле сумма ряда $S(x) = \widetilde{f}(x) = f(x)$. В точках разрыва первого рода функции $f(x)$, принадлежащих (a,b),

$$S(x) = \frac{1}{2}\left(\widetilde{f}(x+) + \widetilde{f}(x-)\right) = \frac{1}{2}\left(f(x+) + f(x-)\right).$$

Значения $S(a)$ и $S(b)$ будут зависеть от способа продолжения функции за пределы отрезка $[a;b]$.

Предположим теперь, что функция $f(x)$ задана на отрезке $[0;l]$. Чтобы разложить ее в ряд Фурье на этом отрезке, продолжим эту функцию сначала на отрезок $[-l;0]$, а затем построим периодическое продолжение $\widetilde{f}(x)$ с периодом $T=2l$. Очевидно, получившийся ряд для $\widetilde{f}(x)$ будет зависеть от того, как именно доопределена $f(x)$ на промежутке $[-l;0]$. Сделать это можно различными способами. Рассмотрим два из них.

Если продолжить $f(x)$ *нечетным образом* на отрезок $[-l;0]$ (рис.12), то разложение в ряд Фурье функции $\widetilde{f}(x)$ будет содержать только синусы. Поэтому можно сказать, что в этом случае $f(x)$ *разложена* на отрезке $[0;l]$ *в ряд по синусам*.

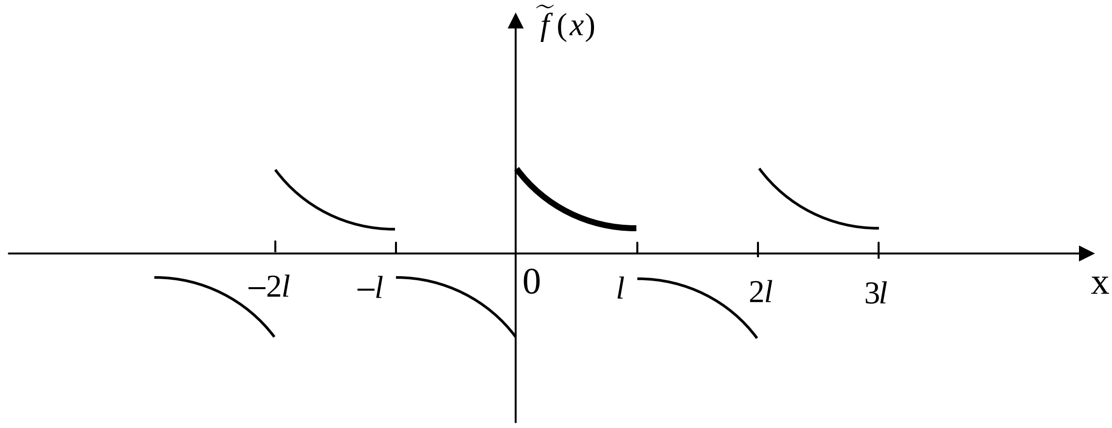


Рис. 12

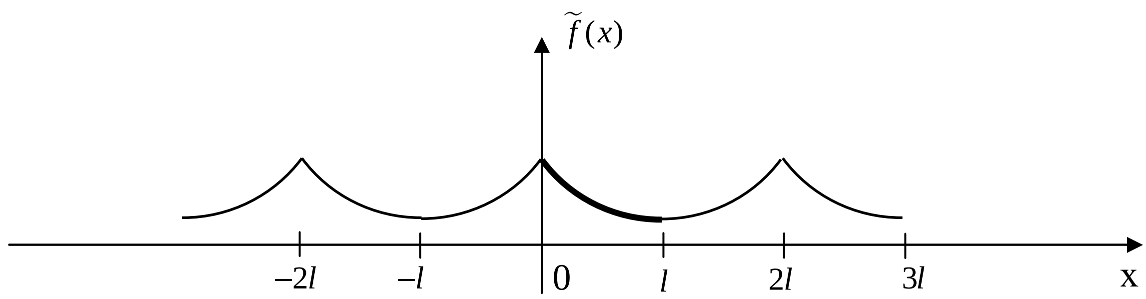


Рис. 13

Если построить *четное продолжение* функции $f(x)$ на промежуток $[-l;0]$ (рис.13), то ряд Фурье такой функции будет содержать только косинусы. В этом случае будем говорить, что $f(x)$ *разложена* на отрезке $[0;l]$ *в ряд по косинусам*.

Не следует думать, что для одной и той же функции можно таким образом получить два *различных* разложения в ряд Фурье. На самом деле в ряд разлагались две весьма отличающиеся функции (рис.12 и 13), совпадающие лишь при $x \in [0;l]$, и суммы полученных таким образом рядов совпадают *только* для $x \in (0;l)$. Использование значений этих сумм за пределами отрезка $[0;l]$ постановка такой задачи не предполагает.

ПРИМЕР. Разложить функцию $y = x,\ x \in [0;2]$ в ряд:

а) по синусам; б) по косинусам.

а) Построим нечетное периодическое продолжение данной функции с периодом $T = 2l = 4$ (рис.14).

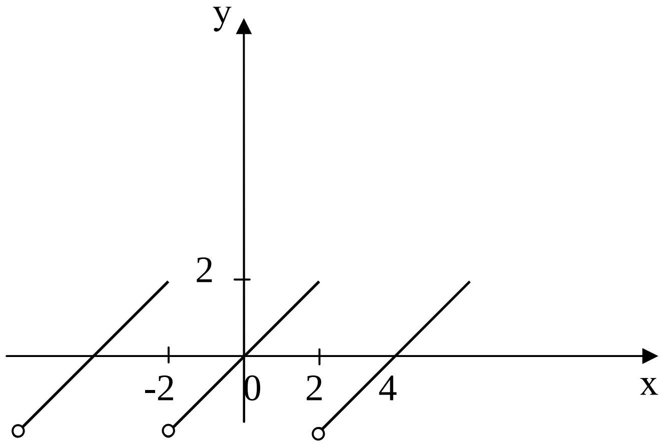


Рис. 14

Тогда по формуле (13.41)

$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 x\sin\frac{\pi nx}{2}dx = -\frac{2x}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\Bigg|_0^2 + \frac{4}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi nx}{2}\Bigg|_0^2 = -\frac{4}{\pi n}\cos\pi n = \frac{4(-1)^{n-1}}{\pi n}.$$

Отсюда

$$x = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin\frac{\pi nx}{2},\quad x \in (0,2).$$

Заметим, что сумма полученного ряда в соответствии с теоремой Дирихле равна нулю и при $x = 0$, и при $x = 2$ (рис.14).

б) Построим четное периодическое продолжение данной функции с периодом $T = 2l = 4$ (рис.15).

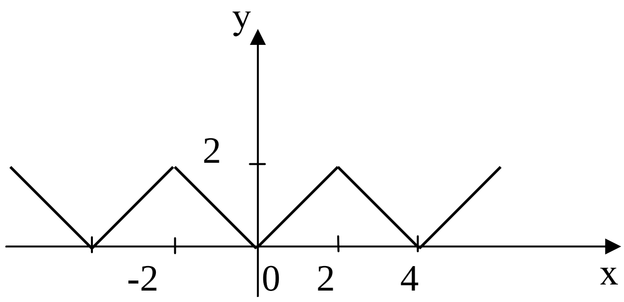


Рис. 15

Тогда по формулам (13.40)

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 x dx = 2, \quad a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 x\cos\frac{\pi nx}{2}dx = \frac{2x}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\Big|_0^2 + \frac{4}{\pi^2 n^2}\cos\frac{\pi nx}{2}\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{4}{\pi^2 n^2}\left(\cos\pi n - 1\right) = \frac{4}{\pi^2 n^2}\left(\left(-1\right)^n - 1\right).$$

В этом случае имеем:

$$x = 1 + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n - 1}{n^2}\cos\frac{\pi nx}{2}, \quad x \in \left[0;2\right].$$

Заметим, что четное периодическое продолжение заданной функции непрерывно $\forall x \in \left(-\infty;+\infty\right)$ (рис.15), поэтому $S\left(0\right) = 0,\ \ S\left(2\right) = 2$.

13.2.10. ЭКСТРЕМАЛЬНОЕ СВОЙСТВО СУММ ФУРЬЕ

Представление периодических функций в виде ряда Фурье имеет на практике тот смысл, что $f\left(x\right) \approx S_n\left(x\right)$, где $S_n\left(x\right) - n$-я частичная сумма ряда. Точность этого приближенного равенства в соответствии с определением суммы ряда можно сделать сколь угодно высокой выбором достаточно большого n.

Функция вида

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k\cos\frac{\pi kx}{l} + \beta_k\sin\frac{\pi kx}{l}\right), \tag{13.42}$$

$\alpha_0, \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R},\ k = 1, 2, ..., n$ называется *тригонометрическим многочленом* n*-го порядка*.

Выясним, какой характер имеет приближенное представление $2l$-периодической функции $f(x)$ тригонометрическими многочленами вида (13.42).

В данном случае за меру погрешности естественно взять *среднее квадратичное отклонение*

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}\left(f(x) - \frac{\alpha_0}{2} - \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k \cos\frac{\pi kx}{l} + \beta_k \sin\frac{\pi kx}{l} \right)\right)^2 dx.$$

Поставим следующую задачу: пусть $2l$-периодическая функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле на отрезке $[-l;l]$; *среди всех тригонометрических многочленов* n*-го порядка найти путем выбора коэффициентов* $\alpha_0, \alpha_k, \beta_k$, $k = 1, 2, ..., n$ *тот многочлен, для которого величина* δ_n^2 *имеет минимальное значение.*

Чтобы решить эту задачу, рассмотрим δ_n^2 как функцию переменных $\alpha_0, \alpha_k, \beta_k$, $k = 1, 2, ..., n$ и найдем ее частные производные первого порядка по этим переменным. По необходимому условию экстремума функции нескольких переменных (см.гл.6) эти производные в точке минимума равны нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \delta_n^2}{\partial \alpha_0} = -\dfrac{1}{2l}\displaystyle\int_{-l}^{l}\left(f(x) - \frac{\alpha_0}{2} - \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k \cos\frac{\pi kx}{l} + \beta_k \sin\frac{\pi kx}{l} \right)\right) dx = 0 \\ \dfrac{\partial \delta_n^2}{\partial \alpha_m} = -\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}\left(f(x) - \frac{\alpha_0}{2} - \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k \cos\frac{\pi kx}{l} + \beta_k \sin\frac{\pi kx}{l} \right)\right) \cos\frac{\pi mx}{l} dx = 0 \\ \dfrac{\partial \delta_n^2}{\partial \beta_m} = -\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}\left(f(x) - \frac{\alpha_0}{2} - \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k \cos\frac{\pi kx}{l} + \beta_k \sin\frac{\pi kx}{l} \right)\right) \sin\frac{\pi mx}{l} dx = 0, \end{cases}$$

$m = 1, 2, ..., n$.

Так как $\int_{-l}^{l} \cos\frac{\pi nx}{l} dx = \int_{-l}^{l} \sin\frac{\pi nx}{l} dx = 0$, то из первого уравнения этой системы получим: $\int_{-l}^{l}\left(f(x) - \frac{\alpha_0}{2} \right) dx = 0$. Отсюда $\alpha_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) dx$.

Далее, так как $\forall m, k \in \mathbb{N}$

$$\int_{-l}^{l} \sin\frac{\pi mx}{l} \cos\frac{\pi kx}{l} dx = 0, \quad \int_{-l}^{l} \cos\frac{\pi mx}{l} \cos\frac{\pi kx}{l} dx = \begin{cases} 0, & m \neq k \\ l, & m = k \end{cases},$$

$\int\limits_{-l}^{l} \sin\frac{\pi mx}{l}\sin\frac{\pi kx}{l}dx = \begin{cases} 0, & m \neq k \\ l, & m = k \end{cases}$ (см.п. 13.2.6), то из второго и третьего уравнений системы имеем:

$$\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi mx}{l}dx - \alpha_m l = 0, \quad \int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi mx}{l}dx - \beta_m l = 0.$$

Тогда

$$\alpha_m = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi mx}{l}dx, \quad \beta_m = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi mx}{l}dx, \; m = 1, 2, ..., n.$$

Таким образом, числа $\alpha_0, \alpha_k, \beta_k,\; k = 1, 2, ..., n$ являются соответствующими коэффициентами Фурье функции $f(x)$.

Проверка достаточного условия экстремума показывает, что при найденных значениях коэффициентов функция δ_n^2 достигает именно минимума, однако ее можно и не делать, так как способ задания δ_n^2 вполне очевидно показывает, что такая функция имеет экстремум, причем именно минимум.

Это означает, что *суммы Фурье наилучшим образом описывают в целом поведение* $2l$*-периодической функции.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Воробьев, Н.Н. Теория рядов./ Н.Н. Воробьев.– М.: Лань, 2002.– 416 с.
2. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.2. / Н.С. Пискунов.– М.: Интеграл–пресс, 2009.– 544 с.
3. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа./ Г.М. Фихтенгольц.– М.: Лань, 2005.– 464 с.

Редактор
Компьютерная верстка, дизайн обложки
ИД № 06039 от 12.10.2001 г.
Сводный темплан 2012 г.
Подписано в печать . . . Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. .
Тираж . Заказ .

Издательство ОмГТУ. 644050, г. Омск, пр-т Мира, 11
Типография ОмГТУ