МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Омский государственный технический университет»

Н. И. Николаева

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.

Предел. Производная

Конспект лекций

Омск
Издательство ОмГТУ
2015

УДК 519.671(075)
ББК 22.161я73
Н62

Рецензенты:

Ю. Ф. Стругов, д-р физ.-мат. наук, профессор;

С. Е. Макаров, канд. физ.-мат. наук, доцент

Николаева, Н. И.

Н62 Математический анализ. Предел. Производная : конспект лекций / Н. И. Николаева ; Минобрнауки России, ОмГТУ. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2015. – 76 с. : ил.

ISBN 978-5-8149-1978-6

Подробно и последовательно изложена теория двух разделов математического анализа: «Введение в математический анализ» и «Дифференциальное исчисление функций одной переменной». Приведено достаточное количество примеров, поясняющих наиболее важные теоретические положения, иллюстрирующих теоретический материал, даны образцы решения задач.

Конспект лекций, читаемых автором на первом курсе технического университета, предназначен для студентов всех форм обучения.

УДК 519.671(075)
ББК 22.161я73

Печатается по решению редакционно-издательского совета Омского государственного технического университета

ISBN 978-5-8149-1978-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное издание представляет собой продолжение полного конспекта лекций по математике, читаемых автором студентам дневного отделения ОмГТУ различных технических специальностей. В нем содержится подробное и последовательное изложение двух разделов курса: «Введение в математический анализ» и « Дифференциальное исчисление функции одной переменной». Изложению этих разделов посвящена также и работа [2], однако в данном издании автор постарался учесть изменения в программе курса математики, связанные с введением стандартов нового поколения, а также исправить досадные опечатки, к сожалению имеющие место в предыдущей работе.

Несмотря на небольшой объем конспекта, автор стремился изложить материал строго и доступно. Ряд теорем приведен без доказательства, но при этом особое внимание уделено истолкованию их геометрического смысла и практического значения. В каждом разделе имеется достаточное количество решенных задач и примеров, поясняющих и закрепляющих теоретический материал. По этой причине данный конспект лекций может быть полезен не только студентам дневного, но и заочного отделения, обучающимся по программам, предусматривающим большой объем самостоятельной работы.

Автор благодарит старшего преподавателя кафедры высшей математики ОмГТУ Н. М. Хаустову, которая внимательно прочла рукопись и сделала ряд полезных замечаний, а также выражает признательность доценту кафедры Е. В. Воробьевой, Г. А. Лобову за прекрасно выполненные рисунки и А. С. Ярославской за помощь в техническом оформлении рукописи.

Глава 4. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Предметом изучения раздела математики, который называется математическим анализом, являются функции.

Будем считать, что X и Y – некоторые множества действительных чисел. Каждое действительное число можно, как известно, изобразить точкой на числовой прямой. Отдельные числа, входящие в состав множества X, будем называть его элементами. Если рассматриваемое множество содержит хотя бы один элемент, оно называется *непустым*. В противном случае – *пустым.*

Рассмотрим наиболее употребимые частные виды множеств действительных чисел:

1. *Отрезок* $\left[a;b\right]$ – множество чисел, удовлетворяющих неравенству $a \le x \le b,\ a < b$. Числа a и b называются концами отрезка; все x, удовлетворяющие неравенству $a < x < b$, – внутренние точки отрезка.

2. *Интервал* $(a;b)$ – множество чисел, удовлетворяющих неравенству $a < x < b,\ a < b$; a и b – концы интервала.

3. *Окрестностью* точки a будем называть любой интервал, содержащий эту точку.

4. Интервал $\left(a-\varepsilon;\, a+\varepsilon\right),\ \varepsilon > 0$ называется ε*-окрестностью* (эпсилон-окрестностью) точки a; соответственно $\left(a-\delta;a+\delta\right), \delta > 0$ – δ-окрестность (дельта-окрестность) этой точки.

5. $\left(-\infty,+\infty\right)$ – множество всех действительных чисел, или всех точек числовой прямой.

Будем, как принято, обозначать множество *действительных* чисел буквой R, множество *натуральных* чисел – N, *целых* – Z.

Для облегчения записи определений и доказательств теорем математического анализа часто используются логические символы, так называемые *кванторы*, именно: $\exists$ – *квантор общности* и $\forall$ – *квантор существования*.

Символ $\exists$ заменяет в тексте слово «существует» (или «существуют»). Например, формула $\exists x \in \left(a;b\right) \,\big|$ читается так: существует x из интервала $(a;b)$ такой, что…; $\exists k \in N \big|$ – существует натуральное число k такое, что….

Квантор $\forall$ заменяет слова «для любого», «для всех», «для каждого». Формула $\forall x \in R$ читается так: для всех действительных $x \ldots$; $\forall \varepsilon > 0$ – для любого положительного эпсилон….

Символ $\Rightarrow$ обозначает *логическое следствие*. Запись $A \Rightarrow B$ означает, что из A следует B. Например, $k \in N \Rightarrow k \in Z$, то есть если число k натуральное, то оно целое.

Знак $\Leftrightarrow$ означает *логическую равносильность*. К примеру, число $k \in N$ делится на 10 $\Leftrightarrow$ оно оканчивается на 0: натуральное число делится на 10 тогда и только тогда, когда оно оканчивается на 0.

Короткая запись $\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in N \ \left| \forall n > n_0 \Rightarrow \left| \alpha(n) \right| < \varepsilon \right.$ – сокращение такой достаточно длинной фразы: для любого положительного ε существует натуральное число (или номер) n_0 такое, что для всех n, б***о***льших, чем n_0, справедливо неравенство $\left| \alpha(n) \right| < \varepsilon$.

Множество всех значений, которые может принимать переменная величина, называется *областью* ее *изменения.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть заданы две переменные величины x и y с областями изменения X и Y. Переменная y называется *функцией* переменной x, если каждому значению x из множества X по некоторому правилу ставится в соответствие *единственное* значение y из множества Y.

Такие функции называются *однозначными* функциями одной переменной.

Множество X называется *областью определения* функции $y = y(x)$ (или $y = f(x)$), а множество Y – *областью изменения* или *областью значений* этой функции.

Чтобы задать функцию, надо:

- задать множество X, то есть область ее определения;
- определить правило установления соответствия между переменными x и y.

Существуют различные способы задания функции, но при изучении математического анализа мы будем рассматривать функции, заданные с помощью формул, то есть *аналитически.*

ПРИМЕРЫ.

а) $y = 2\sin 3x,\ x \in R,\ y \in [-2;2]$;

б) $y = \arcsin x,\ x \in [-1;1],\ y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;

в) $y = 3x + 15 - \log_2 x,\ x \in (0;+\infty),\ y \in R.$

а) – в) – функции, заданные одним аналитическим выражением.

г) $y = \begin{cases} x+1, & \text{если } x > 0 \\ x^2 - x + 1, & \text{если } x \le 0 \end{cases}$ – функция, заданная двумя аналитическими выражениями: $x \in R,\ y \in [1;+\infty)$.

д) $y = \begin{cases} (x+1)^2, & \text{если } x \le -1 \\ \dfrac{x}{x-1}, & \text{если } -1 < x < 1 \\ 2x - 2, & \text{если } x \ge 1 \end{cases}$ – функция, заданная тремя аналитическими выражениями: $x \in R,\ y \in R$.

4.1. Числовые последовательности

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1.1. Если каждому значению n из натурального ряда чисел $1,2,3,\ldots,n,\ldots$ ставится в соответствие по некоторому правилу действительное число $x(n) = x_n$, то множество занумерованных действительных чисел $\{x_n\}$ называется *числовой последовательностью*.

Таким образом, *последовательность* является *функцией натурального аргумента.*

Число x_1 называется первым членом последовательности, x_n – ее *общим* или n-м членом. Будем различать обозначения: $\{x_n\}$ – вся совокупность чисел x_n, $n = 1,2,3,...$, а x_n – общий член последовательности.

Знал общий член x_n, можно найти любой член последовательности.

ПРИМЕРЫ.

а) $x_n = 2n + 1 \Rightarrow x_1 = 3,...\ x_3 = 7,...\ x_{10} = 21,...$

б) $y_n = \sin\frac{\pi n}{2} \Rightarrow y_1 = 1,\ y_2 = 0,\ y_3 = -1,\ y_4 = 0,...,y_{21} = 1,...$

в) $\alpha_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \alpha_1 = 1,...\ \alpha_5 = \frac{1}{5},...\ \alpha_{10} = \frac{1}{10},...$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1.2. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху (снизу)*, если $\exists M \in R\ (m \in R)\ \big|\ \forall n \in N \Rightarrow x_n \le M\ (x_n \ge m)$. Число M называется *верхней гранью*, а $m -$ *нижней гранью* последовательности.

ПРИМЕРЫ.

а) $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$. Так как $\dfrac{1}{n} \le 1$ (или $\dfrac{1}{n} \le 2$, что тоже верно) при всех $n = 1,2,3,...,$ то последовательность $\{\alpha_n\}$ ограничена сверху: $M_1 = 1, M_2 = 2,... -$ ее верхние грани. Кроме того, $\dfrac{1}{n} \ge 0\ \ \forall n \in N$ (или, к примеру, $\dfrac{1}{n} \ge -1$), поэтому $\{\alpha_n\}$ ограничена снизу: $m_1 = 0, m_2 = -1,... -$ ее нижние грани.

б) $u_n = (-1)^n n^2$ – легко проверить, что эта последовательность не является ограниченной ни сверху, ни снизу.

в) $x_n = 2n+1$. Так как $2n+1 \ge 0$ (или точнее $2n+1 \ge 3$) $\forall n \in N$, то $\{x_n\}$ ограничена снизу, а $m_1 = 0, m_2 = 3,... -$ ее нижние грани. Однако последовательность $\{x_n\}$ ограниченной сверху не является.

Из рассмотренных примеров следует, что *если последовательность имеет верхнюю или нижнюю грани, то они не единственны.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1.3. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если она ограничена сверху и снизу, то есть если $\exists M, m \in R\ \big|\ \forall n \in N \Rightarrow m \le x_n \le M$.

ПРИМЕР.

Последовательность $\{\alpha_n\}$ из предыдущего примера ограничена, так как $0 \le \dfrac{1}{n} \le 1$, то есть $m = 0, M = 1$, а $\{u_n\}$ и $\{x_n\} -$ нет.

Сформулируем еще одно, эквивалентное этому, определение ограниченной последовательности, которым во многих случаях более удобно пользоваться: если $m \le x_n \le M$, то, полагая $A = \max\{|m|, |M|\}$, можно утверждать, что $|x_n| \le A$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1.4. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если $\exists A > 0 \mid \forall n \in N \Rightarrow |x_n| \le A.$

ПРИМЕР.

Для всех членов последовательности $\{\alpha_n\}$ справедливо и такое неравенство: $|\alpha_n| \le 1$, то есть $A = 1$, поэтому она является ограниченной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1.5. Последовательность $\{x_n\}$ называется *неограниченной*, если для любого положительного A найдется хотя бы один элемент x_n такой, что $|x_n| > A.$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1.6. Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой*, если $\forall A > 0\ \exists n_0 \in N \mid \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n| > A.$

ПРИМЕРЫ.

а) $x_n = 2n + 1$. Выписав несколько членов этой последовательности: 3, 5, 7, 9, 11,… 1001,…, – легко убедиться, что она неограниченная и бесконечно большая.

б) $w_n = (1 + (-1)^n)n^2$. Все нечетные члены этой последовательности $w_{2k-1} = 0$, а четные $w_{2k} = 2 \cdot (2k)^2 = 8k^2$, $k = 1,2,...$, поэтому $\{w_n\}$– неограниченная, но не бесконечно большая.

Таким образом, *всякая бесконечно большая последовательность является и неограниченной.* Обратное утверждение неверно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1.7. Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется бесконечно малой (б.м.), если $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in N \mid \forall n > n_0 \Rightarrow |\alpha_n| < \varepsilon.$

ПРИМЕРЫ.

а) $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$. Покажем, что эта последовательность является б.м. Так как по определению $\varepsilon > 0$ задается произвольно, то пусть, например, $\varepsilon = 2$. Тогда $\dfrac{1}{n} < 2$, то есть $\alpha_n < 2\ \forall n \in N$. Если $\varepsilon = 0{,}01$, то $\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{100}\ \forall n > 100$, значит если $n_0 = 100$, то $\alpha_n < 0{,}01\ \forall n > n_0$. Если

$\varepsilon = 0{,}003$, то $\frac{1}{n} < \frac{3}{1000}$, откуда следует, что $n > \frac{1000}{3} \approx 333{,}3$, следовательно, можно считать, что в этом случае $n_0 = 333$.

Пусть теперь $\varepsilon > 0$ произвольно, тогда неравенство $\frac{1}{n} < \varepsilon$ верно $\forall n > \frac{1}{\varepsilon}$, поэтому $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, где $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ – целая часть числа $\frac{1}{\varepsilon}$, то есть наибольшее целое число, не превосходящее $\frac{1}{\varepsilon}$ (например, $\left[\frac{1000}{3}\right] = 333$). Таким образом, последовательность с общим членом $\alpha_n = \frac{1}{n}$ в соответствии с определением 4.1.7 является бесконечно малой.

б) $b_n = \frac{n+1}{n}$. Покажем, что $\{b_n\}$ не является б.м. Пусть, например, $\varepsilon = 0{,}1$, тогда, если $\frac{n+1}{n} < 0{,}1$, то $1 + \frac{1}{n} < 0{,}1 \Rightarrow \frac{1}{n} < -0{,}9$. Полученное неравенство неверно, так как в левой его части стоит положительное число. Этого достаточно, чтобы утверждать, что $\{b_n\}$ не является б.м.

Перечислим без доказательства *свойства б.м. последовательностей.*

Если $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ две последовательности, то $\{\alpha_n + \beta_n\}$ называется их суммой, $\{\alpha_n - \beta_n\}$ разностью, $\{\alpha_n \beta_n\}$ произведением, а $\left\{\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right\}$, $\beta_n \neq 0$ частным.

СВОЙСТВО 1. Сумма двух б.м. последовательностей является бесконечно малой.

СВОЙСТВО 2. Разность двух б.м. последовательностей является бесконечно малой.

СВОЙСТВО 3. Произведение б.м. последовательности и ограниченной является бесконечно малым.

СВОЙСТВО 4. Всякая б.м. последовательность ограничена.

СВОЙСТВО 5. Произведение двух б.м. последовательностей является бесконечно малым.

Последнее свойство – следствие свойств 3 и 4.

ПРИМЕР. Последовательность $\alpha_n = \frac{1}{n}$, как было показано выше, является б.м. Тогда последовательность $\gamma_n = \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}$ – также б.м. по свойству 5, и вообще $\beta_n = \frac{1}{n^k}$, $k \in N$ – б.м.

4.2. Сходящиеся последовательности и их свойства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2.1. Последовательность $\{x_n\}$ называется *сходящейся*, если $\exists x \in R \mid \{x_n - x\}$ – б.м. Число x в этом случае называется *пределом последовательности*: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Кроме того, сходимость $\{x_n\}$ к пределу x можно обозначать так: $x_n \to x$ или $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.

ПРИМЕР. Рассмотрим $\{x_n\}$, $x_n = \frac{2n+1}{n}$. Если предположить, что $x = 2$, то $x_n - x = \frac{2n+1}{n} - 2 = \frac{1}{n}$ – б.м. Значит, по определению 4.2.1 $\{x_n\}$ является сходящейся и $x = 2$ – ее предел: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n} = 2$, или $\frac{2n+1}{n} \to 2$.

Используя определение 4.1.7, можно переформулировать определение 4.2.1 таким образом:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2.2. Число x называется *пределом* $\{x_n\}$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in N \mid \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$. Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*.

Из определения 4.2.2 следует, что $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$, или $x_n \in (x - \varepsilon; x + \varepsilon) \ \forall n > n_0$. Вспомним, что такой интервал называется ε-окрестностью точки x. Таким образом, можно дать геометрическое толкование определения сходящейся последовательности и ее предела.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2.3. $\{x_n\}$ называется *сходящейся*, если $\exists x \in R$ такое, что в *любой* его ε-окрестности $(\varepsilon > 0)$ содержатся *все* члены последовательности, начиная с некоторого.

Определения 4.2.1, 4.2.2, 4.2.3 сходящейся последовательности эквивалентны.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2.1. Всякую бесконечно большую последовательность $\{y_n\}$ будем трактовать как сходящуюся к бесконечности, именно: если $y_n > 0 \quad \forall n > n_0$, то будем считать, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$, а если $y_n < 0$ $\forall n > n_0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2.2. Из определения 4.2.3 следует, что если $\{x_n\}$ сходится, то имеет единственный предел.

Действительно, пусть $\overline{x} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $\overline{\overline{x}} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и $\overline{x} \neq \overline{\overline{x}}$. Рассмотрим две произвольные непересекающиеся окрестности точек $\overline{x}$ и $\overline{\overline{x}}$. Все члены $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера, должны находиться одновременно в них обеих, что невозможно, если $\overline{x} \neq \overline{\overline{x}}$, следовательно $\overline{x} = \overline{\overline{x}}$.

Последовательность, не имеющая предела, называется расходящейся.

ПРИМЕР. Рассмотрим $\{y_n\}$, $y_n = \sin\dfrac{\pi n}{2}$. Выпишем несколько членов этой последовательности: $1, 0, -1, 0, 1, 0, \ldots$ Очевидно, что нет такого числа, в *любой* ε-окрестности которого содержатся все ее члены, начиная с некоторого. Поэтому из определения 4.2.3 следует, что $\{y_n\}$ расходится, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\dfrac{\pi n}{2}$ не существует.

ПРИМЕР. Как было показано, $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$ – б.м. Тогда по определению 4.2.1 $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Действительно, $\{\alpha_n\} = \{\alpha_n - 0\}$ – б.м.

Таким образом, *если* $\{\alpha_n\}$ *– произвольная б.м. последовательность, то* $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2.3. Из определения 4.2.3 следует, что изменение любого *конечного* числа членов $\{x_n\}$ не влияет на ее поведение: расходящаяся последовательность останется расходящейся, а сходящаяся – сходящейся, причем неизменной будет и величина предела.

ТЕОРЕМА 4.2.1. Если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то она ограничена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как по условию $\{x_n\}$ сходится, то по определению 4.3.1 $\exists x \in R \mid x_n - x = \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ – б.м. Тогда $x_n = x + \alpha_n$. По свойству 4 $\{\alpha_n\}$ ограничена, то есть по определению 4.1.4 $\exists A > 0 \mid \forall n \in N \Rightarrow |\alpha_n| \le A \Rightarrow |x + \alpha_n| \le |x| + A \;\; \forall n \in N$, а это означает, что $\{x_n\}$ ограничена, что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2.4. В соответствии с теоремой 4.2.1 всякая сходящаяся последовательность ограничена. Обратное утверждение неверно: *не всякая ограниченная последовательность сходится.*

ПРИМЕР. Как было показано, последовательность $y_n = \sin\frac{\pi n}{2}$ расходится, но является ограниченной, так как $|y_n| = \left|\sin\frac{\pi n}{2}\right| \le 1 \;\; \forall n \in N$.

ТЕОРЕМА 4.2.2. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x,\;\; \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y.$ Тогда $\{x_n + y_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению 4.2.1 $x_n - x = \alpha_n,\; y_n - y = \beta_n$, где $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ – б.м. Тогда

$(x_n + y_n) - (x + y) = (x + \alpha_n + y + \beta_n) - (x + y) = \alpha_n + \beta_n$ – б.м. по свойству 1 б.м. последовательностей. Это означает по определению 4.2.1, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y.$

ТЕОРЕМА 4.2.3. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y.$ Тогда $\{x_n - y_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = x - y.$

Доказать самостоятельно, используя определение 4.2.1 и свойство 2 б.м. последовательностей.

ТЕОРЕМА 4.2.4. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x,\;\; \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y.$ Тогда $\{x_n \cdot y_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = x \cdot y.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению 4.2.1 $x_n - x = \alpha_n,\; y_n - y = \beta_n$, где $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ – б.м. Тогда

$x_n y_n - xy = (x + \alpha_n)(y + \beta_n) - xy = x\beta_n + y\alpha_n + \alpha_n\beta_n$ – б.м. по свойствам 3, 5, 1 б.м. последовательностей. Что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 4.2.5. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, $y \neq 0$. Тогда $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ определена, начиная с некоторого номера, сходится и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{x}{y}$.

Без доказательства.

ПРИМЕРЫ.

а) Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+5}{3n-7}$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+5) = \lim\limits_{n\to\infty}(3n-7) = \infty$, то теорему 4.2.5 применить нельзя. Предел, говорят в этом случае, представляет собой *неопределенность* вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Чтобы вычислить его, или *раскрыть неопределенность*, преобразуем выражение, разделив числитель и знаменатель дроби на n: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+5}{3n-7} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\frac{5}{n}}{3-\frac{7}{n}} = \dfrac{2}{3}$. Ответ получен с помощью теорем 4.2.2–4.2.5 и уже доказанного факта: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$.

б) Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+5n+10}{n+100}$.

Этот предел также представляет собой неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Чтобы ее раскрыть, разделим числитель и знаменатель дроби на n^2 – старшую степень переменной n: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+5n+10}{n+100} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\frac{5}{n}+\frac{10}{n^2}}{\frac{1}{n}+\frac{100}{n^2}}$. В полученном выражении числитель стремится к 2, а знаменатель неограниченно приближается к 0, отчего дробь неограниченно возрастает, поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+5n+10}{n+100} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{5}{n}+\frac{10}{n^2}}{\frac{1}{n}+\frac{100}{n^2}} = \infty.$$

Этот результат можно получить и разделив числитель и знаменатель на старшую степень знаменателя, то есть на n:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+5n+10}{n+100}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+5+\frac{10}{n}}{1+\frac{100}{n}}=\infty$$. Здесь числитель неограниченно увеличивается, а знаменатель стремится к 1.

в) Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+5n+10}{n^3+17n+1}$.

Аналогично примерам а) и б) разделим числитель и знаменатель на n^3: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+5n+10}{n^3+17n+1}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}+\frac{10}{n^3}}{1+\frac{17}{n^2}+\frac{1}{n^3}}=\dfrac{0}{1}=0.$

Проанализировав способ вычисления пределов а), б) и в), можно сформулировать *ПРАВИЛО раскрытия неопределенности вида* $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^m+a_1n^{m-1}+a_2n^{m-2}+\ldots+a_{m-1}n+a_m}{b_0n^k+b_1n^{k-1}+b_2n^{k-2}+\ldots+b_{k-1}n+b_k}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & \text{если } m=k\\ \infty\,, & \text{если } m>k.\\ 0\,, & \text{если } m<k\end{cases} \qquad (4.2.1)$$

Это правило остается верным и для вычисления пределов отношения степенных функций $Q_m(n),\ P_k(n)$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Q_m(n)}{P_k(n)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & \text{если } m=k\\ \infty\,, & \text{если } m>k\,.\\ 0\,, & \text{если } m<k\end{cases} \qquad (4.2.2)$$

Здесь m – старшая степень числителя, k – старшая степень знаменателя; a_0 – коэффициент при старшей степени переменной n в числителе, b_0 – коэффициент при старшей степени переменной n в знаменателе.

ПРИМЕРЫ. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2n^2+4n+28}}{\sqrt[3]{3n^2+1}+\sqrt{n}}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}$, так как $m=\dfrac{2}{3}$, $k=\max\left\{\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{2}\right\}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow m=k$.

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2n+1}}{n^2+1}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=0$, так как $m=\dfrac{1}{2},\ k=2\ \Rightarrow\ m<k.$

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2n^5+1}}{n^2+1}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\infty$, так как $m=\dfrac{5}{2},\ k=2\ \Rightarrow\ m>k.$

Все ответы в этих примерах получены с помощью сформулированного правила (4.2.2).

4.3. Предельный переход в неравенствах

Имеют место следующие теоремы, которые примем без доказательства.

ТЕОРЕМА 4.3.1 (о предельном переходе в неравенствах). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ и, начиная с некоторого номера, $x_n\ge b\ (x_n\le b)$. Тогда $x\ge b\ (x\le b)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3.1. Предельный переход не сохраняет строгое неравенство, то есть если $x_n>b,$ то $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\ge b.$

ПРИМЕР. Пусть $x_n=\dfrac{1}{n},$ тогда $x_n>0\ \forall n\in N,$ но $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$, то есть $x=0$.

ТЕОРЕМА 4.3.2. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x,\ \lim\limits_{n\to\infty}y_n=y$ и, начиная с некоторого номера, $x_n\ge y_n$. Тогда $x\ge y.$

Эта теорема является следствием теорем 4.2.3 и 4.3.1 для $z_n=x_n-y_n$.

ТЕОРЕМА 4.3.3 (принцип двустороннего ограничения). Пусть $\{x_n\},\{y_n\}$ сходятся и $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$. Кроме того, начиная с некоторого номера, $x_n\le z_n\le y_n$. Тогда $\{z_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a.$

4.4. Монотонные последовательности

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.4.1. Последовательность $\{x_n\}$ называется *неубывающей (невозрастающей)*, если $\forall n \in N \Rightarrow x_n \le x_{n+1}$ $(x_n \ge x_{n+1})$. Неубывающая или невозрастающая последовательность называется *монотонной.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.4.2. Последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей (убывающей)*, если $\forall n \in N \Rightarrow x_n < x_{n+1}$ $(x_n > x_{n+1})$. Возрастающая или убывающая последовательность называется *строго монотонной.*

ПРИМЕРЫ.

а) $\alpha_n = \dfrac{1}{n} \Rightarrow \alpha_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} \Rightarrow \alpha_{n+1} < \alpha_n \Rightarrow \{\alpha_n\}$ – убывающая последовательность.

б) $y_n = \sin\dfrac{\pi n}{2} \Rightarrow y_1 = 1,\ y_2 = 0,\ y_3 = -1,\ y_4 = 0, \ldots \Rightarrow \{y_n\}$ монотонной не является.

в) $x_n = 2n+1 \Rightarrow x_{n+1} = 2(n+1)+1 = 2n+3 \Rightarrow x_n < x_{n+1} \Rightarrow \{x_n\}$ – возрастающая последовательность.

Заметим, что $\alpha_n \le \alpha_1,\ x_n \ge x_1\ \forall n \in N$. Таким образом, всякая монотонная последовательность ограничена с одной стороны, именно: неубывающая или возрастающая – снизу, а невозрастающая или убывающая – сверху. Значит, для ограниченности неубывающей (возрастающей) последовательности необходимо, чтобы она была ограничена сверху, для невозрастающей (убывающей) – снизу.

ТЕОРЕМА 4.4.1. Если неубывающая последовательность ограничена сверху, то она сходится. Если невозрастающая последовательность ограничена снизу, то она также сходится.

Без доказательства.

Из теорем 4.2.1 и 4.4.1 следует теорема 4.4.2.

ТЕОРЕМА 4.4.2 (Вейерштрасса). Для того чтобы монотонная последовательность сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена.

Рассмотрим последовательность

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow u_1 = 2,\, u_2 = \frac{9}{4},\, u_3 = \frac{64}{27},\, u_4 = \frac{625}{256}, \ldots \Rightarrow u_1 < u_2 < u_3 < u_4 < \ldots$$

Можно показать, что $\{u_n\}$ возрастает и что, кроме того, $u_n < 3 \;\; \forall n \in N \Rightarrow \; 2 \le u_n < 3$, то есть $\{u_n\}$ монотонна и ограничена. Следовательно, по теореме 4.4.2 эта последовательность имеет предел: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$. Согласно теореме 4.3.1 он удовлетворяет неравенству $2 \le u \le 3$. В честь выдающегося математика Л. Эйлера этот предел называют числом Эйлера и обозначают буквой *e*. Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{4.4.1}$$

Отметим, что $1 + \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ и, несмотря на то, что $1^2 = 1^3 = \ldots = 1^{10} = \ldots = 1^{100} = \ldots = 1^n = 1$, $\left(1^\infty\right) \ne 1$. Так происходит потому, что ∞ – это *не число* и нельзя подставить ∞ сначала в скобку, а потом в показатель степени. Нужно одновременно увеличивать n и в основании, и в показателе, тогда $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ будет неограниченно приближаться к e. Таким образом, предел (4.4.1) представляет собой еще один вид неопределенности: такого рода выражение называют *неопределенностью вида* $\left(1^\infty\right)$.

Можно показать, что число *e* иррационально, то есть представимо в виде бесконечной десятичной непериодической дроби, его можно вычислить приближенно с любой заданной точностью, например, $e \approx 2{,}7182818218\ldots$ – значение с 10 верными знаками после запятой.

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1^\infty\right) = e \approx 2{,}7.$$

Функцию $y = e^x$, порождаемую числом *e*, называют *экспонентой*. Логарифм по основанию *e* называют *натуральным*: $\log_e x = \ln x$. Одним из возможных объяснений этого термина может быть такое: основание логарифма $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, а n – натуральное число.

ПРИМЕРЫ. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)^{pn}$, $k,p\in R$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-3}{2n+5}\right)^{4n}$.

Заметим, что так как $1+\dfrac{k}{n}\to 1$ и $\dfrac{2n-3}{2n+5}\xrightarrow{(4.2.1)}1$, то оба предела являются неопределенностями вида $\left(1^{\infty}\right)$, поэтому их можно свести к пределу (4.4.1).

а) Обозначим $\dfrac{n}{k}=t$, $t\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)^{pn}=\left(1^{\infty}\right)=$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{p\cdot(kt)}=\lim_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{pk}=e^{pk}.$$

б) Обозначим $2n+5=t$, $t\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$, тогда $n=\dfrac{t-5}{2}\Rightarrow 4n=2t-10$, $\dfrac{2n-3}{2n+5}=\dfrac{t-8}{t}=1+\dfrac{(-8)}{t}$. Заменим в данном пределе переменную n на новую переменную t: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-3}{2n+5}\right)^{4n}=\left(1^{\infty}\right)=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{(-8)}{t}\right)^{2t-10}=$

$=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{(-8)}{t}\right)^{2t}\cdot\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{(-8)}{t}\right)^{-10}=e^{-16}$, так как $\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{(-8)}{t}\right)^{2t}=e^{-8\cdot 2}$ согласно примеру а), а $\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{(-8)}{t}\right)^{-10}=1$.

4.5. Предел функции

Пусть функция $y=f(x)$ определена на некотором множестве X действительной оси, которое, быть может, не содержит точку $x=a$, но содержит точки, бесконечно близкие к a, то есть $\forall\delta>0$ окрестность этой точки $(a-\delta;a+\delta)$ не является пустой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.5.1 (предел функции в точке $x=a$ по Гейне). Число b называется *пределом функции* $y=f(x)$ *в точке* $x=a$, если для *любой* последовательности значений ее аргумента $\{x_n\}$, сходящейся к a

и состоящей из чисел, отличных от a, соответствующая последовательность значений функций $\{f(x_n)\}$ сходится к b.

Этот факт обозначается так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

ПРИМЕР. Найти $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Рассмотрим функцию $y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$. При всех $x \neq 2$ дробь можно сократить, получив, что $y = x + 2$. Выберем *произвольную* последовательность значений аргумента, которая сходится к 2: $x_n \to 2,\ x_n \neq 2.$ Тогда $f(x_n) = (x_n + 2) \to 4$ независимо от вида $\{x_n\}$. По определению 4.5.1 это означает, что $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$.

Пусть область X, на которой определена функция $y = f(x)$, такова, что $\forall \delta > 0$ содержит точки $x > \delta$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.5.2 (предел функции на $+\infty$ по Гейне). Число b называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если для *любой* бесконечно большой последовательности значений ее аргумента $\{x_n\}$, все члены которой положительны, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к b.

Этот факт обозначается так:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b.$$

ПРИМЕР. Найти $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin x$.

Чтобы найти этот предел, выберем несколько бесконечно больших последовательностей значений аргумента, например, $x_n = \pi n$, $x'_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x''_n = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ \ n \in N$. Им соответствуют такие последовательности значений функции $y = \sin x$: $f(x_n) = \sin \pi n \to 0$, $f(x'_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \to 1$ и $f(x''_n) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) \to \frac{1}{2}$. Так как пределы $\{f(x_n)\}$, $\{f(x'_n)\}$ и $\{f(x''_n)\}$

различны, то нельзя заключить, что функция $y=\sin x$ имеет предел при $x\to+\infty$, поэтому $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ не существует.

Пусть область X, на которой определена функция $y=f(x)$, такова, что $\forall\delta>0$ содержит точки $x<-\delta$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.5.3 (предел функции на $-\infty$ по Гейне). Число b называется пределом функции $y=f(x)$ при $x\to-\infty$, если для *любой* бесконечно большой последовательности значений ее аргумента $\{x_n\}$, все члены которой отрицательны, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к b.

Этот факт обозначается так:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=b.$$

ТЕОРЕМА 4.5.1 (об арифметических операциях над функциями, имеющими предел). Пусть $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b,\ \lim\limits_{x\to a}g(x)=c.$ Тогда существуют пределы в точке $x=a$ функций $f(x)\pm g(x),\ f(x)\cdot g(x),\ \dfrac{f(x)}{g(x)}\ (c\neq 0)$ и $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\pm g(x)\big)=b\pm c,\quad \lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot g(x)=b\cdot c,\quad \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{b}{c},\ c\neq 0.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b,\ \lim\limits_{x\to a}g(x)=c.$ Выберем произвольную $\{x_n\}, x_n\neq a$ и $x_n\to a.$ Тогда по определению 4.5.1 соответствующие последовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{g(x_n)\}$ сходятся к b и c, то есть $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=b,\ \lim\limits_{n\to\infty}g(x_n)=c.$ Отсюда из теорем 4.2.2–4.2.5 следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}\big(f(x_n)\pm g(x_n)\big)=b\pm c,\ \lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\cdot g(x_n)=b\cdot c,\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)}=\dfrac{b}{c},\ c\neq 0,$ что и требовалось доказать.

4.6. Односторонние пределы

Пусть X – область определения функции, которая, быть может, не содержит точку $x=a$, но для любого $\delta>0$ правая полуокрестность точки $x=a$ (интервал $(a;a+\delta)$) не является пустой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.6.1 (правый предел функции в точке $x=a$ по Гейне). Число b называется *правым пределом* функции $y=f(x)$ *в точке* $x=a$, если для *любой* последовательности значений ее аргумента $\{x_n\}$, сходящейся к a и состоящей из чисел, б**о**льших a, соответствующая последовательность значений функций $\{f(x_n)\}$ сходится к b.

Для определения левого предела функции в точке $x=a$ будем считать, что любая левая полуокрестность этой точки, то есть интервал $(a-\delta;a)$, содержит точки множества X.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.6.2 (левый предел функции в точке $x=a$ по Гейне). Число b называется *левым пределом* функции $y=f(x)$ *в точке* $x=a$, если для *любой* последовательности значений ее аргумента $\{x_n\}$, сходящейся к a и состоящей из чисел, меньших a, соответствующая последовательность значений функций $\{f(x_n)\}$ сходится к b.

Односторонние пределы функции в точке обозначим так: $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=b$ – правый, $\lim\limits_{x\to a-} f(x)=b$ – левый предел.

ПРИМЕР. Найти односторонние пределы (правый и левый) функции

$$y=\begin{cases} x+1, & x\le 0 \\ x^2, & 0<x<2 \\ 4-x, & x\ge 2 \end{cases} \quad \text{в точках } x=0 \text{ и } x=2.$$

Так как справа от нуля $(\text{при } x>0)$ и близко к нему $y=x^2$, то $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+} x^2=0$. Слева от нуля, то есть при $x<0$, $y=x+1$, поэтому $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}(x+1)=1$.

Аналогично рассуждая, получим, что $\lim\limits_{x\to 2+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2+}(4-x)=2$ $\lim\limits_{x\to 2-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2-} x^2=4$.

Отметим, что в обеих точках правый предел не равен левому: $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)\ne\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2+} f(x)\ne\lim\limits_{x\to 2-} f(x)$. Это хорошо видно на графике функции (рис. 1): если взять произвольную последовательность значений

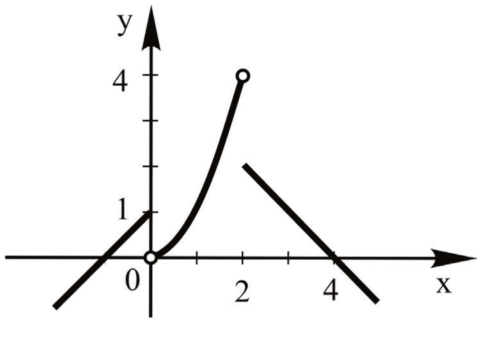

Рис. 1

$x_n<0, x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, то $f(x_n)\to 1$. Для $x_n>0, x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ соответствующие значения $f(x_n)\to 0$. Если $x_n<2, x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}2$, то $f(x_n)\to 4$, а для $x_n>2, x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}2$ значения $f(x_n)\to 2$.

Существуют ли для рассматриваемой функции $\lim_{x\to 0} f(x)$ и $\lim_{x\to 2} f(x)$?

Как было только что отмечено, различным последовательностям значений аргумента, например $x_n<0$ или $x_n>0$, стремящимся к нулю, соответствуют последовательности значений функции $\{f(x_n)\}$, которые сходятся к разным пределам. То же самое происходит и в точке $x=2$. А это по определению 4.5.1 означает, что предел функции в точках $x=0$ и $x=2$ не существует, причиной чего является неравенство левого предела правому.

Имеет место утверждение:
для того чтобы функция имела в точке предел, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке существовали равные односторонние пределы.

ПРИМЕР. Найти односторонние пределы функции

$$y=\begin{cases} x+1, & x\le 0 \\ x^2, & 0<x<2 \\ 4-x, & x\ge 2 \end{cases} \quad \text{в точке} \quad x=4.$$

Слева и справа от точки $x=4$ рассматриваемая функция $y=4-x$, поэтому $\lim_{x\to 4+} f(x)=\lim_{x\to 4+}(4-x)=0$, $\lim_{x\to 4-} f(x)=\lim_{x\to 4-}(4-x)=0$.

Таким образом, односторонние пределы функции в точке $x=4$ равны: $\lim_{x\to 4+} f(x)=\lim_{x\to 4-} f(x)=0$. Следовательно, в этой точке существует предел и $\lim_{x\to 4} f(x)=0$ (рис. 1).

ПРИМЕР. Найти односторонние пределы функции

$$y=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ 2-x, & x>1 \end{cases} \quad \text{в точке} \quad x=1.$$

$$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+}(2-x)=1, \quad \lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-} x^2=1 \Rightarrow$$
$$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1-} f(x)=1.$$

Таким образом, предел функции в точке $x=1$ существует, так как правый предел равен левому (рис. 2): $\lim_{x\to 1} f(x)=1$.

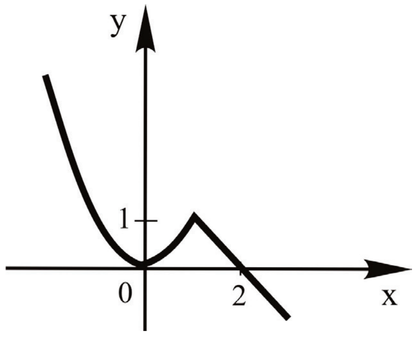

Рис. 2

4.7. Бесконечно малые функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.7.1. Функция $y=\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* (б.м.) в точке $x=a,$ если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0.$

ПРИМЕРЫ.

а) функция $y=x^2-4$ – б.м. в точках $x=\pm 2$, так как $\lim\limits_{x\to\pm 2}\left(x^2-4\right)=0$;

б) функция $y=x^2+x$ – б.м. в точках $x=0,\ x=-1$;

в) функция $y=x^2$ – б.м. в точке $x=0.$

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – функции, б.м. в точке $x=a,$ то есть $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=0.$ Предел отношения б.м. функций $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ называется *неопределенностью вида* $\left(\dfrac{0}{0}\right)$: для вычисления предела такой дроби недостаточно знать, к чему стремятся ее числитель и знаменатель, необходимо учесть особенности их поведения вблизи точки $x=a$. Например, если числитель стремится к 0 гораздо быстрее знаменателя, то дробь будет стремиться к 0, а если это не так, то предел будет ненулевым.

ПРИМЕР. Функции $\alpha(x)=x^2,\ \beta(x)=x,\ \gamma(x)=4x$ являются б.м. в точке $x=0.$ Найдем пределы их отношения при $x\to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}x=0,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\gamma(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{4x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{4}=\frac{1}{4},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{4}{x}=\infty.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.7.2. 1) Б.м. в точке $x=a$ функция $\alpha(x)$ имеет *более высокий порядок малости*, чем б.м. $\beta(x)$, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=0.$

2) Б.м. в точке $x=a$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ имеют *одинаковый порядок малости*, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=k,\quad k\neq 0,\ k\neq\infty.$

3) Б.м. в точке $x=a$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ *эквивалентны*, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=1$.

Эквивалентные б.м. обозначаются так: $\alpha(x)\sim\beta(x).$

ПРИМЕР. Функция $\alpha(x)=x^2$ имеет более высокий порядок малости в точке $x=0$, чем $\beta(x)=x$ и $\gamma(x)=4x$. Функции $\beta(x)=x$ и $\gamma(x)=4x$ одного порядка малости – это следует из данного определения и предыдущего примера.

Сравнение б.м. функций предполагает вычисление предела их отношения.

ПРИМЕР. Сравнить функции $\alpha(x)=x^2$ и $\delta(x)=x^2+2x^3$ в точке $x=0$.

Обе эти функции являются б.м. в точке $x=0$. Вычислим предел их отношения:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\delta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+2x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2(1+2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+2x}=1 \Rightarrow \alpha(x)\sim\delta(x)$$

в точке $x=0$.

ТЕОРЕМА 4.7.1 (принцип замены эквивалентных бесконечно малых). Пусть $\alpha(x), \alpha_1(x), \beta(x), \beta_1(x)-$б.м. функции в точке $x=a$ и $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$, $\beta(x)\sim\beta_1(x)$. Тогда $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$, $\beta(x)\sim\beta_1(x)$, то по определению 4.7.2 $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}=1$. Тогда $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)\alpha_1(x)\beta_1(x)}{\beta(x)\alpha_1(x)\beta_1(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\lim_{x\to a}\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=1\cdot 1\cdot\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$$

по теореме 4.5.1 об арифметических операциях над функциями, имеющими предел.

Что и требовалось доказать.

Из доказанной теоремы следует, что *при вычислении пределов отношения б.м. функции можно заменять им эквивалентными.*

4.8. Первый замечательный предел

Докажем, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=1.$

Это равенство называется *первым замечательным пределом.*

Рассмотрим единичную окружность и угол x радиан. Так как $x\to 0$, то можно считать, что $0<x<\dfrac{\pi}{2}.$

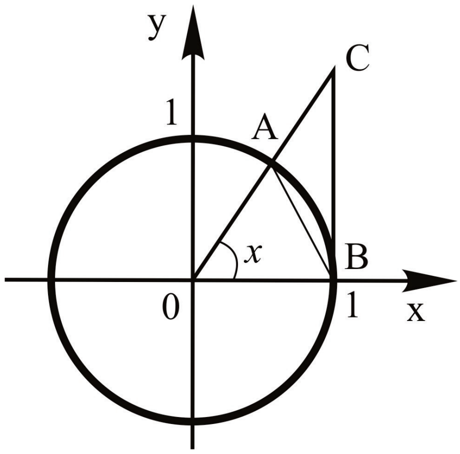

Рис. 3

Очевидно, что $S_{\vartriangle AOB}<S_{\text{сектор}\,AOB}<S_{\vartriangle OCB}$ (рис. 3). Вычислим эти площади. Так как

$$OA=OB=1,\ \text{то}\ S_{\vartriangle AOB}=\frac{1}{2}\sin x,$$

$$S_{\text{сектор}\,AOB}=\frac{1}{2}x,\ S_{\vartriangle OCB}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}x,$$

поэтому $\dfrac{1}{2}\sin x<\dfrac{1}{2}x<\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}x$,

или $\sin x<x<\operatorname{tg}x.$

Разделим это неравенство на $\sin x>0$: $1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x}.$

Все выражения здесь положительны, поэтому перейдем к обратным величинам:

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1. \tag{4.8.1}$$

Так как функции $y=\dfrac{\sin x}{x}$, $y=\cos x$ – четные, то есть $\dfrac{\sin(-x)}{-x}=\dfrac{\sin x}{x}$, $\cos(-x)=\cos x$, то неравенство (4.8.1) верно и для всех $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};0\right)$.

Рассмотрим произвольную $\{x_n\}$: $x_n\to 0$. Из (4.8.1) имеем: $\cos x_n<\dfrac{\sin x_n}{x_n}<1$, при этом $\cos x_n\to 1$. Тогда по принципу двустороннего ограничения (теорема 4.3.3) $\left\{\dfrac{\sin x_n}{x_n}\right\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin x_n}{x_n}=1$. Таким образом, по определению 4.5.1 предела функции в точке по Гейне получаем требуемое: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=1.$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.8.1. Доказанное означает, что при $x \to 0$ б.м. функции $y = \sin x$ и $y = x$ эквивалентны: $\sin x \sim x$ *в точке* $x = 0$.

ПРИМЕРЫ. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$.

а) Пусть $t = 5x \Rightarrow x = \dfrac{t}{5}$. Если $x \to 0$, то $t \to 0$, поэтому $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{5\sin t}{t} = 5$, или по-другому: при $x \to 0$ $\sin 5x \sim 5x \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{x} = 5$ согласно принципу замены б.м.

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x} = 1$ по теореме 4.5.1.

Таким образом, $\operatorname{tg} x \sim x$ *при* $x \to 0$.

При рассмотрении неопределенностей вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ можно пользоваться следующими соотношениями: при $t \to 0$

$$\boxed{\begin{array}{llll} \sin t \sim t & \operatorname{tg} t \sim t & \arcsin t \sim t & \operatorname{arctg} t \sim t \\ e^t - 1 \sim t & \ln(1+t) \sim t & \sqrt[m]{1+t} - 1 \sim \dfrac{t}{m} & \end{array}} \qquad (4.8.2)$$

Эти соотношения примем без доказательства.

ПРИМЕРЫ. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt[3]{1+\sin 3x}-1)\operatorname{tg} 4x}{\ln(1+2x^2)}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\left(e^{4x}-1\right)\left(\sqrt{4-\arcsin x}-2\right)}$.

а) При $x \to 0$ $\sqrt[3]{1+\sin 3x} - 1 \sim \dfrac{\sin\ 3x}{3} \sim \dfrac{3x}{3}$; $\ln\left(1+2x^2\right) \sim 2x^2$, $\operatorname{tg} 4x \sim 4x$,

поэтому $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt[3]{1+\sin 3x}-1)\operatorname{tg} 4x}{\ln(1+2x^2)} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin 3x}{3}\cdot 4x}{2x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x\cdot 4x}{3\cdot 2x^2} = 2.$

б) Преобразуем выражение так, чтобы можно было воспользоваться таблицей (4.8.2) эквивалентных б.м.: $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}\sim 2\left(\frac{x}{2}\right)^2$; $e^{4x}-1\sim 4x$; $\sqrt{4-\arcsin x}-2=2\left(\sqrt{1-\frac{\arcsin x}{4}}-1\right)\sim 2\left(-\frac{\arcsin x}{8}\right)\sim -\frac{x}{4}$.

Теперь найдем предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\left(e^{4x}-1\right)\left(\sqrt{4-\arcsin x}-2\right)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{4\cdot 4x\cdot\left(-\frac{x}{4}\right)}=-\frac{1}{2}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.8.2. Принципом замены б.м. надо пользоваться внимательно. В следующих примерах он не применим.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$, так как числитель ограничен, а знаменатель стремится к бесконечности;

б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}=\frac{2}{\pi}$ – этот предел неопределенностью не является;

в) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x}=\frac{0}{\pi}=0$ – этот предел также неопределенностью не является;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{x}=\infty$ – так как $\cos x\xrightarrow[x\to 0]{}1$, то этот предел тоже неопределенностью не является.

4.9. Непрерывные функции

Пусть точка $x=a$ входит в область X допустимых значений функции $y=f(x)$, причем не является изолированной точкой. Это означает, что любая ее окрестность содержит точки из множества X, отличные от нее самой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.9.1. Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x=a$, если

1) существует конечный $\lim\limits_{x\to a}f(x)\Leftrightarrow$ существуют конечные и равные односторонние пределы функции в этой точке: $\lim\limits_{x\to a-}f(x)=\lim\limits_{x\to a+}f(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.

Точки, в которых функция не является непрерывной, называются *точками разрыва*.

Из определения 4.9.1 следует, что $\lim\limits_{x-a\to 0}\left(f(x)-f(a)\right)=0$. Разность $(x-a)$ называется *приращением аргумента*, а разность $\left(f(x)-f(a)\right)$ – соответствующим этому приращению *приращением функции в точке* $x=a$. Обозначим $x-a=\Delta x,\quad f(x)-f(a)=\Delta y$, тогда можно сформулировать определение, эквивалентное данному определению 4.9.1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.9.2. Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке $x=a$, если $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$, где Δy – приращение функции, соответствующее приращению аргумента Δx в этой точке.

ПРИМЕР.

Исследовать функцию

$$y=\begin{cases} x+1, & x\le 0 \\ x^2, & 0<x<2 \\ 4-x, & x\ge 2 \end{cases}$$

на непрерывность в точках

а) $x=0$; б) $x=2$; в) $x=4$ (рис. 4).

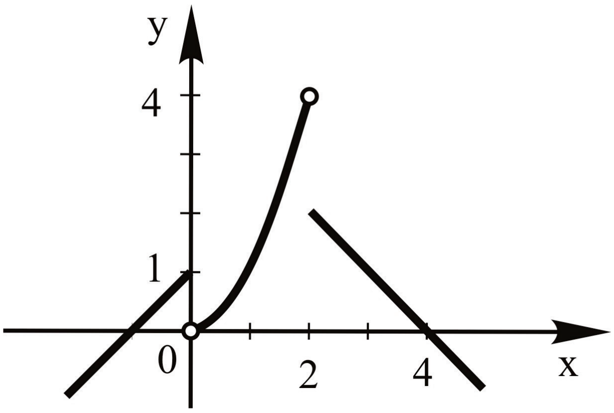

Рис. 4

Ранее были найдены односторонние пределы этой функции в данных точках (см. п. 4.6).

а) $x=0$: $\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to 0+}f(x)=0\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0-}f(x)\ne \lim\limits_{x\to 0+}f(x)$. Это значит, что в точке $x=0$ функция непрерывной не является, то есть $x=0$ – точка разрыва.

б) $x=2$: $\lim\limits_{x\to 2-}f(x)=4,\ \lim\limits_{x\to 2+}f(x)=2\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2-}f(x)\ne \lim\limits_{x\to 2+}f(x)$. Следовательно, $x=2$ также является точкой разрыва.

То, что данная функция имеет разрывы в точках $x=0$ и $x=2$, хорошо видно на ее графике: чтобы его нарисовать, нужно оторвать ручку от бумаги в точках, которые соответствуют этим значениям аргумента.

в) $x=4$: $\lim\limits_{x\to 4-}f(x)=\lim\limits_{x\to 4+}f(x)=0\Rightarrow \lim\limits_{x\to 4}f(x)=0$ и $f(4)=0$. По определению 4.9.1 в точке $x=4$ данная функция непрерывна. Факт ее непрерывности в этой точке выражается в том, что вблизи $x=4$ график можно нарисовать без отрыва.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.9.3. Функция называется *непрерывной на интервале*, если она непрерывна во всех его точках.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.9.4. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x = a$ *справа (слева)*, если она определена в этой точке и

1) существует конечный $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ $\left(\lim\limits_{x \to a-} f(x)\right)$;

2) $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a)$ $\left(\lim\limits_{x \to a-} f(x) = f(a)\right)$.

ПРИМЕР.

Функция $y = \begin{cases} x+1, & x \le 0 \\ x^2, & 0 < x < 2 \\ 4-x, & x \ge 2 \end{cases}$, как следует из рассмотренного выше примера и определения 4.9.4, хотя имеет разрывы в точках $x = 0$ и $x = 2$, является непрерывной в точке $x = 0$ слева и в точке $x = 2$ справа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.9.5. Функция называется *непрерывной на отрезке* $[a;b]$, если она непрерывна во всех его внутренних точках и непрерывна справа в точке $x = a$ и слева в точке $x = b$.

Можно показать, что все *простейшие элементарные функции* $y = x^{\alpha}$, $y = a^x$, $y = \log_a x \; (a > 0,\ a \ne 1)$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ непрерывны на всей области определения. Непрерывность, например, функции $y = \cos x$ в точке $x = 0$ означает, что $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1$.

График непрерывной на промежутке функции можно нарисовать на этом промежутке без отрыва.

4.10. Классификация точек разрыва

Непрерывность функции $y = f(x)$ в точке $x = a$ означает, что

- функция в точке $x = a$ определена,
- существуют конечные и равные односторонние пределы в этой точке,
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Невыполнение хотя бы одного из этих условий говорит о том, что $x = a$ – точка разрыва.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.10.1. Точка $x=a$ называется точкой *разрыва первого рода* функции $y=f(x)$, если существуют *конечные* пределы $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=f(a+)$ и $\lim\limits_{x\to a-} f(x)=f(a-)$, причем не все три числа $f(a)$, $f(a+)$, $f(a-)$ равны между собой. В частности, если $f(a+)=f(a-)\neq f(a)$, то точка $x=a$ называется *точкой устранимого разрыва*. Если же $f(a+)\neq f(a-)$, то $x=a$ называется точкой *неустранимого разрыва* первого рода.

Величина $\left|f(a+)-f(a-)\right|$ называется *скачком* функции в точке $x=a$.

ПРИМЕР. Исследовать на непрерывность функцию $y=\dfrac{\sin x}{x}$.

Исследовать на непрерывность – значит найти точки разрыва функции и определить их характер.

Эта функция определена всюду, кроме точки $x=0$. Поэтому $x=0$ – точка разрыва по определению. Определим характер точки разрыва: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ (первый замечательный предел), то есть $f(0+)=f(0-)=1$, но $f(0)$ не существует. Значит, $x=0$ – точка устранимого разрыва первого рода. Такой разрыв можно устранить. Для этого нужно доопределить функцию в нуле, то есть задать ее значение в точке разрыва, полагая, что $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$:

$$y=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1\ , & x=0\end{cases}$$ – функция, непрерывная для всех $x\in R$.

ПРИМЕР.

Исследовать на непрерывность функцию $y=\begin{cases}x+1\ , & x\le 0\\ x^2, & 0<x<2\\ 4-x, & x\ge 2\end{cases}$.

Эта функция определена на всей числовой прямой, однако если функция задана несколькими аналитическими выражениями, то она может иметь разрывы не только там, где не определена, но и в точках, где одно аналитическое выражение меняется на другое. Для рассматриваемой функции это точки $x=0$, $x=2$.

Выше были найдены односторонние пределы в этих точках: $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to 0+} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to 2-} f(x)=4,\ \lim\limits_{x\to 2+} f(x)=2$. Поэтому в соответствии с определением 4.10.1 $x=0$ и $x=2$ являются точками неустранимого разрыва первого рода.

ПРИМЕР. Исследовать на непрерывность функцию $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-1}$.

Данная функция определена всюду, кроме точки $x=1$, поэтому в этой точке имеется разрыв.

Определим характер разрыва в точке $x=1$**.** Так как $\lim\limits_{x\to 1\pm}\dfrac{1}{x-1}=\pm\infty$ и $\operatorname{arctg} t \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} \pm\dfrac{\pi}{2}$, то $\lim\limits_{x\to 1+}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to 1-}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-1}=-\dfrac{\pi}{2}$. Следовательно, $x=1$ – точка неустранимого разрыва первого рода.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.10.2. Точка $x=a$ называется точкой *разрыва второго рода* функции $y=f(x)$, если в этой точке хотя бы один из односторонних пределов бесконечен или не существует.

ПРИМЕР. Исследовать на непрерывность функцию $y=\dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$.

Область допустимых значений данной функции: $x\neq 1, x\neq -2$. Значит, $x=1$ и $x=-2$ – точки разрыва.

$\lim\limits_{x\to 1\pm}\dfrac{1}{(x-1)(x+2)}=\pm\infty \Rightarrow x=1$ – точка разрыва второго рода,

$\lim\limits_{x\to -2\pm}\dfrac{1}{(x-1)(x+2)}=\mp\infty \Rightarrow x=-2$ – также точка разрыва второго рода.

ПРИМЕР. Исследовать на непрерывность функцию $y=\sin\dfrac{\pi}{x}$.

Функция определена при всех $x\neq 0$. Чтобы найти односторонние пределы данной функции в точке $x=0$, сделаем замену $z=\dfrac{\pi}{x}$. Тогда $z\xrightarrow[x\to 0\pm]{}\pm\infty$, поэтому $\lim\limits_{x\to 0\pm}\sin\dfrac{\pi}{x}=\lim\limits_{z\to\pm\infty}\sin z$. Этот предел не существует (см. п. 4.5), значит по определению $x=0$ – точка разрыва второго рода.

4.11. Свойства непрерывных функций

ТЕОРЕМА 4.11.1. Пусть функции $y=f(x), y=g(x)$ непрерывны в точке $x=a$. Тогда $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\left(g(a)\neq 0\right)$ также непрерывны в точке $x=a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Непрерывность функций $y=f(x), y=g(x)$ в точке $x=a$ означает, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=g(a)$. Тогда по теореме 4.5.1 об арифметических операциях над функциями, имеющими предел, $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=$ $=f(a)\pm g(a)$, $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=f(a)\cdot g(a)$, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f(a)}{g(a)}$, так как $g(a)\neq 0$, что и требовалось доказать.

Пусть $\forall x\in X$ определена функция $u=u(x)$ и U – область ее значений. Кроме того, $\forall u\in U$ определена функция $y=y(u)$. Тогда говорят, что на множестве X задана *сложная* функция $y=y\left(u(x)\right)$ (*суперпозиция*, или *композиция* функций $y=y(u)$ и $u=u(x)$).

ПРИМЕРЫ.

а) $y=\sin^3 x$ – композиция двух функций: $u=\sin x$ и $y=u^3$.

б) $y=\ln\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ – композиция трех функций: $u=2x-\dfrac{\pi}{4}$, $v=\cos u$, $y=\ln v$.

в) $y=\dfrac{1}{2x^2+4x+3}$ – композиция двух функций: $u=2x^2+4x+3$, $y=u^{-1}$.

ТЕОРЕМА 4.11.2 (о непрерывности сложной функции). Пусть функция $u=u(x)$ непрерывна в точке $x=x_0$ и $u(x_0)=u_0$. Кроме того, функция $y=y(u)$ непрерывна в точке $u=u_0$. Тогда сложная функция $y=y\left(u(x)\right)$ непрерывна в точке $x=x_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $u=u(x)$ непрерывна в точке $x=x_0$, то по определению 4.9.1 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=u(x_0)=u_0$. Таким образом, если $x\to x_0$, то $u\to u_0$. Так как $y=y(u)$ непрерывна в точке $u=u_0$, то $\lim\limits_{u\to u_0} y(u)=y(u_0)$. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} y(u(x))=\lim\limits_{u\to u_0} y(u)=y(u_0)=y(u(x_0))$. Что и требовалось доказать.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.11.1. *Элементарной* называется всякая функция, которая задана одним аналитическим выражением, составленным из простейших элементарных функций при помощи четырех арифметических действий и суперпозиций, примененных *конечное* число раз.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.11.1. Из доказанных теорем 4.11.1 и 4.11.2 следует, что *все элементарные функции непрерывны в области определения.*

ПРИМЕРЫ.

а) Функция $y=\begin{cases} x+1\ , & x\le -1 \\ x^2, & x>-1 \end{cases}$ элементарной не является, так как задана двумя аналитическими выражениями. В точке $x=-1$ она имеет неустранимый разрыв первого рода.

б) Функция $y=x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^7}{7}+\ldots+\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots,\ x\in R$ элементарной не является, так как представляет собой сумму бесконечного числа слагаемых.

в) Функция $y(x)=\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\sin t}{t}\cos tx dt,\ x\in R$ элементарной не является, так как задана при помощи операции интегрирования. В точках $x=\pm 1$ она имеет неустранимые разрывы первого рода.

г) $y=\dfrac{2\sqrt[5]{\sin 8x}}{x^4+4}\cdot\sqrt[3]{\log_5\dfrac{\left(x^2+4x+5\right)\cos 2x+\operatorname{arctg}^4\left(x^3-1\right)}{x\left(2^{2x}+x^4 2^x+3\right)}}$ – элементарная функция, она непрерывна всюду, где определена.

Пусть функция $y=y(x)$ определена $\forall x\in[a;b]$, $y(a)=\alpha, y(b)=\beta$, $\alpha\ne\beta$. Если каждому значению $y\in[\alpha;\beta]$ (или $y\in[\beta;\alpha]$, если $\beta<\alpha$) соответствует *единственное значение* $x\in[a;b]$, то говорят, что функция $x=x(y)$ – *обратная* для $y=y(x)$.

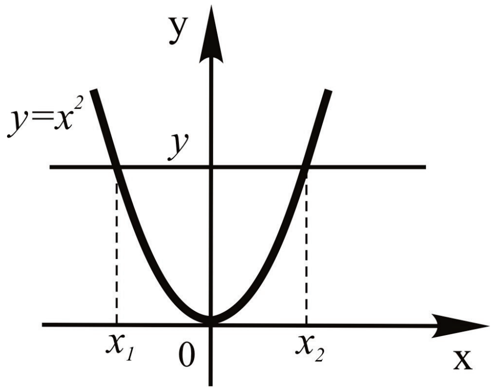

Рис. 5

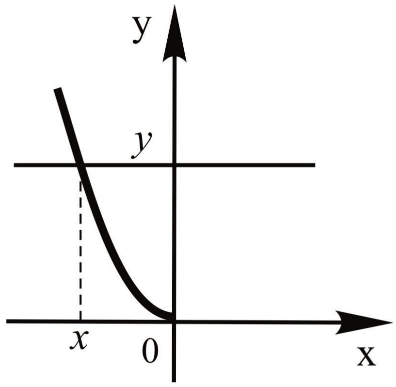

Рис. 6

ПРИМЕРЫ.

а) для функции $y = x^2, x \in R$, $y \in [0;+\infty)$ обратная функция не существует: любому значению $y > 0$ соответствует два значения аргумента x_1 и x_2 (рис. 5).

б) для функции $y = x^2$, $x \in (-\infty;0]$, $y \in [0;+\infty)$ обратная функция определена: любому значению $y > 0$ соответствует одно значение $x = -\sqrt{y}$ (рис. 6).

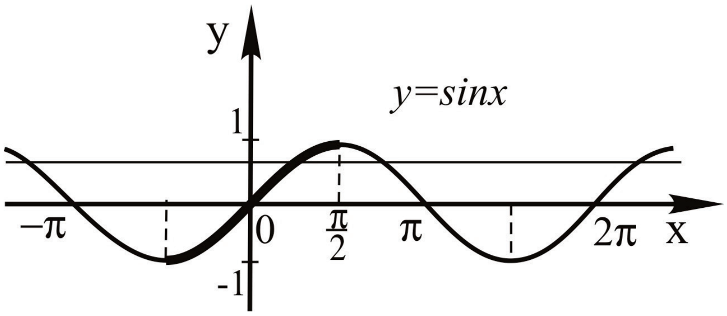

Рис. 7

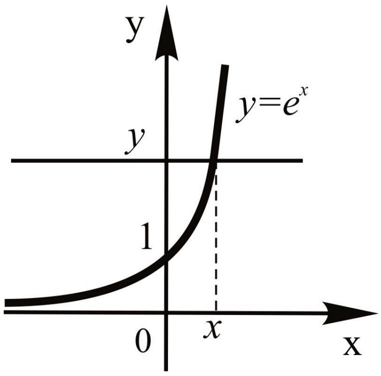

Рис. 8

в) для функции $y = \sin x, x \in R$ обратная функция не существует, так как любому значению $y \in [-1;1]$ соответствует бесконечно много значений $x = (-1)^n \arcsin y + \pi n,\ n \in Z$ (рис. 7). Но если рассматривать только $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, то $x = \arcsin y$ – обратная функция для $y = \sin x$. Обратная функция существует также, если считать, к примеру, что $x \in \left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ или $x \in \left[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$, так как любому значению $y \in [-1;1]$ на каждом из этих промежутков соответствует единственное значение x.

г) для функции $y=e^x$, $x\in R$, $y>0$ (рис. 8) обратной является функция $x=\ln y$.

Как видно из рассмотренных примеров, существование обратной функции связано с монотонностью функции $y=y(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.11.2. Функция $y=y(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на множестве X, если

$$\forall x_1,x_2\in X,\ x_1<x_2\Rightarrow y(x_1)<y(x_2)\ \left(y(x_1)>y(x_2)\right).$$

Возрастающие или убывающие функции называются *строго монотонными*.

ТЕОРЕМА 4.11.3 (о непрерывности обратной функции). Пусть функция $y=y(x)$ непрерывна и строго монотонна на отрезке $[a;b]$ и $y(a)=\alpha$, $y(b)=\beta$. Тогда на отрезке $[\alpha;\beta]$ (или на $[\beta;\alpha]$) определена обратная функция $x=x(y)$, также непрерывная и строго монотонная.

Без доказательства.

ТЕОРЕМА 4.11.4 (об устойчивости знака непрерывной в точке функции). Пусть функция $y=y(x)$ непрерывна в окрестности точки $x=a$ и $y(a)>0$ $\left(y(a)<0\right)$, тогда существует $\delta>0$ такое, что $y(x)>0$ $\left(y(x)<0\right)$ для всех $x\in(a-\delta;a+\delta)$.

Без доказательства.

Эта теорема имеет ясный *геометрический смысл*: если непрерывная функция положительна (отрицательна) в точке $x=a$, то она положительна (отрицательна) и где-то рядом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.11.3. Функция $y=y(x)$ называется ограниченной сверху (снизу) на множестве X, если $\exists M\in R$ $(m\in R)$ такое, что $y(x)\le M$ $\left(y(x)\ge m\right)$ $\forall x\in X$.

Функция, ограниченная и снизу, и сверху, называется *ограниченной* на множестве X, то есть все значения ограниченной функции удовлетворяют неравенству $m\le y(x)\le M$.

ТЕОРЕМА 4.11.5 (первая теорема Вейерштрасса). Всякая непрерывная *на отрезке* функция ограничена на этом отрезке.

Без доказательства.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.11.2. Непрерывная функция, заданная *на интервале*, может быть неограниченной.

Например, рассмотрим функцию $y = \dfrac{1}{x}$, непрерывную при всех $x \in (0;2)$.

Очевидно, $\dfrac{1}{x} \geq \dfrac{1}{2}\ \forall x \in (0;2)$, то есть функция ограничена снизу, но ограниченной сверху на этом интервале она не является (рис. 9).

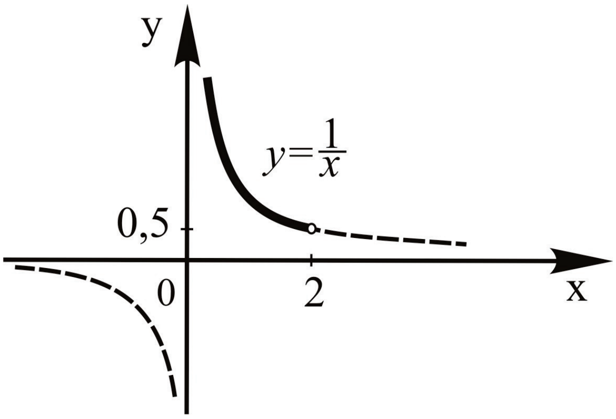

Рис. 9

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.11.4. Точка $x = x_0$ называется точкой *локального максимума* (*минимума*) функции $y = y(x)$, если $\exists \delta > 0 \mid \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \Rightarrow y(x) \leq y(x_0)\ \ (y(x) \geq y(x_0))$. Точки локального максимума или минимума называются точками *локального экстремума* (или просто точками экстремума) (рис. 10).

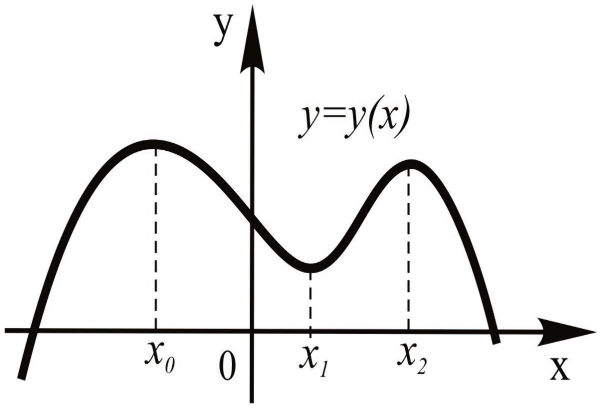

Рис. 10

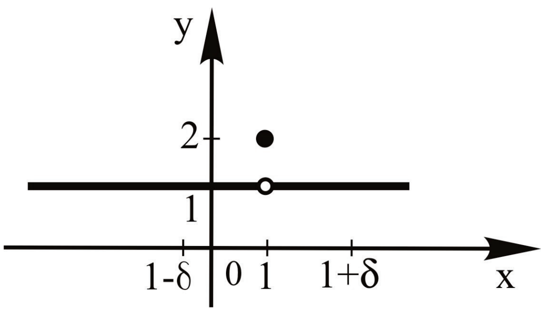

Рис. 11

На рис. 10 $x = x_0$, $x = x_2$ – точки максимума, $x = x_1$ – точка минимума.

ПРИМЕР. Рассмотрим функцию $y = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq 1 \\ 2, & \text{если } x = 1 \end{cases}$ (рис. 11).

Так как $y(1) = 2$, $y(x) \leq 2\ \forall x \in (1-\delta; 1+\delta)$ при любом $\delta > 0$, то по определению 4.11.4 точка $x = 1$ является точкой максимума этой функции.

ТЕОРЕМА 4.11.6 (вторая теорема Вейерштрасса). Всякая *непрерывная на отрезке* функция *достигает* на этом отрезке своих наименьшего и наибольшего значений.

Без доказательства.

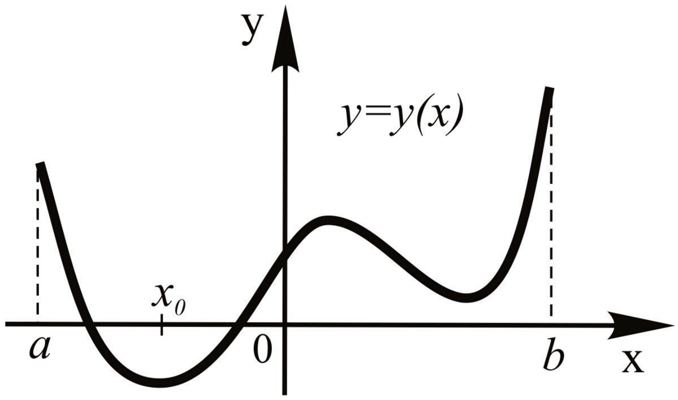

Рис. 12

Как видно из рис. 12, наибольшее и наименьшее значения достигаются либо *на концах отрезка*, либо *в точках локального экстремума*: $y_{\text{наим}} = y(x_0),\ x_0 \in (a;b)$ – точка минимума, $y_{\text{наиб}} = y(b),\ x = b$ – правый конец отрезка.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.11.3. Непрерывная функция, заданная *на интервале*, может не иметь ни наименьшего, ни наибольшего значений.

ПРИМЕР. Функция $y = x^2$, рассматриваемая, например, при $x \in (0;2)$, ограничена на этом на интервале, так ее значения удовлетворяют неравенству $0 \le x^2 \le 4$, но наибольшее значение $y = 4$ и наименьшее $y = 0$ не достижимы, если $x \in (0;2)$.

ТЕОРЕМА 4.11.7 (Больцано – Коши). Пусть $y = y(x)$ непрерывна для всех $x \in [a;b]$ и $y(a) \cdot y(b) < 0$. Тогда существует точка $c \in (a;b)$ такая, что $y(c) = 0$.

Без доказательства.

Геометрический смысл этой теоремы ясно виден на рис. 13 и 14: перейти с верхней полуплоскости $(y > 0)$ на нижнюю $(y < 0)$, двигаясь вдоль графика непрерывной функции и не пересекая ось OX, нельзя. На рис. 13 $y(a) > 0,\ y(b) < 0$, а на рис. 14 $y(a) < 0,\ y(b) > 0$.

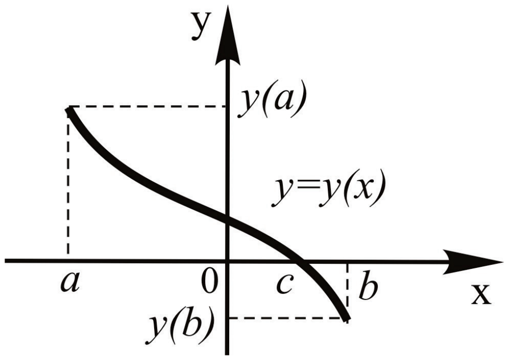

Рис. 13

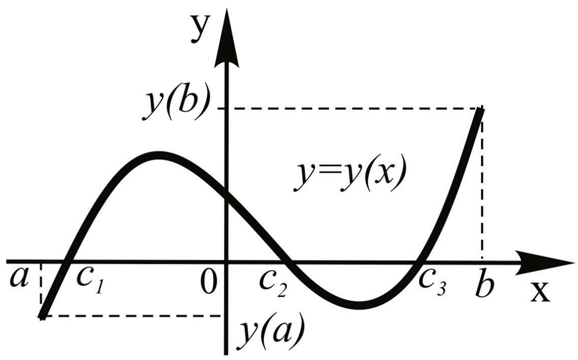

Рис. 14

С помощью теоремы 4.11.7 можно находить приближенные значения корней уравнения в тех случаях, когда не удается решить его точно.

ПРИМЕР. Доказать, что уравнение $2^x + x^2 + 2x - 3 = 0$ имеет корни на отрезках $\left[-3;-2\right]$ и $\left[0;1\right]$.

Функция $y = 2^x + x^2 + 2x - 3$ непрерывна и $y\left(0\right) = -3 < 0$, а $y\left(1\right) = 2 > 0$, поэтому по теореме Больцано – Коши существует значение $x_1 \in \left[0;1\right]$ такое, что $y\left(x_1\right) = 0$, то есть корень данного уравнения. Если нужно определить положение корня точнее, можно, например, вычислить значение функции в средней точке отрезка: так как $y\left(0,5\right) \approx -0,3 < 0$, а $y\left(1\right) = 2 > 0$, то $x_1 \in \left[0,5;1\right]$.

Аналогично $y\left(-3\right) = 2^{-3} > 0$, а $y\left(-2\right) = -2,75 < 0$, поэтому корень уравнения $x_2 \in \left[-3;-2\right]$.

ТЕОРЕМА 4.11.8 (о промежуточных значениях). Пусть функция $y = y(x)$ непрерывна для всех $x \in \left[a;b\right]$ и m, M – ее наименьшее и наибольшее значения соответственно. Тогда для любого значения $\gamma \in \left[m;M\right]$ найдется $c \in \left[a;b\right]$ такое, что $y(c) = \gamma$.

Без доказательства.

Теорема утверждает, что непрерывная функция *принимает все промежуточные* значения между своими наибольшим и наименьшим значениями.

Глава 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

5.1. Понятие производной функции, ее физический и геометрический смысл

К понятию производной приводят различные задачи из физики, механики, геометрии и других областей знания. Рассмотрим две такие задачи.

ЗАДАЧА о вычислении мгновенной скорости.

Пусть тело движется с переменной скоростью и $s(t)$ *– путь, пройденный за время* t. *Определить мгновенную скорость в произвольный момент времени* t_0.

Если к моменту времени $t=t_0$ пройдено расстояние $s(t_0)$, а к моменту $t=t_1$, $t_1>t_0$ – расстояние $s(t_1)$, то $\dfrac{s(t_1)-s(t_0)}{t_1-t_0}=v_{\text{ср}}$ – средняя скорость движения. Если промежуток времени $t_1-t_0=\Delta t$ достаточно мал, то $\dfrac{s(t_1)-s(t_0)}{t_1-t_0}\approx v(t_0)$– скорость в момент времени $t=t_0$, причем это приближенное равенство тем точнее, чем меньше Δt. Если $t_1\to t_0$, то есть $\Delta t\to 0$, то можно утверждать, что

$$v(t_0)=\lim_{t_1\to t_0}\frac{s(t_1)-s(t_0)}{t_1-t_0}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$$

– мгновенная скорость в момент $t=t_0$.

ЗАДАЧА о проведении касательной к графику функции.

Пусть задана непрерывная функция $y=y(x)$. *Написать уравнение касательной к ее графику в произвольной точке.*

Вначале дадим определение касательной к произвольной кривой в некоторой ее точке (известное определение касательной к окружности для произвольной кривой не подходит, например: ось OY имеет с параболой $y=x^2$ одну общую точку, однако касательной к ней не является).

Секущей будем называть прямую, проходящую через две точки, лежащие на кривой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1.1. *Касательной* к кривой в точке M называется предельное положение ее секущей MN, когда точка N, оставаясь на кривой, стремится к M (если такое положение существует) (рис. 15).

Рис. 15

Рассмотрим точку $M\left(x_0;y\left(x_0\right)\right)$, принадлежащую графику функции $y=y\left(x\right)$. Чтобы написать уравнение касательной в этой точке, проведем сначала секущую MN, где $N\left(x_1,y\left(x_1\right)\right)$– некоторая достаточно близкая к M точка, также лежащая на графике (рис.16), $x_1=x_0+\Delta x, \Delta x\neq 0$. Обозначим α – угол между MN и OX, тогда

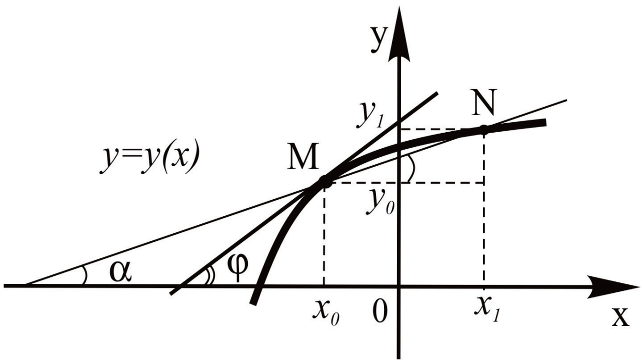

Рис. 16

$k_c=\text{tg}\,\alpha=\dfrac{y(x_1)-y\left(x_0\right)}{x_1-x_0}$– угловой коэффициент секущей MN. Если φ – угол между касательной и OX, то $k=\text{tg}\,\varphi$ – угловой коэффициент касательной (рис. 16).

Будем искать уравнение касательной в виде

$$y-y_0=k\left(x-x_0\right).$$

Неизвестным в этом уравнении является угловой коэффициент k.

Если $N\to M$, то $x_1\to x_0$, или $x_1-x_0=\Delta x\to 0$. Если Δx достаточно мало, то угловой коэффициент секущей $\text{tg}\,\alpha\approx\text{tg}\,\varphi,$ и это приближенное равенство тем точнее, чем меньше Δx.

Поэтому можно утверждать, что $k\ =\ \text{tg}\,\varphi\ =\ \lim\limits_{N\ \to M} k_c$, или

$$k=\lim_{x\to x_0}\frac{y\left(x_1\right)-y\left(x_0\right)}{x_1-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y\left(x_0+\Delta x\right)-y\left(x_0\right)}{\Delta x}. \qquad (5.1.1)$$

ПРИМЕР. Написать уравнение касательной к параболе $y=x^2$ в точке $M(-2;4)$.

Найдем угловой коэффициент этой касательной: $x_0=-2$, тогда $y(x_0)=4$, $y(x_0+\Delta x)=(-2+\Delta x)^2$, поэтому по формуле (5.1.1)

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(-2+\Delta x)^2-4}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(-4+\Delta x)}{\Delta x}=-4.$$

Теперь запишем ее уравнение: $y-4=-4(x+2)$, или $y=-4x-4$.

Для решения этой задачи пришлось составить и вычислить предел вида (5.1.1), аналогичный предел надо вычислить и в задаче об определении мгновенной скорости. Так как при решении обеих задач (и не только их) пришлось выполнять одни и те же действия, то для обозначения этих действий введем новое понятие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1.2. *Производной функции* $y=y(x)$ в точке $x=x_0$ называется предел отношения ее приращения в этой точке к вызвавшему его приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$y'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{y(x)-y(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x_0+\Delta x)-y(x_0)}{\Delta x}, \qquad (5.1.2)$$

или $y'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Следовательно, $k=y'(x_0)$ – угловой коэффициент касательной к графику функции $y=y(x)$ в точке $M\big(x_0;y(x_0)\big)$. Уравнение касательной к графику в этой точке

$$y-y(x_0)=y'(x_0)(x-x_0).$$

Геометрический смысл производной: производная функции в точке равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке.

Физический смысл производной: производная функции в точке характеризует скорость ее изменения в окрестности этой точки.

Отсюда следует, что если $y(x)=C=\text{const}$, то $y'(x)=0$.

Из определения следует, что производная функции в разных точках, вообще говоря, различна, поэтому она сама является функцией.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1.1. Так как в точке разрыва нельзя провести касательную к графику, то для того чтобы функция имела производную, необходимо, чтобы она была непрерывной. Для непрерывной функции $\Delta y \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0$ (определение 4.9.2), поэтому при вычислении производной по определению необходимо раскрыть неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

ПРИМЕРЫ. Вывести формулы вычисления производных функций а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = e^x$.

а) Так как $y(x) = \sqrt{x}$, то $y(x + \Delta x) = \sqrt{x + \Delta x}$, отсюда по определению

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

б) Если $y(x) = e^x$, то $y(x + \Delta x) = e^{x + \Delta x}$, тогда с учетом того, что $e^{\Delta x} - 1 \sim \Delta x$ при $\Delta x \to 0$, получим:

$$\left(e^x\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x + \Delta x} - e^x}{\Delta x} = \left(\frac{0}{0}\right) = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \overset{(4.8.2)}{=} e^x.$$

Понятие производной связано с понятием касательной, поэтому *в тех точках, где график не имеет касательной, функция не имеет производной*. Также ее нет в тех точках, где касательная к графику функции есть, но она перпендикулярна оси OX.

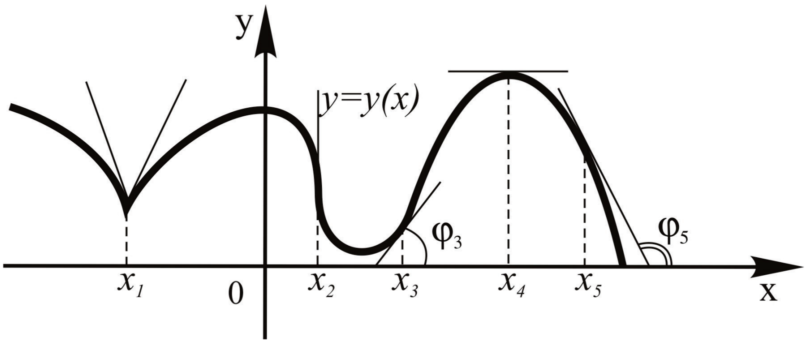

Рис. 17

Для функции $y = y(x)$, график которой изображен на рис. 17, производная $y'(x_1)$ не существует, так как предельные положения левой и правой секущих различны;

производная $y'(x_2)$ не существует, так как предельное положение секущей в этой точке вертикально, то есть касательная перпендикулярна оси OX;

значение $y'(x_4)=\text{tg}\,0=0$; $y'(x_3)=\text{tg}\,\varphi_3>0$, так как угол φ_3 – острый; $y'(x_5)=\text{tg}\,\varphi_5<0$ (φ_5 – тупой угол), где φ_3 и φ_5 – углы между соответствующими касательными и положительным направлением OX.

5.2. Односторонние производные

Введем понятия левой и правой производных функции $y=y(x)$ по аналогии с понятием левого и правого предела.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2.1. *Правой производной* $y'(x+)$ функции $y=y(x)$ в точке x называется $\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\dfrac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}$ при условии, что этот предел существует.

То, что $\Delta x\to 0+$, означает, что $\Delta x>0$, то есть при вычислении правой производной $y'(x+)$ к точке x приближаются справа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2.2. *Левой производной* $y'(x-)$ функции $y=y(x)$ в точке x называется $\lim\limits_{\Delta x\to 0-}\dfrac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}$ при условии, что этот предел существует.

При вычислении левой производной $y'(x-)$ полагается, что $\Delta x<0$. Однако часто удобнее считать, что $\Delta x>0$, тогда

$$y'(x-)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{y(x-\Delta x)-y(x)}{\Delta x}.$$

Имеют место утверждения:

- если функция имеет в точке x производную $y'(x)$, то она имеет в этой точке как левую, так и правую производные, причем $y'(x+)=y'(x-)=y'(x)$;
- если функция имеет в точке x как правую, так и левую производные, причем эти производные равны между собой, то в точке x существует производная, причем $y'(x)=y'(x+)=y'(x-)$;
- если $y'(x+)\neq y'(x-)$, то в точке x функция не имеет производной.

ПРИМЕР. Рассмотрим функцию $y=|x|=\begin{cases} x, & \text{если } x\ge 0 \\ -x, & \text{если } x<0 \end{cases}$.

Вычислим односторонние производные (правую и левую) в точке $x=0$. Пусть $\Delta x>0$. Тогда

$$y'(0+)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0+\Delta x-0}{\Delta x}=1,\ \ y'(0-)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{0-\Delta x-0}{\Delta x}=-1\ .$$

Односторонние производные не равны, значит $y'(0)$ не существует. В других точках эта функция производную имеет.

5.3. Понятие дифференцируемости. Дифференциал функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.3.1. Функция $y=y(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x, если ее приращение в этой точке, соответствующее приращению аргумента Δx, представимо в виде $\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)=A\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x,$ где $A=\text{const},$ а $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0,$ то есть $\alpha(\Delta x)$ – б.м. функция в точке $\Delta x=0$.

Это довольно сложное определение можно прокомментировать с геометрической точки зрения: если зафиксировать значение $x=x_0$ и обозначить $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=y-y_0$, то, отбрасывая б.м. более высокого, чем Δx, порядка, получим: $\Delta y\approx A\Delta x$, или $y\approx y_0+A(x-x_0)$ вблизи точки $x=x_0$. Но $y=y_0+A(x-x_0)$– уравнение прямой, проходящей через точку $(x_0;y_0)$, поэтому *дифференцируемой в точке* $x=x_0$ *называется такая функция, график которой вблизи точки* $(x_0;y_0)$ *можно приближенно заменить прямой линией*. И такая прямая, очевидно, является касательной к графику в этой точке, причем $A=y'(x_0)$ – ее угловой коэффициент. Следовательно, понятие дифференцируемости функции связано с существованием касательной к ее графику или, как было показано выше, с существованием производной.

ТЕОРЕМА 5.3.1 (необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции). Для того чтобы функция $y=y(x)$ была дифференцируемой в некоторой точке $x,$ необходимо и достаточно, чтобы $y=y(x)$ имела в этой точке конечную производную $y'(x)$.

Без доказательства.

Таким образом, *дифференцируемость функции в некоторой точке эквивалентна существованию* в этой точке *конечной производной*, поэтому процедуру вычисления производной называют *дифференцированием.* Функция, график которой изображен на рис. 17, дифференцируема всюду, кроме точек $x = x_1$ и $x = x_2$, в которых она не имеет производной.

Если $y = y(x)$ дифференцируема в точке x, то по определению 5.3.1 ее приращение в этой точке $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,\ A = \text{const}$ состоит из двух частей: $A\Delta x$ – линейная относительно Δx и $\alpha(\Delta x)\Delta x$ – нелинейная относительно Δx, б.м. более высокого порядка малости, чем Δx.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.3.2. *Дифференциалом* функции $y = y(x)$ в точке x называется главная *линейная часть ее приращения* в этой точке:

$$dy(x) = y'(x)\Delta x.$$

Если $y(x) = x,$ то $y'(x) = 1,$ поэтому $dx = 1 \cdot \Delta x.$ Таким образом, принято считать, что если x – независимая переменная, то $dx = \Delta x$, поэтому

$$dy(x) = y'(x)dx. \tag{5.3.1}$$

ПРИМЕР. Найти дифференциалы функций а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = e^x$ в произвольной точке x.

а) $y'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dy(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx$. В частности, $dy(2) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}dx$, $dy(1) = \dfrac{1}{2}dx$.

б) $y'(x) = e^x \Rightarrow dy(x) = e^x dx$. В частности, $dy(0) = dx$.

ТЕОРЕМА 5.3.2 (о связи непрерывности и дифференцируемости). Пусть функция $y = y(x)$ дифференцируема в точке x, тогда она непрерывна в этой точке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению дифференцируемости приращение функции $y = y(x)$, соответствующее приращению $\Delta x \neq 0$, представимо в виде $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,\ A = \text{const}$. Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y =$ $= \lim\limits_{\Delta x \to 0}(A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x) = 0$, что по определению 4.9.2 означает непрерывность $y = y(x)$ в точке x.

ЗАМЕЧАНИЕ. Обратное утверждение неверно, то есть *не всякая непрерывная функция дифференцируема* (график непрерывной функции может иметь касательную не во всех точках).

5.4. Дифференцирование сложной функции

ТЕОРЕМА 5.4.1 (о производной сложной функции). Пусть функция $u=u(x)$ дифференцируема в некоторой точке x, а функция $y=y(u)$ дифференцируема в соответствующей точке $u=u(x)$, тогда сложная функция $y=y\big(u(x)\big)$ дифференцируема в точке x и

$$y'\big(u(x)\big)=y'(u)u'(x). \qquad (5.4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зададим $\Delta x\neq 0$. Тогда функция $u=u(x)$ получит приращение Δu (быть может, $\Delta u=0$), а функция $y=y(u)$ – приращение Δy. Так как функция $y=y(u)$ дифференцируема в точке $u=u(x)$, то по определению 5.3.1 $\Delta y=y'(u)\Delta u+\alpha(\Delta u)\Delta u$, где $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\alpha(\Delta u)=0$. Разделим Δy на $\Delta x\neq 0$: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=y'(u)\dfrac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha(\Delta u)\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$. По условию $u=u(x)$ дифференцируема, значит $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}=u'(x)$. Кроме того, по теореме о связи непрерывности и дифференцируемости $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta u=0$. Таким образом, если $\Delta x\to 0$, то $\Delta u\to 0$.

Отсюда имеем: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}y'(u)\dfrac{\Delta u}{\Delta x}+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta u)\dfrac{\Delta u}{\Delta x}=y'(u)u'(x)+$
$+\lim\limits_{\Delta u\to 0}\alpha(\Delta u)\dfrac{\Delta u}{\Delta x}=y'(u)u'(x).$

Итак, $y'(x)=y'(u)u'(x)$, что и требовалось доказать.

ПРИМЕР. Найти производные функций а) $y=\sqrt{7x+8}$; б) $y=e^{\sqrt{x}}$.

а) Данная функция – композиция двух функций: $y=\sqrt{u}$, $u=7x+8$. Поэтому $y'=y'(u)u'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}(7x+8)'=\dfrac{1}{2\sqrt{7x+8}}\cdot 7.$

б) $y=e^{u}$, $u=\sqrt{x}$, отсюда по формуле (5.4.1) $y'=e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}\right)'=e^{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

5.5. Дифференцирование обратной функции

ТЕОРЕМА 5.5.1 (о производной обратной функции). Пусть функция $y = y(x)$ удовлетворяет условиям теоремы о непрерывности обратной функции в некоторой окрестности точки x, дифференцируема в этой точке и $y'(x) \neq 0$. Тогда обратная функция $x = x(y)$ дифференцируема в соответствующей точке $y = y(x)$ и

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)}. \tag{5.5.1}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зададим приращение $\Delta y \neq 0$. Так как по условию теоремы о непрерывности обратной функции $x = x(y)$ и $y = y(x)$ строго монотонны, то $\Delta x \neq 0$. Тогда $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$. По условию функция $y = y(x)$ дифференцируема, значит, непрерывна, поэтому $x = x(y)$ также непрерывна по теореме о непрерывности обратной функции. Отсюда $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \Delta x = 0$ (определение 4.9.2), то есть $\Delta x \to 0$, когда $\Delta y \to 0$.

Найдем теперь производную $x'(y)$ по определению (5.1.2): $x'(y) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'(x)}$, так как по условию $y = y(x)$ дифференцируема и $y'(x) \neq 0$. Что и требовалось доказать.

ПРИМЕР. Найти производную функции $y = \ln x$, $x > 0$.

Данная функция имеет обратную $x = e^y$. Производная от экспоненты была найдена в п. 5.1. Тогда по формуле (5.5.1)

$$y'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y}, \text{ но } e^y = x, \text{ поэтому } (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

5.6. Дифференцирование суммы, разности, произведения и частного

ТЕОРЕМА 5.6.1. Пусть функции $u = u(x), v = v(x)$ дифференцируемы в некоторой точке x. Тогда их сумма, разность, произведение и частное (при $v(x) \neq 0$) также дифференцируемы в этой точке и

$$(u+v)' = u' + v', \tag{5.6.1}$$

$$(u-v)' = u' - v', \tag{5.6.2}$$

$$(u \cdot v)' = u'v + v'u, \tag{5.6.3}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}. \tag{5.6.4}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем формулы (5.6.3) и (5.6.4). Рассмотрим функцию $y = u(x)v(x)$. Зададим приращение $\Delta x \neq 0$, тогда

$$\Delta u = u(x+\Delta x) - u(x), \ \ \Delta v = v(x+\Delta x) - v(x) \Rightarrow$$

$$u(x+\Delta x) = u(x) + \Delta u, \ \ v(x+\Delta x) = v(x) + \Delta v.$$

По определению производной (5.1.2)

$$(uv)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u+\Delta u)(v+\Delta v) - uv}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = uv' + vu',$$

так как $u = u(x)$ дифференцируема по условию, значит, непрерывна, а потому $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0$.

Пусть теперь $y = \dfrac{u(x)}{v(x)}, \ v(x) \neq 0$. По определению производной (5.1.2)

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}\right)\cdot\frac{1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v}\right)\cdot\frac{1}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v+\Delta v)\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v\Delta v} = \frac{vu' - uv'}{v^2},$$

так как $v(x)$ по условию дифференцируема, значит, непрерывна, а потому $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v = 0.$

Что и требовалось доказать.

Формулы (5.6.1) и (5.6.2) доказать самостоятельно.

5.7. Таблица производных

1. $(C)' = 0$	2. $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$	3. $\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha u^{\alpha-1}\cdot u',\ \alpha\in R$
4. $\left(a^{u}\right)' = a^{u}\ln a\cdot u',$	5. $\left(e^{u}\right)' = e^{u}\cdot u'$	6. $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u\ln a}$
7. $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$	8. $(\sin u)' = \cos u\cdot u'$	9. $(\cos u)' = -\sin u\cdot u'$
10. $(\mathrm{tg}\,u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$	11. $(\mathrm{ctg}\,u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$	12. $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
13. $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	14. $(\mathrm{arctg}\,u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$	15. $(\mathrm{arcctg}\,u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$

В формулах 4 и 6 полагается, что $a>0,\ a\neq 1.$

Докажем приведенные формулы, используя определение производной (5.1.2) и доказанные теоремы 5.4.1–5.6.1.

8. $(\sin x)' = \cos x.$

По определению производной

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\frac{\Delta x}{2}) = \cos x,$$ так как $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t} = 1$ (первый замечательный предел) и функция $y=\cos x$ непрерывна.

9. $(\cos x)' = -\sin x.$

Используем формулы приведения и теорему 5.4.1 о производной сложной функции:

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = -\sin x.$$

10. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}.$

Доказать самостоятельно, используя доказанные формулы 8, 9 и формулу (5.6.4) вычисления производной частного: $(\operatorname{tg} x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'.$

11. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}.$

Доказать самостоятельно.

6. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a},\ x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1.$

В п. 5.5 была найдена производная $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}\ \forall x > 0$. По формуле перехода к логарифму другого основания имеем: $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$. Следовательно, $(\log_a x)' = \left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right)' = \dfrac{1}{x\ln a}.$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.7.1. Функция $y = \log_a x$ определена только при $x > 0$, в то время как значение функции, совпадающей с ее производной, можно вычислить $\forall x \neq 0$. Найдем производную функции $y = \log_a |x|$, определенной, как и $y = \dfrac{1}{x\ln a}$, $\forall x \neq 0$.

По определению $|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0 \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$, поэтому

$$(\log_a |x|)' = \begin{cases} \dfrac{1}{x\ln a}, & \text{если } x > 0 \\ \dfrac{1}{-x\ln a}\cdot(-x)', & \text{если } x < 0 \end{cases}, \quad \text{то есть} \quad (\log_a |x|)' = \frac{1}{x\ln a}\ \ \forall x \neq 0.$$

В частности, $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}\ \ \forall x \neq 0.$

4. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a,\ \ a > 0, a \neq 1.$

В п. 5.1 была найдена производная $\left(e^x\right)' = e^x$. Так как $a = e^{\ln a}$, то $a^x = e^{x\ln a}$, поэтому согласно теореме 5.4.1 $\left(a^x\right)' = e^{x\ln a} \cdot \left(x\ln a\right)' = e^x \ln a$.

12. $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

Рассмотрим функцию $y = \arcsin x,\ y \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right],\ x \in \left[-1;1\right].$ При $y \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ она имеет обратную $x = \sin y$, поэтому по теореме 5.5.1 о производной обратной функции получим, что

$$y'(x) = \left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

с учетом того, что $\cos y > 0\ \ \forall y \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right).$

Заметим, что функция $y = \arcsin x$ дифференцируема во всех точках интервала $\left(-1;1\right)$, а $y'(1),\ y'(-1)$ не существуют.

13. $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

Воспользуемся известным тождеством:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \left(\arcsin x\right)' + \left(\arccos x\right)' = 0,$$

тогда $\left(\arccos x\right)' = -\left(\arcsin x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

14. $\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}.$

Для функции $y = \operatorname{arctg} x,\ x \in R,\ y \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ функция $x = \operatorname{tg} y -$ обратная, поэтому

$$y'(x) = \left(\operatorname{arctg} x\right)' = \frac{1}{\left(\operatorname{tg} y\right)'} = \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

15. $\left(\operatorname{arcctg} x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Воспользуемся тождеством $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \dfrac{\pi}{2}$. Тогда

$$\left(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x\right)' = 0 \Rightarrow (\operatorname{arcctg} x)' = -\left(\operatorname{arctg} x\right)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

3. $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

Воспользуемся основным логарифмическим тождеством: $e^{\ln b} = b$ – и свойством логарифма: $\ln x^{\alpha} = \alpha \ln|x|$. Тогда

$\left(x^{\alpha}\right)' = \left(e^{\ln x^{\alpha}}\right)' = \left(e^{\alpha \ln|x|}\right)' = e^{\alpha \ln|x|} \cdot \left(\alpha \ln|x|\right)' = x^{\alpha} \cdot \alpha \cdot \dfrac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$ – по теореме 5.4.1 о производной сложной функции и доказанным формулам 5 и 7 таблицы производных.

ПРИМЕРЫ. Найти производные функций

$$\text{а) } y = \sin^2 2x; \qquad \text{б) } y = \log_2 \frac{\left(x^2+1\right)\left(2x+3\right)}{\sqrt[3]{4-5x}}.$$

а) $y = \sin^2 2x$ – сложная функция: $y = u^2$, $u = \sin v$, $v = 2x$. Поэтому $y' = 2\sin 2x\left(\sin 2x\right)' = 2\sin 2x \cos 2x\left(2x\right)' = 2\sin 4x$.

б) Используя свойства логарифма, сначала упростим данную функцию, а затем вычислим ее производную:

$$\left(\log_2 \frac{(x^2+1)(2x+3)}{\sqrt[3]{4-5x}}\right)' = \left(\log_2\left(x^2+1\right) + \log_2|2x+3| - \frac{1}{3}\log_2|4-5x|\right)' =$$

$$= \frac{2x}{\left(x^2+1\right)\ln 2} + \frac{2}{(2x+3)\ln 2} + \frac{5}{3\left(4-5x\right)\ln 2}.$$

5.8. Инвариантность формы первого дифференциала

По определению дифференциал (или первый дифференциал) функции $y = y(x)$ вычисляется по формуле (5.3.1): $dy = y'(x)dx$, если x – независимая переменная.

ПРИМЕРЫ.

$$dx^2 = 2xdx, \quad d\sin x = \cos x dx, \quad d\ln x = \frac{dx}{x}, \quad d\,\mathrm{arctg}\, x = \frac{1}{1+x^2}dx.$$

Покажем, что форма первого дифференциала остается неизменной (или является *инвариантной*) и в том случае, когда аргумент функции y сам является функцией, то есть для сложной функции $y = y(u(x))$.

Пусть функции $u = u(x)$, $y = y(u)$ дифференцируемы, тогда по определению (5.3.1) и формуле (5.4.1)

$$d\Big(y\big(u(x)\big)\Big) = \Big(y\big(u(x)\big)\Big)' dx = y'(u)u'(x)dx.$$

Кроме того, $du(x) = u'(x)dx \Rightarrow dy = y'(u)du$, что и требовалось доказать.

ПРИМЕРЫ.

$d\left(\sin^2 x\right) = 2\sin x\, d\sin x$, или $d\left(\sin^2 x\right) = 2\sin x\cos x\, dx = \sin 2x\, dx$;

$d\left(\ln\left(x^2+1\right)\right) = \dfrac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1}$, или $d\left(\ln\left(x^2+1\right)\right) = \dfrac{2x\, dx}{x^2+1}$.

С другой стороны, $3x^2e^{x^3}dx = e^{x^3}\left(x^3\right)' dx = e^{x^3}d\left(x^3\right) = de^{x^3}$;

$\sqrt{\ln x}\dfrac{dx}{x} = \sqrt{\ln x}\left(\ln x\right)' dx = \sqrt{\ln x}d\left(\ln x\right)$.

Доказанная инвариантность формы первого дифференциала позволяет считать, что $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то есть *производная равна отношению дифференциала функции к дифференциалу ее аргумента* независимо от того, является ли аргумент независимой переменной или функцией.

5.9. Дифференцирование функции, заданной параметрически

Рассмотрим функции $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in T$. Если функция $x = x(t)$ имеет на множестве T обратную $t = t(x)$, то $y = y(t(x)) = y(x)$. Тогда равенства $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in T$ определяют на множестве T *функцию* $y = y(x)$, *заданную параметрически*, где t – параметр (промежуточная переменная).

ПРИМЕР. Построить график функции $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$, $t \in R$.

Задавая промежуточной переменной t произвольные значения, найдем соответствующие значения переменных x и y:

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
x	0	$\approx 0{,}1$	$\approx 0{,}6$	$\approx 1{,}6$	π	$\approx 4{,}6$	$\approx 5{,}7$	$\approx 6{,}2$	2π
y	0	$\approx 0{,}3$	1	$\approx 1{,}7$	2	$\approx 1{,}7$	1	$\approx 0{,}3$	0

Отметим теперь точки $(x;y)$ в системе координат XOY и соединим их плавной линией:

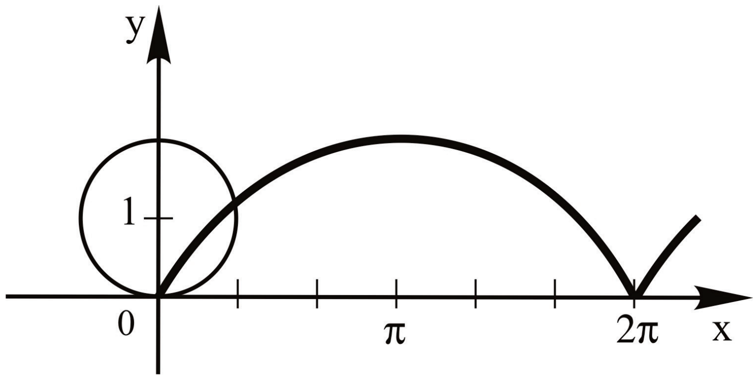

Рис. 18

Построенная кривая называется *циклоидой* (рис. 18) и является траекторией точки на окружности радиуса 1, которая катится без скольжения вдоль оси OX.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.9.1. Иногда, но не всегда, из параметрических уравнений кривой можно исключить параметр и найти непосредственную связь между x и y.

ПРИМЕРЫ. а) $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$ – параметрические уравнения окружности, так как очевидно, что $x^2 + y^2 = R^2$.

б) $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ – параметрические уравнения эллипса, так как $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

в) $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$ – параметрические уравнения параболы $y = x^2$.

Найдем производную функции, заданной параметрически:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)dt}{x'(t)dt}.$$

Отсюда

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{5.9.1}$$

Производная функции, заданной параметрически, – также функция, заданная параметрически: $\begin{cases} x = x(t) \\ y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} \end{cases}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.9.1. Производной n-го порядка функции $y = y(x)$ называется производная от ее производной порядка $(n-1)$. В частности, второй производной функции называется производная от ее первой производной.

Обозначают производные второго и n-го порядка так:

$$y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \left(y'(x)\right)' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right), \quad y^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n} = \left(y^{(n-1)}(x)\right)'.$$

Из определения второй производной и правила (5.9.1) дифференцирования параметрически заданной функции следует, что $y''(x) = \dfrac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}$.

Для вычисления третьей производной надо представить вторую производную в виде $\begin{cases} x = x(t) \\ y''_{xx} = \dfrac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t} \end{cases}$ и воспользоваться еще раз полученным правилом. Производные старших порядков вычисляются аналогично.

ПРИМЕР. Найти производные первого и второго порядков функции

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}, \quad t \in R.$$

По формуле (5.9.1) имеем: $y'_x = \dfrac{(1-\cos t)'}{(t-\sin t)'} = \dfrac{\sin t}{1-\cos t} \Rightarrow \begin{cases} x = t - \sin t \\ y'_x = \dfrac{\sin t}{1-\cos t} \end{cases}$ – параметрическая функция, задающая первую производную, поэтому

$$y''_{xx} = \frac{\cos t(1-\cos t) - \sin^2 t}{(1-\cos t)^2(1-\cos t)} = -\frac{1}{(1-\cos t)^2}.$$

5.10. Основные теоремы дифференциального исчисления

ТЕОРЕМА 5.10.1 (Ферма). Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке $x = x_0$ экстремум. Если в этой точке существует производная $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x = x_0$, например, – точка минимума. По определению точки минимума существует окрестность этой точки $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, в пределах которой $f(x) - f(x_0) \ge 0$, то есть $\Delta y \ge 0$, Δy – приращение функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$.

По определению $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Вычислим односторонние производные в точке $x=x_0$:

$f'(x_0-)=\lim\limits_{\Delta x\to 0-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\le 0$ по теореме о предельном переходе в неравенстве, так как $\Delta y\ge 0$, $\Delta x<0$;

$f'(x_0+)=\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\ge 0$, так как $\Delta y\ge 0$, $\Delta x>0$. Но по условию $f'(x_0)$ существует, поэтому левая производная равна правой, а это возможно лишь если $f'(x_0-)=f'(x_0+)=f'(x_0)=0$.

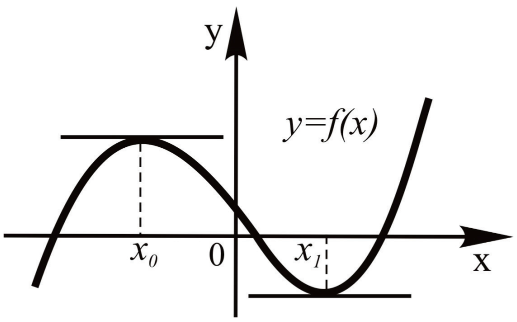

Рис. 19

Предположение о том, что $x=x_0$ – точка максимума, приводит к тому же.

Геометрический смысл теоремы: если график функции имеет в точке экстремума касательную, то она параллельна оси OX (рис. 19): x_0 – точка максимума, x_1 – точка минимума.

ТЕОРЕМА 5.10.2 (Ролля). Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна $\forall x\in[a,b]$, дифференцируема $\forall x\in(a,b)$ и $f(a)=f(b)$. Тогда существует точка $c\in(a,b)$ такая, что $f'(c)=0$.

Геометрический смысл теоремы: если $f(a)=f(b)$, то на графике дифференцируемой функции есть точки, в которых касательная параллельна оси OX (рис. 20).

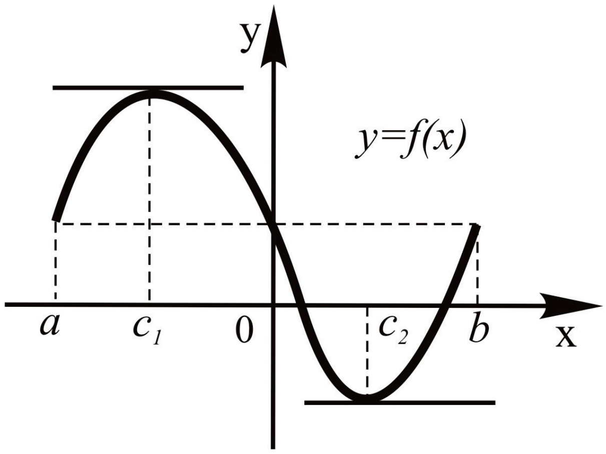

Рис. 20

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $y = f(x)$ непрерывна $\forall x \in [a;b]$, то по второй теореме Вейерштрасса (4.11.6) она достигает на $[a;b]$ своих наибольшего M и наименьшего m значений либо в точках экстремума, либо на концах отрезка.

1. Пусть $M = m$, тогда $f(x) = \text{const} \Rightarrow f'(x) = 0 \ \forall x \in (a;b)$.

2. Пусть $M > m$. Так как $f(a) = f(b)$, то либо наибольшее значение M, либо наименьшее m достигается в точке экстремума $x = c$, но по теореме Ферма $f'(c) = 0$. Что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 5.10.3 (Лагранжа). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна $\forall x \in [a;b]$ и дифференцируема $\forall x \in (a;b)$. Тогда существует точка $c \in (a;b)$ такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \tag{5.10.1}$$

Формула (5.10.1) называется *формулой Лагранжа* или формулой конечных приращений.

Геометрический смысл теоремы: пусть $A(a; f(a))$, $B(b; f(b))$ – точки на графике функции и AB – секущая (рис. 21). Ее угловой коэффициент равен $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$; $f'(c) = \operatorname{tg}\varphi$ – угловой коэффициент касательной.

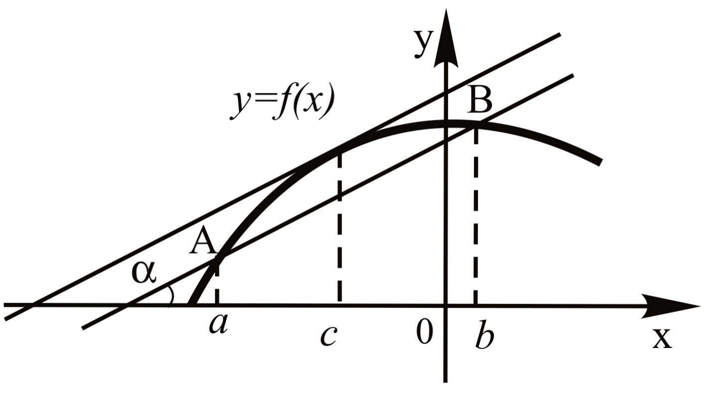

Рис. 21

Так как $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\varphi$, то секущая параллельна касательной. Таким образом, теорема утверждает, что существует касательная к графику функции на отрезке $[a;b]$, параллельная секущей, проходящей через точки A и B.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через точки $A(a;f(a))$ и $B(b;f(b))$ проведем секущую AB. Ее уравнение $\bar{y}=f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x)=f(x)-\bar{y}(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Заметим, что $|F(x)|$ – расстояние между соответствующими точками на графике и на секущей AB.

Построенная функция $F(x)$ непрерывна $\forall x\in[a;b]$ как разность непрерывных функций; дифференцируема $\forall x\in(a;b)$ как разность дифференцируемых функций и $F(a)=F(b)=0$.

Значит, $F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля, поэтому существует точка $c\in(a,b)$ такая, что $F'(c)=0$, но

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Rightarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 5.10.4 (Коши). Пусть функции $y=f(x)$, $y=g(x)$ непрерывны $\forall x\in[a;b]$, дифференцируемы $\forall x\in(a;b)$ и $g'(x)\neq 0$. Тогда существует точка $c\in(a;b)$ такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}. \qquad (5.10.2)$$

Без доказательства.

Формула (5.10.2) называется *формулой Коши*.

ТЕОРЕМА 5.10.5 (Лопиталя – Бернулли). Пусть функции $y=f(x)$, $y=g(x)$ непрерывны $\forall x\in(a;b]$, дифференцируемы $\forall x\in(a;b)$, $g'(x)\neq 0$ и $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$. Кроме того, существует конечный или бесконечный $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Тогда существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ и

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad (5.10.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как по условию $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, то доопределим $y = f(x)$, $y = g(x)$ в точке $x = a$, полагая $f(a) = g(a) = 0.$ Тогда функции $y = f(x)$, $y = g(x)$ станут непрерывными $\forall x \in [a;b]$.

Покажем, что $\forall x \in (a;b)$ $g(x) \neq 0.$ Предположим, что $g(x) = 0,$ тогда существует точка $c_1 \in (a;x)$ такая, что $g'(c_1) = 0$, так как функция $y = g(x)$ на $[a;x]$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Но по условию $g'(x) \neq 0$ – противоречие. Поэтому $g(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$.

Функции $y = f(x)$, $y = g(x)$ удовлетворяют условиям теоремы Коши на любом отрезке $[a;x]$, который содержится в $[a;b]$. Напишем формулу Коши (5.10.2) для $[a;x]$:

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad c \in (a;x).$$

Отсюда имеем: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \lim\limits_{c\to a} \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$, так как если $x \to a$, то $c \to a$.

Переобозначая переменную в последнем пределе, получим требуемое:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказанное соотношение (5.10.3) называется *правилом Лопиталя*.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.10.1. Правило Лопиталя остается справедливым и в том случае, когда $x \to b$ и $x \to \infty$. Оно позволяет раскрывать неопределенность не только вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, но и вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.10.2. Если после применения правила Лопиталя неопределенность не раскрылась, то его следует применить еще раз.

ПРИМЕР. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{\ln(x-1)}{\operatorname{ctg} \pi x}$.

$$\lim_{x\to 1+} \frac{\ln(x-1)}{\operatorname{ctg} \pi x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 1+} \frac{-\sin^2 \pi x}{(x-1)\pi} = \left(\frac{0}{0}\right) = -\frac{1}{\pi} \lim_{x\to 1+} \frac{2\pi \sin \pi x \cos \pi x}{1} = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.10.3. Правило Лопиталя – универсальный способ раскрытия неопределенностей, но существуют пределы, найти которые гораздо проще, применив один из изученных ранее частных приемов.

ПРИМЕР. Найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$ и так далее.

Но, очевидно, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=1$, так как степень числителя равна степени знаменателя, и предел равен отношению коэффициентов при старших степенях x (см. правило (4.2.2)).

5.11. Исследование поведения функции

ТЕОРЕМА 5.11.1 (признак монотонности дифференцируемой функции). Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема $\forall x\in(a;b)$. Если $f'(x)\geq 0\ \forall x(a;b)$, то $f(x)$ не убывает, если же $f'(x)\leq 0\ \forall x(a;b)$, то $f(x)$ не возрастает на $(a;b)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_1,x_2\in(a;b)$ – произвольные точки, тогда $y=f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа на отрезке $[x_1;x_2]$ (непрерывность следует из дифференцируемости). Напишем формулу Лагранжа (5.10.1) на этом отрезке:

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1),\quad \text{где } c\in(x_1;\,x_2).$$

Если $x_2>x_1$ и $f'(x)\geq 0$, $\forall x\in(a;\,b)$, то $f'(c)\geq 0\Rightarrow f(x_2)-f(x_1)\geq 0\Rightarrow$ $\Rightarrow f(x_2)\geq f(x_1)$, что означает, что $y=f(x)$ не убывает на $(a;b)$. Аналогично показывается, что если $f'(x)\leq 0$, то $y=f(x)$ не возрастает.

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.11.1. Из доказательства теоремы следует, что если $f'(x)>0$, то $y=f(x)$ возрастает, а при $f'(x)<0$ функция $y=f(x)$ убывает.

Интервалы, на которых функция либо убывает, либо возрастает, называются *интервалами монотонности.*

ПРИМЕР. Найти интервалы монотонности функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$.

Найдем точки, в которых производная данной функции равна нулю: $y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 3,\ x_2 = -1$

Исследуем знак производной (рис. 22).

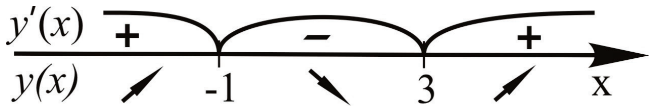

Рис. 22

По теореме 5.11.1 функция убывает на $(-1;3)$ и возрастает на $(-\infty;-1) \cup (3;+\infty)$.

ТЕОРЕМА 5.11.2 (необходимое условие экстремума дифференцируемой функции). Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке $x = x_0$ экстремум. Если в этой точке существует производная, то $f'(x_0) = 0$.

Эта теорема является теоремой Ферма и была доказана ранее.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.11.2. Необходимое условие экстремума достаточным не является.

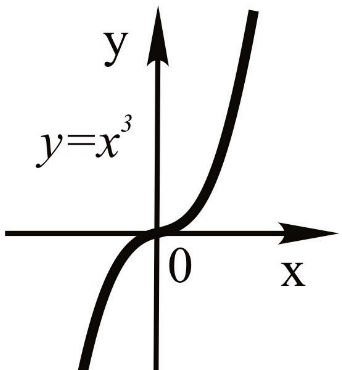

Рис. 23

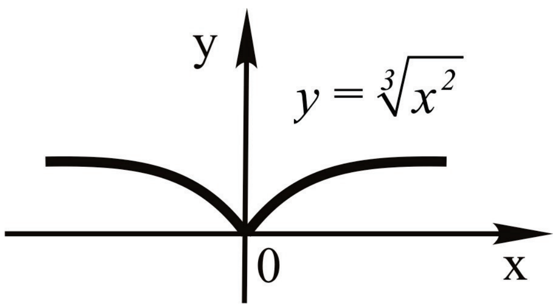

Рис. 24

ПРИМЕР. Рассмотрим функцию $y = x^3$. Найдем точки, в которых ее производная равна нулю: $y' = 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$. Однако в этой точке, как видно из рис. 23, экстремума нет.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.11.3. Рассмотрим функцию $y=\sqrt[3]{x^2}$ (рис. 24). Так как $x^2 \geq 0$, то $y=\sqrt[3]{x^2} \geq 0$ и $y(0)=0$, поэтому $x_0=0$ – точка минимума. Функция непрерывна $\forall x \in R$, ее производная $y' = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} \Rightarrow y'(0)$ не существует.

Таким образом, непрерывная функция может иметь экстремум не только в тех точках, где $f'(x)=0$, но и в тех, где $f'(x)$ не существует.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.11.1. *Критическими* точками функции $y=f(x)$ называются точки, в которых $f'(x)=0$ или $f'(x)$ не существует; при этом точки, в которых $f'(x)=0$, называются *стационарными* точками.

Из теоремы 5.11.2 следует, что *если функция не имеет критических точек, то у нее нет экстремумов, то есть она является монотонной.* Однако *не всякая критическая точка является точкой экстремума.*

ТЕОРЕМА 5.11.3 (первое достаточное условие экстремума непрерывной функции). Пусть непрерывная функция $y=f(x)$ дифференцируема всюду на $(a;b)$, за исключением, быть может, критической точки $x=x_0$. Если $f'(x)<0$ при $x<x_0$ и $f'(x)>0$ при $x>x_0$, то $x=x_0$ – точка минимума; если же $f'(x)>0$ при $x<x_0$ и $f'(x)<0$ при $x>x_0$, то $x=x_0$ – точка максимума.

То есть *если при переходе через критическую точку производная меняет знак с «–» на «+», то в критической точке функция имеет минимум; если с «+» на «–» – то максимум; если же при переходе через критическую точку производная не меняет знак, то экстремума в точке $x=x_0$ нет.*

Доказать самостоятельно, используя теорему 5.11.1 и определение (4.11.4) точки экстремума.

ПРИМЕР. Найти экстремумы функции $y=3x^4-4x^3+1$.

Найдем критические точки данной функции $y'=12x^3-12x^2=$ $=12x^2(x-1)=0 \Rightarrow x_{1,2}=0, x_3=1$. Исследуем знак производной (рис. 25).

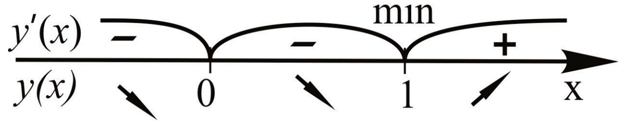

Рис. 25

В критической точке $x=0$ экстремума нет, в критической точке $x=1$ – минимум и $y_{\min}=y(1)=0$.

Пусть график функции $y = f(x)$ имеет касательные во всех точках интервала $(a;b)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.11.2. График функции $y = f(x)$ называется *выпуклым вверх (вниз)* на интервале $(a;b)$, если во всех точках этого интервала он лежит не выше (не ниже) любой своей касательной.

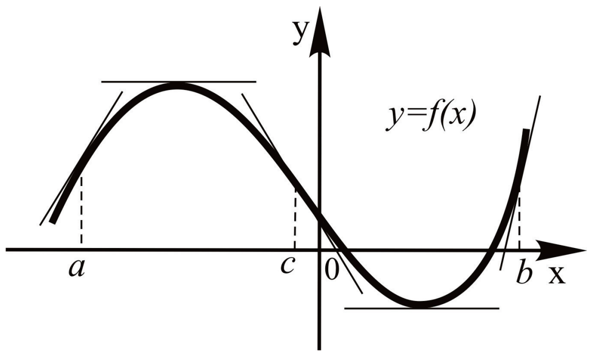

Рис. 26

На (a,c) график функции $y = f(x)$ является выпуклым вверх, на (c,b) – выпуклым вниз (рис. 26).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.11.3. *Точкой перегиба* графика функции $y = f(x)$ называется точка M, отделяющая участок графика, выпуклый вверх, от участка, выпуклого вниз.

В этой точке график, можно сказать, «перегибается» через касательную (рис. 26).

ТЕОРЕМА 5.11.4 (достаточное условие выпуклости вверх (вниз) графика функции). Пусть функция $y = f(x)$ имеет непрерывную вторую производную $\forall x \in (a;b)$. Тогда, если $f''(x) < 0$, то ее график имеет выпуклость, направленную вверх, если $f''(x) > 0$, то график функции имеет на $(a;b)$ выпуклость, направленную вниз.

Без доказательства.

ТЕОРЕМА 5.11.5 (необходимое условие точки перегиба). Пусть функция $y = f(x)$ имеет непрерывную вторую производную в некоторой окрестности точки перегиба $x = x_0$. Тогда $f''(x_0) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f''(x_0) \neq 0$. Допустим, $f''(x_0) > 0$. Так как $f''(x)$ по условию непрерывна, то по теореме 4.11.4 об устойчивости знака непрерывной в точке функции существует окрестность точки $x = x_0$, в пределах которой $f''(x) > 0$, то есть $f''(x) > 0$ и справа, и слева от точки $x = x_0$. Таким образом, по теореме 5.11.4 $y = f(x)$ имеет выпуклость, направленную вниз, и справа, и слева от этой точки. Тогда $x = x_0$ по определению точкой перегиба не является.

Так же приводится к противоречию предположение о том, что $f''(x_0) < 0$.

Так как по условию $f''(x_0)$ существует, то, следовательно, $f''(x_0) = 0$, что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 5.11.6 (первое достаточное условие перегиба). Пусть функция $y = f(x)$ имеет непрерывную вторую производную в некоторой окрестности точки $x = x_0$ и $f''(x_0) = 0$. Тогда, если $f''(x)$ при переходе через $x = x_0$ меняет знак, то $x = x_0$ – точка перегиба; если $f''(x)$ не меняет знак, то $x = x_0$ точкой перегиба не является.

Доказать самостоятельно, использую теорему 5.11.4.

ПРИМЕР. Построить график функции $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$.

Ранее были найдены интервалы монотонности этой функции (рис. 25) и экстремум $y_{\min} = y(1) = 0$. Определим точки перегиба и направление выпуклости графика, для чего найдем вторую производную и точки, в которых она равна нулю.

$$y''(x) = \left(12x^3 - 12x^2\right)' = 36x^2 - 24x = 12x(3x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \frac{2}{3}.$$

После исследования знака $y''(x)$ (рис. 27) заключаем, что обе найденные точки являются точками перегиба и $y(0) = 1$, $y\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{11}{27} \approx 0{,}4$.

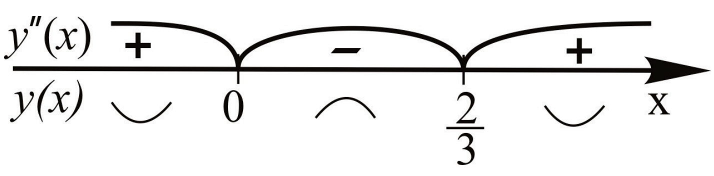

Рис. 27

Построим график с учетом информации о знаках $y'(x)$ и $y''(x)$ (рис. 28):

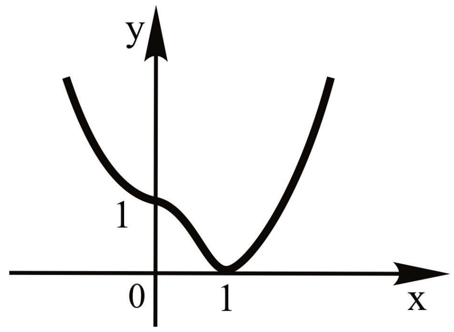

Рис. 28

5.12. Асимптоты графика функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.12.1. Прямая линия называется *асимптотой* кривой, если расстояние от точки M, лежащей на этой кривой, до прямой стремится к нулю при удалении точки M вдоль одной из ветвей кривой в бесконечность.

Асимптоты бывают трех видов (рис. 29):

$l_г$ – горизонтальная асимптота,

$l_в$ – вертикальная асимптота,

$l_н$ – наклонная асимптота.

Асимптоты характеризуют поведение функции на бесконечности или в окрестности точек бесконечного разрыва (второго рода).

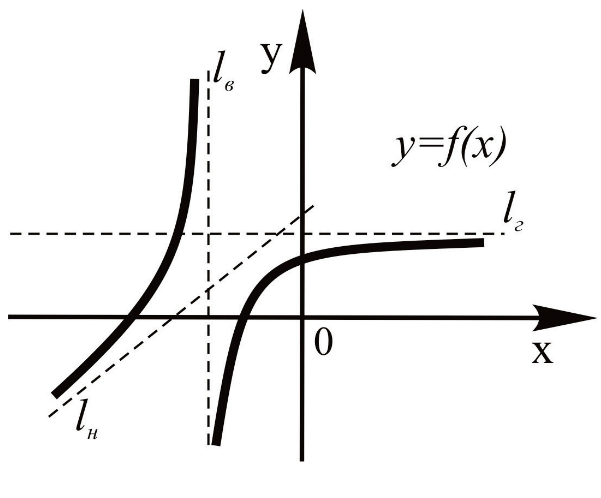

Рис. 29

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.12.2. Прямая $x = a$ является *вертикальной асимптотой* кривой $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов в точке $x = a$ бесконечен.

В соответствии с определением 4.10.2 в точке $x = a$ функция имеет разрыв второго рода.

ПРИМЕРЫ. а) Функция $y = \operatorname{tg} x$ определена при всех $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, причем $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} + \pi n} \operatorname{tg} x = \infty$, поэтому график этой функции имеет бесконечное множество вертикальных асимптот.

б) График функции $y = \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ имеет, очевидно, три вертикальные асимптоты: $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$.

в) Функция $y = 2^{\frac{1}{x+1}}$ определена при всех $x \neq -1$, причем $\lim\limits_{x \to -1+} 2^{\frac{1}{x+1}} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -1-} 2^{\frac{1}{x+1}} = 0$. По определению (5.12.2) прямая $x = -1$ – вертикальная асимптота графика (справа).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.12.3. Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, если $f(x)$ представима в виде: $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0$ $\left(\lim\limits_{x \to -\infty} \alpha(x) = 0 \right)$.

ТЕОРЕМА 5.12.1. Для того чтобы прямая $y = kx + b$ была наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы существовали *два конечных предела*:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \ \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - kx \right) = b \quad \left(\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \ \lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - kx \right) = b \right).$$

Без доказательства.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.12. Если при отыскании наклонной асимптоты графика окажется, что $k = 0$, то график имеет горизонтальную асимптоту $y = b$ (если b существует). *Если хотя бы один из пределов бесконечен или не существует, то график не имеет ни наклонной, ни горизонтальной асимптот.*

ПРИМЕР. Найти асимптоты графика функции $y = x - 2\operatorname{arctg} x$.

Функция определена $\forall x \in R$, значит она не имеет точек разрыва, а потому и вертикальных асимптот.

Найдем наклонные асимптоты. Обозначим k_+, b_+ коэффициенты в уравнении наклонной асимптоты графика на $+\infty$, если такая асимптота имеется. Тогда $k_+ = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2\operatorname{arctg}x}{x}\right)=1,$

$b_+ = \lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-kx\big) = \lim\limits_{x\to+\infty}\big(x-2\operatorname{arctg}x - x\big) = -\pi$.

Следовательно, $y = x-\pi$ – наклонная асимптота при $x\to+\infty$.

Таким же образом будем искать наклонную асимптоту на $-\infty$:

$k_- = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{2\operatorname{arctg}x}{x}\right)=1,$

$b_- = \lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x)-kx\big) = \lim\limits_{x\to-\infty}\big(x-2\operatorname{arctg}x - x\big) = \pi$, откуда $y = x+\pi$ – асимптота графика при $x\to-\infty$.

Исследуем первую производную этой функции и построим эскиз графика (рис. 30).

$y' = 1-\dfrac{2}{1+x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2+1} = 0 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \pm1$ – стационарные точки.

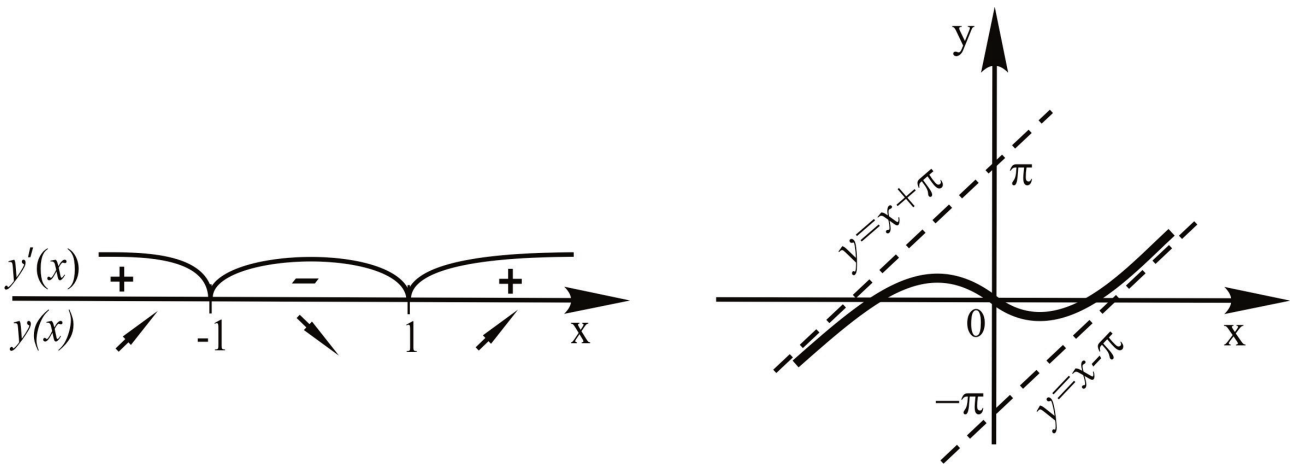

Рис. 30

ПРИМЕР. Найти асимптоты графика функции $y=\sqrt{4x^2-x}$.

Эта функция определена не на всей числовой прямой, а при условии, что $4x^2-x\ge 0 \Rightarrow x(4x-1)\ge 0 \Rightarrow x\le 0,\;\; x\ge\dfrac{1}{4}.$

Функция непрерывна во всех точках $x\in(-\infty;0]\cup\left[\dfrac{1}{4};+\infty\right)$,

$x(0) = x\left(\dfrac{1}{4}\right)=0$, поэтому вертикальных асимптот у ее графика нет.

Найдем наклонные асимптоты, если они есть. С помощью правила 4.2.2 получим: $k_+ = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2-x}}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = 2$, $b_+ = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-x}-2x\right) = (\infty-\infty) =$ $= \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-x}{\sqrt{4x^2-x}+2x}\right) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = -\frac{1}{4}$, то есть $y = 2x - \frac{1}{4}$ – асимптота графика при $x \to +\infty$.

Аналогично $k_- = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2-x}}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = -2$, $b_- = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-x}+2x\right) =$ $= (\infty-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-x}{\sqrt{4x^2-x}-2x}\right) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{1}{4}$, поэтому при $x \to -\infty$ график имеет другую асимптоту $y = -2x + \frac{1}{4}$.

Эскиз графика этой функции имеет вид (рис. 31):

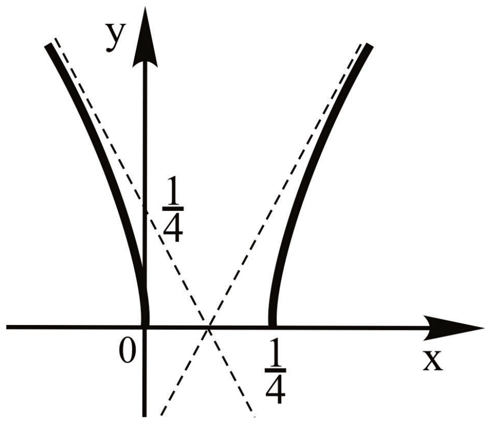

Рис. 31

ПРИМЕР. Найти асимптоты графика функции $y = \sqrt[3]{4x^2-x}$.

Функция определена $\forall x \in R$, поэтому вертикальных асимптот ее график не имеет.

По правилу 4.2.2 $k_\pm = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{4x^2-x}}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = 0$, тогда $b_\pm = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{4x^2-x} = +\infty$. Это означает, что график данной функции не имеет никаких асимптот.

5.13. Общая схема исследования функции и построение ее графика

Прежде чем построить график функции $y = f(x)$, необходимо провести ее исследование, например, по такой схеме:

1. Найти ОДЗ.
2. Определить свойства четности, нечетности, периодичности.
3. Найти точки разрыва и определить их характер.
4. Найти асимптоты графика.
5. Найти интервалы монотонности и экстремумы.
6. Определить направление выпуклости графика и точки перегиба.
7. Найти точки пересечения графика с осями координат.

После проведенного исследования построение графика следует выполнять в таком порядке:

а) построить асимптоты;

б) отметить контрольные точки из пп. 5, 6, 7;

в) построить график слева направо, используя информацию из пп. 5, 6.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.13.1. Если функция $y = f(x)$ – четная, то ее график симметричен относительно оси OY; если нечетная, – симметричен относительно начала координат. График периодической функции достаточно построить на отрезке длиной в период, а потом периодически продолжить.

ПРИМЕР. Исследовать функцию $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$, построить ее график и эскизы первой и второй производных.

1. ОДЗ: $x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2$.

2. Функция нечетная, так как $y(-x) = \frac{-x^3}{x^2 - 4} = -y(x)$. Следовательно, график симметричен относительно начала координат.

3. Исследуем поведение функции вблизи точек разрыва $x = \pm 2$: $\lim\limits_{x \to -2-} \frac{x^3}{x^2 - 4} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -2+} \frac{x^3}{x^2 - 4} = +\infty$. Таким образом, $x = -2$ по определению является точкой разрыва второго рода. Точку $x = 2$ можно не исследовать вследствие нечетности функции и симметрии графика.

4. Так как $x = \pm 2$ – точки бесконечного разрыва второго рода, то прямые $x = \pm 2$ – вертикальные асимптоты графика.

Найдем наклонные асимптоты:

$$k_{\pm} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x\left(x^2 - 4\right)} = 1, \quad b_{\pm} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 4} - x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4x}{x^2 - 4} = 0.$$

Значит, прямая $y = x$ – наклонная асимптота графика при $x \to \pm\infty$.

5. Найдем первую производную и стационарные точки функции:

$$y' = \frac{x^4 - 12x^2}{\left(x^2 - 4\right)^2} = \frac{x^2(x^2 - 12)}{\left(x^2 - 4\right)^2} = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 0,\ x_{3,4} = \pm 2\sqrt{3}.$$

Исследуем функцию на монотонность и экстремумы (рис. 32).

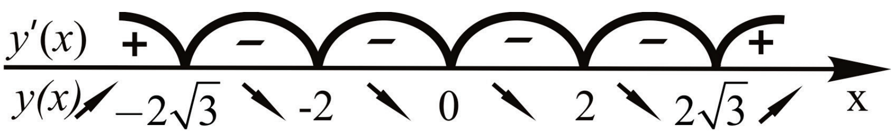

Рис. 32

$$y_{\max} = y\left(-2\sqrt{3}\right) = -3\sqrt{3} \approx -5{,}1, \quad y_{\min} = y\left(2\sqrt{3}\right) \approx 5{,}1.$$

6. Найдем вторую производную и точки, в которых она равна нулю:

$$y'' = \frac{8x\left(x^2 + 12\right)}{\left(x^2 - 4\right)^3} = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Определим направление выпуклости графика и точки перегиба (рис. 33).

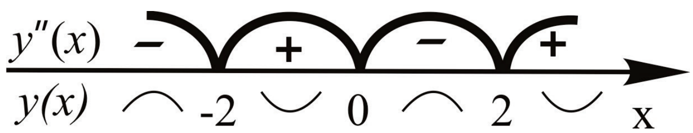

Рис. 33

В точке перегиба $x = 0$ значение $y(0) = 0$.

7. График имеет только одну точку пересечения с осями координат, так как $y(0) = 0$.

8. Построим график, а по нему – эскизы $y'(x)$ и $y''(x)$ (рис. 34):

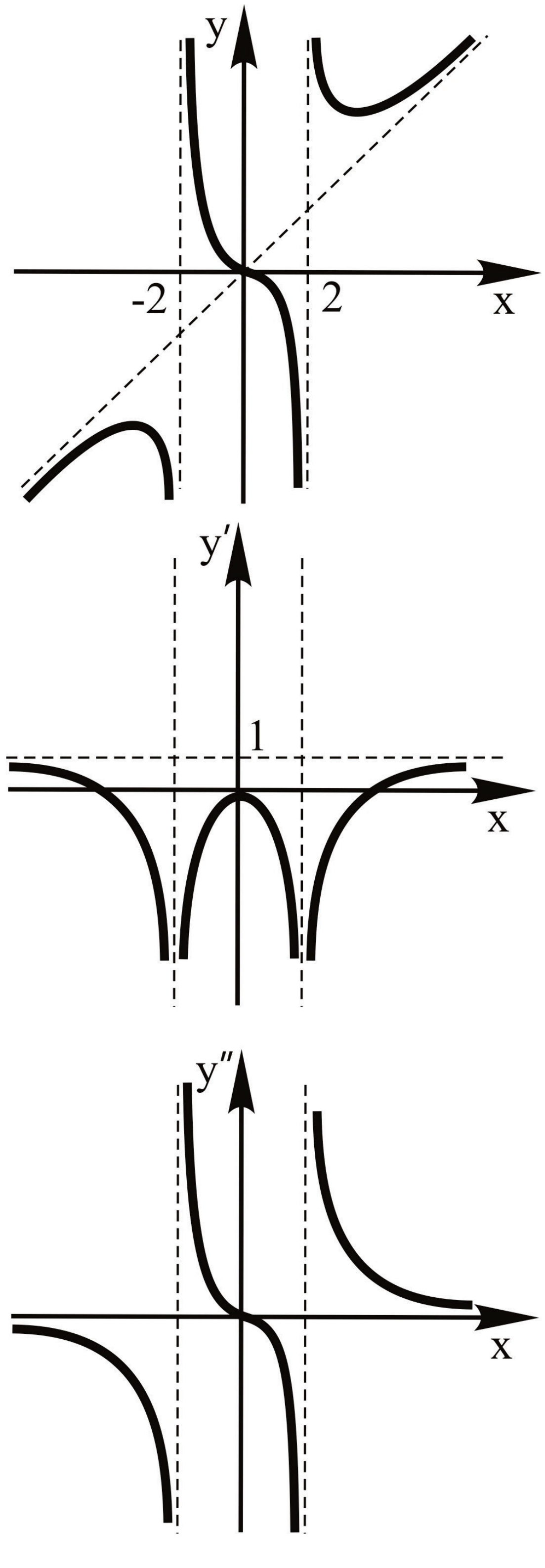

Рис. 34

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Демидович, Б. П. Краткий курс высшей математики / Б. П. Демидович, В. А. Кудрявцев. – М. : Изд-во Астрель, 2001. – 656 с.

2. Николаева, Н. И. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной / Н. И. Николаева. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2008. – 66 с.

3. Пантаев, М. Ю. Матанализ с человеческим лицом, или Как выжить после предельного перехода: Полный курс математического анализа / М. Ю. Пантаев. – М. : ЛИБРОКОМ, 2012. – Т. 1. – 363 с.

4. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления / Н. С. Пискунов. – М. : Физматлит, 1996. – Т. 1. – 416 с.

5. Шипачев, В. С. Высшая математика / В. С. Шипачев. – М. : Высш. шк., 1998. – 479 с.

6. Шнейдер, В. Е. Краткий курс высшей математики / В. Е. Шнейдер, А. И. Слуцкий, А. С. Шумов. – М. : Высш. шк., 1972. – 640 с.

Учебное издание

Николаева Наталья Ивановна

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.

Предел. Производная

Конспект лекций

Редактор *М. А. Болдырева*

Компьютерная верстка *О. Г. Белименко*

Сводный темплан 2015 г.
Подписано в печать 23.04.15. Формат $60 \times 84^{1}/_{16}$. Отпечатано на дупликаторе.
Бумага офсетная. Усл. печ. л. 4,75. Уч.-изд. л. 4,75.
Тираж 100 экз. Заказ 236.

Издательство ОмГТУ. 644050, г. Омск, пр. Мира, 11; т. 23-02-12.
Типография ОмГТУ.