Министерство образования Российской Федерации
Омский государственный технический университет

ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

Методические указания
для практических занятий со студентами
дневной и заочной форм обучения

Омск – 2004

Составители: Николаева Наталья Ивановна, канд. физ. - мат. наук, доцент;
Бельгарт Любовь Васильевна, старший преподаватель.

Занятие 1
ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

Определение 1. Пусть даны две переменные с областями изменения **X** и **Y**. Переменная ***y*** называется функцией переменной ***x***, если по некоторому правилу или закону каждому значению ***x*** из множества **X** ставится в соответствие единственное значение $y \in Y$.

Множество **X** называется областью определения функции. Переменная **x** называется независимой переменной или аргументом.

В зависимости от природы множеств **X** и **Y** получаются различные типы функций.

Если **X** и **Y** – некоторые множества действительных чисел, то имеем функцию действительного переменного. Например, $y(x) = x^3 + 2x + 3$ (**X** и **Y** совпадают с множеством **R** действительных чисел).

$$y(x) = 2\sin x \qquad (x \in R,\ y \in [-2;2])$$

$$y(x) = \log(x-1) \qquad (x \in (1;+\infty), y \in R)$$

$$y(x) = \begin{cases} 1, & x \ge 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \qquad (x \in R,\ y \in \{-1;1\})$$

Все приведенные примеры – функции непрерывно изменяющегося аргумента, значения которого заполняют сплошной числовой промежуток.

Если **X** совпадает с множеством натуральных чисел, то аргумент функции обозначают буквой **n**, а саму функцию называют последовательностью.

Определение 2. Последовательность – это функция, заданная на множестве **N** натуральных чисел.

Такую функцию принято обозначать какой-либо буквой с индексом **n** внизу: y_n, x_n, f_n (а не $y(n), x(n), f(n)$) и т. д.

Например, $x_n = \frac{1}{n},\ y_n = \sin\frac{\pi n}{2},\ f_n = n^3 + 2n + 3,\ a_n = \frac{(-1)^n n}{n^2+1},\ n \in N$. Кратко последовательность обозначают символом $\{x_n\}, \{y_n\}, \{f_n\}$ и т. д.

Если задана функция x_n, то ее аргумент можно рассматривать как номер соответствующего значения переменной. При этом число x_n называется n-м, или общим членом последовательности. Зная общий член последовательности, можно вычислить любое значение функции x_n, лишь только указано значение **n**. В вышеприведенных примерах $x_1 = 1,\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = \frac{1}{3},\ \dots,\ x_{10} = \frac{1}{10},\ \dots,\ x_{1000} = \frac{1}{1000},\ \dots$.

$$y_1 = 1,\ y_2 = 0,\ y_3 = -1,\ y_4 = 0,\ \dots,\ y_{2k} = 0,\ y_{2k+1} = (-1)^k,\ \dots\ (k \in N)\ .$$

$$f_1 = 6, \quad f_2 = 15, \quad \dots, \quad f_{10} = 1023, \quad \dots\ .$$

$$a_1 = -\frac{1}{2};\ a_2 = \frac{2}{5};\ a_3 = -\frac{3}{10};\ a_4 = \frac{4}{17},\ \dots\ .$$

Определение 3. Число $\mathbf{x}$ называется <u>пределом последовательности</u> $\{x_n\}$, если x_n отличается от $\mathbf{x}$ сколь угодно мало, начиная с некоторого места, т. е. для всех достаточно больших номеров $\mathbf{n}$.

Этим суть дела выражена ярко, но, что значит “сколь угодно мало” и “достаточно большие”, – еще подлежит уточнению. Рассмотрим последовательность $x_n = 1/n$. Если изобразить ее члены как точки на числовой прямой (рис. 1), то станет очевидным, что они сгущаются, или стремятся к нулю.

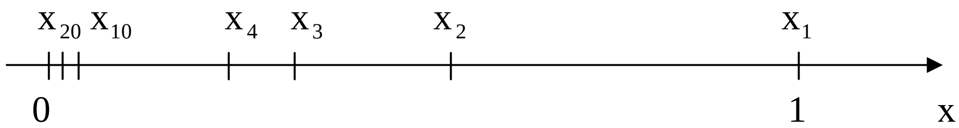

Рис. 1

Таким образом, расстояние между x_n и нулем будет сколь угодно малым для всех достаточно больших $\mathbf{n}$. В частности, это расстояние будет меньше 0,01, если $n > 100$, и меньше 0,0001 при всех $n > 10\,000$. Поэтому можно утверждать, что число $x = 0$ является пределом последовательности $x_n = 1/n$. Однако, если предположить, к примеру, что $x = 0{,}1$ и потребовать, чтобы расстояние между x_n и x было меньше 0,001, начиная с некоторого места, то обнаружим (рис. 1), что члены $\{x_n\}$ сначала приближаются к точке $x = 0{,}1$, а потом от нее удаляются. А поэтому невозможно найти номер, начиная с которого все x_n будут отличаться от $x = 0{,}1$ меньше, чем на 0,001. Это значит, что число $x = 0{,}1$ нельзя считать пределом последовательности $x_n = 1/n$.

Приведем теперь исчерпывающе строгое определение предела.

Определение 4. Число $\mathbf{x}$ называется <u>пределом последовательности</u> $\{x_n\}$, если для любого положительного $\boldsymbol{\varepsilon}$, сколь бы мало оно ни было, найдется такой номер n_0, что все значения x_n, у которых номер $n > n_0$, удовлетворяют неравенству

$$|x_n - x| < \varepsilon. \tag{1}$$

Этот факт записывается следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad \text{или} \qquad x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x.$$

Неравенство (1), где **ε** произвольно, и есть точная запись утверждения, что x_n отличается от **x** “сколь угодно мало”, а номер n_0 указывает на то “место”, начиная с которого это обстоятельство осуществляется, так что “достаточно большими” будут все номера $n > n_0$.

Важно понимать, что номер n_0, вообще говоря, не может быть указан раз и навсегда: он зависит от выбора числа **ε**.

Используя логические символы, определение предела можно переписать:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \left[\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon)\in N\ \left(n > n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon\right)\right].$$

Здесь $\Leftrightarrow$ – символ эквивалентности, $\Rightarrow$ – импликация (следует), $\forall$ – квантор всеобщности (для любого), $\exists$ – квантор существования (существует).

Докажем теперь строго, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем номер n_0, начиная с которого будет выполняться неравенство $|x_n - x| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$. Так как $n > 0$, то из неравенства $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$ следует, что $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Выбирая $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, получим, что для всех $n > n_0$ $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$. Здесь $[x]$ – целая часть числа **x,** т. е. наибольшее целое число, не превосходящее **x**. Например, $[2{,}5] = 2$; $\left[\frac{1}{10}\right] = 0$, $\left[\sqrt{2}\right] = 1$. Очевидно, что для любого $p > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x^p} = 0$.

Из определения предела следует, что числовая последовательность не может иметь более одного предела.

Последовательность, имеющая конечный предел, называется <u>сходящейся</u>.

Если отметить члены последовательности $y_n = \sin\frac{\pi n}{2}$ точками на числовой прямой, то станет очевидно, что эти точки ни к чему не стремятся, а потому последовательность $y_n = \sin\frac{\pi n}{2}$ предела не имеет и является расходящейся.

Члены последовательности $f_n = n^3 + 2n + 3$ неограниченно увеличиваются с ростом **n** или стремятся к бесконечности:

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \infty.$$

Последовательности $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ называются соответственно суммой, разностью, произведением и частным двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ (для частного $y_n \neq 0$).

Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. Сумма сходящихся последовательностей сходится и

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y.$$

Теорема 2. Разность сходящихся последовательностей сходится и

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = x - y.$$

Теорема 3. Произведение сходящихся последовательностей сходится и

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = xy.$$

Теорема 4. Частное сходящихся последовательностей сходится и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}, \text{ если } y \neq 0.$$

Очевидно, предел постоянной равен ей самой, т. е. если $x_n = c$, то

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} c = c.$$

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+5}{n}$.

Преобразуем общий член $x_n = \dfrac{3n+5}{n} = 3 + \dfrac{5}{n}$. Тогда по теореме 1 получим

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(3 + \dfrac{5}{n}\right) = 3$. Заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty}(3n+5) = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$, т. е. и числитель, и знаменатель рассматриваемой дроби стремятся к бесконечности, а потому теорема 4 для вычисления этого предела неприменима.

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n+2}{n+1}$.

В этом случае нельзя воспользоваться теоремой 4, так как

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^2+2n+2\right) = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty.$$

Однако $\dfrac{n^2+2n+2}{n+1} = \dfrac{(n+1)^2+1}{n+1} = n + 1 + \dfrac{1}{n+1}$.

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n+2}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(n+1+\dfrac{1}{n+1}\right)$.

Очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$, и сумма $\left(n+1+\dfrac{1}{n+1}\right)$ неограниченно растет с ростом **n**, а это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n+2}{n+1}=\infty$.

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n^2}$.

И в этом случае $\lim\limits_{n\to\infty}(n-1)=\lim\limits_{n\to\infty}n^2=\infty$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)=0$ (по теореме 2).

В примерах 1-3 вычислялись пределы вида $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}$, где $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\infty$.

В таких случаях говорят, что выражение $\dfrac{x_n}{y_n}$ при $n\to\infty$ представляет собой неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, т.к. знание пределов $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ не позволяет судить о поведении их отношения при $n\to\infty$ и приходится, учитывая закон изменения x_n и y_n, непосредственно исследовать интересующее нас выражение. Подобное исследование называется раскрытием неопределенности.

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-2n-1}{2n^2+2n+3}$.

Заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-2n-1}{2n^2+2n+3}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Чтобы вычислить данный предел (или, говорят, раскрыть неопределенность), разделим числитель и знаменатель на n^2 – старшую степень аргумента:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n-1}{2n^2+2n+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}=\frac{3}{2}.$$

Полученный результат является следствием теорем 1, 2, 4 и того факта, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$.

Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^5+3n^4-5n^2+7}{45n^4+90n^2+100}$.

n^5 – старшая степень аргумента в данном выражении. Разделим числитель и знаменатель дроби на n^5:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^5+3n^4-5n^2+7}{45n^4+90n^2+100}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^3}+\frac{7}{n^5}}{\frac{45}{n}+\frac{90}{n^3}+\frac{100}{n^5}}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^3}+\frac{7}{n^5}\right)=2 \text{ – по теоремам 1, 2.}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{45}{n}+\frac{90}{n^3}+\frac{100}{n^5}\right)=0 \text{ – по теореме 1.}$$

Это означает, что теорему 4 применить нельзя. Однако очевидно, что знаменатель $\dfrac{45}{n}+\dfrac{90}{n^3}+\dfrac{100}{n^5}$ не равен нулю, несмотря на то, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{45}{n}+\dfrac{90}{n^3}+\dfrac{100}{n^5}\right)=0$, а лишь стремится к нему, т. е. неограниченно уменьшается, оставаясь положительным. При этом числитель с ростом ***n*** принимает значения, все более близкие к двум. Таким образом, чем больше ***n***, тем большей становится дробь $\dfrac{2+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^3}+\frac{7}{n^5}}{\frac{45}{n}+\frac{90}{n^3}+\frac{100}{n^5}}$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^5+3n^4-5n^2+7}{45n^4+90n^2+100}=\infty$.

Обобщая результаты, полученные в примерах 1-5, можно сформулировать общее правило вычисления пределов вида $\lim\limits_{n\to\infty}R(n)$,

где $R(n)=\dfrac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+a_2n^{k-2}+\ldots+a_k}{b_0n^m+b_1n^{m-1}+b_2n^{m-2}+\ldots+b_m}$, $\quad a_0\neq 0,\ b_0\neq 0,\ k>0,\ m>0$.

$$\lim_{n\to\infty}R(n)=\begin{cases}\infty & \text{при } k>m,\\ \dfrac{a_0}{b_0} & \text{при } k=m,\\ 0 & \text{при } k<m.\end{cases} \qquad (2)$$

Это правило верно не только для рационального выражения R(n), но и для отношения иррациональных функций.

Пример 6. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+8n\sqrt{n}-5}{\sqrt[3]{3n^4}+\sqrt{9n^3+1}+9n}$.

Этот предел является неопределенностью вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Старшая степень аргумента в данном выражении – $n^{3/2}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+8n\sqrt{n}-5}{\sqrt[3]{3n^4}+\sqrt{9n^3+1}+9n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2n}{n^{3/2}}+8-\dfrac{5}{n^{3/2}}}{\dfrac{\left(3n^4\right)^{1/3}}{n^{3/2}}+\dfrac{\left(9n^3+1\right)^{1/2}}{n^{3/2}}+\dfrac{9n}{n^{3/2}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2}{n^{1/2}}+8-\dfrac{5}{n^{3/2}}}{\dfrac{3^{1/3}}{n^{1/6}}+\left(9+\dfrac{1}{n^3}\right)^{1/2}+\dfrac{9}{n^{1/2}}}=\frac{8}{\sqrt{9}}=\frac{8}{3}.$$

Пример 7. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+10}-\sqrt{n+5}\right)$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+10}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+5}=\infty$, но утверждать исходя из этого, что данный предел равен нулю, нельзя.

Например, $\lim\limits_{n\to\infty}\left((n+2)-(n+1)\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{n\to\infty}1=1$;

$\lim\limits_{n\to\infty}(2n-n)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{n\to\infty}n=\infty$; $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2-n^2\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{n\to\infty}0=0$.

Таким образом, когда $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\infty$, выражение $\left(x_n-y_n\right)$ представляет неопределенность вида $(\infty-\infty)$. Чтобы раскрыть такую неопределенность, умножим и разделим выражение на сопряженное:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+10}-\sqrt{n+5}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+10)-(n+5)}{\sqrt{n+10}+\sqrt{n+5}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{\sqrt{n+10}+\sqrt{n+5}}=0,$$

потому что числитель дроби постоянный, а знаменатель неограниченно растет.

Пример 8. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n+5}-\sqrt{n^2-n+7}\right)$.

Этот предел является неопределенностью вида $(\infty-\infty)$. Умножим и разделим на сопряженное выражение

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n+5}-\sqrt{n^2-n+7}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+2n+5\right)-\left(n^2-n+7\right)}{\sqrt{n^2+2n+5}+\sqrt{n^2-n+7}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{\sqrt{n^2+2n+5}+\sqrt{n^2-n+7}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{3}{2}.$$

Ответ получен согласно правилу (2) при $k=m=1$.

Пример 9. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!+(n+1)!}{(n+2)!}$.

Функция натурального аргумента $y_n=n!$ определяется следующим образом: $n!$ – это произведение всех натуральных чисел от 1 до **n**, т. е. $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$. Например, $3!=1\cdot2\cdot3=6,\ 5!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$. По определению считают, что $0!=1$.

$$(n+1)!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)=n!\cdot(n+1).$$

Тогда $n!+(n+1)!=n!+n!\cdot(n+1)=n!\cdot(1+n+1)=n!\cdot(n+2)$.

$$(n+2)!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)(n+2)=n!\cdot(n+1)(n+2).$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!+(n+1)!}{(n+2)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!\cdot(n+2)}{n!(n+1)(n+2)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$.

Упражнения к занятию 1

Написать несколько первых членов последовательностей:

1. $x_n=\dfrac{5n-1}{4n+3}$	2. $u_n=n\cdot\left(1-(-1)^n\right)$
3. $y_n=2^{\cos\frac{\pi n}{2}}$	4. $z_n=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot n^2$

Найти общий член последовательности:

5. 2, 5, 8, 11, …	6. $-\frac{3}{3}, \frac{5}{5}, -\frac{7}{9}, \frac{9}{17}, \dots$
7. $2, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{8}{7}, \dots$	8. 3, 5, 9, 17, 33, …

Доказать по определению предела последовательности, что

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n-1}{2n+3}=\frac{5}{2}$	10. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{5^n}=0$
11. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{4n+1}=\frac{1}{4}$	12. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{n^2+3}=0$

Вычислить пределы:

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-4}{5n}$	14. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n+5}{8-7n}$
15. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)^2}{2n^3}$	16. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+9n-5}{1-4n+8n^2}$
17. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8n^4+5n}{2n^2+3}$	18. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+3}{4n+n^3}$
19. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{13n^3+7n}$	20. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+4}-\frac{2+3n^2}{1-9n^2}\right)$
21. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+1}-\frac{n^2-1}{n-2}\right)$	22. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n-1}-\frac{n+1}{3}\right)$
23. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^5-2n+1}}{2n-1}$	24. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+4}-\sqrt{n}\right)$
25. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^3}\cdot\left(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3+2}\right)\right)$	26. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-n+4}-\sqrt{n^2+2n-1}\right)$

27. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2+3n+1}-\sqrt{n^2+25n+30}\right)$	28. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{3n^2+n+10}-\sqrt{3n^2+n+1}\right)$
29. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+4^n}{3^n-4^n}$	30. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-5^{n+1}}{2^{n+2}+5^n}$
31. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{2}{n^3}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^3}\right)$	32. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^5}$
33. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$	34. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$

Упражнения для самостоятельного решения

35. Написать несколько первых членов последовательности $x_n=\dfrac{2n+1}{2^n}$.

36. Найти общий член последовательности: $\dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{4},\ \dfrac{3}{8},\ \dfrac{4}{16},\ \dfrac{5}{32},\ \ldots$.

37. Доказать по определению предела последовательности, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n+1}=1$.

Вычислить пределы последовательностей:

38. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{1-2n}$	39. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^3-2n^2+1}{5n^2+3n}$	40. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^5-1}{\left(n^3+2\right)^2}$

41. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{15n-3}{5n+2}-\dfrac{2n^2}{n^2+1}\right)$	42. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3}{n^2-1}-\dfrac{n^2}{n+1}\right)$
43. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{n^5+2n^2}}{n^4-1}$	44. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n+5}-\sqrt{n+3}\right)$
45. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2+5n+10}-\sqrt{2n^2-3n+12}\right)$	46. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\cdot 6^{n+1}+3\cdot 7^n}{7^{n+2}-6^n}$
47. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+4)!+2\,(n+3)!}{3\,(n+4)!+(n+3)!}$	48. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^{10}}{\left(n^6+1\right)\cdot(2n-1)^4}$

Ответы к занятию 1

1. $\frac{4}{7};\ \frac{9}{11};\ \frac{14}{15};\ \frac{19}{19};\ \frac{24}{23};\ \ldots$		2. $2;\ 0;\ 6;\ 0;\ 10;\ 0;\ 14;\ \ldots$	
3. $1;\ \frac{1}{2};\ 1;\ 2;\ 1;\ \frac{1}{2};\ \ldots$		4. $-1;\ -4;\ 9;\ 16;\ -25;\ -36;\ \ldots$	
5. $3n-1$	6. $(-1)^n \cdot \frac{2n+1}{2^n+1}$	7. $\frac{2n}{2n-1}$	8. 2^n+1
13. $\frac{3}{5}$	14. $-\frac{6}{7}$	15. 0	16. $\frac{1}{4}$
17. ∞	18. 0	19. 0	20. 1
21. -3	22. ∞	23. ∞	24. 0
25. $-\frac{1}{2}$	26. $-\frac{3}{2}$	27. ∞	28. 0
29. -1	30. -5	31. 0	32. 0
33. 0	34. 1	35. $\frac{3}{2};\frac{5}{4};\frac{7}{8};\frac{9}{16};\frac{11}{32};\ldots$	36. $\frac{n}{2^n}$
38. -1	39. ∞	40. 0	41. 1
42. 1	43. 0	44. ∞	45. $2\sqrt{2}$
46. $\frac{3}{49}$	47. $\frac{1}{3}$	48. 64	

Занятие 2
ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

Сформулируем определение предела функции, основываясь на уже изученном и более элементарном понятии предела последовательности.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = a$, за исключением, быть может, самой этой точки (окрестностью точки называется любой интервал, ее содержащий).

Определение 1 (предел функции в точке по Гейне). Число **b** называется пределом функции $y = f(x)$ в точке $x = a$ (или при **x**, стремящемся к **a**), если для любой последовательности значений аргумента $\{x_n\}$, сходящейся к **a** и состоящей из чисел, отличных от **a**, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к числу **b**, таким образом, по определению, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$. Это обозначается так – $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

К примеру, если взять произвольную последовательность $\{x_n\}$ такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$, то, очевидно, для функции $y = x^2$ – $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n^{\,2} = 4$, а для функции $y = \dfrac{1}{x}$ – $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{2}$. Это значит, что $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$, а $\lim\limits_{n\to 2} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}$.

Можно дать другое определение предела функции, не использующее предела последовательности.

Определение 2 (предел функции в точке по Коши). Число **b** называется <u>пределом функции</u> $y = f(x)$ <u>в точке</u> $x = a$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, такое, что при всех **x**, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Приведем определение 2, используя логические символы $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \quad \Leftrightarrow$ $[\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \quad (\,0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon\,)]$. Определение 2 следует понимать так: каким бы малым ни было произвольное $\varepsilon > 0$, всегда можно указать такой интервал, содержащий точку $x = a$, что для всех точек из этого интервала будет выполняться неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$, или $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$, т. е. все значения функции f(x) в этом интервале будут отличаться от **b** меньше чем на **ε**. Очевидно, что число **δ** зависит от выбора числа **ε**.

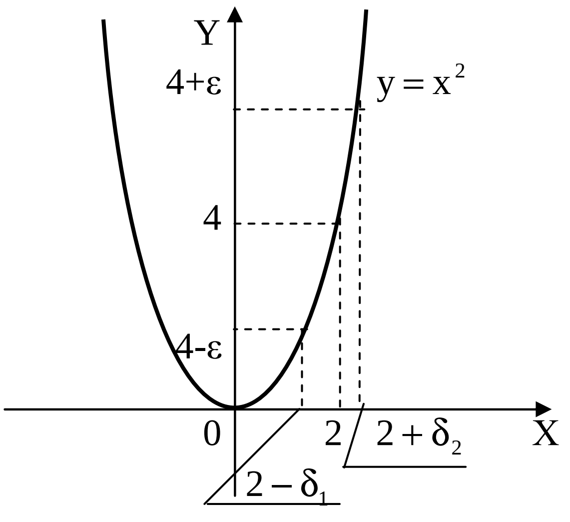

Рис. 2

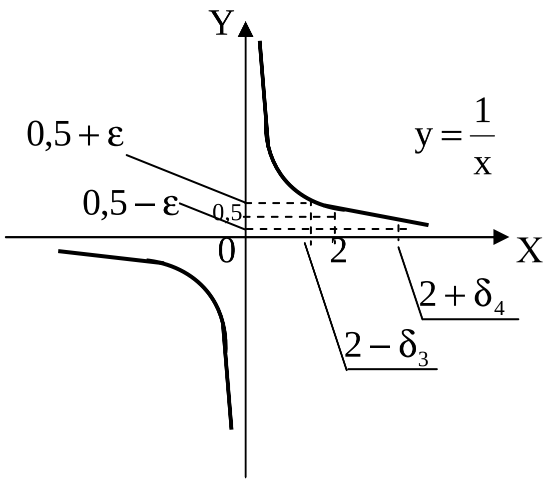

Рис. 3

Рисунки 2 и 3 иллюстрируют то, что $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$, а $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}$. На рисунке 2: $|f(x) - 4| = |x^2 - 4| < \varepsilon$ при всех $x \in (2 - \delta_1;\, 2 + \delta_2)$, но так как $\delta_1 > \delta_2$, положим $\delta = \delta_2$. Тогда можно утверждать, что если $|x - 2| < \delta$, то $|f(x) - 4| < \varepsilon$.

На рисунке 3 $|f(x)-0{,}5|<\varepsilon$ при всех $x\in(2-\delta_3;\,2+\delta_4)$. Здесь $\delta_4>\delta_3$, поэтому, полагая $\delta=\delta_3$, получим $|f(x)-0{,}5|<\varepsilon$, лишь только $|x-2|<\delta$.

Чтобы дать определение предела функции на бесконечности, будем предполагать, что область определения f(x) содержит сколь угодно большие по абсолютной величине значения **x**.

Определение 3 (предел функции на бесконечности по Гейне). Число **b** называется предeлом функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$ (или $x\to-\infty$), если для любой бесконечно большой последовательности $\{x_n\}$ значений ее аргумента, все члены которой положительны (или отрицательны), соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к **b**, т. е. если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=b$ (или, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=b$). Это обозначается так: $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} f(x)=b$.

Определение 4 (предел функции на бесконечности по Коши). Число **b** называется пределом функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$ (или $x\to-\infty$), если для любого числа $\varepsilon>0$ найдется отвечающее ему положительное число **A**, такое, что для всех $x>A$ (или $x<-A$) справедливо неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Используя логические символы, можно записать

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} f(x)=b \Leftrightarrow [\forall\varepsilon>0\ \ \exists A>0 \text{ (или } x>A\,(x<-A)\Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon)].$$

Определения 1 и 2, а также 3 и 4 эквивалентны.

Рассмотрим функцию $y=\dfrac{1}{x}$. Если взять произвольную последовательность значений ее аргумента $\{x_n\}$, стремящуюся к $+\infty$ (или к $-\infty$), то, очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}=0$. Это означает, что $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

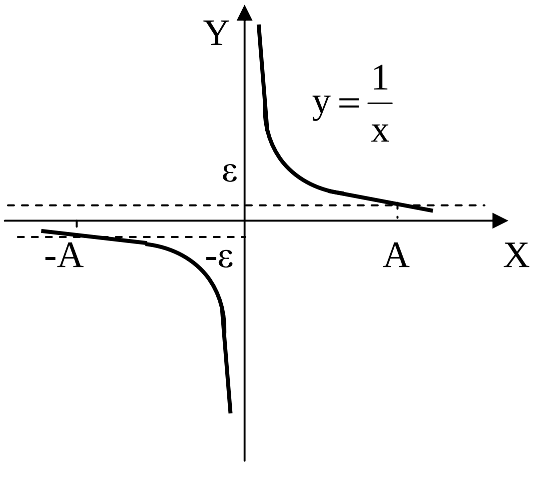

Рис. 4

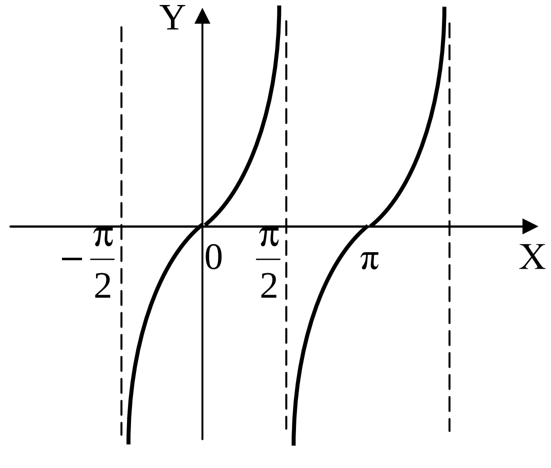

Рис. 5

Определение 4 иллюстрирует рисунок 4: $|f(x)-0| = \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$ при всех $x > A$ или при всех $x < -A$. Кроме того, ясно, что величина **A** определена не раз и навсегда, а зависит от величины **ε**, а именно $A = \frac{1}{\varepsilon}$.

Заметим, что не для всякой функции $y = f(x)$ существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Например, при $x \to \frac{\pi}{2}$ значения функции $y = \operatorname{tg} x$ (рис. 5) или неограниченно растут $\left(\text{при } x < \frac{\pi}{2}\right)$, или неограниченно убывают $\left(\text{при } x > \frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому нельзя указать никакого числа **b**, к которому стремились бы значения f(x) этой функции при $x \to \frac{\pi}{2}$.

Другой пример. Рассмотрим функцию, определенную следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{при} \quad x<0, \\ 0 & \text{при} \quad x=0, \\ -\dfrac{1}{x+1} & \text{при} \quad x>0. \end{cases}$$

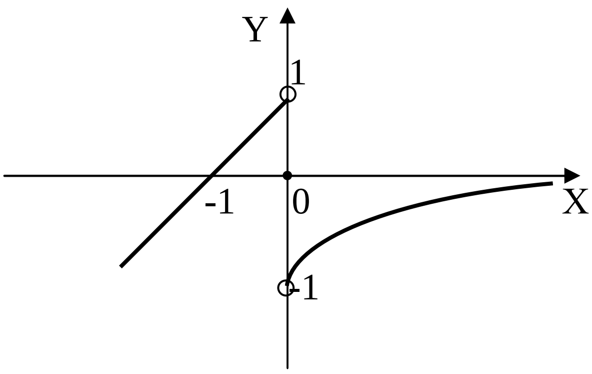

Рис. 6

График этой функции изображен на рисунке 6. Когда значения аргумента **x** стремятся к нулю, оставаясь отрицательными, соответствующие значения f(x) приближаются к единице. Когда же значения аргумента **x** приближаются к нулю, оставаясь положительными, соответствующие значения f(x) стремятся к минус единице. При этом $f(0) = 0$. Очевидно, что указать какое-либо число, к которому стремились бы все значения f(x) при $x \to 0$, нельзя. Поэтому для данной функции $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ не существует.

Хотя предел этой функции в любой другой точке вычислить можно, к примеру,

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1}(x+1) = 0, \quad \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{-1}{x+1} = \frac{-1}{2}.$$

Точно также нельзя указать такое число **b**, к которому бы стремились все значения функции $y=\sin x$ при $x\to\pm\infty$. Проще убедиться в этом, используя определение 3. Рассмотрим две последовательности значений аргумента:

$x_n=\pi n$ и $x_n'=\frac{\pi}{2}(4n+1)$. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n'=+\infty$.

Однако $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin\pi n=0$, а $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n')=\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{2}(4n+1)=1$. Более того, если выбрать произвольное число $a\in[-1;1]$, то можно указать бесконечно большую последовательность $\{x_n\}$, такую, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=a$. В частности, если $a=\frac{1}{2}$, то $x_n=\frac{\pi}{6}(4n+1)$. Это означает, что $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ не существует.

При вычислении пределов функций пользуются следующими теоремами.

Теорема 1. Предел константы равен ей самой: $\lim\limits_{x\to a}c=c$.

В условиях следующих теорем полагается, что $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a}g(x)$ существуют и конечны.

Теорема 2. Постоянный множитель можно выносить за знак предела: $\lim\limits_{x\to a}\left(k\,f(x)\right)=k\lim\limits_{x\to a}f(x)$, $k=\mathrm{const}$.

Теорема 3. Предел суммы (разности) функций равен сумме (разности) пределов этих функций:

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x).$$

Теорема 4. Предел произведения двух функций равен произведению пределов этих функций:

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x).$$

Теорема 5. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций, если предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)},\quad \lim_{x\to a}g(x)\neq 0.$$

Сформулированные теоремы справедливы и в случае, когда $x\to\pm\infty$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{4x-5}{x^2+4}-\dfrac{x^2-x-2}{x+2}\right)$.

Воспользовавшись теоремами 1-5, получим $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x-5}{x^2+4}=\dfrac{3}{8}$, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x+2}=0$. Поэтому $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{4x-5}{x^2+4}-\dfrac{x^2-x-2}{x+2}\right)=\dfrac{3}{8}$.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+1}{x^2-x-2}$.

Так как $\lim\limits_{x\to -1}\left(x^2-x-2\right)=0$, воспользоваться теоремой 5 нельзя. Заметим, однако, что знаменатель данной дроби при $x\to -1$ не равен нулю, а стремится к нему, т. е. неограниченно уменьшается по абсолютной величине, оставаясь отличным от нуля. При этом $\lim\limits_{x\to -1}\left(x^2+1\right)=2$. Таким образом, чем ближе значение $\boldsymbol{x}$ к минус единице, тем большей становится абсолютная величина дроби $\dfrac{x^2+1}{x^2-x-2}$. А это означает, что $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+1}{x^2-x-2}=\infty$.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{27-x^3}{x^2-8x+15}$.

Попытка применить теорему 5 для нахождения данного предела не приведет к результату, т. к. $\lim\limits_{x\to 3}\left(27-x^3\right)=\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2-8x+15\right)=0$. Предел является неопределенностью вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Однако очевидно, что при $x\neq 3$ дробь можно сократить:

$$\frac{27-x^3}{x^2-8x+15}=\frac{(3-x)\left(9+3x+x^2\right)}{(x-3)(x-5)}=-\frac{9+3x+x^2}{x-5}.$$

Поэтому $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{27-x^3}{x^2-8x+15}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=-\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+3x+9}{x-5}=\dfrac{27}{2}$.

Полученный результат можно обобщить: если при вычислении предела отношения многочленов при $x\to a$ возникает неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, то в числителе и знаменателе необходимо выделить множитель $(x-a)$ и сократить на него, после чего неопределенность будет раскрыта.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x^2-15}-1}{x-4}$.

Этот предел, как и предыдущий, является неопределенностью вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, т. к. $\lim\limits_{x\to 4}(x-4)=\lim\limits_{x\to 4}\left(\sqrt{x^2-15}-1\right)=0$. Однако данную дробь нельзя сразу сократить на $(x-4)$. Поэтому умножим числитель и знаменатель на $\left(\sqrt{x^2-15}+1\right)$ – выражение, сопряженное числителю. Получим

$$\frac{\left(\sqrt{x^2-15}-1\right)\left(\sqrt{x^2-15}+1\right)}{(x-4)\left(\sqrt{x^2-15}+1\right)}=\frac{x^2-16}{(x-4)\left(\sqrt{x^2-15}+1\right)}=\frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)\left(\sqrt{x^2-15}+1\right)}.$$

При $x\neq 4$ эту дробь уже можно сократить, поэтому

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x^2-15}-1}{x-4}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 4}\frac{x+4}{\sqrt{x^2-15}+1}=4.$$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt[3]{x-1}}{x}$.

Прием, использованный для раскрытия неопределенности в примере 5, не подойдет для вычисления предела этого иррационального выражения, потому что оно содержит кубические, а не квадратные корни. Чтобы избавиться от иррациональности в числителе, здесь придется умножить и разделить дробь на выражение $\sqrt[3]{(3x+1)^2}-\sqrt[3]{(3x+1)(x-1)}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$:

$$\frac{\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt[3]{x-1}}{x}=\frac{\left(\sqrt[3]{3x+1}\right)^3+\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^3}{x\left(\sqrt[3]{(3x+1)^2}-\sqrt[3]{(3x+1)(x-1)}+\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)}=$$

$$=\frac{4x}{x\left(\sqrt[3]{(3x+1)^2}-\sqrt[3]{(3x+1)(x-1)}+\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)}=$$

$$=\frac{4}{\sqrt[3]{(3x+1)^2}-\sqrt[3]{(3x+1)(x-1)}+\sqrt[3]{(x-1)^2}}\quad \text{при}\quad x\neq 0.$$

После этого получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt[3]{x-1}}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{4}{\sqrt[3]{(3x+1)^2}-\sqrt[3]{(3x+1)(x-1)}+\sqrt[3]{(x-1)^2}}=\frac{4}{3}.$$

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+4x+1}{x^3-6x^2+9x}$.

Так как $\lim\limits_{x\to\infty}(4x^2+4x+1)=\lim\limits_{x\to\infty}(x^3-6x^2+9x)=\infty$, этот предел является неопределенностью вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, и для ее раскрытия можно применить прием и правило, сформулированное на предыдущем занятии: степень числителя меньше степени знаменателя, поэтому $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+4x+1}{x^3-6x^2+9x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=0$.

Действительно, т. к. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^p}=0$ при $p>0$, предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+4x+1}{x^3-6x^2+9x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}}=0.$$

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[3]{8x^2+4x+1}+\sqrt[3]{3x^2+2x+1}}$.

$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{8x^2+4x+1}+\sqrt[3]{3x^2+2x+1}\right)=+\infty$, кроме того, степень числителя равна степени знаменателя, поэтому предел равен отношению коэффициентов при старших степенях:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[3]{8x^2+4x+1}+\sqrt[3]{3x^2+2x+1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}}{\sqrt[3]{8+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt[3]{3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}.$$

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{9x^2-8}{x\sqrt{4x^2-1}}$.

Сначала отметим, что степень числителя равна степени знаменателя, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(9x^2-8\right)=+\infty$, а $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x\sqrt{4x^2-1}=\pm\infty$, поэтому

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2-8}{x\sqrt{4x^2-1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(9-\dfrac{8}{x^2}\right)}{x\sqrt{x^2\left(4-\dfrac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{9-\dfrac{8}{x^2}}{\sqrt{4-\dfrac{1}{x^2}}}=\frac{9}{2}.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{9x^2-8}{x\sqrt{4x^2-1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(9-\dfrac{8}{x^2}\right)}{x\sqrt{x^2\left(4-\dfrac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(9-\dfrac{8}{x^2}\right)}{|x|\sqrt{4-\dfrac{1}{x^2}}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(9-\dfrac{8}{x^2}\right)}{-x\cdot\sqrt{4-\dfrac{1}{x^2}}}=-\frac{9}{2}.$$

Пример 9. Найти $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+4}-\sqrt{x^2+4x+8}\right)$.

Этот предел является неопределенностью вида $(\infty-\infty)$. Для ее раскрытия умножим и разделим выражение на сопряженное данному:

$$\sqrt{x^2-2x+4}-\sqrt{x^2+4x+8}=\frac{\left(\sqrt{x^2-2x+4}\right)^2-\left(\sqrt{x^2+4x+8}\right)^2}{\sqrt{x^2-2x+4}+\sqrt{x^2+4x+8}}=$$

$$=\frac{-6x-4}{\sqrt{x^2-2x+4}+\sqrt{x^2+4x+8}}.$$

Теперь $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(-6x-4)=\mp\infty$, а $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+4}+\sqrt{x^2+4x+8}\right)=+\infty$, кроме того, в числителе и знаменателе получившейся дроби – выражения первой степени относительно **x**. Следовательно,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+4}-\sqrt{x^2+4x+8}\right)=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-6x-4}{\sqrt{x^2-2x+4}+\sqrt{x^2+4x+8}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\mp3.$$

Упражнения к занятию 2

Используя логическую символику, записать следующие утверждения:

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$	2. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$
3. $\lim\limits_{x\to2} f(x)=-\infty$	4. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$

Вычислить пределы:

5. $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{5-2x}{x^3+5}-\dfrac{4x-2x^2}{3+7x^2}\right)$	6. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2-3x}{x^2+x-2}$
7. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^2+5x-6}$	8. $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x^2+3x-4}{2x^2+7x-4}$
9. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-5x^2+2x+8}{x^3+4x^2-3x-18}$	10. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-25}{x^2-10x+25}$
11. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3+x^2-x-1}$	12. $\lim\limits_{x\to0,5}\dfrac{2x^2-3x+1}{2x^2+3x-2}$
13. $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}$	14. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4+3x+x^2}-2}{x}$
15. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{3x+4}-2}{x^2+x-19}$	16. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{4+x}-3}{x^2-25}$
17. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$	18. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{7-x}-3}{1-\sqrt{3+x}}$
19. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{10-x}-2}{x-2}$	20. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{x+1}-1}$
21. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{5+x}-\sqrt{2x+6}}{\sqrt{1-2x}-\sqrt{4+x}}$	22. $\lim\limits_{x\to16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-8}{x^2-x-2}$	24. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x-5}{3x-5x^3+1}$
25. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^6-2x^4+x^2-1}{2x^3-3x+8}$	26. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+25}{x^3-2x+1}$
27. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-3)^{40}\cdot(4x+1)^{10}}{(2x^2-3)^{25}}$	28. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{4x^2+1}+5}$
29. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-3}}{4x+1}$	30. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3x-2}}$
31. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt[2]{x^3-1}}$	32. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x^3+x}+\sqrt[5]{x^4-1}}{\sqrt[7]{x^6+2}}$
33. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2-4}-\dfrac{x^2}{x+2}\right)$	34. $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{3x-2}{x^2-4}\right)$
35. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^4+1}-3x^2\right)$	36. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-3x\right)$
37. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)$	38. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{4x^2-1}\right)$
39. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{3x^2+4x+5}-\sqrt{3x^2-5x+4}\right)$	40. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x\sqrt{2x^2+3}}{9x^2+4x+16}$

Упражнения для самостоятельного решения

41. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^3-8x^2-42x}{x^2-9}$ при разных значениях x_0:

а) $x_0=1$, б) $x_0=7$, в) $x_0=-3$, г) $x_0=\infty$.

Используя логическую символику, записать следующие утверждения:

42. $\lim\limits_{x\to1} f(x)=+\infty$	43. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$

Вычислить пределы:

44. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \frac{4x^2-8x+3}{2x+1}$	45. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \frac{3-4x^2}{2x-1}$
46. $\lim\limits_{x\to 7} \frac{x^2-49}{x^2-5x-14}$	47. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-4x^2+7x-4}{3x^2+5x-8}$
48. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{6-\sqrt{5x^2-x-6}}{2x-6}$	49. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{x-3}-1}{\sqrt{x+5}-3}$
50. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(2x^2+3)(3x^7-3x)}{6x^9-5x^7+x^3+2}$	51. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2-1}{4x^5+1}$
52. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3+2}{x-1}$	53. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{4x^2}{x+1}-\frac{1-4x^3}{1-x^2}\right)$
54. $\lim\limits_{x\to 7} \left(\frac{x}{x-7}-\frac{x+2}{2x-14}\right)$	55. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3-3}+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[4]{16x^4+2}}$
56. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^3}+\sqrt[4]{x^5}}{x+2}$	57. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt{x^2+7x+2}-\sqrt{x^2+5}\right)$
58. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-3}+x\right)$	59. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt[3]{5x+7}-3}{12x-3x^2}$
60. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{6x^2+5x+1}{(3x+1)\sqrt{x^2+2}}$	61. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{6x^2+5x+1}{(3x+1)\sqrt[3]{x^3+2}}$

Ответы к занятию 2

5. $\frac{1}{13}$	**6.** ∞	**7.** $\frac{2}{7}$	**8.** $\frac{5}{9}$	**9.** $-\frac{6}{25}$
10. ∞	**11.** 0	**12.** $-\frac{1}{5}$	**13.** $\frac{1}{6}$	**14.** $\frac{3}{4}$
15. 2	**16.** $\frac{1}{60}$	**17.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$	**18.** $\frac{1}{3}$	**19.** $-\frac{1}{12}$

20. 3	**21.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$	**22.** $\frac{1}{4}$	**23.** 2	**24.** $-\frac{2}{5}$
25. ∞	**26.** 0	**27.** $\frac{1}{32}$	**28.** $\frac{1}{2}$	**29.** $\frac{1}{2}$
30. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$	**31.** 0	**32.** 0	**33.** 2	**34.** $-\frac{1}{2}$
35. 0	**36.** ∞	**37.** 0	**38.** $-\infty$	**39.** $\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}$
40. $\pm\frac{\sqrt{2}}{9}$	**41а.** 6	**41б.** 0	**41в.** -10	**41г.** ∞
44. 0	**45.** ∞	**46.** $\frac{14}{9}$	**47.** $\frac{2}{11}$	**48.** $-\frac{29}{24}$
49. 3	**50.** 1	**51.** 0	**52.** ∞	**53.** -4
54. ∞	**55.** $\frac{3}{2}$	**56.** ∞	**57.** $\pm\frac{7}{2}$	**58.** 0
59. $-\frac{5}{324}$	**60.** ± 2	**61.** ∓ 2		

Занятие 3
ПРИНЦИП ЗАМЕНЫ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ФУНКЦИЙ. ПЕРВЫЙ И ВТОРОЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

Определение 1. Функция $f(x)$ называется бесконечно малой функцией (или просто бесконечно малой) в точке $x = a$ (или при $x \to a$), если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Пример 1. Функция $y = (x-2)^2(x-1)$ бесконечно мала (б.м.) в точках $x_1 = 2$ и $x_2 = 1$, так как $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)^2(x-1) = 0$ и $\lim\limits_{x\to 1}(x-2)^2(x-1) = 0$.

Функция $y = \frac{1}{x^2+1}$ бесконечно мала при $x \to \infty$, так как $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2+1} = 0$.

Пусть $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = \lim\limits_{x\to a}\beta(x) = 0$, т. е. функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малы в точке $x = a$.

Определение 2. Бесконечно малые в точке $x = a$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными, если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

Эквивалентность обозначается так: $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Пример 2. Функции $\alpha(x) = (x-2)^2 (x-1)$ и $\beta(x) = (x-2)^2$ бесконечно малы при $x \to 2$, кроме того, $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)^2 (x-1)}{(x-2)^2} = 1$. Значит, $\alpha(x) \sim \beta(x)$ в точке $x = 2$.

Пример 3. Функции $\alpha(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, $\beta(x) = \dfrac{3x^2+4}{x^4+3x^2+5}$ и $\gamma(x) = \dfrac{1}{x^2}$ бесконечно малы при $x \to \infty$, так как $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+4}{x^4+3x^2+5} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$.

При этом $\alpha(x) \sim \gamma(x)$, так как $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\alpha(x)}{\gamma(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^2+1} = 1$. Однако бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентными не являются:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4+3x^2+5}{(x^2+1)(3x^2+4)} = \frac{1}{3}.$$

Раскрытие неопределённости вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ во многих случаях упрощает следующее утверждение: если $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ и $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ при $x \to a$ (при $x \to \infty$) и существует $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ (x\to\infty)}} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, то существует и $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ (x\to\infty)}} \dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$, причём

$$\lim_{\substack{x\to a \\ (x\to\infty)}} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{\substack{x\to a \\ (x\to\infty)}} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}.$$

Это утверждение называется <u>принципом замены бесконечно малых</u>.

Можно показать, что $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = 1$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[m]{1+x}-1\right)\, m}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=1.$$

Поэтому при $\underline{\alpha(x)\to 0}$

$$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x),\quad \operatorname{tg}\alpha(x)\sim\alpha(x)$$

$$\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x),\quad \operatorname{arctg}\alpha(x)\sim\alpha(x)$$

$$\left(e^{\alpha(x)}-1\right)\sim\alpha(x),\quad \ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)$$

$$\left(\sqrt[m]{1+\alpha(x)}-1\right)\sim\frac{\alpha(x)}{m}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Равенство $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ называется <u>первым замечательным пределом.</u>

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}3x}{\sin 4x}$.

Заменим числитель и знаменатель дроби эквивалентными бесконечно малыми: $\operatorname{tg}3x\sim 3x,\ \sin 4x\sim 4x$. Тогда получим $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}3x}{\sin 4x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{4x}=\frac{3}{4}$.

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(1-4x)}$.

Т. к. $(e^{2x}-1)\sim 2x,\ \ln(1-4x)\sim(-4x)$ при $x\to 0$, предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(1-4x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{-4x}=-\frac{1}{2}.$$

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\arcsin x^2}$.

Заметим, что $\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$, поэтому

$$\ln\cos x = \ln\left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2}\right) \sim \left(-2\sin^2\frac{x}{2}\right) \sim \left(-2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2\right),$$

а $\arcsin x^2 \sim x^2$ при $x \to 0$.

Отсюда $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\arcsin x^2} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^2}{2\cdot x^2} = -\dfrac{1}{2}$.

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{(2x-\pi)^2}{\cos 3x}$.

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos 3x = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(2x-\pi)^2 = 0$, чтобы заменить бесконечно малые на эквивалентные им, введём другую переменную: $t = x - \dfrac{\pi}{2}$ или $x = t + \dfrac{\pi}{2}$.

Тогда $\cos 3x = \cos 3\left(t + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(3t + \dfrac{3\pi}{2}\right) = \sin 3t$; $\quad 2x - \pi = 2t$.

Теперь $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{(2x-\pi)^2}{\cos 3x} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{4t^2}{\sin 3t} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{4t^2}{3t} = 0$.

Можно показать, что функция $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ при $x \to \infty$ имеет предел, причём $2 < \lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x < 3$.

Этот предел обозначают буквой **e**: т. е. e = 2,718 28... – иррациональное число, определённое равенством

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Это равенство называется вторым замечательным пределом.

Если в этом пределе сделать замену переменной, полагая $\alpha = \dfrac{1}{x}$, то получим $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$.

Заметим, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)=1$, а $\lim\limits_{x\to\infty} x=\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha}=\infty$, поэтому второй замечательный предел представляет собой неопределённость вида (1^{∞}). С его помощью находятся многие другие пределы.

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{mx}$.

Сделаем замену переменной: $t=\frac{x}{k}$.

Тогда $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{mx}=(1^{\infty})=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{m\cdot kt}=\lim\limits_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{mk}=e^{mk}$.

Пример 9. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+6}{x+3}\right)^{2x}$.

Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+6}{x+3}=1$, при $x\to\infty$ функция $f(x)=\left(\frac{x+6}{x+3}\right)^{2x}$ представляет собой степень, основание которой стремится к единице, а показатель - к бесконечности, т. е. данный предел является неопределённостью вида (1^{∞}), а поэтому при его вычислении можно использовать второй замечательный предел.

Преобразуем функцию следующим образом:

$$\left(\frac{x+6}{x+3}\right)^{2x}=\left(\frac{(x+3)+3}{x+3}\right)^{2x}=\left(1+\frac{3}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{3}\cdot\frac{3}{x+3}\cdot 2x}.$$

Теперь $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+6}{x+3}\right)^{2x}=(1^{\infty})=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{3}}\right)^{\frac{6x}{x+3}}=e^{6}$, т. к. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{3}}=e$

и $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x}{x+3}=6$.

Пример 10. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^{2}-3x-5}{x^{2}+5x+4}\right)^{x+4}$.

Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^{2}-3x-5}{x^{2}+5x+4}\right)=1$ и $\lim\limits_{x\to\infty}(x+4)=\infty$, преобразуем функцию так, чтобы использовать второй замечательный предел:

$$\frac{x^2-3x-5}{x^2+5x+4}=1+\left(\frac{x^2-3x-5}{x^2+5x+4}-1\right)=1+\frac{-8x-9}{x^2+5x+4}.$$

Такое преобразование называется <u>выделением целой части</u> (она равна единице) <u>неправильной рациональной дроби.</u>
После этого

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3x-5}{x^2+5x+4}\right)^{x+4}=\left(1^\infty\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-8x-9}{x^2+5x+4}\right)^{\frac{x^2+5x+4}{-8x-9}\cdot\left(\frac{(-8x-9)(x+4)}{x^2+5x+4}\right)}=e^{-8},$$

т. к. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(-8x-9)(x+4)}{x^2+5x+4}=-8$, а $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-8x-9}{x^2+5x+4}\right)^{\frac{x^2+5x+4}{-8x-9}}=e$.

Пример 11. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-3x-5}{x^2+5x+4}\right)^{\frac{x+4}{2x}}$.

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+4}{2x}=\dfrac{1}{2}$, поэтому данный предел неопределённостью не является и

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3x-5}{x^2+5x+4}\right)^{\frac{x+4}{2x}}=1^{\frac{1}{2}}=1.$$

Пример 12. Найти $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^2-3x-5}{2x^2+5x+4}\right)^{x+4}$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^2-3x-5}{2x^2+5x+4}\right)=\dfrac{1}{2}$, поэтому данный предел неопределённостью также не

является и $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-3x-5}{2x^2+5x+4}\right)^{x+4}=0$, а $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2-3x-5}{2x^2+5x+4}\right)^{x+4}=+\infty$.

(Функция $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ стремится к нулю, если $x\to+\infty$, и неограниченно возрастает, если $x\to-\infty$).

Упражнения к занятию 3

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{2x}$	2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{\sin\frac{x}{5}}$	3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\,\mathrm{tg}\,7x}{x}$	5. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)}{4x-\pi}$	6. $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin(3x-\pi)}{5x}$
7. $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin 7x}{\sin 4x}$	8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 6x-\cos 4x}{x^2}$	9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x+\sin 7x}{\frac{x}{4}}$
10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin 3x}{x}$	11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x-\sin 12x}{10x}$	12. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$
13. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+4x^4\right)}{x^3e^{2x}}$	14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,3x}{\sqrt{1+2x}-1}$	15. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$
16. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$	17. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$	18. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{2x+3}{4x+5}\right)^{x-1}$
19. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x-1}$	20. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2+x}{3-x}\right)^{5x}$	21. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\mathrm{tg}^2\sqrt{x}\right)^{\frac{x-1}{2x}}$
22. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{x^2+5x}{x^2-3x+4}\right)^{2x-3}$	23. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{x^3+3x+1}{x^3+5x^2+x}\right)^{\frac{x^2+1}{2x^2-1}}$	24. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{3x^2+3x+5}{2x^2+2x+5}\right)^{2x^2+1}$

Упражнения для самостоятельного решения

Вычислить пределы:

25. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{6\sin x^2}$	26. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}^2\,3x^3}{x^6+x^7}$	27. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\sin^2 x\right)}{\arcsin^2\frac{x}{2}}$

28. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x-\pi}$	29. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x^2-x}$	30. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt[4]{3+x^2-3x}-1}{tg^2(x-2)}$
31. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{3x+1}{3x+4}\right)^{3+x}$	32. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1-2x}{3-2x}\right)^{x^2}$	33. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+x-1}{x^2+3}\right)^{5x-1}$
34. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{3-x}{x^2-3}\right)^{\frac{x+5}{x^2-4}}$	35. $\lim\limits_{x\to 5} \left(\frac{x^2-2}{4x+3}\right)^{\frac{x}{5-x}}$	36. $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+tg^2 x\right)^{\frac{3}{\sin x}}$
37. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^{x}$	38. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{x+1}{5x-4}\right)^{\frac{3}{x^2-1}}$	39. $\lim\limits_{x\to 1} \left(3+x^2-3x\right)^{\frac{1}{1-x}}$
40. $\lim\limits_{x\to 2} \left(1+\ln(3-x)\right)^{\frac{x}{x-2}}$	41. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{3x^2+2}{3x^2-2}\right)^{3x-2}$	42. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{3x^2+2x}{3x^2-2x}\right)^{3x^2-2x}$

Ответы к занятию 3

1. 2	**2.** 25	**3.** ∞	**4.** 14	**5.** 0,125
6. 0	**7.** -1,75	**8.** -10	**9.** 48	**10.** -2
11. -0,9	**12.** 0,5	**13.** 0	**14.** 3	**15.** $\frac{1}{e}$
16. e	**17.** e	**18.** ∞	**19.** e^2	**20.** 1
21. $\frac{1}{\sqrt{e}}$	**22.** e^{16}	**23.** 1	**24.** ∞	**25.** $\frac{3}{2}$
26. 9	**27.** 4	**28.** $-\frac{1}{2}$	**29.** -1	**30.** ∞
31. $\frac{1}{e}$	**32.** ∞	**33.** e^5	**34.** $e^{-\frac{7}{4}}$	**35.** $e^{-\frac{30}{23}}$
36. 1	**37.** $\begin{cases} 0, & x\to+\infty \\ \infty, & x\to-\infty \end{cases}$	**38.** ∞	**39.** e	**40.** $\frac{1}{e^2}$
41. 1	**42.** ∞			

Занятие 4
ТОЧКИ РАЗРЫВА И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

Рассмотрим функцию, определенную в некотором интервале, содержащем точку $x = a$.

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке $x = a$, если

1) $f(x)$ определена при $x = a$;

2) существуют конечные и равные односторонние пределы $f(x)$ в этой точке:

$\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a-} f(x)$ ($\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ – правый предел, $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ – левый предел при $x \to a$);

3) $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a-} f(x) = f(a)$.

Условие 2) равносильно существованию конечного предела функции $f(x)$ в точке $x = a$, поэтому условие 3) можно заменить на $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, т. е. предельное значение функции при $x \to a$ совпадает с ее частным значением в этой точке.

Если какое-либо из трех перечисленных условий не выполнено, то функция $y = f(x)$ называется разрывной в точке $x = a$, а сама эта точка – точкой разрыва.

Из определения непрерывности функции в точке и теорем 1-5 о пределах функций следует теорема об арифметических операциях над непрерывными функциями.

Теорема. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $x = a$. Тогда функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ непрерывны в этой точке (последняя при $g(a) \neq 0$).

Все простейшие элементарные функции: степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические и обратные тригонометрические – непрерывны в каждой точке своей области определения. Непрерывными всюду, где определены, являются также и все элементарные функции: это функции, которые можно задать одним аналитическим выражением, полученным из простейших элементарных функций с помощью четырех арифметических действий и операции составления сложной функции, последовательно примененных конечное число раз.

Функции $y = \dfrac{x+2}{x^2 - 4}$, $y = \dfrac{\sin 2x}{x}$, $y = \log_2^3 \dfrac{x+1}{1-x}$, $y = \sqrt{x} \cdot \arcsin \dfrac{x}{2}$ и т.д. – элементарные. Каждая из них непрерывна всюду, где определена.

Функции $y=\begin{cases}2-x, & x\le 1\\ x^2, & x>1\end{cases}$ или $y=\begin{cases}2^x, & x\le 1\\ 2-x, & x>1\end{cases}$, к примеру, элементарными не являются, т. к. заданы двумя аналитическими выражениями. Поэтому можно утверждать, что каждая из этих функций непрерывна при всех $x<1$ и при всех $x>1$, при этом в точке $x=1$ условие непрерывности может быть как выполнено, так и не выполнено.

Очевидно, график функции, непрерывной во всех точках некоторого промежутка, представляет собой непрерывную линию, т. е. линию, которую можно провести, не отрывая карандаш от бумаги.

Точки разрыва бывают трех типов. Чтобы исследовать функцию на непрерывность, надо найти точки разрыва, если они есть, и определить их характер.

Определение 2. Точка $x=a$ называется <u>точкой устранимого разрыва</u> функции $f(x)$, если существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, но либо $f(x)$ не определена в этой точке, либо $f(a)\ne b$.

Если положить $f(a)=b$, то функция $y=f(x)$ станет непрерывной в точке $x=a$, т. е. разрыв будет устранен.

Определение 3. Точка $x=a$ называется <u>точкой разрыва I-го рода</u> функции $f(x)$, если в этой точке функция имеет конечные, но не равные друг другу односторонние пределы: $\lim\limits_{x\to a+} f(x)\ne \lim\limits_{x\to a-} f(x)$.

Величина $\left|\lim\limits_{x\to a+} f(x)-\lim\limits_{x\to a-} f(x)\right|$ называется скачком функции в точке $x=a$.

Определение 4. Точка $x=a$ называется <u>точкой разрыва II-го рода</u> функции $f(x)$, если в этой точке $f(x)$ не имеет, по крайней мере, одного из односторонних пределов или хотя бы один из односторонних пределов бесконечен.

Пример 1. Исследовать на непрерывность функцию $y=\dfrac{x+2}{x^2-4}$.

Эта функция элементарная, а потому непрерывна всюду, где определена, именно при всех $x\in R$, кроме $x=2$ и $x=-2$. Значит, точки $x=2$ и $x=-2$ являются точками разрыва. Чтобы определить характер разрывов, исследуем поведение функции вблизи этих точек. Заметим, что при $x\ne\pm 2$ $y=\dfrac{1}{x-2}$.

Поэтому $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{1}{x-2}=-\dfrac{1}{4}$, т. е. существует $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=-\dfrac{1}{4}$, но $f(x)$ не определена при $x=-2$. Это означает, что данная функция имеет в точке $x=-2$ устранимый разрыв.

Чтобы исследовать характер разрыва в точке $x=2$, вычислим односторонние пределы.

$\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{x+2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{1}{x-2}=+\infty$, так как при $x\to 2+ \,(x>2)$ разность $(x-2)$ стремится к нулю, оставаясь положительной.

Аналогично $\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{x+2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{1}{x-2}=-\infty$. Следовательно, точка $x=2$ является точкой разрыва II-го рода.

Пример 2. Исследовать на непрерывность функцию $y=\begin{cases}2-x, & x\le 1\\ x^2, & x>1\end{cases}$.

Как отмечалось ранее, данная функция может иметь разрыв лишь в точке $x=1$, где происходит смена одного аналитического выражения на другое. Вычислим односторонние пределы в этой точке.

При $x<1$ $y=2-x$, поэтому $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-}(2-x)=1$. Если же $x>1$, то по условию $y=x^2$ и $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+} x^2=1$. Кроме того, $f(1)=1$. Таким образом,

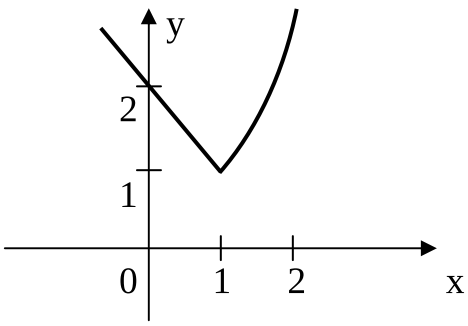

Рис. 7

$\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=1$ и $f(1)=1$. Это означает, что данная функция непрерывна в точке $x=1$, а потому и на всей числовой прямой. Этот факт можно установить, построив график функции и убедившись, что он представляет собой непрерывную линию.

Пример 3. Исследовать на непрерывность функцию $y=\begin{cases}2^x, & x\le 1\\ 2-x, & x>1\end{cases}$.

Так же, как и в примере 2, исследуем данную функцию в окрестности точки $x=1$. При $x<1$ $y=2^x$ и $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-} 2^x=2$, а при $x>1$: $y=2-x$ и $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}(2-x)=1$. Таким образом, в точке $x=1$ существуют конечные, но не равные односторонние пределы, т. е. эта точка является точкой разрыва I-го ро-

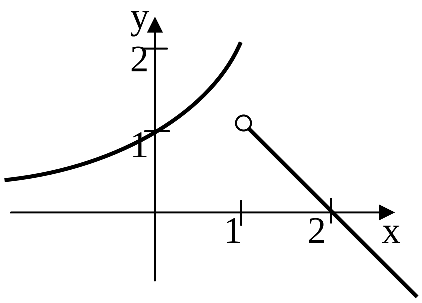

Рис. 8

да. Установить наличие разрыва I-го рода этой функции можно по ее графику, не вычисляя односторонние пределы аналитически. Очевидно, (рис. 8), что $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = 2$, а $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = 1$ и функция имеет в точке $x = 1$ скачок $\left| \lim\limits_{x\to 1+} f(x) - \lim\limits_{x\to 1-} f(x) \right| = 1$.

Пример 4. Исследовать на непрерывность функцию $y = \log_2^3 \dfrac{x+1}{1-x}$.

Область определения этой функции задается неравенством $\dfrac{x+1}{1-x} > 0$, т. е. функция определена на интервале (-1; 1), во всех точках которого является непрерывной. Однако для исследования непрерывности данной функции необходимо вычислить правый предел в точке $x = -1$ и левый предел в точке $x = 1$ (при $x < -1$, то есть слева от $x = -1$, и при $x > 1$, то есть справа от $x = 1$, $f(x)$ не определена).

Так как $\lim\limits_{x\to -1+} \dfrac{x+1}{1-x} = 0$, то $\lim\limits_{x\to -1+} \log_2^3 \dfrac{x+1}{1-x} = -\infty$, и в точке $x = -1$ – разрыв II-го рода справа. Далее, $\lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{x+1}{1-x} = +\infty$, следовательно, $\lim\limits_{x\to 1-} \log_2^3 \dfrac{x+1}{1-x} = +\infty$ и в точке $x = 1$ – разрыв II-го рода слева.

Пример 5. Исследовать на непрерывность функцию $y = \sqrt{x}\,\arcsin\dfrac{x}{2}$.

Область допустимых значений этой функции определяется системой неравенств $\begin{cases} x \ge 0 \\ -1 \le \dfrac{x}{2} \le 1 \end{cases}$, т. е. является отрезком $[0, 2]$ (а не интервалом, как в примере 4).

Так как $f(x)$ элементарная, она непрерывна при всех $x \in [0, 2]$. На концах отрезка

$$\lim_{x\to 0-} \sqrt{x}\,\arcsin\frac{x}{2} = 0,\ f(0) = 0;\ \ \lim_{x\to 2-} \sqrt{x}\,\arcsin\frac{x}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2},\ f(2) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Пример 6. Исследовать на непрерывность функцию $y = 2^{-\frac{1}{x-9}}$.

Эта функция непрерывна в любой точке, кроме $x \neq 9$. Прежде чем вычислить

$\lim\limits_{x\to 9+} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to 9-} f(x)$, заметим, что $\lim\limits_{x\to 9+}\left(\frac{-1}{x-9}\right) = -\infty$, а $\lim\limits_{x\to 9-}\left(\frac{-1}{x-9}\right) = +\infty$. Тогда

получим $\lim\limits_{x\to 9+} 2^{-\frac{1}{x-9}} = \lim\limits_{z\to -\infty} 2^z = 0$; $\lim\limits_{x\to 9-} 2^{-\frac{1}{x-9}} = \lim\limits_{z\to +\infty} 2^z = +\infty$. Таким образом, левый предел в точке $x = 9$ бесконечен и, значит, $x = 9$ является точкой разрыва II-го рода слева.

Пример 7. Исследовать на непрерывность функцию $y = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Функция $y = \frac{\sin 2x}{x}$ определена, а значит, непрерывна всюду, за исключением точки $x = 0$. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{x} = 2$, но $f(0) = 0$. Поэтому точка $x = 0$ является точкой устранимого разрыва. Этот разрыв можно, действительно, устранить, доопределив функцию $y = \frac{\sin 2x}{x}$ при $x = 0$ другим образом, полагая $f(0) = 2$. Функция $y = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x}, & x \neq 0; \\ 2, & x = 0 \end{cases}$ непрерывна при всех $x \in R$.

Пример 8. Исследовать на непрерывность функцию $y = \begin{cases} x + 2, & x \leq -1, \\ \frac{1}{x^2}, & -1 < x < 2, \\ \sqrt{x-2}, & x \geq 2. \end{cases}$

Функция определена во всех точках числовой прямой, кроме $x = 0$.

$\lim\limits_{x\to 0\pm} f(x) = \lim\limits_{x\to 0\pm} \frac{1}{x^2} = +\infty$, поэтому в точке $x = 0$ – разрыв II-го рода.

Найдем далее односторонние пределы $f(x)$ при $x = -1$ и $x = 2$.

$$\lim_{x\to -1-} f(x) = \lim_{x\to -1-} (x+2) = 1; \quad \lim_{x\to -1+} f(x) = \lim_{x\to -1+} \frac{1}{x^2} = 1; \quad f(-1) = 1.$$

Следовательно, при $x = -1$ функция непрерывна.

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4},$$

а $\lim\limits_{x\to 2+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+} \sqrt{x-2} = 0$, поэтому при $x = 2$ имеет место разрыв I-го рода. График этой функции изображен на рисунке 9.

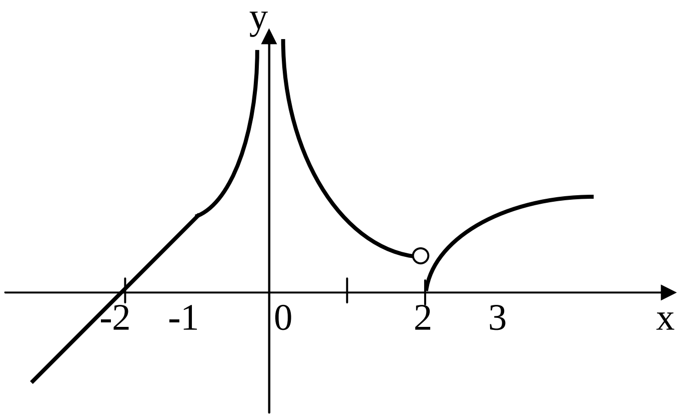

Рис. 9

Пример 9. Исследовать на непрерывность функцию $y = \sin\frac{1}{x}$.

Функция не определена при $x = 0$. Обозначим $z = \frac{1}{x}$, тогда

$\lim\limits_{x\to 0\pm} \sin\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \sin z$. Этот предел, как было отмечено ранее, не существует, поэтому точка $x = 0$ является для функции $y = \sin\frac{1}{x}$ точкой разрыва II-го рода.

Упражнения к занятию 4

Построить схему графика функции $y = f(x)$, указать характер разрыва, если известно, что

1.	$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 2$;	$\lim\limits_{x\to 4-} f(x) = 3$;	$\lim\limits_{x\to 4+} f(x) = -1$;	$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.
2.	$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$;	$\lim\limits_{x\to -3-} f(x) = -\infty$;	$\lim\limits_{x\to -3+} f(x) = +\infty$;	$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$.
3.	$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -2$;	$\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = 3$;	$\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = 3$;	$\lim\limits_{x\to 4-} f(x) = 2$;
	$\lim\limits_{x\to 4+} f(x) = +\infty$;	$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -2$.		

Функция $y=f(x)$ задана различными аналитическими выражениями для различных областей изменения независимой переменной. Найти точки разрыва функции, если они существуют, указать их характер. Построить график.

4. $y=\begin{cases} x^2+1, & x\le -1, \\ \dfrac{2}{x}, & -1<x<2, \\ x-1, & x\ge 2. \end{cases}$	5. $y=\begin{cases} 2-x, & x<0, \\ \sin x, & 0\le x\le \pi, \\ 0, & x>\pi. \end{cases}$

Найти точки разрыва функции, исследовать их характер, в случае устранимого разрыва доопределить функцию по непрерывности:

6. $y=\dfrac{\cos x}{x}$	7. $y=\dfrac{x-1}{x^2-1}$	8. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$
9. $y=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x+1}}}$	10. $y=\dfrac{\sin x}{2x-\pi}$	11. $y=\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+3x-4}$
12. $y=\dfrac{x}{\sin x}$	13. $y=\cos\dfrac{\pi}{x}$	14. $y=\log_2\dfrac{x^2}{(x+1)(x-3)}$
15. $y=\dfrac{x}{2^{2x}-4}$	16. $y=\dfrac{x-3}{\lvert x-3\rvert}$	17. $y=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$
18. $y=(x+1)\cdot\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}$	19. $y=3^{\frac{x}{4-x^2}}$	

Упражнения для самостоятельного решения

Построить схематично график функции $y=f(x)$, указать характер разрыва, если известно, что

20. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-3;$	$\lim\limits_{x\to-2-} f(x)=-\infty;$	$\lim\limits_{x\to-2+} f(x)=-\infty;$
$\lim\limits_{x\to2-} f(x)=0;$	$\lim\limits_{x\to2+} f(x)=4;$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$

21. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$;	$\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = +\infty$;	$\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 2$;
$\lim\limits_{x\to 3-} f(x) = -2$;	$\lim\limits_{x\to 3+} f(x) = -2$;	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

Функция $y = f(x)$ задана различными аналитическими выражениями для различных областей изменения независимой переменной. Найти точки разрыва функции, если они существуют, указать их характер. Построить график.

22. $y = \begin{cases} 0, & x \le -1, \\ \dfrac{1}{x}, & -1 < x < 2, \\ \dfrac{1}{2}, & x \ge 2. \end{cases}$	23. $y = \begin{cases} x^3 + 1, & x \le 0, \\ \sqrt{x}, & 0 < x < 4, \\ x - 3, & x \ge 4. \end{cases}$

Найти точки разрыва функции, исследовать их характер, в случае устранимого разрыва доопределить функцию по непрерывности:

24. $y = \dfrac{x+1}{\lvert x+1 \rvert}$	25. $y = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$	26. $y = 5^{\frac{2}{x+4}}$
27. $y = \log_{\frac{1}{2}} \lvert x \rvert$	28. $y = \dfrac{x^2}{5^x - 5}$	29. $y = e^{-\frac{1}{(x-2)^2}}$
30. $y = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 2x - 8}$	31. $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$	32. $y = \sqrt{x} \arccos x$

Ответы к занятию 4

4. $x = -1$ – разрыв I-го рода, $x = 0$ – разрыв II-го рода, $x = 2$ – функция непрерывна.	5. $x = 0$ – разрыв I-го рода, $x = \pi$ – функция непрерывна.
6. $x = 0$ – разрыв II-го рода.	7. $x = 1$ – устранимый разрыв, $y(1) = \dfrac{1}{2}$, $x = -1$ – разрыв II-го рода.
8. $x = 0$ – разрыв I-го рода.	9. $x = -1$ – разрыв I-го рода.

10. $x=\frac{\pi}{2}$ – разрыв II-го рода.	11. $x=1$ – устранимый разрыв, $y(1)=0{,}8$, $x=-4$ – разрыв II-го рода.
12. $x=0$ – устранимый разрыв, $y(0)=1$, $x=\pi n,\ n\neq 0,\ n\in z$ – разрыв II-го рода.	13. $x=0$ – разрыв II-го рода.
14. $x=3$ – разрыв II-го рода справа, $x=-1$ – разрыв II-го рода слева.	15. $x=1$ – разрыв II-го рода.
16. $x=3$ – разрыв I-го рода.	17. $x=0$ – устранимый разрыв, $y(0)=0{,}5$.
18. $x=0$ – разрыв I-го рода.	19. $x=\pm 2$ – разрыв II-го рода.
22. $x=-1$ – разрыв I-го рода, $x=0$ – разрыв II-го рода, $x=2$ – функция непрерывна.	23. $x=0$ – разрыв I-го рода, $x=4$ – разрыв I-го рода.
24. $x=-1$ – разрыв I-го рода.	25. $x=-3$ – устранимый разрыв, $y(-3)=-6$.
26. $x=-4$ – разрыв II-го рода.	27. $x=0$ – разрыв II-го рода.
28. $x=1$ – разрыв II-го рода.	29. $x=2$ – устранимый разрыв, $y(2)=0$.
30. $x=2$ – устранимый разрыв, $y(2)=-\frac{1}{6}$, $x=-4$ – разрыв II-го рода.	31. $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in z$ – разрыв II-го рода, $x=0$ – устранимый разрыв, $y(0)=1$.
32. Функция непрерывна в области определения [0; 1].	

Контрольная работа

1 вариант	**2 вариант**
Найти пределы:	
1. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2-4x+3}$	1. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-6x+5}{\sqrt{2x-1}-3}$
2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}$	2. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-2x+1}{1-x}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3+2x^2+x}$	3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+12x+12}{x^3+6x^2+12x+8}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^3+2}-3}{x+2}$	4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2\sqrt{x}+1}{\sqrt{9x^5-3}-8}$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+10x^2-1}-\sqrt{x^4-6x^2+3}\right)$	5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^3+x^2-1}-\sqrt{x^3-x+2}\right)$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{e^{2x^2}-1}$	6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+2x^3\right)}{\arcsin^3\frac{x}{4}}$
7. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\cos x}{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}$	7. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{1-\cos 2x}$
8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+8}\right)^{x+1}$	8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-2x-5x^2}{7-5x^2}\right)^{x^2+3}$
9. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{2x+1}{4x-1}\right)^{x}$	9. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{3x+2}{x+2}\right)^{x}$
Найти точки разрыва функции y=f(x), если они существуют, указать их характер:	
10. $y=\dfrac{\lvert 2-x\rvert}{2-x}$	10. $y=\dfrac{x+5}{x^2+6x+5}$
11. $y=\begin{cases}2x, & x<1\\ x+1, & 1\le x<3\\ \dfrac{1}{x-4}, & x\ge 3\end{cases}$	11. $y=\begin{cases}-x, & x\le -1\\ x+1, & -1<x<0\\ e^x, & x\ge 0\end{cases}$
12. $y=2^{\frac{5}{x-1}}$	12. $y=3^{-\frac{3}{(5-x)^2}}$

Библиографический список

1. Шипачёв В.С. Высшая математика. – М.: Высш. школа, 1985. – 469 с.

2. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова – М.: Высш. школа, 1986. – Ч.1. – 303 с.

3. Математический анализ в вопросах и задачах / В.Ф. Бутузов, Н.Ч. Крутицкая, Г.Н. Медведев, А.А. Шишкин – М.: Высш. школа, 1984. – 199 с.

4. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. – М.: Наука, 1968. – Т.1. – 440 с.

Редактор Г. М. Кляут
ИД 06039 от 12.10.01
Подписано в печать 12.03.04. Бумага офсетная. Формат 60x84 1/16
Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ. л. 2,75. Уч.-изд. л. 2,75.
Тираж 150 экз. Заказ

Издательство ОмГТУ. 644050, г. Омск, пр-т Мира, 11
Типография ОмГТУ