Министерство образования и науки Российской Федерации
Омский государственный технический университет

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Методические указания для студентов-заочников

Омск-2004

Составитель: Николаева Наталья Ивановна, доцент, канд. физ.-мат. наук

Печатается по решению редакционно-издательского и научно-методического советов Омского государственного технического университета.

Определение числового ряда и его сходимости. Необходимый признак сходимости

Пусть $u_1,\ u_2,\ u_3, \ldots,\ u_n, \ldots$ – бесконечная последовательность чисел.

Определение. Выражение

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots, \qquad (1)$$

или, что то же самое, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, называется *числовым рядом*, а числа $u_1,\ u_2, \ldots,$ $u_n, \ldots$ – *членами ряда*. Член u_n с произвольным номером называется $\mathbf{n}$-м, или *общим членом ряда*.

Само по себе выражение (1) никакого определенного числового смысла не имеет, потому что, вычисляя сумму, мы каждый раз имеем дело лишь с конечным числом слагаемых. Определить смысл этого выражения наиболее естественно следующим образом.

Пусть дан ряд (1).

Определение. Сумма $\mathbf{n}$ первых членов ряда

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

называется $\boldsymbol{n}$*-й частичной суммой* ряда. Образуем последовательность частичных сумм:

$$S_1 = u_1;\quad S_2 = u_1 + u_2;\quad S_3 = u_1 + u_2 + u_3;\quad \ldots;\quad S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

С неограниченным увеличением числа $\mathbf{n}$ в сумме S_n учитывается все большее число членов ряда. Поэтому разумно дать такое определение.

Определение. Если при $n \to \infty$ существует конечный предел последовательности частичных сумм S_n ряда (1), то *ряд* называется *сходящимся* и число $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ называется его *суммой*.

Если последовательность $\{S_n\}$ не стремится к пределу, то ряд называется *расходящимся*. Отметим, что ряд может расходиться в двух случаях: 1) если $S_n \to \infty$, 2) если $\{S_n\}$ колеблющаяся. В обоих случаях говорят, что ряд суммы не имеет.

Пример 1. Рассмотрим ряд, составленный из членов геометрической прогрессии:

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}, \qquad (2)$$

где a – называется первым членом прогрессии, а q – ее знаменателем.

Частичная сумма этого ряда при $q \neq 1$ имеет вид

$$S_n = \frac{a\left(1-q^n\right)}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}.$$

Отсюда:

1) если $|q| < 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}\right) = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q}\lim_{n\to\infty} q^n = \frac{a}{1-q},$$

т.е. ряд геометрической прогрессии сходится и его сумма $S = \dfrac{a}{1-q}$.

В частности, если $a = 1$, $q = \dfrac{1}{2}$, ряд $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{2^{n-1}} + \ldots$ сходится и его сумма $S = 2$.

При $a = 1$, $q = -\dfrac{1}{2}$ ряд $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{1}{2^{n-1}} + \ldots$ также сходится и его сумма $S = \dfrac{2}{3}$.

2) если $|q| > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a - aq^n}{1-q} = \infty$, т.е. ряд (2) расходится.

3) если $q = 1$, то ряд (2) принимает вид $a + a + \ldots + a + \ldots$. В этом случае

$S_n = n \cdot a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т.е. ряд расходится (при $a \neq 0$).

4) если $q = -1$, то ряд (2) принимает вид $a - a + a - \ldots + (-1)^{n-1} a + \ldots$. Для этого ряда

$$S_1 = S_3 = S_5 = \ldots = S_{2n+1} = a, \text{ а } S_2 = S_4 = S_6 = \ldots = S_{2n} = 0,$$

т.е. $\{S_n\}$ является колеблющейся и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует, следовательно, ряд также расходится (при $a \neq 0$).

Вычисление суммы ряда непосредственно по определению очень неудобно из-за трудности явного вычисления частичных сумм S_n и нахождения предела их последовательности. Но, если установлено, что ряд сходится, его сумму можно вычислить приближенно, т.к. из определения предела последовательности следует, что при достаточно больших n $S_n \approx S$. Поэтому при исследовании рядов достаточно

1) знать приемы, позволяющие констатировать сходимость ряда без нахождения его суммы;

2) уметь определить n, при котором частичная сумма S_n приближает сумму ряда S с определенной точностью.

Сходимость числовых рядов устанавливается с помощью теорем, которые называются признаками сходимости.

Необходимый признак **сходимости**

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то его общий член стремится к нулю, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Отсюда следует, что если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ не равен нулю, то ряд $\sum\limits_{n\to\infty} u_n$ расходится.

Пример 2. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится, если

а) $u_n = \dfrac{n^2 - 3n + 10}{10n^2 - 3n + 1}$;

б) $u_n = \left(\dfrac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n}$;

в) $u_n = n \sin\dfrac{\pi}{2n+1}$;

г) $u_n = \dfrac{2^{n+1}+1}{2^{n+3}+3}$.

Решение.

а) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2 - 3n + 10}{10n^2 - 3n + 1} = \dfrac{1}{10} \neq 0$ (методы вычисления пределов последовательностей, см., например, в [5]). Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2 - 3n + 10}{10n^2 - 3n + 1}$ расходится.

б) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{3}{3n+2}\right)^{2n} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1 - \frac{3}{3n+2}\right)^{-\frac{3n+2}{3}}\right)^{-\frac{6n}{3n+2}} = e^{-2} \neq 0$$

и поэтому ряд расходится. При решении использовался второй замечательный предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n} = e$ (подробнее см. [5]).

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\dfrac{\pi}{2n+1} = 0$, т.е. последовательность $\left\{\sin\dfrac{\pi}{2n+1}\right\}$ – бесконечно малая. Так как при $t \to 0$ $\sin t \sim t$ (см. [5]), то $\sin\dfrac{\pi}{2n+1} \sim \dfrac{\pi}{2n+1}$.

Учитывая это, получим:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} n\sin\frac{\pi}{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi n}{2n+1} = \frac{\pi}{2} \neq 0,$$

значит, ряд расходится.

$$\text{г) } \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+1}{2^{n+3}+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 2^n+1}{8\cdot 2^n+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+2^{-n}}{8+3\cdot 2^{-n}} = \frac{1}{4} \neq 0,$$

следовательно, ряд расходится.

Условие $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ является *необходимым*, но *не достаточным* условием сходимости ряда: существует множество рядов, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, но которые тем не менее расходятся.

Пример 3. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Решение. Заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$, т.е. необходимое условие сходимости выполнено. Частичная сумма

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n\text{ – раз}} = n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}},$$

поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \geq \lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n} = \infty$, а это значит, что ряд расходится по определению.

Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов

Пусть $u_n \geq 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ будем называть знакоположительным. Сформулируем некоторые достаточные условия сходимости таких рядов.

Признак сравнения

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ – знакоположительные ряды. Если для всех $n \in N$ выполняется неравенство $u_n \leq v_n$, то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, а из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$.

Этот признак остается в силе, если неравенство $u_n \leq v_n$ выполняется не при всех $n \in N$, а лишь начиная с некоторого номера $n = n_0$. Его можно проинтерпретировать следующим образом: если больший ряд сходится, то меньший тем более сходится; если расходится меньший ряд, то больший также расходится.

Пример 4. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, если

а) $u_n = \dfrac{1}{2^n \cdot n}$; б) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$;

Решение.

а) Заметим, что $\dfrac{1}{2^n \cdot n} \leq \dfrac{1}{2^n}$ для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$. Ряд с общим членом $v_n = \dfrac{1}{2^n}$ сходится, т.к. является рядом геометрической прогрессии со знаменателем $q=\frac{1}{2}$ (см. пример 1), поэтому данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n}$ сходится по признаку сравнения.

б) Сравним ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$. Очевидно, что для всех $n\in N \quad \sqrt{n}\ge\sqrt[3]{n}$, поэтому $\frac{1}{\sqrt{n}}\le\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. В примере 3 было доказано, что ряд с общим членом $v_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится, значит, данный ряд также расходится.

Несмотря на простоту формулировки признака сравнения, на практике более удобна следующая теорема, являющаяся его следствием.

Предельный признак сравнения

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ – знакоположительные ряды. Если существует *конечный* и *не равный нулю* предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}$, то оба ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ одновременно сходятся или одновременно расходятся.

В качестве ряда, используемого для сравнения с данным, часто выбирают ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$; $p>0$. Такой ряд называется *рядом Дирихле*. В примерах 3 и 4 было показано, что ряд Дирихле с $p=\frac{1}{2}$ и $p=\frac{1}{3}$ расходится. Можно показать, что ряд $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} \quad \begin{array}{l} \textit{при} \quad p>1 \quad \textit{сходится} \\ \textit{при} \quad 0<p\le 1 \quad \textit{расходится} \end{array}}$.

Если $p=1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ называется *гармоническим*. Гармонический ряд расходится.

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ с помощью предельного признака сравнения, если

а) $u_n=\frac{2n-1}{3n^2+5n+1}$; б) $u_n=\frac{n^2+3n+4}{4n^4+5n^2+1}$; в) $u_n=\sqrt{n}\,\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{n+1}$;

Решение. а) Так как при достаточно больших n $2n-1\sim 2n$, а

$3n^2+5n+1\sim 3n^2$, то $u_n=\frac{2n-1}{3n^2+5n+1}\sim\frac{2n}{3n^2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n}$. Выберем для сравнения с данным гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, т.е. $v_n=\frac{1}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)\cdot n}{3n^2+5n+1}=\frac{2}{3} \quad (\text{см. [5]}).$$

Поскольку предел конечен и отличен от нуля и гармонический ряд расходится, то расходится и данный ряд.

б) При достаточно больших n $n^2+3n+4\sim n^2$, $4n^4+5n^2+1\sim 4n^4$, поэтому $v_n=\frac{n^2}{n^4}=\frac{1}{n^2}$ – общий член ряда, с которым будем сравнивать данный:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+3n+4\right)n^2}{4n^4+5n^2+1}=\frac{1}{4} \quad (\text{см. [5]}).$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится (ряд Дирихле с $p=2$), поэтому данный ряд также сходится.

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{n+1}=0$, поэтому бесконечно малую $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{n+1}$ можно заменить на эквивалентную ей при $n\to\infty$ величину $\frac{\sqrt{3}}{n+1}$ $\left(\operatorname{arctg} t \sim t\right.$ при $t\to 0$ – см. [5] $\left.\right)$.

Тогда $v_n=\frac{\sqrt{n}}{n}=\frac{1}{\sqrt{n}}$ – общий член ряда для сравнения.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{n+1}\cdot\sqrt{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\sqrt{3}}{n+1}=\sqrt{3}.$$

Так как предел конечен и не равен нулю, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится (ряд Дирихле с $p=\frac{1}{2}$), то данный ряд расходится.

Существуют признаки сходимости рядов, позволяющие непосредственно судить о сходимости или расходимости данного ряда, не сравнивая его с рядом, поведение которого известно.

Признак Даламбера

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ – знакоположительный ряд. Если существует $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$, то при $q<1$ *ряд сходится*, а при $q>1$ *ряд расходится*.

Если $q=1$, то признак Даламбера не дает возможности судить о поведении ряда. В этом случае необходимо дополнительное исследование, например, с помощью признаков сравнения.

В примерах 5 а), б) с помощью предельного признака сравнения было установлено, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n-1}{3n^2+5n+1}$ расходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+3n+4}{4n^4+5n^2+1}$ сходится. Посмотрим, как работает применительно к этим рядам признак Даламбера:

$$u_n = \frac{2n-1}{3n^2+5n+1}, \qquad u_{n+1} = \frac{2n+1}{3(n+1)^2+5n+6};$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)\,(3n^2+5n+1)}{\left(3(n+1)^2+5n+6\right)(2n-1)} = 1.$$

$$u_n = \frac{n^2+3n+4}{4n^4+5n^2+1}; \qquad u_{n+1} = \frac{(n+1)^2+3n+7}{4(n+1)^4+5(n+1)^2+1};$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left((n+1)^2+3n+7\right)\left(4n^4+5n^2+1\right)}{\left(4(n+1)^4+5(n+1)^2+1\right)\left(n^2+3n+4\right)} = 1 \text{ (см. [5]).}$$

Таким образом, в каждом из этих случаев признак Даламбера не приводит к определенному ответу: при $q=1$ ряд может быть и сходящимся, и расходящимся.

Пример 6. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ с помощью признака Даламбера, если

а) $u_n = \dfrac{2^n}{n^8}$; б) $u_n = \dfrac{a^n}{n!}, \quad a>0$; в) $u_n = \dfrac{3^{2n}\sqrt[3]{n-1}}{(2n)!}$;

г) $u_n = \dfrac{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n-1)}{(2n+1)!}$; д) $u_n = \dfrac{2^n}{2n+3}\cdot \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3^n}$.

Решение. а) Так как $u_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)^8}$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot 2\cdot n^8}{(n+1)^8\cdot 2^n} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{n^8}{(n+1)^8} = 2>1.$$

Это означает, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n^8}$ расходится.

б) Символ $n!$ (читается “эн факториал”) – сокращенное обозначение произведения всех натуральных чисел от единицы до данного натурального числа n: $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$. Например, $3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$, $5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$,

$$6! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 5!\cdot 6 = 720,$$

$$(n+1)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1) = n!\,(n+1),$$

$$(2n)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot 2n,$$

$$(2n+1)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2n\cdot(2n+1).$$

Так как $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{a^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot a^n} = \dfrac{a\cdot a^n\cdot n!}{n!\,(n+1)\cdot a^n} = \dfrac{a}{n+1}$, то для любого $a>0$ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$ и поэтому ряд сходится. Отсюда можно сделать весьма важный вывод: так как при любом $a>0$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{n!}$ сходится, то по необходимому признаку сходимости $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!} = 0$.

в) Так как $u_{n+1} = \dfrac{3^{2(n+1)}\ \sqrt[3]{n}}{(2n+2)!} = \dfrac{3^{2n}\cdot 9\cdot \sqrt[3]{n}}{(2n)!\,(2n+1)\,(2n+2)}$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}\cdot 9}{(2n+1)(2n+2)\sqrt[3]{n-1}} = 0$$ (см. [5]), т. е. ряд сходится.

г) Для того, чтобы записать u_{n+1}, заменим в u_n n на $(n+1)$. Тогда к произведению $2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)$ добавится еще один сомножитель, равный $3(n+1)-1 = 3n+2$, а к произведению $(2n+1)!$ – еще два сомножителя: $(2n+3)! = (2n+1)!(2n+2)(2n+3)$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)\cdot(3n+2)\cdot(2n+1)!}{(2n+1)!\cdot(2n+2)\cdot(2n+3)\cdot 2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{(2n+2)(2n+3)} = 0.$$

Значит, данный ряд сходится.

д) Заметим, что при $n\to\infty$ $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3^n}\to 0$, поэтому при вычислении предела можно воспользоваться принципом замены эквивалентных бесконечно малых (см. [5]), заменив $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3^n}$ на эквивалентную бесконечно малую величину $\dfrac{\pi}{3^n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\ \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3^{n+1}}(2n+3)}{(2n+5)\cdot 2^n\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot\pi(2n+3)\cdot 3^n}{(2n+5)\cdot 3^{n+1}\cdot 2^n\cdot\pi} = \frac{2}{3} < 1.$$

Следовательно, ряд сходится.

Анализ рассмотренных примеров позволяет сделать следующий вывод: *признак Даламбера непременно дает ответ на* вопрос о сходимости рядов, *общий член* которых *содержит факториал или показательную функцию* $a^n,\ a>0$.

Радикальный признак Коши

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ – знакоположительный ряд. Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = q$, то при $q < 1$ *ряд сходится*, а при $q > 1$ *ряд расходится*.

Если $q = 1$ ряд может как сходиться, так и расходиться. Выяснить это можно с помощью дополнительного исследования, например, используя признаки сравнения.

При применении радикального признака Коши бывает полезно знать, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1. \tag{3}$$

Пример 7. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ с помощью радикального признака Коши

а) $u_n = \dfrac{n^2 \cdot 5^n}{(4n+3)^n}$; б) $u_n = \left(\dfrac{n-2}{n+1}\right)^{n^2-4n+1}$; в) $u_n = \left(\dfrac{3n+5}{5n+4}\right)^{2n}$;

г) $u_n = (2n+1)\,\mathrm{arctg}^n \dfrac{n\sqrt{3}}{n+3}$; д) $u_n = \left(\dfrac{n^2+2}{n^2}\right)^{n^3} \cdot 5^{-n}$.

Решение. а) Так как $\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{n^2}\,\dfrac{5}{4n+3}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^2 = 1$,

(см. равенство (3)), то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 0$ и поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2 5^n}{(4n+3)^n}$ сходится.

б) В этом случае $\sqrt[n]{u_n} = \left(\dfrac{n-2}{n+1}\right)^{n-4+\frac{1}{n}} = \left(\dfrac{1-\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n} \cdot \left(\dfrac{1-\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{n}-4}$. Так как

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)^{mn} = e^{mk}$ (см. [5]), а $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)^{p} = 1$, то

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{n}-4}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}-4}} = \frac{1}{e^3} < 1.$$

Это означает, что данный ряд сходится.

в) В этом случае удобно применить признак Коши, т. к. $\sqrt[n]{u_n} = \left(\dfrac{3n+5}{5n+4}\right)^2$,

а предел этого выражения находится просто:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+5}{5n+4}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 < 1.$$

Значит, ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+5}{5n+4}\right)^{2n}$ сходится.

г) Заметим, что при $n\to\infty$ $\operatorname{arctg}\dfrac{n\sqrt{3}}{n+3} \to \operatorname{arctg}\sqrt{3}$, а $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$.

Кроме того, т. к. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n+1} = 1$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n+1}\operatorname{arctg}\frac{n\sqrt{3}}{n+3} = \frac{\pi}{3} > 1$$

и поэтому ряд расходится.

д) Так как $\sqrt[n]{u_n} = \left(\dfrac{n^2+2}{n^2}\right)^{n^2} \cdot \dfrac{1}{5} = \left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)^{n^2} \cdot \dfrac{1}{5}$ и

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)^{n^2} = e^2$ (см. [5]), то $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \dfrac{e^2}{5} > 1$.

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n^2+2}{n^2}\right)^{n^3} \cdot 5^{-n}$ расходится.

Признак Даламбера и радикальный признак Коши основаны, по существу, только на свойствах геометрической прогрессии. Поэтому при исследовании медленно сходящихся или медленно расходящихся рядов (прогрессии в их число не входят) эти признаки оказываются нечувствительными $(q=1)$. В таких случаях, кроме признаков сравнения, можно использовать *интегральный признак Коши*. Этот признак четко проводит различия между сходящимися и расходящимися рядами, даже если члены одного из них лишь незначительно отличаются от членов другого.

Интегральный признак Коши

Пусть члены знакоположительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ не возрастают:

$u_1 \geq u_2 \geq \ldots \geq u_n \geq u_{n+1} \geq \ldots$. Пусть, кроме того, $f(x)$ – непрерывная, невозрастающая функция, определенная для всех $x \geq 1$, такая, что

$f(1) = u_1, \quad f(2) = u_2, \ \ldots, \quad f(n) = u_n, \quad \ldots$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Пример 8. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ с помощью интегрального признака Коши, если

а) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt[4]{n^3}}$; б) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$; в) $u_n = \dfrac{2n}{e^{n^2}}$; г) $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{8+\ln^2 n}}$.

Решение. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[4]{n^3}}$ – ряд Дирихле с $p = \dfrac{3}{4}$. Ранее было отмечено, что этот ряд расходится. Докажем это. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$. Она непрерывна и убывает при всех $x \geq 1$. Кроме того, $f(n) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{n^3}}$, поэтому $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ удовлетворяет условиям теоремы.

Вычислим $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}} = 4\sqrt[4]{x}\Big|_1^{\infty} = \infty$.

Несобственный интеграл расходится, значит, расходится и данный ряд.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$ – ряд Дирихле с $p = \dfrac{4}{3}$. Как было отмечено, этот ряд сходится.

Чтобы убедиться в этом, применим интегральный признак Коши: $u_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$,

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$; $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}} = -\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\Big|_1^{+\infty} = 3$.

Несобственный интеграл сходится, поэтому сходится и данный ряд.

в) Рассмотрим при $x \geq 1$ функцию $f(x) = 2x\, e^{-x^2}$. Ее производная

$f'(x) = 2\left(1 - 2x^2\right) e^{-x^2} < 0$ при всех $x \geq 1$. Следовательно, $f(x)$ убывает

и $f(n) = 2n\, e^{-n^2}$.

$$\int_1^{+\infty} 2x\, e^{-x^2}\, dx = \int_1^{+\infty} e^{-x^2}\, dx^2 = -e^{-x^2}\Big|_1^{+\infty} = 1.$$

Несобственный интеграл сходится, а потому сходится и данный ряд.

г) Функция $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{8 + \ln^2 x}}$ непрерывна и убывает при всех $x \geq 1$.

Несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{8 + \ln^2 x}} = \int_1^{+\infty} \frac{d \ln x}{\sqrt{8 + \ln^2 x}} = \ln\left|\ln x + \sqrt{8 + \ln^2 x}\right|\Big|_1^{\infty} = \infty,$$

т. е. расходится, значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{8 + \ln^2 n}}$ тоже расходится.

Знакочередующиеся ряды

Определение. Ряды, члены которых имеют разные знаки, называются *знакопеременными*. Если члены ряда поочередно имеют то положительный, то отрицательный знаки, то ряд называется *знакочередующимся*.

Знакочередующиеся ряды – частный случай рядов знакопеременных.

Если $u_n > 0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ – знакочередующийся ряд. Например, ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\ldots$$

и $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\cos\frac{\pi n}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{25}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{36}-\ldots$$

знакопеременные, а ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{2n+1}{n^2}=3-\dfrac{5}{4}+\dfrac{7}{9}-\dfrac{9}{16}+\ldots,$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n^2}{3^n\left(2^n+1\right)}=\frac{1}{9}-\frac{4}{45}+\frac{9}{243}-\ldots,$$

и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{5^{2n-1}}{n!}=-5+\dfrac{5^3}{2!}-\dfrac{5^5}{3!}+\dfrac{5^7}{4!}-\ldots$ – знакочередующиеся.

Для *знакочередующихся* рядов имеет место следующий достаточный признак сходимости.

Признак Лейбница

Пусть члены знакочередующегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n, \quad u_n>0$ удовлетворяют условиям:

1) $u_1>u_2>\ldots>u_n>u_{n+1}>\ldots$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

Тогда ряд сходится, и его сумма $S<u_1$.

Пример 9. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, если

а) $$u_n = (-1)^{n-1}\,\frac{2n+1}{n^2};$$

б) $$u_n = \frac{(-1)^{n+1} n^2}{3^n\left(2^n+1\right)}.$$

Решение. а) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{2n+1}{n^2}$ – знакочередующийся, $u_n = \frac{2n+1}{n^2}$.

Проверим условия признака Лейбница:

1) $3 > \frac{5}{4} > \frac{7}{9} > \frac{9}{16} > \ldots,\qquad u_n = \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} > u_{n+1} = \frac{2}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2};$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n^2} = 0$ (см. [5]).

Делаем вывод, что ряд сходится.

б) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} n^2}{3^n\left(2^n+1\right)}$ – также знакочередующийся.

Он сходится, т. к. удовлетворяет условиям признака Лейбница:

$$u_n = \frac{n^2}{3^n\left(2^n+1\right)}$$

и 1) $\frac{1}{9} > \frac{4}{45} > \frac{9}{243} > \ldots;\qquad$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{3^n\left(2^n+1\right)} = 0,$

потому что знаменатель этой дроби при $n \to \infty$ растет гораздо быстрее числителя.

Для *знакопеременных* рядов имеет место следующий признак сходимости.

Признак сходимости знакопеременных рядов

Если для знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится ряд, составленный из модулей его членов $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, то данный ряд тоже сходится.

Пример 10. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos\frac{\pi n}{6}$.

Решение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos\frac{\pi n}{6}$ знакопеременный, к нему неприменим признак Лейбница. Составим ряд из модулей: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left|\cos\frac{\pi n}{6}\right|$.

Так как $\frac{1}{n^2} \left|\cos\frac{\pi n}{6}\right| \le \frac{1}{n^2}$, то $\frac{1}{n^2} \left|\cos\frac{\pi n}{6}\right| \le \frac{1}{n^2}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится (ряд Дирихле с $p = 2$). Следовательно, данный ряд сходится по признаку сравнения.

Рассмотренный признак сходимости знакопеременного ряда является достаточным, но не необходимым, т. к. существуют знакопеременные ряды, которые сходятся, а ряды, составленные из модулей их членов, расходятся. Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$, очевидно, сходится по признаку Лейбница, а $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, составленный из абсолютных величин его членов, расходится (гармонический ряд). Поэтому все сходящиеся ряды можно разделить на два типа: *абсолютно* и *условно сходящиеся*.

Определение. Знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

Определение. Знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *условно сходящимся*, если он сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится.

Из сформулированных определений следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ сходится условно, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\cos\frac{\pi n}{6}$ – абсолютно.

Пример 11. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, если

а) $u_n = (-1)^{n-1}\dfrac{2n+1}{n^2}$; б) $u_n = (-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{3^n}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}$;

в) $u_n = (-1)^n \dfrac{5^{2n-1}}{n!}$; г) $u_n = (-1)^{n-1}\dfrac{1}{(n+2)\sqrt[3]{\ln(n+2)+8}}$;

д) $u_n = (-1)^n e^{\frac{2n}{n^2+1}}$.

Решение. а) В примере 9 было показано, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n^2}$ сходится по признаку Лейбница. Рассмотрим ряд из модулей членов этого ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2}$. Сравним его с $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ($2n+1 \sim 2n$ при больших $\mathbf{n}$, поэтому

$\frac{2n+1}{n^2} \sim \frac{2n}{n^2}$). Вычислив $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)n}{n^2\cdot 1}=2$, получим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2}$ расходится по определенному признаку сравнения, т. к. расходится гармонический ряд, а потому $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n^2}$ сходится условно.

б) Исследуем $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ сразу на абсолютную сходимость. К знакоположительному ряду, составленному из абсолютных величин членов данного – $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$, применим радикальный признак Коши. Так как

$\sqrt[n]{|u_n|}=\frac{\sqrt[n]{n^2}}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)^2=1$, а $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n+\frac{1}{n}\right)^n=e$, то

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\frac{e}{3}<1$. Это означает, что знакоположительный ряд сходится, поэтому данный знакочередующийся ряд сходится абсолютно и проверять условия признака Лейбница ни к чему.

в) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5^{2n-1}}{n!}$ также исследуем сначала на абсолютную сходимость. Общий член ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^{2n-1}}{n!}$ содержит факториал, поэтому применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{2n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot 5^{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{2n-1}\cdot 5^2\cdot n!}{n!\cdot(n+1)\cdot 5^{2n-1}}=0.$$

Ряд, составленный из модулей членов данного, сходится, поэтому $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{5^{2n-1}}{n!}$ сходится абсолютно.

г) Начнем исследование $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(n+2)\sqrt[3]{\ln(n+2)+8}}$ также с исследования на абсолютную сходимость.

К ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\sqrt[3]{\ln(n+2)+8}}$ применим интегральный признак Коши.

Функция $f(x)=\frac{1}{(x+2)\sqrt[3]{\ln(x+2)+8}}$ непрерывна и убывает при всех $x \geq 1$, несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(x+2)\sqrt[3]{\ln(x+2)+8}}=\int_1^{+\infty}\frac{d\ln(x+2)}{\sqrt[3]{\ln(x+2)+8}}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{(\ln(x+2)+8)^2}\Big|_1^{\infty}=\infty,$$

т. е. расходится. Следовательно, для данного ряда абсолютная сходимость места не имеет.

Применим признак Лейбница: $u_n=\frac{1}{(n+2)\sqrt[3]{\ln(n+2)+8}}$.

1) $u_n=\frac{1}{(n+2)\sqrt[3]{\ln(n+2)+8}}>u_{n+1}=\frac{1}{(n+3)\sqrt[3]{\ln(n+3)+8}}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n+2)\sqrt[3]{\ln(n+2)+8}}=0$.

Отсюда следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(n+2)\sqrt[3]{\ln(n+2)+8}}$ сходится условно.

д) Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}e^{\frac{2n}{n^2+1}}$ первое условие признака Лейбница выполнено:

$e^1 > e^{\frac{4}{5}} > e^{\frac{6}{10}} > e^{\frac{8}{17}} > \dots$, с другой стороны $\lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{2n}{n^2+1}} = e^0 = 1$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то не выполнено необходимое условие сходимости. Ряд расходится.

Остаток ряда и его оценка

Рассмотрим сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Как было отмечено ранее, вычисление его суммы S непосредственно по определению очень неудобно, однако для достаточно больших $\mathbf{n}$ имеет место приближенное равенство $S \approx S_n$, точность которого возрастает с увеличением $\mathbf{n}$. Для оценки точности этого приближенного равенства введем понятие *остатка* сходящегося ряда.

Определение. Разность между суммой S и $\mathbf{n}$-й частичной суммой S_n ряда называется ***n**-м остатком* сходящегося ряда: $r_n = S - S_n$.

Очевидно $S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$, т. е. r_n представляет собой сумму сходящегося ряда, который получен из данного $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ исключением первых $\mathbf{n}$ членов. Так как по определению $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}\left(S - S_n\right) = 0.$$

Абсолютная погрешность при замене S частичной суммой S_n равна $|r_n| = |S - S_n|$. Таким образом, если требуется найти сумму ряда с точностью до $\varepsilon > 0$, то надо взять столько первых членов ряда, чтобы выполнялось условие $|r_n| < \varepsilon$. Однако, отметим еще раз, остаток r_n – также сумма ряда, и находить его мы в большинстве случаев не умеем. Поэтому выясним, как найти номер ос татка **n**, чтобы $|r_n| < \varepsilon$, т. е. как произвести только оценку остатка, не находя его самого. Это позволит нам вовремя остановиться при вычислении частичных сумм ряда, когда уже будет получено приближение требуемой точности.

Не формулируя теорем об оценке остатка, отметим следующие вполне очевидные факты:

1) если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ – сходящиеся знакоположительные ряды и

$u_n \le v_n,\ n = 1, 2, 3, \ldots$, то $r_n^u \le r_n^v$, где $r_n^u = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k,\ r_n^v = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} v_k$;

2) если знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n,\ u_n > 0$, сходится по признаку Лейбница, то $|r_n| < u_{n+1}$, т. е. абсолютная величина остатка такого ряда меньше модуля первого отброшенного члена ряда. (Это следует из того, что по теореме Лейбница сумма ряда $S < u_1$).

Если данный ряд знакоположительный, то его остаток r_n, составленный из отброшенных членов, чаще всего сравнивают с бесконечно убывающей геометрической прогрессией, т. к. ее сумма вычисляется по известной формуле $S = \dfrac{a}{1-q}$.

Пример 11. Вычислить сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$, если

а) $u_n = \dfrac{5 \cdot 2^{n-1}}{3^{2n+1}}$;

б) $u_n = \dfrac{1}{n \cdot 3^n}$.

Решение. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5\cdot 2^{n-1}}{3^{2n+1}}=\frac{5}{3^3}+\frac{5\cdot 2}{3^5}+\frac{5\cdot 2^2}{3^7}+\ldots$ – ряд геометрической прогрессии со знаменателем $q=\frac{2}{9}$.

По определению $r_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{5\cdot 2^{k-1}}{3^{2k+1}}=\frac{5\cdot 2^n}{3^{2n+3}}+\frac{5\cdot 2^{n+1}}{3^{2n+5}}+\ldots$

является также рядом геометрической прогрессии с $q=\frac{2}{9}$ и первым членом $\frac{5\cdot 2^n}{3^{2n+3}}$. Найдем сумму этой прогрессии, т. е. r_n:

$$r_n=\frac{5\cdot 2^n}{3^{2n+3}\left(1-\frac{2}{9}\right)}=\frac{5\cdot 2^n}{7\cdot 3^{2n+1}}.$$

Путем подбора определим, при каком значении **n** будет выполняться неравенство $r_n<\frac{1}{1000}$. Положим, например, $n=3$. Получим $r_3=\frac{5\cdot 2^3}{7\cdot 3^7}$, т. е. $r_3=\frac{40}{15309}$. Так как $\frac{40}{15309}>\frac{1}{1000}$, то три слагаемых не дают приближение требуемой точности. Пусть $n=4$, отсюда $r_4=\frac{5\cdot 2^4}{7\cdot 3^9}$, т. е. $r_4<\frac{1}{1000}$.

Итак, принимаем $n=4$. Это означает, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5\cdot 2^{n-1}}{3^{2n+1}}\approx\frac{5}{3^3}+\frac{5\cdot 2}{3^5}+\frac{5\cdot 2^2}{3^7}+\frac{5\cdot 2^3}{3^9}\ \text{с точностью}\ \varepsilon=10^{-3}.$$

Неравенство $\frac{5\cdot 2^n}{7\cdot 3^{2n+1}} < \frac{1}{1000}$ можно было решить и не прибегая к подбору:

$\frac{5}{21}\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^n < \frac{1}{1000}$, поэтому $n > \log_{\frac{2}{9}}\frac{21}{5000}$ или $n > \frac{\ln 21 - \ln 5000}{\ln 2 - \ln 9}$.

Приближенное значение полученной дроби можно вычислить на калькуляторе.

б) Знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2\cdot 3^2} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{4\cdot 3^4} + \ldots$

геометрической прогрессией не является, но при всех $n > 1$ справедливо неравенство: $u_n = \frac{1}{n\cdot 3^n} < \frac{1}{3^n} = v_n$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ – ряд геометрической прогрессии со знаменателем

$q = \frac{1}{3}$. Очевидно, $r_n^u \le r_n^v$, где r_n^u – **n**-й остаток исследуемого ряда, а

$$r_n^v = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{3^k} = \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+2}} + \ldots .$$

Поэтому $r_n^v = \frac{1}{3^{n+1}\left(1-\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{2\cdot 3^n}$.

Так как $2\cdot 3^6 > 1000$, то $r_6^v < \frac{1}{1000}$. Значит, r_6^u также меньше $\frac{1}{1000}$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n} \approx \sum_{n=1}^{6} \frac{1}{n \cdot 3^n}$$ с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

Пример 12. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с заданной точностью:

а) $u_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$, $\varepsilon = 10^{-1}$; б) $u_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\varepsilon = 10^{-1}$;

в) $u_n = \frac{(-1)^{n+1} \cdot n^2}{2^{2n} \cdot (n+1)!}$, $\varepsilon = 10^{-2}$; г) $u_n = (-1)^n \frac{2n-1}{n^2 \cdot (3n+7)}$, $\varepsilon = 10^{-2}$.

а) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$ сходится по признаку Лейбница. Сумма $\mathbf{n}$ первых членов этого ряда $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$ отличается от его суммы S на величину меньшую, чем $|u_{n+1}| = \frac{1}{n+1}$. Поэтому, отбросив десятый и следующие за ним члены, получим $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{9}$ с точностью $\varepsilon = 10^{-1}$.

б) Для того, чтобы вычислить приближенно сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$ с такой же точностью $\varepsilon = 10^{-1}$, придется взять не 9, как в примере а), а 99 первых слагаемых, т. к. $r_n < |u_{n+1}| = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ и $r_{99} < \frac{1}{10}$.

Сравнение результатов, полученных в примерах а) и б), приводит к понятию скорости сходимости рядов: очевидно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}$ сходится быстрее, чем $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$, т. к. для вычисления суммы с одной и той же точностью в первом случае необходимо взять меньше слагаемых, чем во втором.

в) Знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot n^2}{2^{2n}\cdot(n+1)!}$ удовлетворяет условиям признака Лейбница, а поэтому допускаемая погрешность $|r_n|<\frac{(n+1)^2}{2^{2n+2}(n+2)!}$.

$u_2=\frac{3^2}{2^6\cdot 4!}<\frac{1}{100}$, значит,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{2^{2n}\cdot(n+1)!}\approx\frac{1}{2^2\cdot 2!}-\frac{2^2}{2^4\cdot 3!}=\frac{1}{8}-\frac{1}{24}=\frac{1}{12}$$

с заданной точностью $\varepsilon=10^{-2}$.

г) Данный ряд также сходится по признаку Лейбница. Абсолютная величина его седьмого члена $|u_7|=\frac{13}{49\cdot 28}<\frac{1}{100}$, следовательно, частичная сумма S_6 отличается от суммы ряда менее, чем на $\varepsilon=10^{-2}$, и

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n-1}{n^2\cdot(3n+7)}\approx-\frac{1}{10}+\frac{3}{2^2\cdot 13}-\frac{5}{3^2\cdot 16}+\frac{7}{4^2\cdot 19}-\frac{9}{5^2\cdot 22}+\frac{11}{6^2\cdot 25}.$$

ЗАДАЧА 1

Доказать расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, используя необходимый признак сходимости.

1.	$u_n = \sqrt{\dfrac{3n+4}{5n+1}}$	2.	$u_n = \dfrac{n+2}{\sqrt[3]{n^3+2n+4}}$
3.	$u_n = 3^{-\frac{1}{5^n}} \cdot \dfrac{n+1}{2n+3}$	4.	$u_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n$
5.	$u_n = \sqrt{\dfrac{4n-1}{100n+36}}$	6.	$u_n = \cos\dfrac{\pi}{3^n}$
7.	$u_n = \operatorname{tg}\dfrac{\pi n}{4n+1}$	8.	$u_n = \left(\dfrac{n-3}{n}\right)^n$
9.	$u_n = \dfrac{\sqrt{3n^2-4n}}{4n+5}$	10.	$u_n = \dfrac{\pi\left(n^2+2n-1\right)}{6n^2-5n+6}$
11.	$u_n = e^{\frac{n+1}{n^3+2n^2+3}}$	12.	$u_n = \cos\dfrac{\pi n+1}{6n^2+5n+4}$
13.	$u_n = \sqrt[3]{\dfrac{n+1}{8n+7}}$	14.	$u_n = \left(n^2+1\right)\sin\dfrac{\pi}{n^2}$
15.	$u_n = \dfrac{6\cdot 3^n + 2^{2n}}{7\cdot 2^{2n} - 3^{n+1}}$	16.	$u_n = \dfrac{2n^2+3n-1}{10n^2+15n+3}$
17.	$u_n = \sin\dfrac{\pi n+3}{3n+\pi}$	18.	$u_n = \left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)^{3n}$

19.	$u_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}$	20.	$u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3\sqrt{n}}{2n+1}}$
21.	$u_n = \pi n \cdot \mathrm{tg}\frac{\pi}{10n+1}$	22.	$u_n = \cos\frac{\pi}{2n} - \sin\frac{\pi}{4n}$
23.	$u_n = \frac{5 \cdot 2^n + 2 \cdot 5^n}{2 \cdot 5^{n+1}}$	24.	$u_n = \left(\frac{4n-1}{100n+27}\right)^{\frac{n}{2n+5}}$
25.	$u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+4} + \sqrt{9n^2+1}}$	26.	$u_n = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{n+1}{n\sqrt{n+2}}}$
27.	$u_n = \cos^2\frac{\pi n+4}{4n+\pi}$	28.	$u_n = \sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2+n}$
29.	$u_n = e^{\frac{n-2n^2}{n^2+3n+1}}$	30.	$u_n = \ln^2\frac{4n-1}{5n+7}$

ЗАДАЧА 2

Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ с помощью предельного признака сравнения.

1.	$u_n = \frac{2n^2+5n+1}{\sqrt{n^6+3n^2+2}}$	2.	$u_n = \frac{1}{2^n - n}$
3.	$u_n = \frac{e^n+n^4}{3^n+n^2+9n}$	4.	$u_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$
5.	$u_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$	6.	$u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$

7.	$u_n = \dfrac{\sqrt[3]{n}}{(2n-1)\left(5\sqrt[3]{n}-1\right)}$	8.	$u_n = \dfrac{1}{n\sqrt[3]{n}+\sqrt{n}}$
9.	$u_n = \dfrac{2^n + n^2}{5^n + n^5}$	10.	$u_n = \sin\dfrac{\pi}{4n^2}$
11.	$u_n = \mathrm{tg}\,\dfrac{\pi n}{4n^2+4n+1}$	12.	$u_n = \dfrac{2n+1}{\sqrt{n^3+n}+\sqrt[3]{n^2}}$
13.	$u_n = \dfrac{n+1}{n+3}\arcsin\dfrac{1}{n^2+2}$	14.	$u_n = \sqrt{\dfrac{n^2}{n^6+4n^3+2n^2+1}}$
15.	$u_n = \dfrac{3n^2-5n+6}{\sqrt{n^7+4n^5+2}}$	16.	$u_n = \dfrac{3^n+2n^2}{2^{n+4}+4n^4+2n^2+3}$
17.	$u_n = \dfrac{\sqrt{3n+2}}{n^4+3n^2+2n}$	18.	$u_n = \pi n \cdot \mathrm{tg}\,\dfrac{1}{10n^3}$
19.	$u_n = (n+1)\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{(n+2)^2}$	20.	$u_n = \dfrac{n}{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}}$
21.	$u_n = \dfrac{n^2+2n+5}{n^4+2n^2+5}$	22.	$u_n = \dfrac{3^n}{3^{2n}+3^{n+1}+4}$
23.	$u_n = n\,\sin\dfrac{\pi}{2n^3}$	24.	$u_n = \dfrac{1}{(4n-1)(4n+3)}$
25.	$u_n = \sin\dfrac{2\pi n}{4n^2+1}$	26.	$u_n = \dfrac{1}{n}\,\mathrm{tg}^2\,\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}$
27.	$u_n = \dfrac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5+2}}$	28.	$u_n = n^2\,\mathrm{tg}^4\,\dfrac{\pi}{n}$
29.	$u_n = \dfrac{\mathrm{arctg}\,\dfrac{\pi}{4\sqrt{n}}}{\sqrt[3]{n+3}}$	30.	$u_n = \dfrac{3}{6^{n-1}+n-1}$

ЗАДАЧА 3

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с помощью признака Даламбера.

1.	$u_n = \dfrac{n^{10}}{(n+1)!}$	2.	$u_n = \dfrac{n^2}{(n+2)!}$
3.	$u_n = \dfrac{3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n-1)}$	4.	$u_n = \dfrac{2n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$
5.	$u_n = \dfrac{5^{2n}}{(2n-1)!}$	6.	$u_n = \dfrac{4^{n+1}\sqrt{n^2+3}}{(n-1)!}$
7.	$u_n = \dfrac{(2n+1)!}{10^n \cdot n^2}$	8.	$u_n = n!\sin\dfrac{\pi}{4^n}$
9.	$u_n = \dfrac{2n^3}{3^{2n}}$	10.	$u_n = \dfrac{(n-1)^2}{2^n(n+1)!}$
11.	$u_n = \dfrac{n!}{10^{2n}}$	12.	$u_n = \dfrac{n!}{3^{2n-1}}$
13.	$u_n = \dfrac{7^n\sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}$	14.	$u_n = \dfrac{(2n+1)!}{9^{2n}}$
15.	$u_n = \dfrac{4n^4}{4^{3n}}$	16.	$u_n = \dfrac{n!}{3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n+1)}$
17.	$u_n = \dfrac{1}{5^n\left(\sqrt[3]{n}+1\right)}$	18.	$u_n = \dfrac{3^n(n+1)!}{(2n)!}$

19.	$u_n = \dfrac{(2n-1)!}{3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n-1)}$	20.	$u_n = \dfrac{(n+1)^6}{(n+2)!}$
21.	$u_n = \dfrac{9^{2n}}{(2n+1)!}$	22.	$u_n = \dfrac{10^n \cdot n^2}{(2n-1)!}$
23.	$u_n = \dfrac{3n-1}{\left(\sqrt{3}\right)^n}$	24.	$u_n = \dfrac{\left(\sqrt{5}\right)^{2n}\sqrt{n^3}}{(n-1)!}$
25.	$u_n = \dfrac{(n+1)!}{2^n \cdot n^6}$	26.	$u_n = \dfrac{(2n-1)!}{n!}$
27.	$u_n = \dfrac{1}{3^n\left(\sqrt[4]{n^2+n+1}+1\right)}$	28.	$u_n = \dfrac{n!}{(2n+1)!}$
29.	$u_n = \dfrac{4^n (n-1)^4}{n!}$	30.	$u_n = \dfrac{(2n)!}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}$

ЗАДАЧА 4

Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ с помощью радикального признака Коши.

1.	$u_n = 2^n\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$	2.	$u_n = 3^{n+1}\left(\dfrac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$
3.	$u_n = \left(\dfrac{n^2+5}{n^2+6}\right)^{n^3}$	4.	$u_n = \left(\dfrac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$

5.	$u_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{n}{5^n}$	6.	$u_n = n\left(\frac{3n+1}{4n+3}\right)^{2n}$
7.	$u_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{2^n}$	8.	$u_n = n \cdot \arcsin^n \sqrt{\frac{3n+1}{4n+3}}$
9.	$u_n = 3^{-n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$	10.	$u_n = \left(\frac{8n+1}{4n+3}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2n}{3}}$
11.	$u_n = \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n+1}$	12.	$u_n = n^2 \sin^n \frac{\pi}{2n}$
13.	$u_n = \left(\frac{n^2-3}{n^2-2}\right)^{n^3}$	14.	$u_n = \frac{3^n}{2^{3n}} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$
15.	$u_n = \frac{n^3 \cdot 3^n}{(2n+1)^n}$	16.	$u_n = n^2\left(\frac{5n+6}{6n+5}\right)^{\frac{n}{2}}$
17.	$u_n = \left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3}\right)^{n\sqrt{n}}$	18.	$u_n = \left(\frac{3n+1}{4n+2}\right)^n (n+1)^2$
19.	$u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2+4n+5}$	20.	$u_n = \left(\frac{2n^2+3n+1}{5n^2+4n+7}\right)^{2n-1}$
21.	$u_n = \frac{n^2 \cdot 2^{2n}}{(5n-3)^n}$	22.	$u_n = (n+1)^2 \ \mathrm{tg}^n \frac{\pi n^2 + \pi n + 1}{6n^2}$
23.	$u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\sqrt{n^4+3n^2+9}}$	24.	$u_n = 2^{-n}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^{n^2}$

25.	$u_n = \left(\frac{2n+3}{2n+5}\right)^{2n^2+5n+7}$	26.	$u_n = \left(\frac{2n}{4n+7}\right)^{n^2}$
27.	$u_n = \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n \cdot \frac{n}{10^n}$	28.	$u_n = \left(\frac{4n-3}{5n+3}\right)^{n^3}$
29.	$u_n = \sqrt[4]{n} \cdot \left(\frac{n-2}{3n+1}\right)^{2n}$	30.	$u_n = n^2 \operatorname{arctg}^n \frac{2n-1}{2n+1}$

ЗАДАЧА 5

Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ с помощью интегрального признака Коши.

1.	$u_n = n^2 e^{-n^3}$	2.	$u_n = \frac{1}{n\left(\ln^2 n + 1\right)}$
3.	$u_n = \frac{1}{n\left(\ln^2 n + 4\right)}$	4.	$u_n = n\ e^{-\left(n^2-1\right)}$
5.	$u_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$	6.	$u_n = \frac{1}{n\sqrt[3]{1+\ln n}}$
7.	$u_n = \frac{1}{n\sqrt[4]{(\ln n + 4)^3}}$	8.	$u_n = \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$
9.	$u_n = n^3\ e^{-n^4}$	10.	$u_n = \frac{1}{(n+2)\ln^3(n+2)}$

11.	$u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{\ln^2 n + 1}}$	12.	$u_n = \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{\ln^5(n+1)}}$
13.	$u_n = n^2 \cdot 2^{-n^3}$	14.	$u_n = \dfrac{\operatorname{arctg} n}{n^2 + 1}$
15.	$u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{(\ln n + 1)^3}}$	16.	$u_n = n \cdot 4^{-n^2}$
17.	$u_n = e^{-\sqrt{n}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{n}}$	18.	$u_n = \dfrac{\operatorname{arctg}^3 n}{n^2 + 1}$
19.	$u_n = \dfrac{1}{(n+3)\ln^4(n+3)}$	20.	$u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{(\ln n + 4)^5}}$
21.	$u_n = \dfrac{2(n+1)}{3^{n^2+2n}}$	22.	$u_n = \dfrac{1}{2\sqrt{n+1} \cdot e^{\sqrt{n+1}}}$
23.	$u_n = \dfrac{1}{n\left(\ln^2 n - 2\ln n + 1\right)}$	24.	$u_n = \dfrac{1}{(n+1)\left(\ln^2(n+1) - 1\right)}$
25.	$u_n = \dfrac{3(n+1)^2}{e^{(n+1)^3}}$	26.	$u_n = \dfrac{1}{n\left(\ln^2 n + 2\ln n + 1\right)}$
27.	$u_n = \dfrac{1}{(n+2)\left(\ln^2(n+2) - 2\ln(n+2)\right)}$	28.	$u_n = n^3 \cdot 5^{-\frac{n^4}{4}}$
29.	$u_n = \dfrac{1}{n\left(\ln^2 n + 3\right)}$	30.	$u_n = \dfrac{2(n+2)}{e^{n^2+4n+3}}$

ЗАДАЧА 6

Исследовать на абсолютную и условную сходимость знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

1.	$u_n = \dfrac{(-1)^n \cdot n}{(n+2)\sqrt[4]{n+1}}$	2.	$u_n = (-1)^n \dfrac{\sqrt{n^2+2n+30} - \sqrt{n^2-2n+3}}{n}$
3.	$u_n = (-1)^{n-1} \dfrac{n^3}{(n+1)!}$	4.	$u_n = (-1)^{n+1} \dfrac{2n-1}{18n+7}$
5.	$u_n = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)2^{2n+1}}$	6.	$u_n = (-1)^n \dfrac{2^n}{3^n (n+1)}$
7.	$u_n = (-1)^{n+1}\left(1 - \cos\dfrac{\pi}{3n}\right)$	8.	$u_n = (-1)^{n-1} \cdot \cos\dfrac{\pi}{6n}$
9.	$u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt[4]{2n+5}}$	10.	$u_n = (-1)^{n+1}\left(\dfrac{n}{3n+2}\right)^n$
11.	$u_n = (-1)^n \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{3\sqrt{n}}{2n+1}}$	12.	$u_n = (-1)^n \sin\dfrac{\pi}{n} \cdot \mathrm{tg}\,\dfrac{\pi}{4n}$
13.	$u_n = (-1)^{n-1} \dfrac{1}{5^n\left(\sqrt[3]{n^2}+1\right)}$	14.	$u_n = (-1)^n \cdot n \cdot \left(\dfrac{3n+1}{4n+3}\right)^{2n}$
15.	$u_n = \dfrac{(-1)^{n+1} \cdot n^2}{e^{n^3}}$	16.	$u_n = (-1)^n \dfrac{n+3}{\sqrt[3]{n^3+2n+5}}$

17.	$u_n = (-1)^n n \cdot \sin \dfrac{\pi}{2n^3}$	18.	$u_n = (-1)^{n-1} \dfrac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}$
19.	$u_n = \dfrac{(-1)^{n+1} \cdot n^2 \cdot 2^{2n}}{(5n-4)^n}$	20.	$u_n = \dfrac{(-1)^n}{n(\ln^2 n + 1)}$
21.	$u_n = \dfrac{(-1)^n}{n \sqrt[4]{(\ln n + 3)^3}}$	22.	$u_n = (-1)^n \sqrt{\dfrac{n^2}{n^4 + 3n^3 + 2n^2 + 1}}$
23.	$u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n \sqrt{\ln^2 n + 4}}$	24.	$u_n = \dfrac{(-1)^n \cdot n}{\sqrt{n^2 + 4} + \sqrt{4n^2 + 9}}$
25.	$u_n = (-1)^{n-1} \dfrac{n^2}{\sqrt{4n^5 + 3}}$	26.	$u_n = (-1)^n \dfrac{2n^3}{3^{2n}}$
27.	$u_n = (-1)^n \cdot 3^{-n} \cdot \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}$	28.	$u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$
29.	$u_n = (-1)^{n+1} \dfrac{n^{10}}{(n+1)!}$	30.	$u_n = (-1)^n \cdot \dfrac{1}{n} \operatorname{tg}^2 \dfrac{\pi}{\sqrt{n}}$

ЗАДАЧА 7

Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ с заданной точностью ε.

1.	$u_n = \dfrac{2^{n+1}}{3^{2n}}$, $\quad \varepsilon = 10^{-2}$	2.	$u_n = (-1)^{n-1} \dfrac{n+1}{n^3(2n+1)}$, $\quad \varepsilon = 10^{-2}$
3.	$u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n!(2n+1)}$, $\quad \varepsilon = 10^{-3}$	4.	$u_n = \dfrac{3^{n-1}}{5^{2n}}$, $\quad \varepsilon = 10^{-3}$

5.	$u_n = \dfrac{(-1)^n}{(3n-2)(3n+1)}$, $\varepsilon = 10^{-2}$	6.	$u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(2n-1)}$, $\varepsilon = 10^{-3}$
7.	$u_n = \dfrac{2^{n-2}}{5^{2n+1}}$, $\varepsilon = 10^{-4}$	8.	$u_n = \dfrac{(-1)^n \cdot n}{\sqrt{(n+1)^3(n+2)(n+3)}}$, $\varepsilon = 10^{-2}$
9.	$u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2(n+4)}$, $\varepsilon = 10^{-2}$	10.	$u_n = \dfrac{3 \cdot 4^n}{7^{2n}}$, $\varepsilon = 10^{-3}$
11.	$u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n!}$, $\varepsilon = 10^{-3}$	12.	$u_n = \dfrac{(-1)^n}{3^{n+1}(3n+2)}$, $\varepsilon = 10^{-3}$
13.	$u_n = \dfrac{(-1)^{n+1} \cdot n}{5^{n+1}}$, $\varepsilon = 10^{-2}$	14.	$u_n = \dfrac{4^{n-1}}{7^{n+1}}$, $\varepsilon = 10^{-2}$
15.	$u_n = \dfrac{(-1)^n \cdot n}{(n+1)^2\sqrt{2n+3}}$, $\varepsilon = 10^{-1}$	16.	$u_n = \dfrac{(-1)^n}{3^{n-1} \cdot n!}$, $\varepsilon = 10^{-3}$
17.	$u_n = \dfrac{(-1)^{n+1} \cdot n^2}{2^{n^3}}$, $\varepsilon = 10^{-3}$	18.	$u_n = \dfrac{(-1)^{n+1} \cdot n}{3^{n^2}}$, $\varepsilon = 10^{-3}$
19.	$u_n = \dfrac{2 \cdot 3^{n-1}}{10^n}$, $\varepsilon = 10^{-2}$	20.	$u_n = \dfrac{\cos \pi n}{3^n(2n+1)}$, $\varepsilon = 10^{-3}$
21.	$u_n = \dfrac{(-1)^{n+1} \cdot n}{(4n^2-1)^2}$, $\varepsilon = 10^{-3}$	22.	$u_n = (-1)^n\left(\dfrac{n}{4n+3}\right)^n$, $\varepsilon = 10^{-2}$
23.	$u_n = \dfrac{(-1)^{n+1} \cdot 3^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}$, $\varepsilon = 10^{-1}$	24.	$u_n = \dfrac{4 \cdot 2^n}{3^{2n+1}}$, $\varepsilon = 10^{-2}$

25.	$u_n = (-1)^{n-1}\left(\frac{2n+1}{4n+5}\right)^{2n}$, $\varepsilon = 10^{-2}$	26.	$u_n = \frac{\cos \pi(n+1)}{(2n+1)!}$, $\varepsilon = 10^{-4}$
27.	$u_n = \frac{4^{n-1}}{3^{2n+1}}$, $\varepsilon = 10^{-2}$	28.	$u_n = \frac{(-1)^n}{n^3+1}$, $\varepsilon = 10^{-2}$
29.	$u_n = \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{n^3+2n+1}$, $\varepsilon = 10^{-1}$	30.	$u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot n!}$, $\varepsilon = 10^{-2}$

Библиографический список

1. Воробьев Н.Н. Теория рядов. – М.: “Наука”, 1986. – 408 с.
2. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. – Изд-во “Лань”, 2003. – 736 с.
3. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды. – М.: “Наука”, 1986. – 528 с.
4. Шипачев В.С. Высшая математика. – М.: “Высшая школа”, 1985. – 472 с.
5. Бельгарт Л.В., Николаева Н.И. Предел и непрерывность функции. Методические указания для студентов-заочников ОмГТУ. – Изд-во ОмГТУ, 2002. – 36 с.

Редактор
ИД 06039 от 12.10.01
Подписано в печать . .04. Бумага офсетная Формат 60х84 1/16.
Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ. л. 2,6. Уч.-изд. л.
Тираж 100 экз. Заказ

Издательство ОмГТУ. 644050, г.Омск, пр-т Мира, 11
Типография ОмГТУ