Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

«Омский государственный технический университет»

# ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ

Методические указания для студентов 1-2-го курса
всех специальностей.
(Дисциплины: математика, математический анализ )

Омск – 2005

Составители: Полежаев Виктор Дмитриевич, доцент;
Панченко Елена Ивановна, ассистент;
Галимова Лязат Аменевна, ассистент

Редактор Г. М. Кляут
ИД 06039 от 12.10.01
Сводный темплан 2004 г
Подписано в печать Бумага офсетная. Формат 60х84/16
Отпечатано на дуплекаторе. Усл. печ. л. Уч.-изд. л.
Тираж 500 экз. Заказ

Издательство ОмГТУ. 644050, Омск, пр-т Мира, 11
Типография ОмГТУ

## I. Определение определенного интеграла

Часто на практике нужно вычислить:

1) площади фигур, ограниченных кривыми;
2) длины дуг различных кривых;
3) объемы тел, образованных вращением плоских фигур вокруг осей координат;
4) площади поверхностей, образованных вращением дуги кривой вокруг осей координат.

геометрические приложение

5) в физике по функции скорости определить путь, пройденный точкой;
6) вычислить работу силы, под воздействием которой перемещается точка вдоль осей координат;
7) вычислить статические моменты и центр тяжести плоской фигуры;
8) найти количество электричества, протекшего через поперечное сечение проводника за промежуток времени и т.д.

физические приложение

Решаются подобные задачи с помощью **определенного интеграла.**

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, в]$, $a < в$.

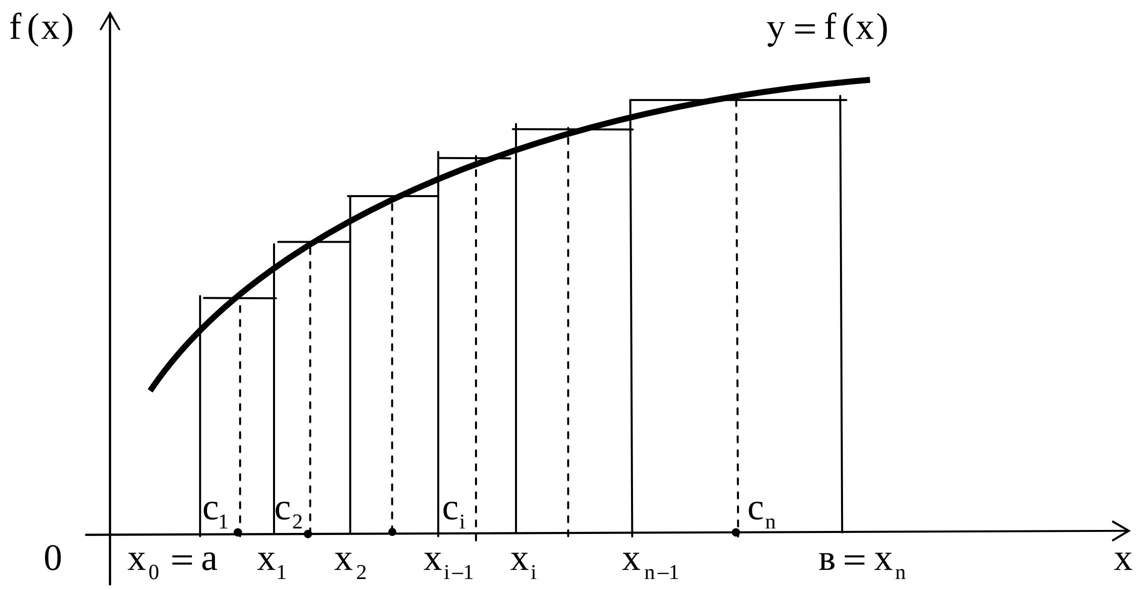



Рисунок 1

Выполним следующие **действия:**

1. Разобьем отрезок на $n$-частичных отрезков: $x_0 = a$, $x_1$, $x_2$, …, $x_n = в$.

2. В каждом частичном отрезке $[x_{i-1}; x_i]$, где $i = 1, 2, ..., n$ выберем произвольную точку $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$ и вычислим значение функции в ней: $f(c_i)$.

3. Умножим $f(c_i)$ на длину $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ соответствующего частичного отрезка: $f(c_i) \cdot \Delta x_i$;

4. Составим сумму всех таких произведений $Sn$ (интегральную сумму функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, в]$), т.е.

$$Sn = f(c_1) \cdot \Delta x_1 + f(c_2) \cdot \Delta x_2 + ... + f(c_n) \cdot \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i .$$

5. Обозначим через $\lambda$ длину наибольшего частичного отрезка, т.е. $\lambda = \max \Delta x_i$.

Найдем $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} Sn = I$. Если он существует и не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a, в]$ на частичные отрезки, ни от выбора точек на них, то он называется определенным интегралом.

**Определение.** Число $I$ называется определенным интегралом от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, в]$ и обозначается:

$$\int_a^в f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i ,$$

(т. е. предел интегральной суммы функции $f(x)$ на отрезке $[a, в]$ при условии, что число частичных отрезков $\Delta x_i$ неограниченно увеличивается, а длина наибольшего из них стремится к нулю).

Здесь: $a$ - нижний предел интегрирования; $в$ - верхний предел интегрирования; $f(x)$ - подынтегральная функция; $x$ - переменная интегрирования; $[a, в]$ - область (отрезок) интегрирования.

Сформулируем **теорему существования** определенного интеграла:

**Теорема (Коши)**. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, в]$, то определенный интеграл $\int_a^в f(x)dx$ **существует**.

Кроме этого, сформулируем несколько **свойств**.

1. Определенный интеграл не зависит от обозначения переменной:

$$\int_a^в f(x)dx = \int_a^в f(t)dt = \int_a^в f(z)dz ,$$

т.е. он не зависит от того, какой буквой обозначен аргумент функции.

2. Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю,

$$\text{т.е. } \int_a^a f(x)dx = 0 .$$

3. Для любого действительного числа $c$ справедливо равенство:

$$\int_a^в c \cdot dx = c \cdot (в - a).$$

4. Сформулируем геометрический и физический смысл определенного интеграла.

**а) Геометрический смысл определенного интеграла**

Рассмотрим криволинейную трапецию, т.е. плоскую фигуру, ограниченную сверху графиком $y = f(x)$, прямыми: $x = a$, $x = в$ с боков и отрезком $[a, в]$ оси $Ox$. Тогда определенный интеграл от неотрицательной функции $f(x)$ численно равен площади криволинейной трапеции, т.е. $S_{кр.тр.} = \int\limits_a^в f(x)\,dx$

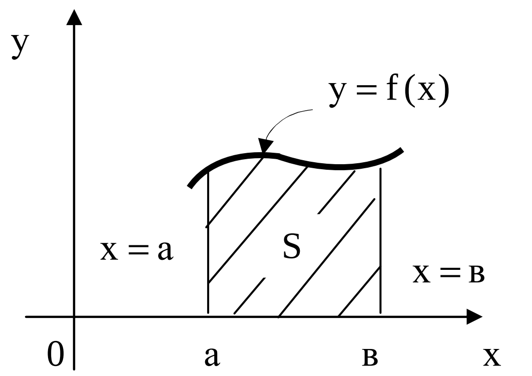



Рисунок 2

**б) Физический смысл определенного интеграла**

**Работа переменной силы** $\vec{F}$ **,** величина которой есть непрерывная функция, действующей на отрезке $[a, в]$, равна определенному интегралу от величины $F(x)$ силы, взятому по отрезку $[a, в]$, т.е. $A = \int\limits_a^в F(x)\,dx$.

Таким образом, работа $A$ силы $\vec{F}$ по перемещению точки вдоль оси $Ox$ из точки $x = a$ в точку $x = в$ $(a < в)$ равна данному определенному интегралу.

5. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона – Лейбница.

Сформулируем следующую теорему.

**Теорема.** Если $y = f(x)$ непрерывна на $[a, в]$ и $F(x)$ - какая-либо ее первообразная на $[a, в]$, т.е. $F'(x) = f(x)$, то имеет место **формула Ньютона – Лейбница**:

$$\int\limits_a^в f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^в = F(в) - F(a).$$

Таким образом, для вычисления определенного интеграла некоторой непрерывной функции нужно **уметь находить ее первообразную**. Следовательно, методы нахождения неопределенного интеграла переносятся на определенный интеграл. Однако отметим некоторые особенности вычисления определенного интеграла:

**а) интегрирование с помощью замены переменной в определенном интеграле**. Рассмотрим два возможных способа вычисления одного и того же интеграла.

1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\pi/4} = -\frac{1}{2}\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) - \left(-\frac{1}{2}\cos 0\right) =$

$$= -\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\cos 0 = \frac{1}{2}.$$

2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\,dx = \left|\begin{array}{l} 2x = t \;\Rightarrow t_н = 2\cdot 0 = 0 \\ 2dx = dt \\ dx = \frac{dt}{2} \qquad t_в = 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \end{array}\right| = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot \frac{dt}{2} = -\frac{1}{2}\cos t\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\cos 0 = \frac{1}{2};$

**б) интегрирование по частям в определенном интеграле рассмотрим на примере:**

$$\int\limits_a^в u\cdot dv = u\cdot v\Big|_a^в - \int\limits_a^в v\cdot du\,;$$

$$\int\limits_1^e x\cdot\ln x\,dx = \left|\begin{array}{ll} \ln x = u; & x\,dx = dv \\ \frac{dx}{x} = du; & v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} \end{array}\right| = \frac{x^2}{2}\cdot\ln x\Big|_1^e - \int\limits_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\cdot\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^e = \frac{x^2}{2}\cdot\ln x\Big|_1^e - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e =$$

$$= \left(\frac{e^2}{2} - 0\right) - \left(\frac{e^4}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2e^2 - e^2 + 1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4};$$

**в) интегрирование четных и нечетных функций в симметричных отрезках интегрирования:**

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\cdot\int\limits_0^a f(x)\,dx, \text{если } f(x) \text{ четная функция, (т.е. ее график симметричен} \\ \quad \text{относительно Oy),} \\ 0, \text{ если } f(x) \text{ нечетная, (т. е. ее график симметричен относительно} \\ \quad \text{начала координат).} \end{cases}$$

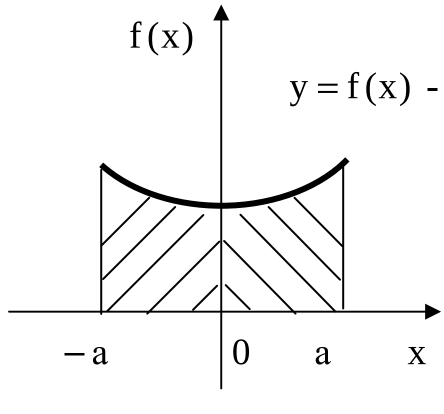



Рисунок 3

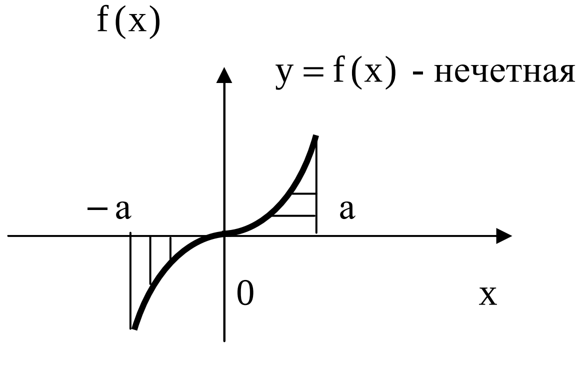



Рисунок 4

Рассмотрим применение этой формулы на примерах:

$$1.\ \int_{-2}^{2}\left(\underline{x^5}+5x^4-\underline{3x^3}+\underline{x}\right)dx = 2\cdot 5\cdot\int_0^2 x^4dx = 10\cdot\frac{x^5}{5}\Bigg|_0^2 =$$

$\Bigg|$ нечетные функции, $\Rightarrow$ интегралы от них =0. $\Bigg|$ =

$$= 2x^5\Bigg|_0^2 = 2\cdot 2^5 = 2\cdot 32 = 64.$$

$$2.\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Big(\underbrace{\cos^2 x}_{\text{четн}}+\underbrace{x^4\sin x}_{\text{нечетн.}}\Big)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx+0 = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}dx+2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\,dx = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot x\Bigg|_0^{\pi/2}+\frac{1}{2}\sin 2x\Bigg|_0^{\pi/2} =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}-0\right)+\frac{1}{2}\left(\sin 2\cdot\frac{\pi}{2}-\sin 2\cdot 0\right) = \frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi = \frac{\pi}{2}.$$

## II. Основные свойства определенного интеграла

1. $\int_a^в c\cdot f(x)dx = c\cdot\int_a^в f(x)dx,$

где $c = \mathrm{const}$.

2. $\int_a^в [c_1\cdot f_1(x)\pm c_2\cdot f_2(x)]dx = c_1\cdot\int_a^в f_1(x)dx \pm c_2\int_a^в f_2(x)dx;$

где $c_1, c_2 - \mathrm{const}$.

3. $\int_a^в f(x)dx = -\int_в^a f(x)\,dx.$

4. $\int_a^в f(x)\,dx = \int_a^c f(x)dx+\int_c^в f(x)\,dx,$

если $a < c < в$.

5. Если $f(x)$ сохраняет знак на отрезке $[a;\,в]$ $(a < в)$, то интеграл $\int_a^в f(x)dx$ сохраняет тот же знак, т. е. например, если $f(x)\ge 0$ для любого $x\in[a;\,в] \Rightarrow \int_a^в f(x)dx \ge 0$.

6. Если $f(x)$ - непрерывна на отрезке $[a;\,в]$, то существует такая точка $c\in[a;\,в]$, что $\int_a^в f(x)dx = f(c)\cdot(в-a)$ (теорема «о среднем»).

7. Если $f_1(x) \le f_2(x)$ при $x \in [а; в]$, то $\int\limits_а^в f_1(x) \le \int\limits_а^в f_2(x)\,dx$.

8. Если $m$ - наименьшее, а $M$ - наибольшее значения функции $y = f(x)$ непрерывной на отрезке $[а; в]$, то:

$$m(в-а) \le \int\limits_а^в f(x)\,dx \le M(в-а)$$ (теорема «об оценке»).

9. $\left|\int\limits_а^в f(x)\,dx\right| \le \int\limits_а^в |f(x)|\,dx$, где $а < в$.

**Пример 1. Вычислить среднее значение функции** $y = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ на отрезке $[1; 4]$.

**Решение.** Так как $y = f(x)$ является непрерывной на указанном отрезке, то можно применить свойство 6 (**теорему о среднем**);

$\int\limits_а^в f(x)\,dx = f(c)\cdot(в-а)$ выразим $f(c)$ из данного соотношения как неизвестное из уравнения:

$$f(c) = \frac{\int\limits_а^в f(x)\,dx}{в-а}, \text{ т. е.}$$

$$f(c) = \frac{\int\limits_1^4 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx}{4-1} = \frac{\int\limits_1^4 \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)dx}{3} = \frac{\left(\frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2}\right)\Big|_1^4}{3} =$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{3}\cdot x^{3/2} + 2\cdot x^{1/2}\right)\Big|_1^4}{3} = \frac{\left(\frac{2}{3}x\cdot\sqrt{x} + 2\sqrt{x}\right)\Big|_1^4}{3} = \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}x\cdot\sqrt{x} + \sqrt{x}\right)\Big|_1^4 =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\left[\left(\frac{1}{3}\cdot 4\cdot\sqrt{4} + \sqrt{4}\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot 1\cdot\sqrt{1} + \sqrt{1}\right)\right] = \frac{2}{3}\left[\frac{8}{3} + 2 - \frac{1}{3} - 1\right] = \frac{2}{3}\left[\frac{7}{3} + 1\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{10}{3} = \frac{20}{9}.$$

**Пример 2.** Оценить интеграл: $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{dx}{8+x^3}$.

Применим **теорему «об оценке»** определенного интеграла (свойство 8).

$$m(в-а) \le \int\limits_а^в f(x)\,dx \le M(в-а).$$

Найдем значения функции на концах отрезка:

$$f(-1) = \frac{1}{8+(-1)^3} = \frac{1}{8-1} = \frac{1}{7}, \qquad f(1) = \frac{1}{8+1^3} = \frac{1}{9}.$$

Найдем также $в-а=1-(-1)=2$. Так как здесь $m=1/9$ - наименьшее значение, а $M=1/7$ - наибольшее значение функции, $\Rightarrow \frac{1}{9}\cdot 2 \le \int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{8+x^3} \le \frac{1}{7}\cdot 2$.

Ответ: $\frac{2}{9} \le \int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{8+x^3} \le \frac{2}{7}$.

**Пример 3.** Не вычисляя, сравнить значения интегралов: $\int\limits_{0}^{1} e^{x^2}dx$ или $\int\limits_{0}^{1} e^{x}dx$.

Решение. Так как $e^{x^2} \le e^x$ при $0 \le x \le 1 \Rightarrow$ по свойству 7 $\int\limits_{0}^{1} e^{x}dx > \int\limits_{0}^{1} e^{x^2}dx$.

Задания для самостоятельной работы.

**Вычислить определенные интегралы с помощью формулы Ньютона – Лейбница:**

1. $\int\limits_{2}^{4}\left(x^3+x\right)dx$, Ответ: 66.
2. $\int\limits_{1}^{e}\frac{1}{x}dx$, Ответ: 1.
3. $\int\limits_{4}^{9}\left(3\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$, Ответ: 40.
4. $\int\limits_{-12}^{-1}\sqrt{4-5x}\,dx$, Ответ: $64\frac{2}{3}$.
5. $\int\limits_{-3}^{1}e^{-x}dx$, Ответ: $e^3-\frac{1}{e}$.
6. $\int\limits_{1}^{6}\frac{x}{\sqrt{x+3}}dx$, Ответ: $\frac{20}{3}$.
7. $\int\limits_{1}^{3}\ln x\,dx$, Ответ: $\ln 27-2$.
8. $\int\limits_{0}^{\pi/2}x\cdot\cos x\,dx$, Ответ: $\frac{\pi}{2}-1$.
9. $\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin^2 x\,dx$, Ответ: $\frac{\pi}{4}$.
10. $\int\limits_{-5}^{-2}\frac{dx}{x^2+4x-21}$, Ответ: $-0{,}1\cdot\ln 4$.
11. $\int\limits_{-2}^{-1}\frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$, Ответ: $\arcsin\frac{1}{3}$.
12. $\int\limits_{0}^{3}\frac{4x\cdot dx}{\sqrt[3]{(3x-8)^2}-2\sqrt[3]{3x-8}+4}$, Ответ: 3.

## III. Приложения определенного интеграла

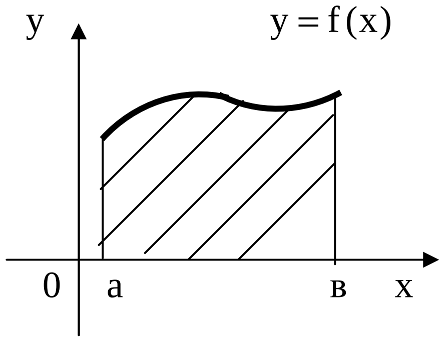
1. С помощью определенного интеграла можно вычислять площади плоских фигур, ограниченных кривыми. Напомним, что кривые могут быть заданы **различными способами**, т.е.

1) в прямоугольных декартовых координатах (в явном виде и параметрически);

2) в полярных координатах.

Рассмотрим случаи вычисления площадей плоских фигур в **прямоугольных координатах**.

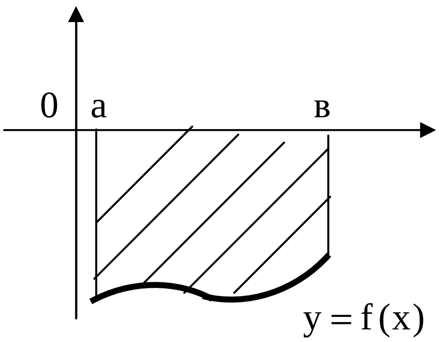
а) если фигура представляет из себя **криволинейную трапецию** вида.
$f(x)>0$




$$S_ф = S_{кр.тр.} = \int_a^в f(x)dx;$$

Рисунок 5

б) если криволинейная трапеция расположена ниже оси $Ox$, т.е. $f(x)<0$ тогда исходя из **свойств определенного интеграла**



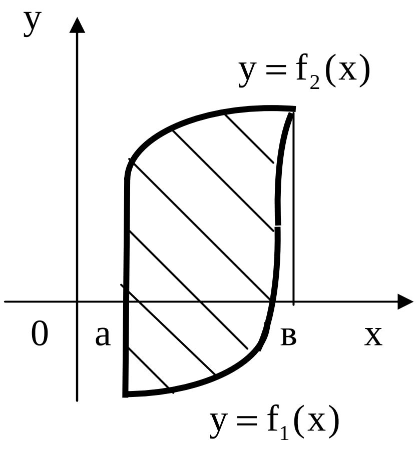

$$S_ф = -\int_a^в f(x)dx.$$

Рисунок 6

В общем случае $S_ф = \left|\int_a^в f(x)dx\right|;$

в) если плоская фигура имеет сложную форму, т.е. прямые $x = a$; $x = в$ «вырождаются» в точки, то фигуру следует разбить на части так, чтобы можно было применить известные формулы.

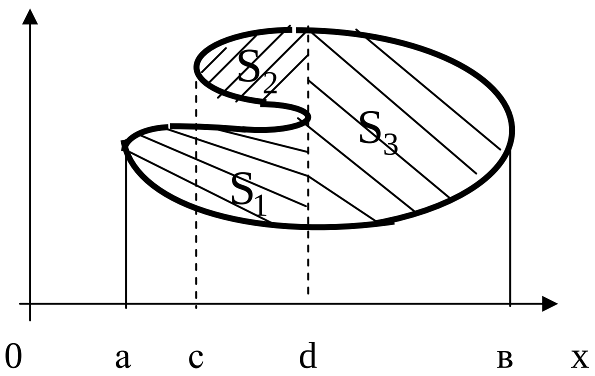
Проиллюстрируем **некоторые** возможные варианты:




$$S_ф = \int_a^в \big(f_2(x) - f_1(x)\big)dx\,;$$

Рисунок 7

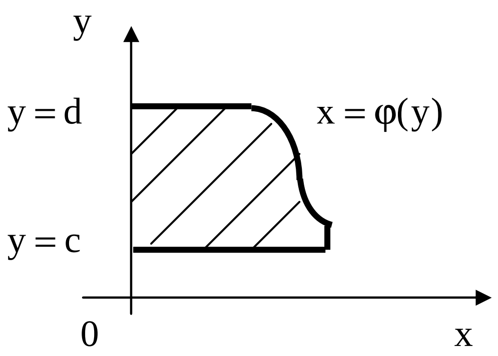
г)




$$S_ф = S_1 + S_2 + S_3\,;$$

Рисунок 8

д) если криволинейная трапеция ограничена прямыми $y = c$ и $y = d$, осью Оy и непрерывной кривой $x = \varphi(y)$, то $\Rightarrow$



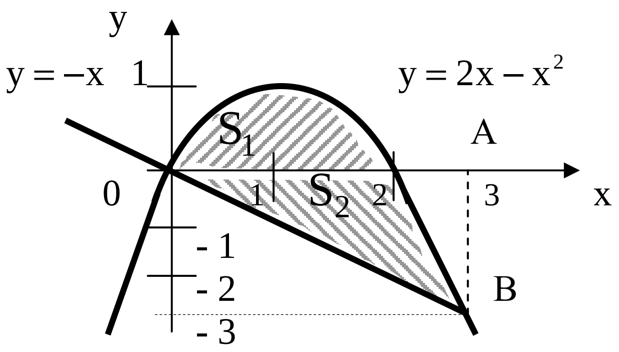

$$S_ф = \int_c^d \varphi(y)\,dy\,.$$

Рисунок 9

Рассмотрим примеры нахождения площади плоских фигур:

**Пример 1.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $\begin{matrix} y = -x, \\ y = 2x - x^2. \end{matrix}$

Решение.




а) Построим графики данных функций:

$y = -x$ - прямая;

$y = -x^2 + 2x$ - парабола; приведем ее уравнение к каноническому виду:

$(x-a)^2 = \pm\ 2py$;

$-y = (x-1)^2 - 1$;

$-y + 1 = (x-1)^2$;

$-(y-1) = (x-1)^2$ откуда координаты вершины $(1;1)$, ветви вниз. Находим точки пересечения параболы с осью $Ox$:

$2x - x^2 = 0$, $x(2-x) = 0$, $x_1 = 0$ или $2 - x = 0$, $x_2 = 2$.

б) Чтобы найти площадь данной фигуры, разобьем ее на части. Для этого найдем координаты точек пересечения графиков, решив систему уравнений данных линий:

$$\begin{cases} y = -x \\ y = 2x - x^2 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} &-x = 2x - x^2 \\ &x^2 - 3x = 0 \\ &x(x-3) = 0 \\ &x_1 = 0;\ x_2 = 3 \Rightarrow O(0;0) \\ &y_1 = 0;\ y_2 = -3 \quad B(3;-3) \end{aligned}$$

Тогда $S_ф = S_1 + S_2 \Rightarrow S_1 = \int_0^2 (2x - x^2)\,dx = \left(\frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$ (кв. ед).

$$S_2 = S_{\Delta OAB} - \left|\int_2^3 (2x - x^2)\,dx\right|; \qquad S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3 = \frac{9}{2} \text{ (кв. ед.).}$$

$$\int_2^3 (2x - x^2)\,dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_2^3 = \left(9^2 - \frac{3^3}{3}\right) - \left(2^2 - \frac{2^3}{3}\right) = (9-9) - \left(4 - \frac{8}{3}\right) = -\frac{4}{3}.$$

$$S_2 = \frac{9}{2} - \left|-\frac{4}{3}\right| = \left(\frac{9}{2} - \frac{4}{3}\right) \text{ (кв. ед).}$$

в) $S_ф = \frac{4}{3} + \frac{9}{2} - \frac{4}{3} = \frac{9}{2}$ (кв. ед.)

**Замечание.** Площадь этой же фигуры можно вычислить более **рациональным** способом, применив формулу

$$S_ф = \int_а^в (f_2(x) - f_1(x))\,dx = \int_0^3 ((2x - x^2) - (-x))\,dx =$$

$$= \int_0^3 (3x - x^2)\,dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3 = \frac{27}{2} - 9 = \frac{27-18}{2} = \frac{9}{2} \text{ (кв. ед.).}$$

Ответ: $S_ф = 9/2$ кв. ед.

**Пример 2.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y^2 = x^3$ , прямой $y = 1$ и осью Оу.

Решение.

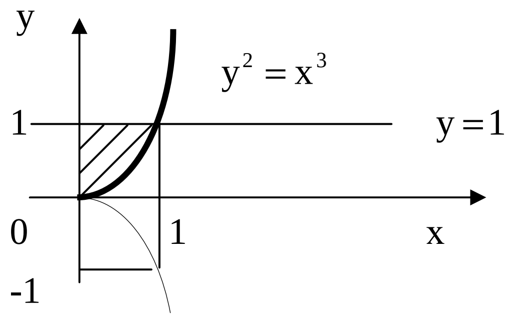



Рисунок 10

а) Построим графики данных функций;

$y = 1$ - прямая, параллельная оси $Ox$;

$y^2 = x^3$ - полукубическая парабола.

б) Для вычисления площади этой фигуры воспользуемся случаем, когда кривая задана функциональной зависимостью $x = \varphi(y)$. Выразим $x$ через $y$ :

$$x = \sqrt[3]{y^2} = y^{\frac{2}{3}}.$$

Тогда $$S_\phi = \int_0^1 y^{\frac{2}{3}}\,dy = \left.\frac{y^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\right|_0^1 = \frac{3}{5}\left. y^{\frac{5}{3}}\right|_0^1 = \frac{3}{5} \text{ (кв. ед.)}.$$

Ответ: $S_\phi = \frac{3}{5}$ кв. ед.

**Замечание.** Если линия, ограничивающая криволинейную трапецию, задана параметрически, то

$$S = \left|\int_\alpha^\beta y(t)\cdot x'(t)\,dt\right|; \quad \text{где} \quad \begin{cases} y = y(t), \\ x = x(t), \quad t \in [\alpha, \beta]. \end{cases}$$

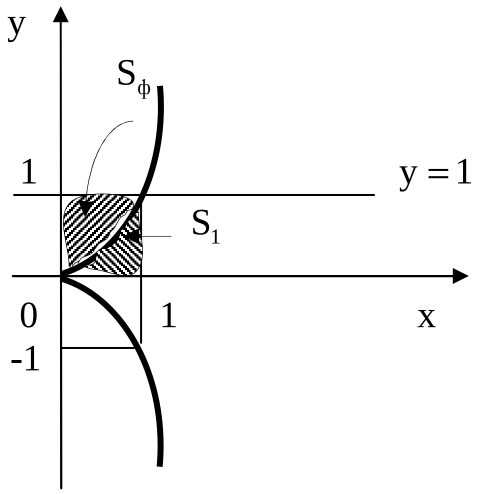
**Пример 3.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3 \end{cases}$, прямой $y = 1$ и осью $Oy$.

Решение.

Построим графики данных функций. Так как одна из линий задана параметрически, то придавая параметру произвольные значения, составим таблицу значений функции.

| t | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| x | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 |
| y | -8 | -1 | 0 | 1 | 8 |

Таким образом, считая $\begin{cases} y(t) = t^3, \\ x(t) = t^2 \end{cases}$ найдем $x'(t) = 2t$, подставим найденные выражения в формулу, предварительно вычислив пределы интегрирования по $t$:




$$x=0 \Rightarrow 0=t^2 \Rightarrow t_1=0$$

( в нашем случае $t_1=\alpha$ ).

$$x=1 \Rightarrow 1=t^2 \Rightarrow t_2=\pm 1$$

( в нашем случае $t_2=1=\beta$ ).

Тогда $S_ф=S_{кв.}-S_1$, так как $S_{кв.}=1$ кв. ед.;

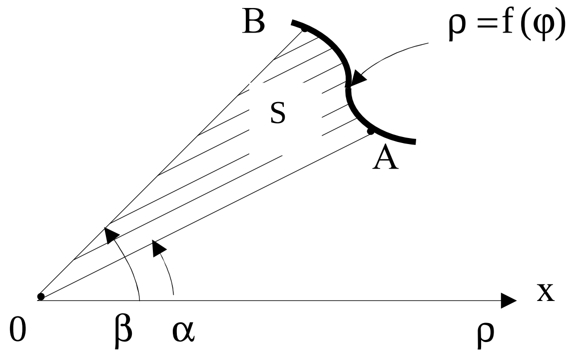
$$S_1=\left|\int_0^1 y(t)\cdot x'(t)\,dt\right|=\left|\int_0^1 t^3\cdot 2t\cdot dt\right|=2\left|\int_0^1 t^4\,dt\right|=2\left|\frac{t^5}{5}\right|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}=2\cdot\left|\frac{1}{5}\right|=\frac{2}{5} \text{ (кв. ед.)}.$$

$S_ф=1-2/5=3/5$ кв. ед.

Ответ: $S_ф=3/5$ кв. ед.

2. Вычисление площадей плоских фигур в случае, когда линии, их ограничивающие, заданы в **полярной системе координат**.

Если непрерывная кривая задана в полярных координатах уравнением $\rho=f(\varphi)$, то площадь сектора AOB вычисляется по формуле:



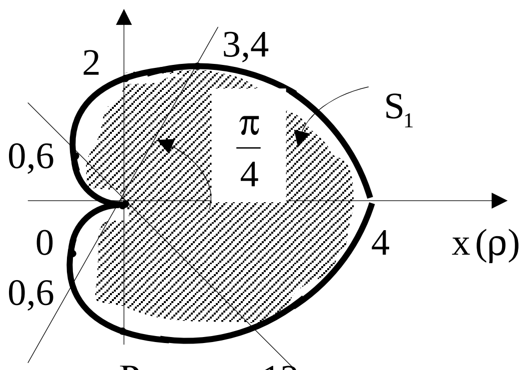

$$S_ф=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [f(\varphi)]^2\cdot d\varphi.$$

Рисунок 11

**Пример 4.** В полярной системе координат построить фигуру, ограниченную указанной линией, и вычислить ее площадь: $\rho=2(1+\cos\varphi)$.

Решение.

а) Составим таблицу значений $\varphi, \rho$ задавая шаг для $\varphi=\pi/4$.




| $\varphi$ | 0 | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\pi$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\rho$ | 4 | 3,4 | 2 | 0,6 | 0 | 0,6 | 2 | 3,4 | 4 |

Рисунок 12

График этой функции – кардиоида.

б) Вычислим $S_ф = 2 \cdot S_1$, т.к. $\varphi$ изменяется от 0 до $\pi$ (см. рис. 12), т.к. фигура симметрична относительно Ox, где

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}[2\ (1+\cos\varphi)]^2\,d\varphi = \frac{4}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{\pi}\left(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= 2\left[\int_0^{\pi}d\varphi + 2\int_0^{\pi}\cos\varphi\,d\varphi + \int_0^{\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi\right] =$$

$$= 2\left[\varphi\Big|_0^{\pi} + 2\sin\varphi\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi\right] =$$

$$= 2\left[\varphi\Big|_0^{\pi} + 2\sin\varphi\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}d\varphi + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos 2\varphi\,d\varphi\right] =$$

$$= 2\left[\varphi + 2\sin\varphi + \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi}\right] =$$

$$= \left(2\cdot\frac{3}{2}\varphi + 4\sin\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \left(3\pi + 4\sin\pi + \frac{1}{2}\sin 2\pi\right) - \left(0 + 4\sin 0 + \frac{1}{2}\sin 0\right) = 3\pi$$

$S_ф = 2\cdot 3\pi = 6\pi$

Ответ: $S_ф = 6\pi$ кв. ед.

## 2. Вычисление длины дуги различных кривых

### а) Вычисление длины дуги в прямоугольных координатах

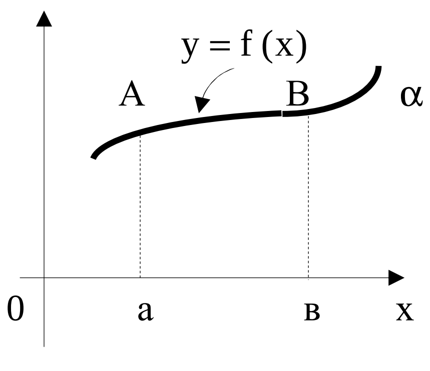



Рисунок 13

1) Если линия $\alpha$ задана уравнением $y = f(x)$, то длина ее дуги AB вычисляется по формуле :

$$\alpha_{AB} = \int_a^{в}\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Рассмотрим **пример**:

Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением $y = 1/3\ x\cdot\sqrt{x}$ от начала координат до точки $B\left(12;\ 8\cdot\sqrt{3}\right)$.

Решение. Найдем производную функции $y = f(x) = 1/3\ x \cdot \sqrt{x}$, т. е.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3} \cdot x \cdot \sqrt{x}\right)' = \frac{1}{3} \cdot \left(x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{3}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}}{2};$$

т.к. O(0; 0), $B\left(12;\ 8 \cdot \sqrt{3}\right) \Rightarrow$ в нашем случае $a = 0;\ в = 12$.

$$\alpha_{ов} = \int_0^{12} \sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2}\, dx = \int_0^{12} \sqrt{1 + \frac{x}{4}}\, dx = \int_0^{12} \left(1 + \frac{x}{4}\right)^{1/2} dx =$$

$$= 4 \cdot \int_0^{12} \left(1 + \frac{x}{4}\right)^{1/2} d\left(1 + \frac{x}{4}\right) = 4 \cdot \left.\frac{\left(1 + \frac{x}{4}\right)^{3/2}}{3/2}\right|_0^{12} =$$

$$= \frac{8}{3} \cdot \left.\left(1 + \frac{x}{4}\right)\right|_0^{12} = \frac{8}{3} \cdot (1 + 3) \cdot \sqrt{1 + 3} - \frac{8}{3} \cdot 1 \cdot \sqrt{1} = \frac{8}{3} \cdot 4 \cdot 2 - \frac{8}{3} = \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \frac{56}{3}.$$

2) Если уравнение кривой задано в **параметрическом виде**, т. е. $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$, то длина дуги вычисляется по формуле:

$$\alpha = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\, dt.$$

где $t_1, t_2$ ($t_1 < t_2$) - значения параметра, соответствующие концам дуги.

Рассмотрим **пример**.

Найти длину дуги полукубической параболы, заданной параметрически $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3 \end{cases}$ между точками $A(1; 1)$ и $B(4;\ 8)$ (см. рис. 10).

Решение. Так как $\alpha_{AB} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\, dt$, в нашем случае $\begin{cases} x'_t = 2t \\ y'_t = 3t^2 \end{cases}$, найдем значения параметра $t_1, t_2$, соответствующие концам дуги.

Для этого абсциссы точек A и B подставляем в уравнение $x(t) = t^2$, тогда при нахождении $t_1$ нужно решить $t^2 = 1, \Rightarrow t_1 = \pm 1$.

Так как точки расположены на кривой над осью Ox, $\Rightarrow t_1 = 1$.

Аналогично получим уравнение $t^2 = 4, \Rightarrow t_2 = \pm 2$, по тем же соображениям выбираем значение $t_2 = 2$.

Тогда

$$\alpha_{AB} = \int_1^2 \sqrt{(2t)^2 + \left(3t^2\right)^2}\, dt = \int_1^2 \sqrt{4t^2 + 9t^4}\, dt = \int_1^2 \sqrt{t^2\left(4 + 9t^2\right)}\, dt = \int_1^2 t \cdot \sqrt{4 + 9t^2}\, dt =$$

(введем новую переменную $4+9t^2=u$; $18t\,dt=du$; $dt=\dfrac{du}{18t}$; находим пределы интегрирования для $u$ : $u_1=4+9\cdot1^2=13$; $u_2=4+9\cdot2^2=40$).

$$=\int_{13}^{40} t\cdot\sqrt{u}\cdot\frac{du}{18t}=\frac{1}{18}\int_{13}^{40}\sqrt{u}\,du=\frac{1}{18}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2}\Bigg|_{13}^{40}=\frac{2}{18\cdot3}\cdot u\cdot\sqrt{u}\Bigg|_{13}^{40}=$$

$$=\frac{u\cdot\sqrt{u}}{27}\Bigg|_{13}^{40}=\frac{40\cdot\sqrt{40}}{27}-\frac{13\cdot\sqrt{13}}{27}=\frac{80\sqrt{10}-13\sqrt{13}}{27}.$$

Ответ: $\alpha_{AB}=\dfrac{80\sqrt{10}-13\sqrt{13}}{27}$.

**б) Вычисление длины дуги в полярных координатах**

Если кривая $AB$ задана уравнением в полярных координатах $\rho=f(\varphi)$, где $\alpha\le\varphi\le\beta$, то $\alpha_{AB}=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2+\left(\rho'_\varphi\right)^2}\,d\varphi$ .

Рассмотрим **пример**.

Вычислить дугу кардиоиды, заданной в полярной системе координат: $\rho=2(1+\cos\varphi)$, где $0\le\varphi\le\pi$ (т.е. той части кривой, которая расположена выше оси $Ox$).

Решение.

Рассмотрим уже известную нам кривую (см. рис. 12). Применим формулу $\alpha=\int_0^{\pi}\sqrt{\rho^2+\left(\rho'_\varphi\right)^2}\,d\varphi$ , где $\rho'_\varphi=\left[2\left(1+\cos\varphi\right)\right]'_\varphi=\left(2+2\cos\varphi\right)'=-2\sin\varphi$, тогда

$$\alpha=\int_0^{\pi}\sqrt{2^2\left(1+\cos\varphi\right)^2+\left(-2\sin\varphi\right)^2}\,d\varphi=$$

$$=\int_0^{\pi}\sqrt{4\left(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi\right)+4\sin^2\varphi}\,d\varphi=$$

$$=\int_0^{\pi}\sqrt{4+8\cos\varphi+4\cos^2\varphi+4\sin^2\varphi}\,d\varphi=$$

$$=\int_0^{\pi}\sqrt{4+8\cos\varphi+4\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)}\,d\varphi=$$

$$=\int_0^{\pi}\sqrt{8+8\cos\varphi}\,d\varphi=\int_0^{\pi}\sqrt{8\cdot\left(1+\cos\varphi\right)}\,d\varphi=$$

$$=\int_0^{\pi}\sqrt{8\cdot2\cos^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi=\int_0^{\pi}\sqrt{16\cdot\cos^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi=$$

$$=\int_0^{\pi}4\cdot\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=4\cdot2\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\left(\frac{\varphi}{2}\right)=8\sin\frac{\varphi}{2}\Bigg|_0^{\pi}=8\sin\frac{\pi}{2}-8\sin0=8.$$

Задания для самостоятельной работы.

**Приложения определенного интеграла**

**I. Вычислить площадь фигур, ограниченных линиями:**

Ответы:

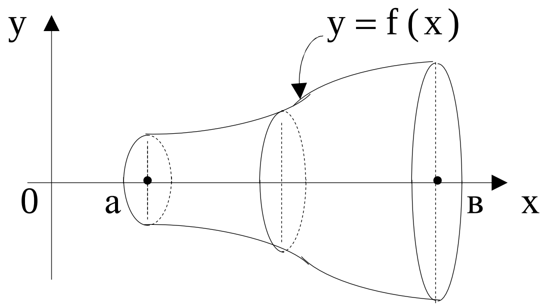
1. $xy = 6;\ x = 1;\ x = e;\ y = 0.$ — $S = 6$ (ед$^2$.).
2. $y = x^2 - 5x + 6$ и координатными осями. — $S = 4\frac{2}{3}$ (ед$^2$.).
3. $x = 8y - y^2 - 7$ и осью Оу. — $S = 36$ (ед$^2$.).
4. $\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = в \cdot \sin t \end{cases}$ - эллипс. — $S = \pi \cdot a \cdot в$ (ед$^2$.).
5. Одним витком спирали Архимеда $\rho = a\varphi$. — $S = 4/3\ \pi^3 \cdot a^2$ (ед$^2$.).
6. $\rho^2 = a^2 \cdot \cos\varphi$ - лемниската Бернулли. — $S = 4$ (ед$^2$.).
7. $y = x^3 - 4x$ и $y = 0$. — $S = 8$ (ед$^2$.).

**II. Найти длины дуг следующих кривых:**

1. $y = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$ от $y = 1$ до $y = e$. — $\alpha = \frac{e^2 + 1}{4}$ .
2. $\begin{cases} x = e^t \cdot \sin t \\ y = e^t \cdot \cos t \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$. — $\alpha = \sqrt{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right)$ .
3. $\rho = e^{\varphi}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. — $\alpha = \sqrt{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right)$ .
4. $y = \ln\cos x$ от $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{6}$. — $\alpha = \ln\left(\sqrt{3}\right)$.

**3. Объем тела вращения**

1) Если тело образовано вращением плоской фигуры вокруг оси Ох, то его объем равен




$$V_{т.вр.} = \pi \int_a^в f^2(x)\,dx$$

Рисунок 14

2) Если же тело образовано вращением плоской фигуры вокруг оси Oy, то его объем равен

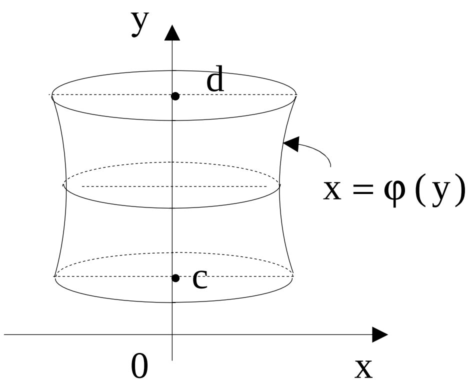



Рисунок 15

$$V_{\text{т.вр.}} = \pi \int_c^d \varphi^2(y)\,dy\,.$$

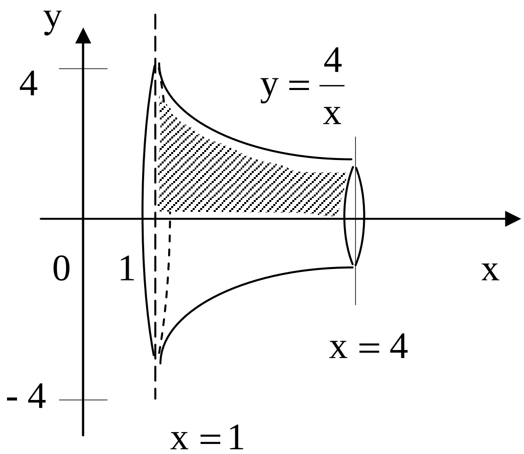
Рассмотрим **пример**:

Найти объемы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной линиями: $y = \frac{4}{x}$; $x = 1$; $x = 4$ $y = 0$.

а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy;

Решение.

а) Изобразим тело, получающееся в результате вращения данной плоской фигуры вокруг Ox:

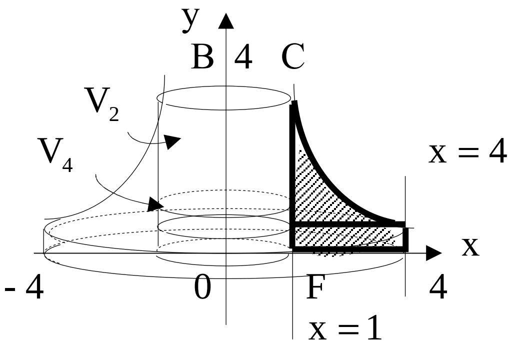



$$V_{\text{т.вр.}} = \pi \int_1^4 \left(\frac{4}{x}\right)^2 dx = 16\cdot\pi \int_1^4 x^{-2}\,dx =$$

$$= 16\cdot\pi\,\frac{x^{-1}}{(-1)}\Bigg|_1^4 = \frac{-16\pi}{x}\Bigg|_1^4 = -\frac{16\pi}{4} + \frac{16\,\pi}{1} =$$

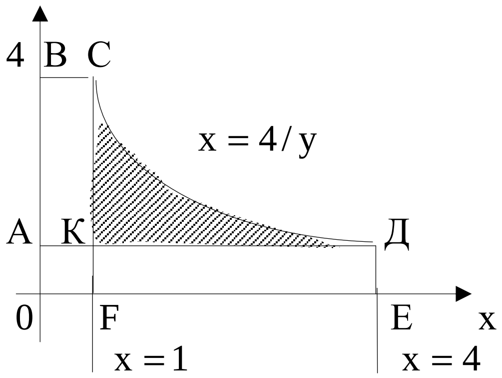
$$= 16\pi - 4\pi = 12\pi \text{ (куб. ед).}$$

Ответ: $V = 12\pi$ куб.ед.




б) Изобразим тело, получающееся в результате вращения фигуры вокруг оси Oy

При вращении данной плоской фигуры вокруг оси Оу образуется тело с «вырезанным» круговым цилиндром, получающимся при вращении прямоугольника OBCF вокруг Оу, причем он состоит из двух цилиндров с объемами $V_2$, $V_4$. Найдем **объем тела**, полученного при вращении криволинейной трапеции ABCD вокруг Оу:




$$V_1 = \pi\int_1^4 \left(\frac{4}{y}\right)^2 dy = 16\,\pi\int_1^4 y^{-2}\,dy =$$

$$= -\frac{16\pi}{y}\Bigg|_1^4 = \frac{-16\pi}{4} + \frac{16\pi}{1} = 12 \text{ (куб. ед.).}$$

т. к. $V_2 = \pi R^2 H = \pi \cdot 1^2 \cdot 3 = 3\pi$ (куб. ед.).

$V_3 = \pi \cdot 4^2 \cdot 1 = 16\pi$ (куб. ед.).

$V_4 = \pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \pi$ (куб. ед.).

Тогда $V = (V_1 - V_2) + (V_3 - V_4) = 12\pi - 3\pi + 16\pi - \pi = 24\pi$ (куб. ед.).

Ответ: $V = 24\pi$ куб. ед.

## 4. Площади поверхностей, образованных вращением дуги кривой вокруг оси Ox

а) Если кривая задана уравнением вида: $y = f(x)$, то

$$S = 2\pi\int_a^в y(x)\cdot\sqrt{1 + (y'_t)^2}\,dx.$$

б) Если кривая задана параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, причем $t_1 \le t \le t_2$, $y(t) \ge 0$, то

$$S = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\cdot\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_x)^2}\,dt,$$

где $t_1$ и $t_2$ $(t_1 < t_2)$ - значения параметра $t$, соответствующие концам дуги.

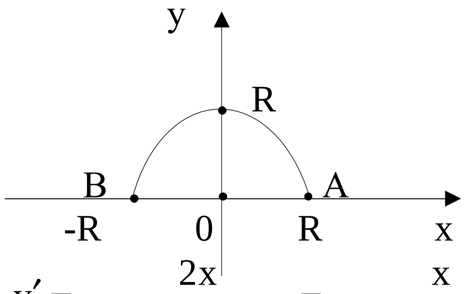
в) Если кривая задана уравнением в полярных координатах $\rho = f(\varphi)$, где $\alpha \le \varphi \le \beta$ и $f(\varphi)$ имеет непрерывную производную на $[\alpha; \beta]$, то

$$S = 2\pi\int_\alpha^\beta \rho\cdot\sin\varphi\cdot\sqrt{\rho^2 + (\rho'_\varphi)^2}\,d\varphi.$$

Рассмотрим примеры.

**Пример 1.** Найти площадь поверхности, образованной вращением полуокружности, расположенной выше оси Ox, вокруг нее.

Решение.




а) уравнение окружности $x^2+y^2=R^2$, $\Rightarrow$ $y^2=R^2-x^2$, $\Rightarrow$ $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$, т. к. окружность расположена выше оси Ох, $\Rightarrow$ $y=\sqrt{R^2-x^2}$;

$$\Rightarrow \quad y'=-\frac{2x}{2\sqrt{R^2-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

$$S=2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx=2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{\frac{R^2-x^2+x^2}{R^2-x^2}}\,dx=$$

$$=2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx=2\pi\int_{-R}^{R}R\cdot dx=2\pi\cdot Rx\Bigg|_{-R}^{R}=$$

$$=2\pi R^2+2\pi R^2=4\pi R^2 \text{ кв. ед.}$$

б) Найти площадь той же поверхности, если кривая задана параметрически.

Решение.

Уравнение данной окружности, заданной в параметрической виде: $\begin{cases} x=R\cos t \\ y=R\sin t \end{cases}$, $\Rightarrow$ $\begin{cases} x'(t)=-R\sin t \\ y'(t)=R\cos t \end{cases}$, найдем значения параметра, считая концами дуги точки $A(R;0)$ и $B(-R;0)$, подставим абсциссы этих точек в уравнение для x: т. е. $x=R\cos t$, тогда $\begin{matrix} R=R\cos t, \\ \cos t=1, \end{matrix}$ $\Rightarrow$ $t_1=0.$

Найдем аналогично $t_2$: $\begin{matrix} -R=R\cos t, \\ \cos t=-1, \end{matrix}$ $\Rightarrow$ $t_2=\pi.$

Тогда по формуле:

$$S=2\pi\int_{t_1}^{t_2}y(t)\cdot\sqrt{\left(x'_t\right)^2+\left(y'_t\right)^2}\,dt=$$

$$=2\pi\int_{0}^{\pi}R\sin t\cdot\sqrt{\left(R\sin t\right)^2+\left(R\cos t\right)^2}\,dt=$$

$$=2\pi\int_{0}^{\pi}R\sin t\cdot\sqrt{R^2\sin^2 t+R^2\cos^2 t}\,dt=$$

$$=2\pi\int_{0}^{\pi}R\sin t\cdot\sqrt{R^2(\sin^2 t+\cos^2 t)}\,dt=$$

$$=2\pi\int_{0}^{\pi}R\sin t\cdot R\,dt=2\pi\int_{0}^{\pi}R^2\sin t\cdot dt=2\pi R^2\left(-\cos t\right)\Bigg|_{0}^{\pi}=$$

$$=2\pi R^2\left(-\cos\pi-\left(-\cos 0\right)\right)=2\pi R^2\,(1+1)=4\pi R^2 \text{ (кв. ед.)}.$$

в) Найти площадь той же поверхности, если кривая задана в полярной системе координат.

Решение. В полярной системе координат уравнение данной окружности имеет вид: $\rho = R$, т. к. уравнение окружности в прямоугольных координатах $x^2 + y^2 = R^2$, тогда по формулам перехода в полярную систему координат:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \quad \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = R^2$$

$$\rho^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = R^2$$

$$\rho^2 = R^2 \Rightarrow \rho = R.$$

Так как $\rho'_\varphi = (R)'_\varphi = 0$, а $0 \le \varphi \le \pi$, найдем площадь данной поверхности:

$$S = 2\pi\cdot\int_\alpha^\beta \rho\cdot\sin\varphi\sqrt{\rho^2 + \left(\rho'_\varphi\right)^2}\,d\varphi =$$

$$= 2\pi\cdot\int_0^\pi R\cdot\sin\varphi\sqrt{R^2 + 0^2}\,d\varphi =$$

$$= 2\pi\cdot\int_0^\pi R^2\cdot\sin\varphi\,d\varphi = 2\pi R^2\cdot\int_0^\pi \sin\varphi\,d\varphi =$$

$$= 2\pi R^2(-\cos\varphi)\Big|_0^\pi = 2\pi R^2\left(-\cos\pi + \cos 0\right) = 2\pi R(1+1) = 4\pi R^2 \text{ (кв. ед.).}$$

## Задания для самостоятельной работы

I. Вычислить **объемы тел**, образованных вращением фигуры, ограниченной линиями:

| | Ответы: |
|---|---|
| 1. $y = 4 - x^2$, $y = 0$, $x = 0$, где $x \ge 0$ вокруг а) оси Ox; б) оси Oy. | а) $V = \dfrac{256 - \pi}{15}$ ( ед.$^3$ ). б) $V = 8\pi$ ( ед.$^3$ ). |
| 2. $xy = 9$, $y = 3$; $y = 9$ и осью Oy вокруг оси Oy. | $V = 18\pi$ ( ед.$^3$ ). |
| 3. $x^2 = 3y$ и биссектрисой I координатного угла вокруг оси Ox. | $V = \dfrac{18\pi}{5}$ ( ед.$^3$ ). |

II. Вычислить площади поверхностей, полученных вращением кривых вокруг оси Ox.

| | |
|---|---|
| 1. $y = \dfrac{x^3}{3}$, $-2 \le x \le 2$; | $S = \dfrac{2\pi}{9}\left(17\sqrt{7} - 1\right)$ (кв. ед.). |
| 2. $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t/3\cdot\left(t^2 - 3\right) \end{cases}$, $0 \le t \le \sqrt{3}$; | $S = 3\pi$ (кв. ед.). |
| 3. $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ вокруг полярной оси. | $S = \dfrac{32}{5}\pi a^2$ (кв. ед.). |

## 5. Приложения определенных интегралов к решению физических задач

1) Путь, пройденный точкой.

Пусть точка движется по некоторой кривой и абсолютная величина скорости ее $V = f(t)$ есть известная функция времени $t$. Тогда путь, пройденный точкой за промежуток времени $[t_1; t_2]$, равен: $S = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt$.

**Пример.**

Скорость тела задается формулой $V = \sqrt{1+t}$ м/с. Найти путь, пройденный телом за первые 10 секунд после начала движения.

Решение.

Здесь $t_1 = 0,\ t_2 = 10;\ f(t) = \sqrt{1+t}$, тогда

$$S = \int\limits_0^{10} \sqrt{1+t}\,dt = \int\limits_0^{10} (1+t)^{1/2} dt = \left.\frac{(1+t)^{3/2}}{3/2}\right|_0^{10} =$$

$$= \frac{2}{3}(1+t)^{3/2}\Big|_0^{10} = \frac{2}{3}(1+t)\cdot\sqrt{1+t}\,\Big|_0^{10} =$$

$$= \frac{2}{3}(1+10)\cdot\sqrt{1+10} - \frac{2}{3}(1+0)\cdot\sqrt{1+0} =$$

$$= \frac{22\cdot\sqrt{11}}{3} - \frac{2}{3} = \frac{22\cdot\sqrt{11}-2}{3} \approx \frac{22\cdot 3{,}3-2}{3} \approx 23{,}65\ (\text{м}).$$

Ответ: $S = 23{,}65$ м.

2) Работа силы.

Если переменная сила $F(x)$ действует в направлении оси Ox, то работа силы на отрезке $[x_1; x_2]$ равна $A = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx$.

**Пример.** Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,06 м, если сила 1 Н растягивает ее на 0,01 м ?

Решение.

Так как $F(x) = kx$, где $k$ - коэффициент пропорциональности, $F$ - сила, растягивающая пружину на $x$ м.

Полагая $F = 1н,\ x = 0{,}01м \Rightarrow k = \frac{1}{0{,}01} = 100;\ \Rightarrow F(x) = k\cdot x = 100\cdot x$, тогда

$$A = \int\limits_0^{0{,}06} 100x\,dx = 100\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0{,}06} = 50\cdot x^2\Big|_0^{0{,}06} = 0{,}18\ \ (\text{дж}).$$

Ответ: $A = 0{,}18$ дж.

3) Статические моменты и центр тяжести плоской фигуры.

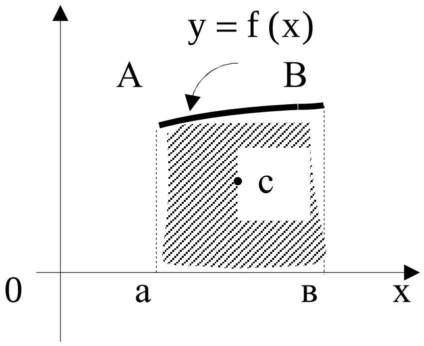



Рисунок 16

Пусть дана материальная плоская фигура (пластинка), ограниченная кривой $y = f(x) \geq 0$ и прямыми: $y = 0$ (осью $Ox$), $x = a$; $x = в$ (см. рис. 16). Считаем, что поверхностная плотность пластинки постоянная, т.е. $\gamma = const$. Тогда масса всей пластинки находится по формуле:

$$m = \gamma \cdot \int_a^в f(x)\,dx.$$

Статические моменты относительно координатных осей $Ox$ и $Oy$ находятся по формулам:

$$S_x = \frac{1}{2}\gamma \cdot \int_a^в y^2\,dx; \qquad S_y = \gamma \cdot \int_a^в x\,y\,dx.$$

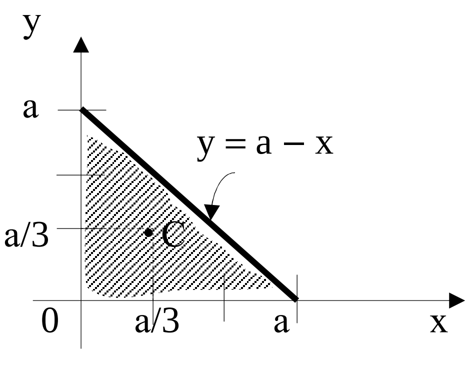
А координаты центра тяжести $C$ этой пластинки вычисляются по формулам:

$$x_c = \frac{S_y}{m}; \qquad y_c = \frac{S_x}{m}.$$

**Пример**.

Найти статические моменты относительно осей $Ox$ и $Oy$ и координаты центра тяжести треугольника, ограниченного прямыми $x + y = a$, $x = 0$, $y = 0$, (плотность $\gamma = 1$).

Решение.




Вычислим массу данной пластинки:

$$m = 1 \cdot \int_0^a (a - x)\,dx = \left( a x - \frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_0^a = a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}.$$

$$S_x = \frac{1}{2}\int_0^a (a - x)^2\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^a (a - x)^2\,d(a - x) =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{(a - x)^3}{3}\Bigg|_0^a = \frac{1}{2}\cdot\frac{a^3}{3} = \frac{a^3}{6}.$$

$$S_y = 1 \cdot \int_0^a x\,(a - x)\,dx = \int_0^a \left( xa - x^2 \right) dx =$$

$$= \left( \frac{a x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^a = \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} = \frac{3a^3 - 2a^3}{6} = \frac{a^3}{6}.$$

$x_c = \dfrac{a^3}{6} \cdot \dfrac{2}{a^2} = \dfrac{a}{3}$, аналогично $y_c = \dfrac{a}{3}$.

Ответ: $C\left( \dfrac{a}{3}; \dfrac{a}{3} \right)$.

4) Количество электричества.

Пусть по проводнику течет ток переменной силы $I = I(t)$, где $I(t) \ge 0$. Тогда количество электричества $Q$, протекшего через поперечное сечение проводника за промежуток времени $[t_1; t_2]$ $(t_1 < t_2)$, вычисляется по формуле:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I(t)\,dt,$$

где $I$ - выражено в амперах; $t$ – в секундах.

Рассмотрим **пример**.

Сила тока $I$ в проводнике меняется со временем по закону $I = 2 + 3t^2$. Определить, какое количество электричества проходит через поперечное сечение проводника за время от $t_1 = 2$ с. до $t_2 = 5$ с.

Решение.

$$Q = \int_2^5 \left(2 + 3t^2\right)dt = \left(2t + \frac{3t^3}{3}\right)\Bigg|_2^5 = \left(2t + t^3\right)\Bigg|_2^5 = \left(2 \cdot 5 + 5^3\right) - \left(2 \cdot 2 + 2^3\right) =$$
$$= 10 + 125 - (4 + 8) = 135 - 12 = 123\ (k.).$$

Ответ: $Q = 123k$.

## 6. Приближенное вычисление определенных интегралов

На практике часто требуется вычислить определенные интегралы от функций, для которых не удается найти первообразные. В этом случае осуществляют численный расчет по формулам приближенного интегрирования. Иногда это удобно делать и для функций, первообразные которых найти можно.

Рассмотрим три наиболее употребляемые формулы вычисления определенного интеграла – **формулу прямоугольников, формулу трапеций и формулу парабол (Симпсона).**

Пусть необходимо вычислить интеграл $\int_{-1}^{1}\left(2x^2 - x^4 + 1\right)dx$, пользуясь этими формулами. Построим график данной функции на заданном отрезке.

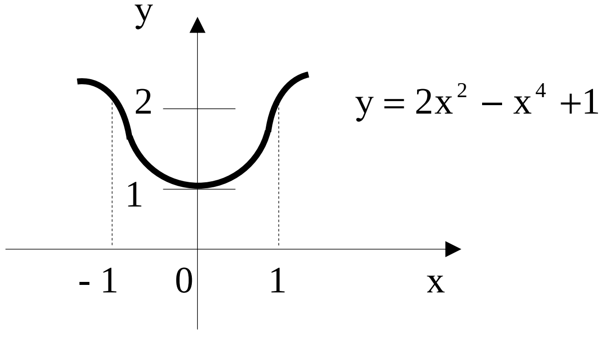



Рисунок 17

1) Так как **первообразную** этой **функции** найти легко, вначале вычислим этот интеграл, пользуясь формулой **Ньютона – Лейбница.**

$\int_{-1}^{1}\left(2x^2 - x^4 + 1\right)dx = \Big|$ т. к. пределы интегрирования симметричны, а подынтегральная функция четная, воспользуемся свойством интегрирования четных функция в симметричных отрезках $\Big| =$

$$= 2\int_0^1 \left(2x^2 - x^4 + 1\right)dx = 2\left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + x\right)\Bigg|_0^1 = 2\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{5} + 1\right) = 2\left(\frac{10 - 3 + 15}{15}\right) =$$

$$= 2 \cdot \frac{22}{15} = \frac{44}{15} \approx 2{,}9333.$$

2) Рассмотрим на этом же примере **метод прямоугольников.**

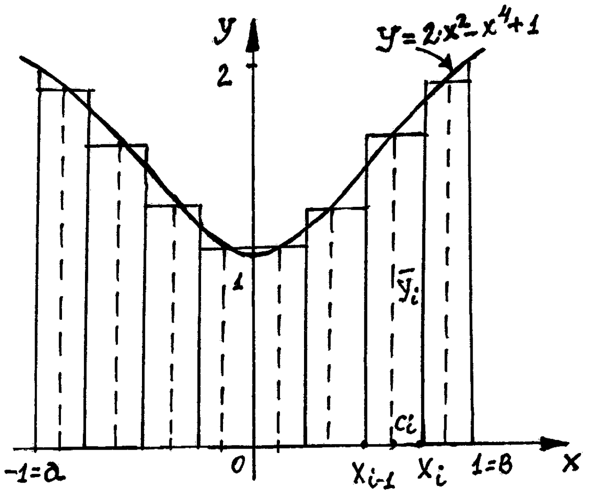



Рисунок 18

Отрезок $[a;\ в]$ разбивается на $n$ равных частей длины

$$h = \frac{в - a}{n} = x_i - x_{i-1}.$$

В середине $c_i = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}$ каждого такого отрезка строим ординату $\bar{y}_i = f\left(c_i\right)$. Приняв эту ординату за высоту, построим прямоугольник с площадью $h \cdot \bar{y}_i$. Тогда сумма площадей всех $n$ прямоугольников дает площадь фигуры, представляющую собой приближенное значение искомого определенного интеграла:

$$\int_a^в f(x)\,dx \approx \frac{в - a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \approx \frac{в - a}{n}\left(y_o + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right),$$

где $a = x_0$ , $в = x_n$.

Нашу фигуру мы разбили на 8 равных частей с шагом

$$h = \frac{1 - (-1)}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Тогда при:

$x_0 = -1 \Rightarrow\ y_0 = 2$,

$x_1 = -1 + 0{,}25 = -0{,}75 \Rightarrow y_1 = 2 \cdot \left(-0{,}75\right)^2 - \left(-0{,}75\right)^4 + 1 = 1{,}8086$,

$x_2 = -0{,}75 + 0{,}25 = -0{,}5 \Rightarrow y_2 = 2 \cdot \left(-0{,}5\right)^2 - \left(-0{,}5\right)^4 + 1 = 1{,}4375$,

$x_3 = -0{,}5 + 0{,}25 = -0{,}25 \Rightarrow y_3 = 2 \cdot \left(-0{,}25\right)^2 - \left(-0{,}25\right)^4 + 1 = 1{,}1211$,

$x_4 = -0{,}25 + 0{,}25 = -0 \Rightarrow y_4 = 2 \cdot 0^2 - 0^4 + 1 = 1$,

$x_5 = 0 + 0{,}25 = 0{,}25 \Rightarrow y_5 = 2 \cdot \left(0{,}25\right)^2 - \left(0{,}25\right)^4 + 1 = 1{,}1211$,

$x_6 = 0{,}25 + 0{,}25 = 0{,}5 \Rightarrow y_6 = 2 \cdot \left(0{,}5\right)^2 - \left(0{,}5\right)^4 + 1 = 1{,}4375$,

$x_7 = 0,5 + 0,25 = 0,75 \Rightarrow y_7 = 2 \cdot (0,75)^2 - (0,75)^4 + 1 = 1,8086,$
$x_8 = 0,75 + 0,25 = 1 \Rightarrow y_8 = 2 \cdot 1^2 - 1^4 + 1 = 2.$

Подставляем найденные значения в формулу:

$$y = \int_{-1}^{1} \left(2x^2 - x^4 + 1\right) dx \approx$$
$$\approx \frac{1+1}{8} \cdot \left(2 + 1,8086 + 1,4375 + 1,1211 + 1,1211 + 1,4375 + 1,8086 + 2\right) \approx$$
$$\approx \frac{1}{4}\left(4 + 2 \cdot 1,8086 + 2 \cdot 1,4375 + 2 \cdot 1,1211 + 1\right) \approx$$
$$\approx \frac{1}{4}\left(5 + 3,6172 + 2,875 + 2,2422\right) \approx \frac{1}{4} \cdot 13,7344 \approx 3,4336.$$

2) Теперь рассмотрим **метод трапеций** для этого же интеграла. Эту формулу получают аналогично предыдущей, достраивая в процессе разбиения каждую фигуру до обычной трапеции.

Тогда

$$\int_{a}^{в} f(x)\,dx \approx \frac{в-a}{n} \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right).$$

$$\int_{-1}^{1} \left(2x^2 - x^4 + 1\right) dx \approx$$
$$\approx \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2+2}{2} + 1,8086 + 1,4375 + 1,1211 + 1 + 1,1211 + 1,4375 + 1,8086\right) \approx$$
$$\approx \frac{1}{4}\left(2 + 2 \cdot 1,8086 + 2 \cdot 1,4375 + 2 \cdot 1,1211 + 1\right) \approx$$
$$\approx \frac{1}{4}\left(3 + 3,6172 + 2,875 + 2,2422\right) \approx \frac{1}{4} \cdot 11,7344 \approx 2,9336.$$

3) Вычислим данный интеграл по **формуле парабол** (формула Симпсона). Если заменить график функции на каждом отрезке разбиения не отрезками прямых, а дугами парабол, то получим **формулу Симпсона**:

$$\int_{a}^{в} f(x)\,dx \approx \frac{в-a}{6\,n} \cdot \Big((y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) +$$
$$+ 2\,(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2})\Big).$$

В нашем случае: т.к. отрезок разбивается на $2n$ равных частей, то

$$\int_{-1}^{1}\left(2x^2-x^4+1\right)dx\approx\frac{2}{3\cdot2\cdot4}\left(y_0+y_8+4\left(y_1+y_3+y_5+y_7\right)+2\left(y_2+y_4+y_6\right)\right)\approx$$

$$\approx\frac{1}{12}\left(2+2+4(1{,}8086+1{,}1211+1{,}1211+1{,}8086)+2(1{,}4375+1+1{,}4375)\right)\approx$$

$$\approx\frac{1}{12}\left(4+4\,(2\cdot1{,}8086+2\cdot1{,}1211)+2(2\cdot1{,}4375+1)\right)\approx$$

$$\approx\frac{1}{12}\left(4+4(3{,}6172+2{,}2422)+2(2{,}875+1)\right)\approx$$

$$\approx\frac{1}{12}\left(4+4\cdot5{,}8594+2\cdot3{,}875\right)\approx$$

$$\approx\frac{1}{12}\left(4+23{,}4376+7{,}75\right)\approx\frac{1}{12}\cdot35{,}1876\approx2{,}9323.$$

**Вывод.** Сравнивая ответы, видим, что данный интеграл приближенно находится с различной степенью точности по различным формулам.

Задания для самостоятельной работы

Вычислить **приближенно** определенные интегралы:

Ответы:

1. $\int_1^2\frac{dx}{x}$, разбивая отрезок [ 1; 2 ] на 10 частей с округлением до 4-го десятичного знака по формуле прямоугольников. — 0, 7188
2. $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$, разбивая отрезок [ 0; 1 ] на 6 частей с округлением до 4-го десятичного знака по формуле трапеций. — 0, 8109
3. $\int_1^3\frac{dx}{2x-1}$, разбивая отрезок [ 1; 3] на 4 части с округлением до 4-го десятичного знака по формуле Симпсона. — 0, 8111

## 7. Несобственные интегралы

Рассмотрим так называемые **несобственные интегралы**, т.е. определенный интеграл от непрерывной функции**, но с бесконечным промежутком интегрирования** (несобственный интеграл I рода), или определенный интеграл с конечным промежутком интегрирования, но от функции, имеющей на нем **бесконечный разрыв** (несобственный интеграл II рода).

Рассмотрим, как вычисляются несобственные интегралы I рода. Здесь возможны **три варианта:**

1) Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;+\infty)$, тогда

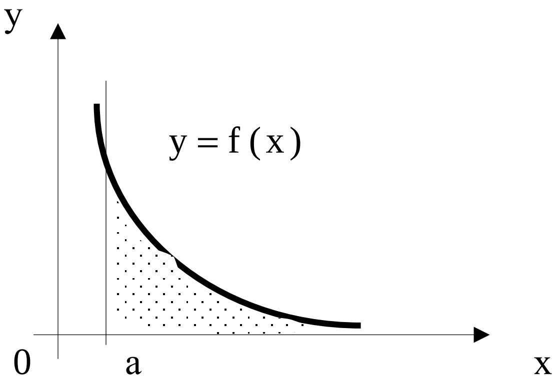



Рисунок 19

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\text{в}\to+\infty}\int\limits_{a}^{\text{в}} f(x)\,dx .$$

Если этот предел существует, то говорят, что интеграл **сходится**; если же предел не существует или бесконечен, то говорят, что интеграл **расходится**.

2) Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $(-\infty, \text{в}]$, тогда

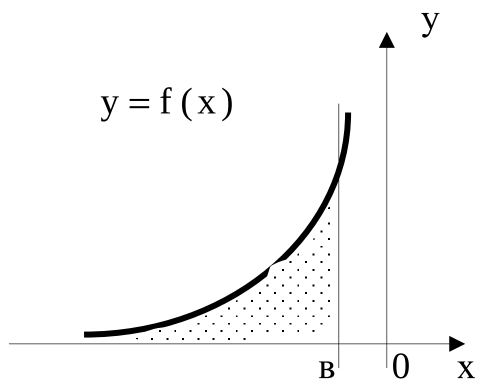



Рисунок 20

$$\int\limits_{-\infty}^{\text{в}} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{\text{в}} f(x)\,dx .$$

Сходимость и расходимость такого интеграла определяется аналогично.

Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами интегрирования определяется формулой

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)\,dx ,$$

где c – произвольное число.

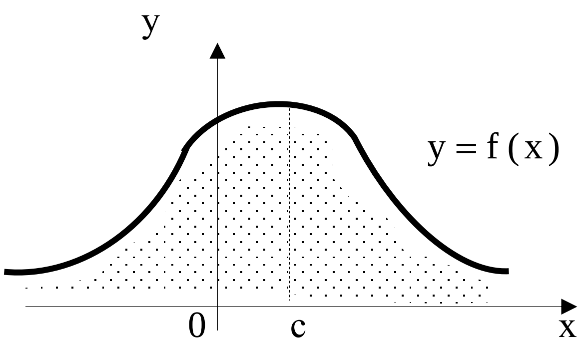



Рисунок 21

Интеграл, стоящий в левой части равенства, сходится лишь тогда, когда сходятся оба интеграла, стоящие в правой части равенства.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость :

1. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim\limits_{в\to+\infty}\int\limits_{1}^{в}x^{-2}\,dx=\lim\limits_{в\to+\infty}\left.\frac{x^{-1}}{(-1)}\right|_{1}^{в}=-\lim\limits_{в\to+\infty}\left.\frac{1}{x}\right|_{1}^{в}=-(0-1)=1,\Rightarrow$ данный **интеграл сходится.**

2. $\int\limits_{-\infty}^{0}\cos x\,dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0}\cos x\,dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\left.\sin x\right|_{a}^{0}=0-\lim\limits_{a\to-\infty}\sin a,$ т. к. при $a\to-\infty$ $\lim\limits_{a\to-\infty}\sin a$ не существует, $\Rightarrow$ **данный интеграл расходится.**

3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}=\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_{-t}^{t}\frac{dx}{(x+1)^2+1}+\lim\limits_{t\to\infty}\left.\operatorname{arctg}(x+1)\right|_{-t}^{t}=$

$$=\lim\limits_{t\to\infty}\left[\operatorname{arctg}(t+1)-\operatorname{arctg}(1-t)\right]=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi,$$

следовательно, **данный интеграл сходится.**

В некоторых задачах нет необходимости вычислять интеграл, достаточно лишь знать, сходится он или нет.

**Сформулируем признак сходимости:**

Интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty}f(x)\,dx\quad(a>0)$: 1) сходится, если $|f(x)|\le\frac{M}{x^m}$ и $m>1$;

2) расходится, если $f(x)\ \ge\frac{M}{x^m}$ и $m\le 1$, где $M$, $m$ - постоянные.

**Пример.** Установить, сходится или расходится интеграл $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\cos x}{x^3}\,dx$, используя признак сходимости.

Решение. Так как $|\cos x|\le 1$, то $\left|\frac{\cos x}{x^3}\right|\le\frac{1}{x^3}$, т.е. подынтегральная функция удовлетворяет условию (1) при $M=1$ и $m=3$, $\Rightarrow$ данный интеграл сходится.

Теперь рассмотрим, как вычисляются несобственные интегралы II рода.

Если функция $f(x)$ терпит **бесконечный разрыв** в точках $x=a$, или $x=в$, или $x=c\ (a<c<в)$, то интеграл $\int\limits_{a}^{в}f(x)\,dx$ называется **несобственным интегралом II рода.**

Таким образом, при вычислении таких интегралов также **возможны три варианта:**

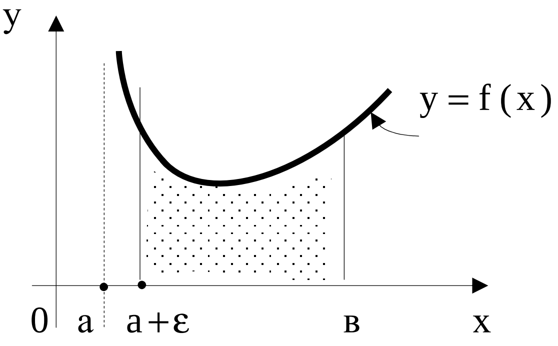



Рисунок 22

1) если $x = a$ - точка разрыва $f(x)$:

$$\int_a^в f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{в} f(x)\,dx, \text{ где } \varepsilon > 0;$$

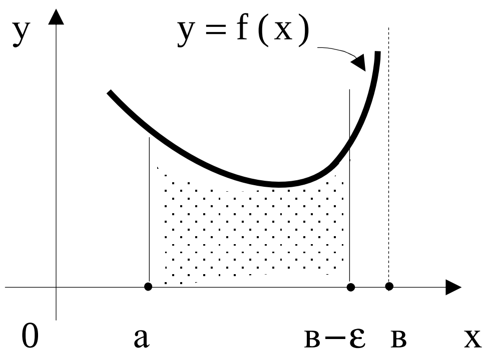



Рисунок 23

2) если $x = в$ - точка разрыва $f(x)$ :

$$\int_a^в f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a}^{в-\varepsilon} f(x)\,dx;$$

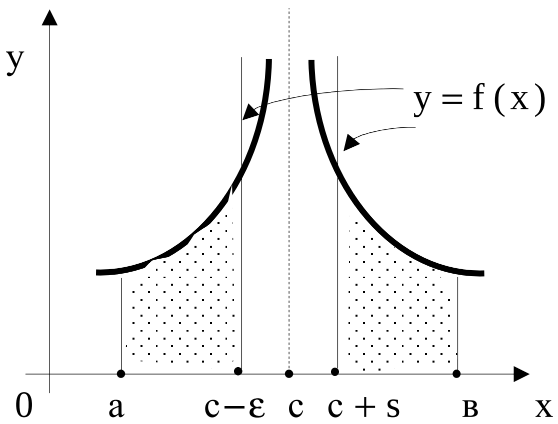



Рисунок 24

3) если $x = c$ - точка разрыва $f(x)$, где $a < c < в$

$$\int_a^в f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)\,dx +$$

$$+\lim_{s\to 0}\int_{c+s}^{в} f(x)\,dx.$$

Если **хотя бы один** из пределов не существует или равен бесконечности, несобственный интеграл II рода **расходится**. В противном случае – **сходится.**

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$1.\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left| \begin{array}{l} x = 0 - \text{точка разрыва функции} \\ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}, \Rightarrow \text{интеграл несобственный} \\ \text{II рода} \end{array} \right| = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} =$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1} x^{-1/2}\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x^{1/2}}{1/2}\Bigg|_{\varepsilon}^{1}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(2\sqrt{x}\right)\Bigg|_{\varepsilon}^{1}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(2-2\sqrt{\varepsilon}\right)=2,$$

следовательно, данный интеграл сходится.

2. $$\int_0^{\pi/2}\operatorname{tg}x\,dx=\left|\begin{array}{l}\text{здесь } x=\pi/2 \text{ точка разрыва подынтегральной}\\ \text{функции т.к. } \operatorname{tg}\pi/2 \text{ не существует}\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\operatorname{tg}x\,dx=-\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\cos x\right)\Bigg|_{0}^{\pi/2-\varepsilon}=$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\cos(\pi/2-\varepsilon)-\ln(\cos 0)\right)=$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\cos(\pi/2-\varepsilon)-\ln 1\right)=-\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\cos(\pi/2-\varepsilon)-0\right),$$

так как этот предел не существует, следовательно, данный интеграл расходится.

3. $$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\left|\begin{array}{l}\text{здесь } x=0 \text{ – точка разрыва}\\ \text{подынтегральной функции } f(x)\end{array}\right|=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{0-\varepsilon}\frac{dx}{x^2}+\lim_{s\to 0}\int_{0+s}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x^2}+\lim_{s\to 0}\int_{s}^{1}\frac{dx}{x^2}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{-1}^{-\varepsilon}+\lim_{s\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{s}^{1}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)+\lim_{s\to 0}\left(-1+\frac{1}{s}\right)=\infty,$$

следовательно, данный интеграл расходится $(\text{здесь } \varepsilon>0,\ s>0)$.

## Задания для самостоятельной работы

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

| | Ответы: |
|---|---|
| 1. $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^5}$. | $1/64$. |
| 2. $\int_{-\infty}^{0}x\cdot e^x\,dx$. | 1. |
| 3. $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{2x}\,dx$. | Расходится. |
| 4. $\int_2^{10}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$. | 6. |
| 5. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dx}{1+\cos x}$. | 1. |
| 6. $\int_{-1}^{1}\frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}}\,dx$. | $10/7$. |

## Вариант 1

1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{1}^{3}\left(2\cdot\sqrt[3]{x}+\dfrac{3}{\sqrt[7]{x}}\right)dx$; б) $\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{x\,dx}{1+x^2}$; в) $\int\limits_{0}^{1}x\cdot e^{-x}\,dx$;

г) $\int\limits_{3}^{5}\dfrac{dx}{x^2+3x-10}$; д) $\int\limits_{0}^{1}\dfrac{4x\,dx}{\sqrt[3]{(9x-1)^2}-\sqrt[3]{9x-1}+1}$; е) $\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin^3 x\cdot\cos x\,dx$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=12x-x^2$, $y=-6x$.

3. Найти длину дуги кривой, заданной параметрически, заключенной между точками: $\begin{cases}x=8\sin t+6\cos t\\ y=6\sin t-8\cos t\end{cases}$, $t_1=0;\ t_2=\pi/2$.

4. Найти объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной кривыми: $xy=1;\ y=2;\ y=x$, вокруг оси Оу.

5. Найти площадь поверхности, образованной вращением кривой $y=x^3$, $0\le x\le 1$, вокруг оси ОХ.

6. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

а) $\int\limits_{3}^{\infty}\dfrac{13}{x^2-4}\,dx$; б) $\int\limits_{5}^{6}\dfrac{dx}{\sqrt[4]{x-5}}$.

7. Вычислить определенный интеграл приближенно по формуле Симпсона с точностью 0,001, разбивая отрезок интегрирования на 10 частей: $\int\limits_{0}^{1}\dfrac{x^6dx}{1+x^2}$.

## Вариант 2

1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{1}^{2}\dfrac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}\,dx$; б) $\int\limits_{0}^{1}\dfrac{e^x\,dx}{e^x+1}$; в) $\int\limits_{0}^{3}x\cdot\operatorname{arctg}x\,dx$;

г) $\int\limits_{0}^{1}\dfrac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}$; д) $\int\limits_{0}^{7}\dfrac{4x\,dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1}$; е) $\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin x\cdot\cos^2 x\,dx$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=4x-x^2$ и осью Ох.

3. Найти длину дуги кривой $\rho=1-\cos\varphi$, заключенной между точками $\varphi_1=0;\quad \varphi_2=\pi$.

4. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями: $y=e^x; x=0;\ y=e$ вокруг оси Оу.

5. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной кривыми $y=x\cdot\sqrt{x}$, $x=4$ и осью Ох.

6. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2+10x+146}$; б) $\int\limits_{1}^{2}\dfrac{dx}{\ln x}$.

7. Вычислить определенный интеграл приближенно по формуле трапеций с точностью 0,001, разбивая отрезок интегрирования на 8 равных частей: $\int\limits_{-1}^{7} \sqrt[3]{9x+1}\,dx$.

## Вариант 3

1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{1}^{2} \frac{3\cdot 2^x - 5}{2^x}\,dx$; б) $\int\limits_{2}^{4} \frac{x^2\,dx}{x^3+1}$; в) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} (7x+17)\cdot \sin x\,dx$;

г) $\int\limits_{3}^{4} \frac{dx}{x - x^2 - 2{,}5}$; д) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{(7x+16)\,dx}{\sqrt[3]{(7x+8)^2} + 2\cdot\sqrt[3]{7x+8}}$; е) $\int\limits_{0}^{\pi/3} \cos^2 x\,dx$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $xy = 4$, $x + y = 5$.

3. Найти длину дуги кривой, заданной параметрически, заключенной между точками: $\begin{cases} x = 1/3\ t^3 - t \\ y = t^2 + 2 \end{cases}$, $t_1 = 0;\ t_2 = 3$.

4. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями: $y = \sin x$; $0 \le x \le \pi$ вокруг оси Ох.

5. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ох параболы $y^2 = 2x + 1$ от $x_1 = 1$ до $x_2 = 7$.

6. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

а) $\int\limits_{11}^{\infty} \frac{17\cdot dx}{x^2 - 100}\,dx$; б) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^4}$.

7. Вычислить определенный интеграл приближенно по формуле Симпсона с точностью 0,001, разбивая отрезок интегрирования на 10 равных частей: $\int\limits_{1}^{2} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx$.

## Вариант 4

1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{1}^{2} \frac{\sqrt{x} - x^3 + x^2}{5x^7}\,dx$; б) $\int\limits_{0}^{3} e^{-3x+1}\,dx$; в) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \cos x\,(3x+16)\,dx$;

г) $\int\limits_{1}^{4} \frac{(x-1)\,dx}{\sqrt[3]{(3x-4)^2} - \sqrt[3]{3x-4} + 1}$; д) $\int\limits_{1}^{2} \sin^2(3+x)\cos(3+x)\,dx$; е) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5}$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линией: $\rho = 2(1 + \sin\varphi)$.

3. Найти длину дуги кривой, заданной параметрически, заключенной между точками: $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$, $t_1 = 0;\ t_2 = \ln\pi$.

4. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями: $2y^2 = x^3$; $x = 4$ вокруг оси Ох.

5. Найти площадь поверхности, образованной вращением кривой вокруг оси Ox: $y = 2x,\ 0 \le x \le 2$.

6. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{15}{\left(\frac{x}{9}\right)^2 + 1} dx$; б) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$.

7. Вычислить определенный интеграл приближенно по формуле трапеций с точностью 0,001, разбивая отрезок интегрирования на 8 равных частей: $\int\limits_{-2}^{6} \sqrt[3]{9x+10}\, dx$.

## Вариант 5

1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{2}^{3} \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} dx$; б) $\int\limits_{2}^{4} \frac{x\,dx}{x^2+4}$; в) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} (14+10x)\cos x\, dx$;

г) $\int\limits_{0}^{3} \frac{15x\,dx}{\sqrt[4]{(5x+1)^3} + \sqrt[4]{5x+1}}$; д) $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{x^2+2x+3}$; е) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{16\,dx}{2+6\cos^2 x}$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линией: $\rho^2 = a^2 \cdot \cos 2\varphi$.

3. Найти длину дуги кривой $y = 2\sqrt{x}$, заключенной между точками: $0 \le x \le 1$.

4. Найти объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями: $y = x(4-x),\ y = 0$, вокруг оси Oy.

5. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной кривой $y = 1/2 \cdot x^2$ и прямой $y = 4 - x$.

6. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+173+26x}$ ; б) $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{(x-1)^2}$.

7. Вычислить определенный интеграл приближенно по формуле трапеций с точностью 0,001, разбивая отрезок интегрирования на 8 равных частей: $\int\limits_{-3}^{5} \sqrt[3]{9x+19}\, dx$.

## Вариант 6

1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{1}^{2} \frac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^4}{x^3} dx$; б) $\int\limits_{2}^{3} e^{x^2} x\, dx$; в) $\int\limits_{0}^{1} 10 \arcsin(x/20)\, dx$;

г) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$; д) $\int\limits_{0}^{5} \frac{27x\,dx}{\sqrt[4]{(3x+1)^3} + \sqrt[4]{3x+1}}$; е) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{54}{18\sin^2 x + 6} dx$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = 25x - x^2$ и $y + 5x = 0$.

3. Найти длину дуги кривой: $x = t^2,\ y = t - 1/2 \cdot t^2,\ 0 \le t \le 3$.

4. Найти объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями: $(y-3)^2+3x=0$, $x=-3$, вокруг оси Ох.

5. Найти площадь поверхности, образованной вращением кривой: $x^2+y^2=1$, где $0\le x\le 1$, вокруг оси Ох.

6. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

а) $\int\limits_{-11}^{\infty}\sin\left(\frac{x}{3}\right)dx$ ; б) $\int\limits_{2}^{6}\frac{dx}{x^2-7x+10}$.

7. Вычислить определенный интеграл приближенно по формуле прямоугольников с точностью 0,001, разбивая отрезок интегрирования на 4 части: $\int\limits_{0,6}^{1,4}\frac{\cos x}{x+1}dx$.

## Вариант 7

1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{1}^{2}\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}{\sqrt[3]{x}}dx$; б) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{e^{2x}}{e^{2x}+4}dx$; в) $\int\limits_{1}^{2}(3x+2)\ln x\,dx$;

г) $\int\limits_{2}^{3}\frac{dx}{x(x+1)}$; д) $\int\limits_{1}^{4}\frac{(13-5x)\,dx}{\sqrt[4]{(5x-4)^3}+3\cdot\sqrt[4]{5x-4}}$; е) $\int\limits_{0}^{\pi}\sin 2x\cdot\sin 5x\,dx$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2/3$ и $y=4-2/3\cdot x^2$.

3. Найти длину дуги кривой $\rho=1+\cos\varphi$, заключенной между точками $\varphi_1=0$, $\varphi_2=\pi$.

4. Найти объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями: $y=(4-x)$, $x=0$, вокруг оси Оу.

5. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной дугой синусоиды $y=\sin x$ и отрезком оси Ох от $x_1=0$ до $x_2=\pi$.

6. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

а) $\int\limits_{6}^{+\infty}\frac{6}{(5+x)\cdot\ln^3(x+5)}dx$ ; б) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}$.

7. Вычислить приближенно интеграл по формуле трапеций с точностью 0,001, разбивая отрезок интегрирования на 4 равные части: $\int\limits_{0,18}^{0,98}\frac{\sin x}{x+1}dx$.

## Вариант 8

1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{1}^{2}\left(\frac{1-x}{x}\right)^2dx$; б) $\int\limits_{0}^{\pi}e^{\sin x}\cdot\cos x\,dx$; в) $\int\limits_{0}^{1}x^2\ln(1+x)\,dx$;

г) $\int\limits_{3}^{4}\frac{dx}{(x+1)(2x-3)}$; д) $\int\limits_{0}^{5}\frac{3\,dx}{\sqrt{3x+1}+\sqrt[4]{3x+1}}$; е) $\int\limits_{0}^{\pi/2}\cos 2x\cdot\cos 3x\,dx$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=(x-2)^3$, $y=0$ и осью ординат.

3. Найти длину дуги кривой, заданной параметрически $\begin{cases} x=t^2 \\ y=t-\frac{1}{3}t^3 \end{cases}$, заключенной между точками $t_1=1, t_2=3$.

4. Найти объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2, y=2x^2, x=1, x=2$, вокруг оси Ох.

5. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ох кривой $y^2=4+x$, отсеченной прямыми $x=2, y=0$.

6. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

а) $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(13x)}{1+(13x)^2}dx$ ; б) $\int\limits_0^5 \frac{dx}{(x-3)^2}$.

7. Вычислить приближенно интеграл по формуле Симпсона с точностью 0,01, разбивая отрезок интегрирования на 4 части: $\int\limits_0^\pi \frac{\sin x}{x}dx$.

## Вариант 9

1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_1^2 \left(3\cdot\sqrt[5]{x^2}-\frac{1}{x}\right)^2 dx$; б) $\int\limits_0^2 e^{-x^3}\cdot x^2\,dx$; в) $\int\limits_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$;

г) $\int\limits_1^2 \frac{5x\,dx}{\sqrt{5x^2-4}+\sqrt[4]{5x^2-4}}$; д) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2+6x+9x^2}}$; е) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 x\,dx$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линией: $\rho^2=a^2\cdot\sin 2\varphi$.

3. Найти длину дуги кривой, заданной параметрически $\begin{cases} x=t^6/6 \\ y=2-t^4/4 \end{cases}$, заключенной между точками $t_1=0, t_2=2$.

4. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями: $y=e^x, y=e^{2x}, x=\ln 3$, вокруг оси Ох.

5. Найти площадь поверхности, образованной вращением кривой $y^2=2x$ вокруг оси Ох, $0\le x\le 2$.

6. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

а) $\int\limits_0^\infty \sin x\,dx$ ; б) $\int\limits_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}dx$.

7. Вычислить определенный интеграл приближенно по формуле трапеций с точностью 0,001, разбивая отрезок интегрирования на 8 равных частей:

$$\int\limits_{-4}^4 \sqrt[3]{9x+28}\,dx.$$

## Вариант 10

1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_3^4 \frac{7\,dx}{x/2-1}$; б) $\int\limits_1^2 \frac{e^{1/x}\,dx}{x^2}$; в) $\int\limits_0^{12} 3\arccos\left(\frac{x}{15}\right)dx$;

г) $\int\limits_0^1 \frac{4x\,dx}{\sqrt[3]{(5x-2)^2}+\sqrt[3]{5x-2}+1}$; д) $\int\limits_4^5 \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x-2}}$; е) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{40}{15\cdot\cos^2 x+5}\,dx$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=4x^2,\ y=\frac{x^2}{9},\ y=2$.

3. Найти длину дуги $\rho=\sin^3\frac{\varphi}{3}$, заключенной между точками $\varphi_1=0,\ \varphi_2=\frac{\pi}{2}$.

4. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями: $y^2=4x,\ x=1,\ y=0$ вокруг оси Oy.

5. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной кривыми: $y=2x-x^2,\ y=0$.

6. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

а) $\int\limits_0^{\infty} x\cdot e^{-x/2}\,dx$; б) $\int\limits_1^2 \frac{x\,dx}{x^2-1}$.

7. Вычислить определенный интеграл приближенно по формуле прямоугольников с точностью 0,01, разбивая отрезок интегрирования на 4 равные части: $\int\limits_2^3 \frac{dx}{\ln x}$.

## Вариант 11

1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_1^4 \frac{1-3x^2}{x\sqrt{x}}\,dx$; б) $\int\limits_0^3 \frac{dx}{(2+x)\cdot\sqrt{1+x}}$; в) $\int\limits_0^2 \ln\left(x^2+4\right)dx$;

г) $\int\limits_9^{-3} \frac{(x+6)}{x^2+12x+45}\,dx$; д) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{21}{6\sin^2 x+9\cos^2 x+3}\,dx$; е) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}-1}^{\frac{\pi}{4}-1} 7\cdot\sin(2+2x)\,dx$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линией: $\rho=2\cos\varphi$.

3. Найти длину дуги, заданной параметрически $\begin{cases} x=a\cdot\cos^2 t \\ y=a\cdot\sin^2 t \end{cases}$, заключенной между точками $t_1=0,\ t_2=\pi/2$.

4. Найти объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной отрезком прямой, соединяющей начало координат с точкой (а; в), вокруг оси Oy.

5. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной кривыми: $x^2=y,\ x=4$ и осью Ox.

6. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\,dx}{(x+3)^4}$ ; б) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{1-\cos 2x}$ .

7. Вычислить определенный интеграл приближенно по формуле прямоугольников с точностью 0,001, разбивая отрезок интегрирования на 8 частей: $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{2x-1}$.

## Вариант 12

1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{1}^{3} \left( \sqrt[4]{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)^2 dx$; б) $\int\limits_{0}^{\pi/2} 2^{\sin x} \cdot \cos x\, dx$; в) $\int\limits_{-1}^{0} (2x+3) \cdot e^{-2x}\, dx$;

г) $\int\limits_{14}^{28} \frac{11x-52}{-50x+80+5x^2}\, dx$; д) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{24}{6+18\sin^2 x} dx$; е) $\int\limits_{\pi/8-5}^{\pi/6-5} 7 \cdot \cos\,(10+2x)\, d\,x$ .

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y^2 = 9x$, $y = 3x$.

3. Найти длину дуги $\rho = 1 - \sin\varphi$, заключенной между точками $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi/2$.

4. Найти объем тела, образованного вращением плоской фигуры, ограниченной кривыми: $y = x^2/4$, $y = x^3/8$, вокруг оси Ох.

5. Найти площадь поверхности, образованной вращением кривой $y = x^3$, где $-\frac{2}{3} \le x \le \frac{2}{3}$, вокруг оси Ох.

6. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x^2+1}}$ ; б) $\int\limits_{2}^{4} \frac{dx}{x^2-4}$ .

7. Вычислить определенный интеграл приближенно по формуле прямоугольников с точностью 0,001, разбивая отрезок интегрирования на 4 части: $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$.

## Вариант 13

1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{1}^{2} \left( \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 3x\sqrt{x} - e^x \right) dx$; б) $\int\limits_{2}^{4} \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x-1}}$; в) $\int\limits_{0}^{1} 3x^2 \cdot \arcsin x\, dx$;

г) $\int\limits_{-6}^{4\sqrt{3}-10} \frac{dx}{x^2+20x+116}$ ; д) $\int\limits_{-17}^{-9} \frac{(x+13)^2}{185+x^2+26x} dx$; е) $\int\limits_{\pi/21-1}^{\pi/14-1} 13 \cdot \cos\,(7x+7)\, d\,x$ .

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = 4 - x^2$ и осью Ох.

3. Найти длину дуги, заданной параметрически $\begin{cases} x = a\,(1-\sin t) \\ y = a\,(1-\cos t) \end{cases}$, заключенной между точками $t_1 = 0,\ t_2 = 2\pi$.

4. Найти объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной линиями: $y^2 = x,\ x^2 = y$, вокруг оси Oy.

5. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной кривой $x^2 + 4y - 16 = 0$ и осью Ox.

6. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

а) $\int\limits_{5}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2 - 8x + 17}$ ; б) $\int\limits_{-1}^{7} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{7-x}}$ .

7. Вычислить определенный интеграл приближенно по формуле Симпсона с точностью 0,001, разбивая отрезок интегрирования на 4 части: $\int\limits_{0}^{1} e^{x^2}\,dx$.

**Вариант 14**

1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{1}^{8} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$; б) $\int\limits_{-7}^{9} x \cdot \sqrt{9-x}\,dx$; в) $\int\limits_{-1}^{2} 3x^2 \cdot \ln(x+2)\,dx$;

г) $\int\limits_{15}^{57} \dfrac{9x - 30}{2x^2 - 18x + 6}\,dx$; д) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \dfrac{21}{3 + 9\cos^2 x}\,dx$; е) $\int\limits_{\pi/44-5}^{\pi/33-5} (\mathrm{ctg}^2(55+11x)+1)\,d\,x$ .

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^3,\ y = 2x,\ y = x$.

3. Найти длину дуги, заданной параметрически $\begin{cases} x = \cos^4 t \\ y = \sin^4 t \end{cases}$, заключенной между точками $t_1 = 0,\ t_2 = \pi/2$.

4. Найти объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной линиями: $y = x^3,\ x = 2,\ y = 0$, вокруг оси Oy.

5. Найти площадь поверхности, образованной вращением кривой

$\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$, $0 \le t \le \pi/2$ вокруг оси Ox.

6. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

а) $\int\limits_{e}^{+\infty} \dfrac{dx}{x \cdot (\ln x)^2}$ ; б) $\int\limits_{0}^{2} \dfrac{x\,dx}{\sqrt{4 - x^2}}$ .

7. Вычислить определенный интеграл приближенно по формуле Симпсона с точностью 0,001, разбивая отрезок интегрирования на 8 частей: $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{4 + x^2}\,dx$.

## Вариант 15

1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{2}^{8} \frac{\left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)^2}{x^2} dx$; б) $\int\limits_{1}^{e} \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$; в) $\int\limits_{10\ln 6}^{10\ln 21} x \cdot e^{x/10} dx$;

г) $\int\limits_{11}^{23} \frac{9x - 60}{6x^2 + 240 - 78x} dx$; д) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{45}{18\sin^2 x + 27\cos^2 x + 9} dx$; е) $\int\limits_{\ln\frac{7}{2}-3}^{\ln\frac{7}{2}-3} 7 \cdot e^{2x+6} dx$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линией: $\rho = 3\cos\varphi$.

3. Найти длину дуги, заданной параметрически $\begin{cases} x = a \cdot \cos^3 t \\ y = a \cdot \sin^3 t \end{cases}$, заключенной между точками $t_1 = 0, t_2 = \pi/2$.

4. Найти объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной кривыми: $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$, вокруг оси Ox.

5. Скорость движения тела задана функцией $v = \sqrt{t + c}$ м/с. Найти путь, пройденный телом за 20 с.

6. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

а) $\int\limits_{0}^{+\infty} x^2 \cdot e^{-x^3} dx$; б) $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x \cdot \sqrt{\ln x}}$.

7. Вычислить приближенно определенный интеграл, разбивая отрезок интегрирования на 8 частей, с точностью 0,001 с помощью формулы Симпсона: $\int\limits_{1}^{4} \ln(3x - 2) dx$.

## Вариант 16

1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{1}^{2} \frac{\sqrt[3]{x} \cdot e^x - 2\sqrt[3]{x^2} + x \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$; б) $\int\limits_{-7/11}^{-6/11} x \cdot (11x + 7)^4 dx$; в) $\int\limits_{0}^{\pi/4} x^2 \cdot \sin 2x dx$;

г) $\int\limits_{8}^{14} \frac{(x - 11)^2}{x^2 - 22x + 130} dx$; д) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{30}{18\cos^2 x + 6} dx$; е) $\int\limits_{\pi/28 - 1}^{\pi/21 - 1} 5\cos(7x + 7) dx$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$, $x = 8, y = 0$.

3. Найти длину дуги $\rho = 1 + \sin\varphi$, заключенной между точками $\varphi_1 = 0; \varphi_2 = \pi/2$.

4. Найти объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной кривыми: $y = \ln x$, $x = e$, $y = 0$, вокруг оси Ox.

5. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной кривыми $x^2 = y, x = 5$ и осью Ox.

6. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\,dx}{(x+2)^3}$ ; б) $\int\limits_{3}^{5} \frac{1}{\ln^5(11x-33)\cdot(x-3)}\,dx$ .

7. Вычислить определенный интеграл приближенно по формуле Симпсона с точностью 0,001, разбивая отрезок интегрирования на 4 части: $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{1+4x^3}\,dx$ .

## Вариант 17

1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{1}^{2} \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x^2}dx$; б) $\int\limits_{1}^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\cdot\sqrt{1-(\ln x)^2}}$; в) $\int\limits_{0}^{1/2} \arcsin 2x\,dx$;

г) $\int\limits_{10}^{18} \frac{11x-42}{5x^2-40x+60}\,dx$; д) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{16}{4\sin^2 x+6\cos^2 x+2}dx$; е) $\int\limits_{(\pi/15)-6}^{(\pi/10)-6} 5\sin(30+5x)\,dx$ .

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2$, $y=2-x^2$.

3. Найти длину дуги, заданной параметрически $\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t) \\ y=a(\sin t-t\cos t) \end{cases}$ заключенной между точками $t_1=0$, $t_2=2\pi$.

4. Найти объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной кривыми: $y=x^2+1$, $y=3x-1$, вокруг оси Ох.

5. Скорость движения точки определяется функцией $v=t\cdot e^{-0{,}01\cdot t}$ м/с. Найти путь, пройденный точкой за 5 с.

6. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

а) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+14x+13}$ ; б) $\int\limits_{7}^{22} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-7}{15}\right)^2}}\,dx$ .

7. Вычислить определенный интеграл приближенно, разбивая отрезок интегрирования на 6 частей, по формуле Симпсона с точностью 0,001: $\int\limits_{0,5}^{1,5} \frac{e^{0,1x}}{x}dx$ .

## Вариант 18

1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{1}^{2} \frac{(1-x)^3}{x\sqrt{x}}dx$; б) $\int\limits_{0}^{\ln 5} \frac{e^x\cdot\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx$; в) $\int\limits_{0}^{1} x^3 \operatorname{arctg} x\,dx$;

г) $\int\limits_{14}^{50} \frac{13x-68}{9x^2+144-90x}\,dx$; д) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{10}{4\sin^2 x+6\cos^2 x+2}dx$; е) $\int\limits_{1}^{2} \frac{7+\ln(3+x)}{3+x}\,dx$ .

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $xy=4$, $x=4$, $y=4$, $x=0$, $y=0$.

3. Найти длину дуги, заданной параметрически $\begin{cases} x = 6\sin t + 8\cos t \\ y = 8\sin t - 6\cos t \end{cases}$ заключенной между точками $t_1 = 0$, $t_2 = \pi/2$.

4. Найти объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной кривыми $y = x^3$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$, вокруг оси Oy.

5. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной отрезком прямой $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ и осями координат.

6. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x+2}{x^2+2x+2}\,dx$; б) $\int\limits_5^{13} \frac{1}{\sqrt[5]{(8x-40)}}\,dx$ .

7. Вычислить определенный интеграл приближенно по формуле Симпсона с точностью 0,001, разбивая отрезок интегрирования на 4 части: $\int\limits_0^1 \sqrt{2-x^3}\,dx$.

## Вариант 19

1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_1^2 \left(4\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)^2 dx$; б) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\,dx$; в) $\int\limits_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2}\,dx$;

г) $\int\limits_{16}^{28} \frac{13x-94}{x^2-70x+200}\,dx$; д) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{24}{12\sin^2 x + 18\cos^2 x + 6}\,dx$; е) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x}$ .

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = 1 - x^2, y = x^2 + 2$ $x = 0$, $x = 1$.

3. Найти длину дуги $y = \ln\left(1-x^2\right)$, заключенной между точками $x_1 = -1/2$, $x_2 = 1/2$.

4. Найти объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной кривыми $y = 2x - x^2$, $y = 0$, вокруг оси Ox.

5. Определить координаты центра тяжести сегмента параболы $y^2 = 2x$, отсекаемого прямой $x = 8$ и осью Ox.

6. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

а) $\int\limits_5^{+\infty} \frac{14}{(x-4)^{10}}\,dx$; б) $\int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{ctg} x\,dx$ .

7. Вычислить определенный интеграл приближенно по формуле трапеций с точностью 0,001, разбивая отрезок интегрирования на 8 частей: $\int\limits_0^8 \sqrt[3]{9x-8}\,dx$.

## Вариант 20

1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_2^8 \left( \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - 2 \right)^3 dx$; б) $\int\limits_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$; в) $\int\limits_0^2 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} dx$;

г) $\int\limits_{-15}^{-7} \frac{(x+11)^2}{x^2+22x+137} dx$; д) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$; е) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = e^x, y = e, x = -1, x = 0$.

3. Найти длину дуги $\rho = a \cdot \sin^4 \frac{\varphi}{4}$, заключенной между точками $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi$.

4. Найти объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной кривой $y^2 = 4 - x$, вокруг оси Оу.

5. Определить координаты центра тяжести прямоугольника со сторонами а, в $(a > 0,\ в > 0)$.

6. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+24x+313} dx$; б) $\int\limits_{11}^{22} \frac{1}{\ln^4(88x-88)\ (x-11)} dx$.

7. Вычислить определенный интеграл приближенно по формуле Симпсона с точностью 0,001, разбивая отрезок интегрирования на 6 частей: $\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1-0{,}1\cdot\sin^2 x}\, dx$.

## Вариант 21

1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_1^2 4 \cdot \frac{(x-2)^3}{x \cdot \sqrt[3]{x}} dx$; б) $\int\limits_0^1 x^{15} \cdot \sqrt{1+3x^8}\, dx$; в) $\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x^5} dx$;

г) $\int\limits_{5/3}^{8/3} \frac{dx}{\sqrt{3x^2-4x}}$; д) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+4\sin^2 x}$; е) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $\rho = 2(1-\sin\varphi)$ и полярной осью.

3. Найти длину дуги $y = \sqrt{2-x^2}$, заключенной между точками $x_1 = 0, x_2 = 1$.

4. Найти объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2 + 3, x = 4, y = 0, x = 0$, вокруг оси Ох.

5. Определить координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной параболой $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ и осями координат.

6. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{18x+\ x^2\ +225}\,dx$;   б) $\int\limits_0^1 \ln x\,dx$.

7. Вычислить определенный интеграл приближенно по формуле Симпсона с точностью 0,001, разбивая отрезок интегрирования на 4 части: $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^3}\,dx$.

## Вариант 22

1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_1^2 \left(2\cdot\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$;   б) $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\,dx$;   в) $\int\limits_0^{\pi} x\cdot\cos\frac{x}{2}\,dx$;

г) $\int\limits_{3,5}^{4,5} \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x}}$;   д) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x\ dx}{6-5\sin x+\sin^2 x}$;   е) $\int\limits_1^9 x\cdot\sqrt[3]{1-x}\,dx$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=\ln x,\ x=e,\ y=0$.

3. Найти длину дуги $\rho=\sin^3\frac{\varphi}{3}$, заключенной между точками $\varphi_1=\pi/2,\ \varphi_2=\ \pi$.

4. Найти объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной кривыми $y=x^2-1,\ x=1,\ y=0$, вокруг оси Oy.

5. Найти координаты центра тяжести однородной плоской пластинки, ограниченной кривой $y=\cos\ x$ и осью Ox.

6. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

а) $\int\limits_{16}^{+\infty} \frac{19}{x^2-225}\,dx$;   б) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}}\,dx$.

7. Вычислить определенный интеграл приближенно по формуле Симпсона с точностью 0,001, разбивая отрезок интегрирования на 4 части: $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{x}\cdot\sin x\,dx$.

## Вариант 23

1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt[3]{x^5}-x\cdot\sqrt{x}+3x^4}{x\cdot\sqrt[3]{x}}\,dx$;   б) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x+x^3}\,dx$;   в) $\int\limits_0^{1/2} \arcsin 2x\ dx$;

г) $\int\limits_0^1 \frac{e^x\,dx}{4e^{2x}+12e^x\ +34}$;   д) $\int\limits_{1/\pi}^{2/\pi} \frac{\sin 1/x}{x^2}\,dx$;   е) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\cdot\sqrt{1+x^2}}$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $x=4-y^2,\ x=0$.

3. Найти длину дуги $y=\arcsin(e^{-x})$, заключенной между точками $x_1=0,\ x_2=1$.

4. Найти объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной кривыми $y = 6x - x^2$, $x + y - 6 = 0$, вокруг оси Ox.

5. Определить координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной частью кривой $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\left(-1 \le x \le 1\right)$.

6. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

а) $\int\limits_5^{+\infty} \dfrac{15}{x-4}\,dx$; б) $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{\sqrt[6]{x} + \sqrt[3]{x}}\,dx$.

7. Вычислить определенный интеграл приближенно по формуле Симпсона с точностью 0,001, разбивая отрезок интегрирования на 4 части: $\int\limits_{0,2}^{1} \dfrac{e^x}{x^2}\,dx$.

### Вариант 24

1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_1^2 \left(4x - \dfrac{3}{x^2}\right)^3 x\sqrt{x}\,dx$; б) $\int\limits_{-1}^1 \dfrac{x^5\,dx}{x+2}$; в) $\int\limits_0^{\pi} x \cdot \sin x\,dx$;

г) $\int\limits_5^{13} \dfrac{(x-9)^2}{x^2 - 18x + 97}\,dx$; д) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \dfrac{63}{7 + 21\sin^2 x}\,dx$; е) $\int\limits_{-2}^{7} x \cdot \sqrt{7-x}\,dx$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $x^2 = 2y$, $y = 3x - x^2$.

3. Найти длину дуги $y = e^x$, заключенной между точками $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

4. Найти объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной кривыми $y = 4 - x^2$, $2x + y - 4 = 0$, вокруг оси Ox.

5. Найти центр тяжести однородной плоской фигуры, которая представляет собой прямоугольный треугольник с катетами a и h.

6. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

а) $\int\limits_4^{+\infty} \dfrac{4}{(10+x)\ln^6(x+10)}\,dx$; б) $\int\limits_{-2}^{2} \dfrac{x\,dx}{x^2 - 1}$.

7. Вычислить определенный интеграл приближенно по формуле Симпсона с точностью 0,001, разбивая отрезок интегрирования на 4 части: $\int\limits_0^1 \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$.

### Вариант 25

1. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_1^2 \dfrac{2 \cdot \sqrt[5]{x} - 7x^3\sqrt{x}}{x \cdot \sqrt[3]{x}}\,dx$; б) $\int\limits_3^8 \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$; в) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \dfrac{x \cdot dx}{\sin^2 x}$;

г) $\int\limits_{-17}^{-9} \dfrac{(x+13)^2}{x^2 + 26x + 185}\,dx$; д) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^{5/7} x \cdot \cos^3 x\,dx$; е) $\int\limits_0^1 x^{15} \cdot \sqrt{1 + 3x^8}\,dx$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $\rho = 2 \cdot (1 + \sin\varphi)$ и полярной осью.

3. Найти длину дуги $y = \arccos(e^{-x})$, заключенной между точками: $x_1 = 0,\ x_2 = 1$.

4. Найти объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной кривыми $y^2 = 9x$, $y = 3x$, вокруг оси Ох.

5. Найти центр тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной кривой $y = 4x - x^2$ и осью Ох.

6. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

а) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2 + 3}{x^3}\, dx$; б) $\int\limits_3^{10} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x-3}{7}\right)^2}}\, dx$ .

7. Вычислить приближенно определенный интеграл по формуле Симпсона с точностью 0,001, разбивая отрезок интегрирования на 4 части: $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{1 + x^2}\, dx$.

## Библиографический список

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. М.: Наука, 1985. Т. 1. 445 с.

2. Данко П. Е. , Попов А. Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. М.: Высш. шк., 1996. Ч. 1. 160 с.

3. Сборник задач по курсу высшей математики. Под ред. Кручковича Г. И. М.: Высш. шк., 1973. 586 с.

4. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука, 1985. 380 с.

5. Письменный Д. Конспект лекций по высшей математике. М.: Айрис Пресс, 2003. Ч. 1. 269 с.

6. Шипачев В. С. Задачник по высшей математике. М.: Высш. шк., 2000. 303 с.

7. Неопределенный и определенный интегралы: Методические указания для студентов-заочников / Л. В. Бельгарт, О. А. Колозова, И. Д. Макарова, С. Е. Макаров. Омск: Изд-во: ОмГТУ, 1998. 73 с.

8. Определенный интеграл. Типовой расчет и методические указания для студентов первого курса дневного и вечернего обучения / Н. И. Митрохина, Н. А. Воронцова, Т. Б. Стрельникова. Омск: Изд-во ОмГТУ. Под ред. Долганова Р.Л. ОмГТУ, 1983, 27 с.