УДК 123.456 DOI: 10.25206/2307-5430-2023-10-11-16

ОБ ОДНОЙ КОМБИНАТОРНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ON A COMBINATORIAL PROBLEM OF PROBABILITY

Л. Г. Ветров, А. Л. Сунчалина
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия

L. G. Vetrov, A. L. Sunchalina
Bauman Moscow State Technical University (National Research University), Moscow, Russia

Аннотация. В работе рассматривается пример задачи олимпиадного типа, предлагавшийся студентам с целью стимуляции самостоятельной работы. За правильное решение полагались дополнительные балы к рейтингу. Решение задачи сводится к пересчету перестановок определенного типа для достаточно большого числа элементов. Предложенная математическая модель позволяет получить систему рекуррентных соотношений, решение которой сводится к возведению в большую степень квадратной матрицы размера 10×10. Продемонстрировано решение системы рекуррентных соотношений с использованием таблиц Excel.

Ключевые слова: вероятность; перестановки; алгоритмы вычислений.

Abstract. The paper considers an example of Olympiad-type tasks offered to students in order to stimulate independent work. For the right decision, additional points were added to the rating. The solution of the problem is reduced to the recalculation of permutations of a certain type for a sufficiently large number of elements. The proposed mathematical model allows us to obtain a system of recurrent relations, the solution of which is reduced to raising a 10×10 square matrix to a large degree. The solution of the system of recurrent relations using Excel tables is demonstrated.

Keywords: probability; permutations; calculation algorithms.

Введение. Чрезвычайно важным фактором в образовательном процесс студентов не только технических вузов, но и любых других, является стимуляция студентов к самостоятельной исследовательской работе. В процессе преподавания высшей математики в техническом вузе нет особых надежд, что мы с ними выйдем на передний край математической науки и решим какую-то сложную проблему. Задача скорее состоит в том, чтобы научить их находить алгоритмы решения практических задач, используя тот математический аппарат, который нам удается изложить им в процессе обучения.

Авторы доклада, в целях стимуляции самостоятельной работы студентов, часто используют прием «задача на плюс балл к экзамену». Студентам выдается задача для самостоятельного решения дома (задача не простая), за решение которой преподаватель готов добавить балл к экзаменационной оценке студенту, который первым принес решение (или нескольким, если решения оказались разными). Одной из таких задач была следующая:

Какова вероятность, что из всех перестановок чисел 1,2,…,33 , у которых разность двух соседних различается не более чем на 2, случайно выбранная перестановка начинается с 1.

Исторически эта задача возникла так: около 10 лет назад на одной из олимпиад для школьников («покрои Воробьевы горы» или «Ломоносов») на заочный тур (168 часов) предлагалось найти *число перестановок чисел 1,2,…,33, начинающихся с 1 , у которых разность двух соседних различается не более чем на 2.*

Но учитывая, что эта задача предлагалась для студентов потока, изучающего курс теории вероятностей и математической статистики, ей была придана форма задачи на поиск вероятности и сделана немного более сложной.

К сожалению, авторам доклада не известно оригинальное решение предлагавшейся задачи для перестановок, начинающихся с 1. Возможно оно отличается от решения, которое будет предложено ниже. Но тот факт, что не было предложено найти число перестановок для произвольного n, уже говорит о том, что предполагалось найти достаточно простой рекуррентный алгоритм, позволяющий в разумное время найти ответ для n=33.

Один их студентов, владеющий на высоком уровне каким-то из языков программирования, через неделю принес правильный ответ, полученный перебором 33! перестановок и подсчетом общего числа перестановок, обладающих указанным выше свойством и числа таких перестановок с 1 на первом месте. Ему было предложено попытаться найти ответ на тот же вопрос для перестановок из 100 чисел. Он уверенно ответил: «хорошо» и мы расстались еще на наделю. На следующем занятии он смущенно сообщил, что компьютер еще считает. На этом примере он, по-видимому, впервые в своей практике столкнулся с ситуацией, в которой для решения задачи по предложенному алгоритму требуется слишком большое время. Ну а если взять n=1000, то это уже отдельная не простая задача – оценить время на перебор 1000! перестановок (в теории кодирования информации есть коды, на расшифровку которых методом перебора уйдет сотни лет работы компьютера).

Стоит отметить и то, что на примере решения этой задачи, после разбора решения в аудитории, студенты могли убедиться в том, насколько важно придумать хороший алгоритм с простой реализацией расчетов.

Был и такой случай. Студент приносит исписанные мелким аккуратным почерком четыре листочка формата А4, на которых изложено решение предлагавшейся на олимпиаде задачи с использованием аппарата теории групп. Но ясно, что на вопрос: «что такое группа» ответа получить не удалось, поэтому ни о каком балле к экзамену в этом случае речи быть не может (хотя еще совсем недавно нам объясняли, что наша задача готовить не исследователей, а грамотных пользователей). И конечно он не сумел посчитать число всех перестановок, так как на найденном им сайте не предполагалось их находить.

Хотелось бы обратить внимание еще на один аспект образования в высшей школе. Конечно, было бы хорошо, если бы все студенты технических вузов умели программировать на том или ином языке программирования. Но на практике это не реально. С другой стороны, в основном информация, требующая математической обработки, чаще всего хранится в таблицах Excel.

И если студента научить использовать математический аппарат, зашитый в эти таблицы, многие проблемы обработки информации (например, в курсе математической статистики или в теории выборочных обследований) и не потребуют владения искусством программирования. В частности, для решения, рассматриваемой в докладе задачи, кроме элементарного владения таблицами Excel никаких навыков не нужно. Впрочем, это и понятно: задача предлагалась школьникам.

Решение задачи. Сначала найдем общее число исходов: *число перестановок из чисел 1,2,…,n ,у которых любые два соседние отличаются не более чем на 2.*

Для этого проведем классификацию всех перестановок по расположению чисел n-1 и n на 10 классов:

A1: n,…,n-1
A2: n,n-2,n-1,…
A3: n,n-1,…
A4: n-1,n,…
A5: …,n,n-1,…
A6: …,n-1,n,…
A7: …,n,n-1
A8: …,n-1,n
A9: …,n-1,n-2,n
A10: n-1,…,n

Три точки означают, что на этом месте есть хотя бы один элемент перестановки. Ясно, что эти классы включают в себя все перестановки, у которых любые два соседние числа отличаются не долее чем на 2 (если n и n-1 не на границе, то они должны стоять рядом).

Далее рассмотрим граф переходов перестановок этих классов при переходе от перестановок чисел 1,2,..,n к перестановкам чисел 1,2,…,n+1. Для этого достаточно понять куда мы можем поместить число n+1 в перестановку каждого из классов и в перестановку какого класса она превратится (Рис.1).

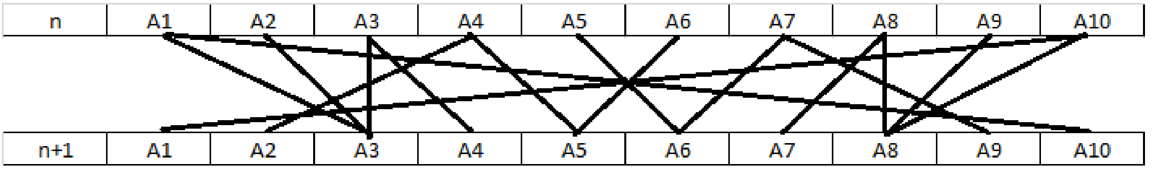

Рис. 1. Граф переходов

Таким образом, если мы обозначим через N(i,n) число перестановок класса i из чисел 1,2,…,n, то мы приходим к системе рекуррентных соотношений

N(1,n+1)=N(10,n)

N(2,n+1)= N(4,n)

N(3,n+1)= N(1,n)+ N(2,n)+N(3,n)

N(4,n+1)= N(3,n)

N(5,n+1)= N(4,n)+ N(6,n)

N(6,n+1)= N(5,n)+N(7,n)

N(7,n+1)= N(8,n)

N(8,n+1)= N(8,n)+N(9,n)+N(10,n)

N(9,n+1)= N(7,n)

N(10,n+1)= N(1,n)

Для рекуррентного подсчета необходимо найти начальные значения N(j,n) при n=4 (при меньших n классы будут содержать общие элементы и тогда не понятно к какому классу их нужно относить).

N(1,4)=1:(4,2,1,3)

N(2,4)=1: (4,2,3,1)

N(3,4)=2: (4,3,1,2);(4,3,2,1)

N(4,4)=1: (3,4,2,1)

N(5,4)=1: (2,4,3,1)

N(6,4)=1: (1,3,4,2)

N(7,4)=1: (2,1,3,4);(1,2,3,4)

N(8,4)=1: (1,3,4,2)

N(9,4)=1: (1,2,3,4)

N(10,4)=1: (3,1,2,4)

Рекуррентное соотношение можно записать в матричном виде **N**(n+1) =**A**×**N**(n) с матрицей 10×10, элементы которой равны 0 и 1 в соответствии с возможными переходами перестановок, указанными выше. Здесь **N**(n) - вектор столбец с координатами N (k, n), k=1,2,…,10. Значит **N**(33)=**A**×**A**×…×**A**×**N**(4). И далее остается только просуммировать координаты вектора **N**(33). Но ясно, что даже за 168 часов возвести в 29 степень матрицу десятого порядка достаточно сложно, да и в школе не изучают матрицы. Значит, что эти расчеты можно провести быстрее и с меньшими затратами. Воспользуемся расчетами в таблицах Excel.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	n	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	Сумма	
2	4	1	1	2	1	1	1	1	2	1	1	12	
3	5	1	1	4	2	2	2	2	4	1	1	20	
4	6	1	2	6	4	4	4	4	6	2	1	34	
5	7	1	4	9	6	8	8	6	9	4	1	56	
20	22	1	1466	3150	2149	4596	4596	2149	3150	1466	1	22724	
21	23	1	2149	4617	3150	6745	6745	3150	4617	2149	1	33324	
22	24	1	3150	6767	4617	9895	9895	4617	6767	3150	1	48860	
23	25	1	4617	9918	6767	14512	14512	6767	9918	4617	1	71630	
24	26	1	6767	14536	9918	21279	21279	9918	14536	6767	1	105002	
25	27	1	9918	21304	14536	31197	31197	14536	21304	9918	1	153912	
26	28	1	14536	31223	21304	45733	45733	21304	31223	14536	1	225594	
27	29	1	21304	45760	31223	67037	67037	31223	45760	21304	1	330650	
28	30	1	31223	67065	45760	98260	98260	45760	67065	31223	1	484618	
29	31	1	45760	98289	67065	144020	144020	67065	98289	45760	1	710270	
30	32	1	67065	144050	98289	211085	211085	98289	144050	67065	1	1040980	
31	33	1	98289	211116	144050	309374	309374	144050	211116	98289	1	**1525660**	
32													

Рис. 2. Результаты расчета общего числа исходов

На странице Excel в первой строке указаны классы перестановок, во второй начальные условия: N(i,4), i=1,2,…,10 -число перестановок каждого класса среди перестановок четыре цифр. В третей строке следует занести формулы: ячейка B3: **=К2**; ячейка C3: **=E2**; ячейка D3: **=B2+C2+D2** и так далее (рекуррентные формулы в адресах листа таблиц). В ячейке L3 : **=СУММ(B3:K3).** И далее остается часть строки B3:L3 выделить и скопировать вниз на нужное число строк. На Рис.2 приведены результаты расчетов общего числа исходов для n=4,5,…,33.

Для подсчета числа благоприятных случаев можно было бы исключить из рассмотрения классы A1-A4 и класс A10 и по аналогии провести расчеты. Но оказывается даже в этом нет необходимости, достаточно на той же странице таблиц изменить начальные условия. Для n=4 нужно указать число перестановок каждого из классов с единицей на первом месте (см. Рис.3).

1	n	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	Сумма
2	4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	4
3	5	0	0	0	0	1	1	1	2	1	0	6
4	6	0	0	0	0	1	2	2	3	1	0	9
5	7	0	0	0	0	2	3	3	4	2	0	14
25	27	0	0	0	0	5136	7527	5896	8641	4023	0	31223
26	28	0	0	0	0	7527	11032	8641	12664	5896	0	45760
27	29	0	0	0	0	11032	16168	12664	18560	8641	0	67065
28	30	0	0	0	0	16168	23696	18560	27201	12664	0	98289
29	31	0	0	0	0	23696	34728	27201	39865	18560	0	144050
30	32	0	0	0	0	34728	50897	39865	58425	27201	0	211116
31	33	0	0	0	0	50897	74593	58425	85626	39865	0	**309406**
32												

Рис. 3. Результаты расчета числа благоприятных исходов

Для n=33 находим искомую вероятность **P(33)= 1525660/ 309406= 0,2028014105**.

При этом в качестве «бесплатного приложения» можно легко увидеть, что указанная в задаче вероятность, монотонно убывая, достаточно быстро сходится к пределу (см. Диаграмма 1). Этот предел приблизительно равен 0,20279276199188, но, как он связан с n, вопрос остается открытым. Методы решения этой задачи хорошо известны. Так как это рекуррентное линейное соотношение с постоянными коэффициентами, решение нужно искать в виде линейной комбинации степеней корней характеристического уравнения $\det(A-\lambda E)=0$. Но это уже другая интересная задача.

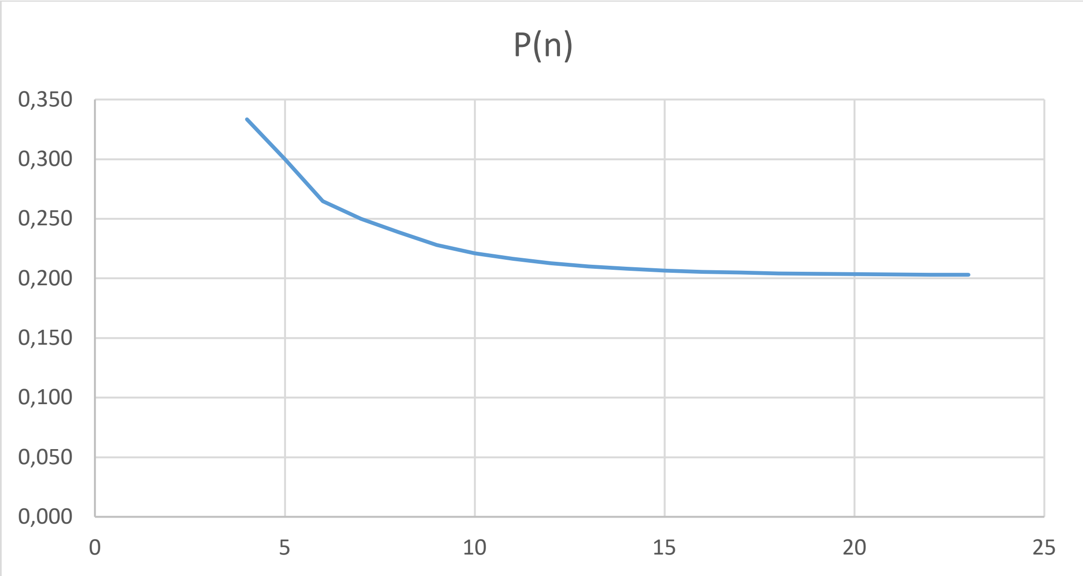

Диаграмма 1. Зависимость искомой вероятности от n

Библиографический список

1. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т.1, М:Мир, 1984.
2. Виленкин Н.Я. Комбинаторика, М: Науке, 1969.
3. Харари Ф., Теория графов, М: Мир, 1973
4. Эрдеш П., Спенсер Дж., Вероятностные методы в комбинаторике, М: Мир, 1976.

Сведения об авторах:
Ветров Леонид Георгиевич, кандидат физико-математических наук, доцент
SPIN-code:5527-6693, ORCID: 0009-0000-2524-8617.

Сунчалина Анна Леонидовна, кандидат физико-математических наук, доцент
E-mail: sunchyalina@mail.ru; SPIN-code:8695-3411, ORCID: 0009-0007-0181-8583.