УДК 378 DOI: 10.25206/2307-5430-2023-10-17-21

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ФОРМАЛИЗАЦИИ ОПИСАНИЯ ЗАДАЧ

METHODOLOGICAL ASPECTS OF THE TASK DESCRIPTION FORMALIZATION

М. В. Воронов
Московский государственный психолого-педагогический университет,
г. Москва, Россия

M. V. Voronov
Moscow State Psychological and Pedagogical University, Moscow, Russia

Аннотация. Рассматривается проблематика совершенствования математической подготовки студентов. Акцентируется внимание на развитии способности к математическому моделированию. Исследуются трудности, возникающие при формализации задач, заданных в вербальном виде. Представлены методические рекомендации по разрешению трудностей, возникающих при построении математических моделей. Для повышения качества освоения профессиональных дисциплин учебной дисциплины предлагается ввести так называемые семестровые работы. Их основное их отличие от традиционных самостоятельных работ заключается в том, что их выполнение предлагается осуществлять синхронно с освоением учебных дисциплин профильной подготовки. Кроме того, их выполнение включает разработку соответствующих математически моделей и проведение на их основе математических экспериментов.

Ключевые слова: учебный процесс; задача; метод; модель.

Abstract. The problems of improving the mathematical training of students are considered. Attention is focused on the development of the ability to mathematical modeling. The difficulties arising during the formalization of tasks set verbally are investigated. Methodological recommendations for solving difficulties arising in the construction of mathematical models are presented. To improve the quality of mastering professional disciplines of the academic discipline, it is proposed to introduce the so-called semester works. Their main difference from traditional independent work is that their implementation is proposed to be carried out synchronously with the development of academic disciplines of specialized training. In addition, their implementation includes the development of appropriate mathematical models and conducting mathematical experiments based on them.

Keywords: educational process; task; method; model.

Развитие цивилизации в настоящий период сопровождается усилением значимости математики, как феномена общей культуры. Все возрастающую значимость математики обусловливают ее специфические свойства. В частности, она обеспечивает возможность использовать электронно-технические устройства для решения задач, что ранее было доступно только обладающему когнитивными способностями человеку. Именно по этой причине одним из столпов системы образования является математическая подготовка каждого человека.

Сегодня на повестке дня стоят не только традиционные задачи формирования математических знаний и умений на уровне адекватном запросам развития общества. На передний край выходят вопросы формирования более высокого уровня математической культуры населения. В рамках этой крупной цивилизационной задачи в связи с бурным развитием цифровизации крайне актуальной становится задача осознания возрастающей ценности математических знаний в целом и повышения роли математического моделирования в первую очередь.

Однако математическая подготовка в большинстве учебных заведений не в полной мере отвечает потребностям современного общества. Главным остается формирование у обучающихся известного набора математически знаний и умений, причем на основе готовых к употреблению образцов и примеров.

Потребности развития способности осуществлять математическое моделирование наталкиваются на крайне низкий уровень подготовленности обучающихся к ответам на вопросы, связанные с интерпретацией поставленных в вербальной форме задач, неспособности перевода их в формальный вид. Такого рода ситуации осложняются недостаточным уровнем обратной связи между преподавателем и обучающимся, а также узким спектром решаемых на практических занятиях вопросов [1].

Арсенал способов преодоление такого рода препятствий должен включать процессы, развивающие логику обучаемых и способность самостоятельно формулировать и решать задачи, требующие использования математических знаний. Математическая подготовка должна включать в себя в качестве важнейшей составляющей и освоение приемов математического моделирования. В образовательном плане математическое моделирование способствует развитию творческого мышления, формированию интегративных форм и методов обучения. Вместе с тем такая дидактическая единица, как «математическое моделирование» отсутствует в большинстве образовательных программ вузов [2].

В связи с вышеизложенным представляется целесообразным в рамках проблематики освоения математического моделирования изложить некоторые подходы к вопросам собственно построения математической модели, причем только на этапе перехода от текстового формата поставленной задачи к формальному Следует отметить, что построение математической модели в значительной мере является искусством, успех которого зиждется, в том числе, и на высоком уровне интеллектуального развития субъекта в целом и математической подготовки в частности. Вместе с тем после получения представленной в вербальной форме задачи целесообразна следующая последовательность действий:

1. Уяснение задачи и уточнение некоторых составляющих ее постановки;

2. Введение обозначения того, что требуется найти (задачи на доказательство здесь не рассматриваются);

3. Обозначений всех остальных упомянутых в постановке задачи объектов;

4. Формальная запись представленных в вербальном виде фактов, а также условий и правил.

5. Проверка корректности построенной математической модели и оценка уровня ее адекватности поставленной задаче.

Пусть в текстовом формате сформулирована некоторая задача, для решения которой принято решение построить соответствующую математическую модель. Каковы могут быть рекомендации по осуществлению этих этапов?

В ходе уяснения задачи сначала требуется установить, достаточно ли адекватно понимаются использованные в тексте слова и обороты. Затем следует уточнить, подразумеваются ли в условиях задачи некоторые обстоятельства, которые явно не вошли в условия, но они как бы подразумеваются и их учёт или не учёт может оказаться существенно важными при построении модели.

Для иллюстрации этого момента используем задачу о бросании твердого тела: определить дальность полета предмета, выпущенного под известным углом к поверхности земли с заданной скоростью. При этом, например, не сообщается, учитывается ли сопротивление воздуха и каков профиль поверхности, на которой происходит действие. Студент самостоятельно должен принять соответствующие решения, зафиксировать их и учитывать при построении модели.

Второй этап связан с введением обозначения того, что требуется найти. Казалось бы, это тривиальное задание, однако на практике его верное выполнение зачастую вызывает трудности. Дело в том, что и в математике, и в информатике обозначенная сущность (чаще всего обозначаемая как X) в плане манипулирования ею считается известной. В описании же задачи содержится требование найти этот X, поскольку он предполагается неизвестным. Такая двойственность зачастую приводит обучаемого в недоумение и тормозит его дальнейшие действия.

Всегда требуется определить, каким математическим объектом является искомое неизвестное X. Так в задаче о бросании предмета это расстояние, которое пролетит предмет по горизонтали, очевидно, что это число. Если решается задача об определении, например, ассортимента продукции, то требуется знать ответы на вопросы «чего и сколько?». В этом случае неизвестное должно быть обозначено в виде вектора $X= (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Если же требуется определить, например, план перевозок, т.е. определить «сколько, откуда и куда?», то в качестве неизвестного выступает матрица $X=||x_{ij}||$. Такого рода заключения также весьма часто вызывают затруднения у студентов. Далее производится ведение обозначений всех иных объектов, о которых идет речь в постановке задачи.

В процессе построения математической модели весьма полезным является определение типа постановки задачи. Как минимум, целесообразно различать следующие два типа: нахождения одного из допустимых вариантов решения и нахождения самого лучшего, в смысле принятого критерия, допустимого решения. В постановках первого типа присутствуют только ограничения, которые обычно выражены так: "быть не менее (не более) чем

..." или "быть равным ...". В постановках второго типа дополнительно присутствует требование максимизации (минимизации) некоторых характеристик объекта исследования, которое выступает в качестве критериев оценки и отбора вариантов решений. Например, задача о бросании предмета может быть поставлена так: «определить под каким углом к поверхности земли следует бросить предмет, чтобы дальность его полета была наибольшей, если начальная скорость задана».

При рассмотрении оптимизационных задач может вызывать трудности структура построения критерия. Так, если в постановке задача говорится о стремлении получения суммарного эффекта, то критерий часто представляется в виде скалярного произведения вектора решения задачи и вектора, компонентами которого являются эффекты от каждого компонента решения. Понимание этого шага обычно не вызывает особых трудностей. В том случае, если критерием выступает, например, время, ситуация качественно иная. В этом случае формальная запись критерия, как правило, не может быть осуществлена в виде аналитической функции и представляет собой запись соответствующего алгоритма. Например, $T = \max_{\forall x_{ij}} t_{ij} \rightarrow min$.

Примечание. При формализации задач оптимизационного типа многие студенты считают, что искомым является экстремальное значение критериальной функции. Так при анализе задач на определение ассортимента продукции, обеспечивающего при заданных условиях наибольшую прибыль, многие студенты целью решения называют нахождение этой прибыли, а не ассортимента.

На следующем этапе осуществляется формальная запись фактов, условий и правил, о которых сказано в постановке задачи. Иначе говоря, устанавливаются отношения, в которых согласно постановке задачи находятся обозначенные объекты и производится их формальная запись. Для реализации последнего обучающийся должен иметь определенный уровень математической подготовки. балансовые условия в качестве составляющих могут входить и достаточно сложные математические выражения. Если, например, речь идет об определении площади составленной из ряда поверхностей, то в качестве компонентов могут выступать поверхностные интегралы. При рассмотрении задач, связанных с механическим движением, часто используется второй закон Ньютона, как правило, в виде дифференциального уравнения второго порядка.

В ряде случаев математическая модель может быть получена в процессе реализации определенного специфического подхода. Например, если рассматривается задача описания динамики состояния объекта рассмотрения, то, как правило, речь идет о построении дифференциального уравнений. Для этого полезно получить практику построения динамических моделей, базирующуюся на принципе линеаризации. Суть этого подхода в линейной аппроксимации процесса изменения состояния объекта за малое время Δt. Ярким примером такого подхода является может являться процедура построения модели Мальтуса для описания динамики изменения какой-то популяции. Если обозначить через $N(t)$ численность популяции на момент времени t, а через r коэффициент рождаемости, то можно предположить, что через время Δt численность популяции $N(t + \Delta\mathrm{t})$ вычисляется так: $N(t + \Delta\mathrm{t})$= $r \cdot N(t)$ ·Δt. Это выражение можно рассматривать как запись обыкновенного дифференциального уравнения в конечных приращениях.

Практика показывает, что в ходе математической подготовки (в первую очередь в технических вузах) целесообразно провести анализ следующих типов математических моделей: модели «черного ящика», теоретико-множественные модели стандартных математических схем, стохастических моделей и имитационных моделей, закрепляя его результаты решением содержательно окрашенных задач построения соответствующих математических моделей.

Для построения каждого фрагмента математической модели могут потребоваться знания из того или иного раздела знаний по математике. В этой связи занятия по формализации представленных в вербальной форме задач целесообразно проводить на всем протяжении учебного процесса, соизмеряя сложность заданий со спектром и объемом осваиваемых знаний. В этом плане хороший эффект показывает введение в рамках времени, отведенного на самостоятельную работу различных учебных дисциплин, так называемых семестровых работ. Суть их в следующем. Вначале семестра каждый студент получает задание, выполнение которого требуется осуществлять в течение всего семестра синхронно с освоением соответствующего курса. Следует отметить выбор тем семестровых работ. Их целесообразно подбирать в русле тематики специальных курсов, связанных с получаемой специальностью, курсовых и дипломных работ.

При построении математических моделей особое внимание следует уделять проверке выполнимости условий применимости данного математического инструментария. Например, имеет место следующий постулат: в теории вероятностей рассматривается только такой случайный опыт E, который при неизменных условиях можно воспроизводить бесконечное число раз. Отсюда следует: чтобы обрабатывать результаты серии опытов, в каждом из них условия должны быть совершенно одинаковыми, что далеко не всегда соблюдается на практике. Так, например, при проведении социологического опроса в различных населенных пунктах полученный статистический материал не всегда является однородным (очевидно, что на одни и те же вопросы жители юга и севера, приморья и глубинных районов могут отвечать по-разному).

Библиографический список

1. Тертычный-Даури В. Ю. и др. Проблемы преподавания математики в современном техническом вузе //Современное педагогическое образование. 2019. № 4. С. 145-148.

2. Фомина Т.П., Кузнецова Е.В. Курс «Математическое моделирование», его роль и место в профессиональной подготовке студентов // Вестник ТГУ. 2009. № 5. С. 136-140.

Сведения об авторе:

Михаил Владимирович Воронов, доктор технических наук, профессор
E-mail: mivoronov@yandex.ru; SPIN-code: 321-4567, ORCID: 0000-0001-7839-6250.