УДК 610.63 DOI: 10.25206/2307-5430-2023-10-30-36

О МАШИННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ В АЛГЕБРЕ ГРАФОВ

ON MACHINE PROBLEM SOLVING IN GRAPH ALGEBRA

А. П. Горюшкин

Камчатский государственный технический университет,

г. Петропавловск-Камчатский, Россия

A. P. Goryushkin

Kamchatka State Technical University, Petropavlovsk-Kamchatskiy, Russia

Аннотация. В статье обсуждается методика использования пакета математических символьных вычислений Maple при изучении вузовского курса «Теория графов». Рассматриваются особенности применения подпакета with (GraphTheory). Показана методика компьютерного исследования и нахождения основных параметров графа. Отмечено, что при машинном решении задачи об изоморфизме двух графов можно использовать, кроме команд подпакета with (GraphTheory), команды подпакета *with (LinearAlgebra)*. При проверке, изоморфны два графа или нет, естественным образом возникают вопросы об устройстве графа, его параметров, сохраняющихся при изоморфизме. Окончательная проверка связи матриц сопряженности проверяемых графов проводится лишь после удачно прошедших проверку неполных инвариантов графов.

Ключевые слова: граф; хроматическое число; цикломатическое число; спектр; подобие матриц; Maple.

Abstract. The article discusses the method of using the package of mathematical symbolic calculations Maple in the study of the university course "Graph Theory". The features of using the with (Graph Theory) sub package are considered. The technique of computer research and finding the main parameters of the graph is shown. It is noted that for the machine solution of the problem of isomorphism of two graphs in addition to the commands of the sub package with (GraphTheory) the commands of the sub package with (LinearAlgebra) can be used. When checking whether the grapes are isomorphic or not some questions naturally rise about the structure of the graph and its parameters which preserved under isomorphism. The final verification of the connection of the conjugacy matrices of the graphs being tested is carried out only after the incomplete graph invariants have been successfully verified.

Keywords: graph; chromatic number; cyclomatic number; spectrum; similarity of matrices; Maple.

В учебном плане направления подготовки бакалавриата 09.03.04 «Программная инженерия» две дисциплины «Дискретная математика» и «Теория графов» имеют общие темы (см., например, [1], [2]). Конечно, в дискретной математике изучение основных свойств графов носит ознакомительный характер, однако изучение математических объектов во второй раз вызывает ощущение «чего-то знакомого, но забытого» и явно не помогает студентам при повторном прохождении материала.

Опыт автора, в течение более двух десятилетий читающего курс «Теория графов» в техническом вузе, показывает, как хорошо «оживляет» и практическое, и лекционное занятие использование компьютера.

Рассмотрим в качестве примера решение одной задачи из теории графов с помощью математического пакета символьных вычислений Maple.

Решение будет комплексным: по ходу дела будут рассмотрены, по существу, все основные команды для исследования произвольного графа.

Итак, задача состоит в том, чтобы выяснить, изоморфны или нет два произвольных простых графа.

Сначала с помощью команды with(GraphTheory) войдем в подпакет «Теория графов», затем зададим два случайных графа G1 и G2

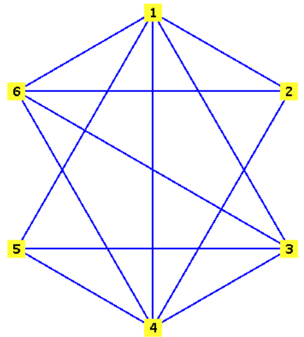
> with(GraphTheory): # вход в подпакет «Теория графов»

> with(RandomGraphs): # вход в подпакет «Случайный граф»

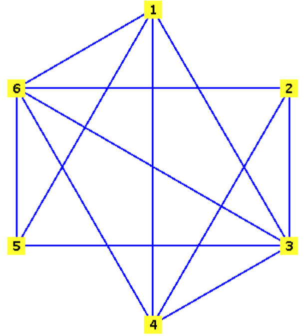
> G1 := RandomGraph(6, 10): # G1 – случайный неориентированный граф на 6 вершинах с 10 ребрами

> G2 := RandomGraph(6, 10): # G2 – случайный неориентированный граф на 6 вершинах с 10 ребрами

> DrawGraph(G1); # построение графической интерпретации графа G1



> DrawGraph(G1); # построение графической интерпретации графа G2



При построении этих графов мы сразу задали основные параметры графов: число вершин и ребер. Но эти графы могли возникнуть в иной конкретной задаче, причем число вершин и ребер могло по какой-то причине остаться первоначально нам неизвестными. Более того, вершины могли оказаться занумерованными вовсе не числами, а символьными выражениями.

Поэтому начнем с проверки простейшего необходимого условия изоморфизма графов G и G_1: равномощность множеств V(G1) и V(G2).

> is(NumberOfVertices(G1)=NumberOfVertices(G2)); # число вершин в графах одинаковое?

true

Число вершин в графах одинаковое. Число ребер тоже должно быть одинаковым. Проверим.

> is(NumberOfEdges(G1)=NumberOfEdges(G2)); # число ребер в графах одинаковое?

true

Связный граф может быть изоморфен только связному. Если один из графов связный, а второй – нет, то ответ на вопрос об изоморфизме получен: графы не изоморфны.

Спросим машину, является ли связным граф G1:

> IsConnected(G1); # граф G1 связный

true

А граф G2 – связный? Проверяем:

> IsConnected(G2); # граф G2 связный

true

Оба графа оказались связными. Однако окончательного ответа на главный вопрос пока нет. Два связных графа с одинаковым числом вершин и ребер могут быть как изоморфными, так и неизоморфными.

Свойство планарности тоже сохраняется при изоморфизме. Если один из графов планарный, а второй – нет, то графы не изоморфны.

Проверим.

> IsPlanar(G1); # граф G1 планарный

true

> IsPlanar(G2); # граф G1 планарный

true

Оба графа связные и планарные.

Изоморфные графы должны иметь одинаковые вектора степеней вершин. Найдем последовательности степеней изучаемых графов. Пакет Maple выдает вектор степеней графа, не упорядочивая компонент. После упорядочивания значений степеней по неубыванию, получаем, что обе последовательности равны.

> S1:=DegreeSequence(G1): sort(S1): # вектор степеней графа G1

> S2:=DegreeSequence(G2): sort(S2): # вектор степеней графа G2

> is(S1=S2); # вектор степеней графа G1 равен вектору степеней графа G2

true

> S1; # вектор степеней графа G1

[3, 3, 4, 4, 5, 5]

Упорядоченные последовательности степеней вершин графов совпадают; необходимое условие изоморфизма выполнено, но вопрос об изоморфизме графов G1 и G2 все ещё остается без ответа.

Свойства евклидовости и гамильтоновости графа – абстрактные: они сохраняются при изоморфизме. Если один из графов обладает таким свойством, а другой – нет, то эти графы не изоморфны.

Проверим эти свойства для наших подопытных графах.

> IsEuierian(G1); # граф G1 – эйлеровый

false

> IsEuierian(G2); # граф G2 – эйлеровый

false

> IsHamiltohian(G1); # граф G1 – гамильтоновый

true

> IsHamiltohian(G2); # граф G2 – гамильтоновый

true

Оба графа не эйлеровы, в каждом из них нет цикла, проходящего по каждому ребру в точности один раз, но есть цикл, проходящий через каждую вершину в точности один раз.

Число вершин графов G1 и G2 одинаковое и числа ребер у их одно и то же, поэтому цикломатические числа у G1 и G2 равны: подпространства циклов у этих графов изоморфны.

Отвлечемся немного от нашей задачи. Все рассмотренные параметры в исследуемых графах пока совпали, как должно быть у изоморфных графов, однако об изоморфизме говорить пока рано.

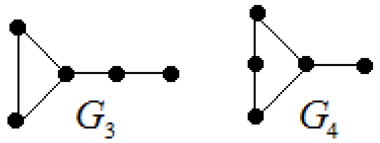


Рис. 1. Неизоморфные графы

Например, в двух графах G3 и G4 (Рис. 1) одинаковое число вершин и ребер, у них совпадают векторы степеней вершин и цикломатические числа тоже равны. Они оба планарные и связные, каждый из них не эйлеровый и каждый – не гамильтоновый. Однако G3 и G4 не изоморфны. В графе G3 содержится в качестве подграфа полный граф K3, а в G4 такого подграфа нет. У графов G3 и G4 различные клики и соответственно – различные кликовые числа.

Продолжим исследование графов G1 и G2. Найдем кликовые числа каждого из этих графов, а заодно и сами клики.

> CliqueNumber(G1); CliqueNumber(G2); # кликовое число графа

$$4$$
$$4$$

> MaximumClique(G1); MaximumClique(G2); # вершины клики

$$[1, 2, 4, 6]$$
$$[1, 3, 4, 6]$$

Совпадения характеристик графов продолжаются.

Каждый из графов не является полным графом на шести вершинах и это не циклы нечетной длины. По теореме Р.Л. Брукса хроматическое число каждого графа не меньше четырех, но не больше пяти. Это значит, что цикломатические числа наших графов могут и не совпасть (и тогда конец вычислениям – графы не изоморфны).

Вычислим хроматические числа.

> ChromaticNumber(G1, 'col'); col # хроматическое число графа G1; вершины одного цвета в графе G1

$$4$$
$$[[1], [2, 3], [4], [5, 6]]$$

> ChromaticNumber(G2, 'col'); col # хроматическое число графа G2; вершины одного цвета в графе G2

$$4$$
$$[[1, 2], [3], [4, 5], [6]]$$

Хроматические числа совпали.

Изоморфные графы должны иметь одинаковые ранги и спектры. Проверим.

> is(GraphRank(G1) – GraphRank(G2)); # ранги графов G1 и G2 равны

$$true$$

> is(GraphSpectrum(G1) – GraphSpectrum(G2)); # спектры графов G1 и G2 равны

$$true$$

Равенство рангов и равенство спектров не гарантирует изоморфизма графов. Поэтому переходим к заключительному (и самому громоздкому) этапу решения задачи.

Введем в рассмотрение матрицы смежности графов.

> A1 := AdjacencyMatrix(G1): A2 := AdjacencyMatrix(G2): # матрица смежности графа

Равенство спектров A1 и A2 означает, что каждая из этих матриц подобна одной и той же диагональной матрице, а, следовательно, и сами матрицы A1 и A2 подобны. Это значит, что существует обратимая матрица X такая, что

$$A2 = X \cdot A1 \cdot X^{-1}. \tag{1}$$

Теперь все зависит от сопрягающей матрицы X. Если найдется подстановочная сопрягающая матрица X, то графы изоморфны; если такой подстановочной матрицы X не существует, то графы G1 и G2 не изоморфны.

Для работы с матрицами войдем в специальные подпакеты *Maple*.

> with(LinearAlgebra): вход в пакет «Линейная алгебра»

> with(MTM): # вход в вычислительный подпакет

Одну из трансформирующих матриц можно получить машинным способом. Командой T, J : = jordan(A) вычисляется жорданова формы матрицы A и сопрягающая матрица T. С помощью двух таких сопрягающих можно получить и матрицу X – решение уравнение (1). Если матрица X окажется подстановочной, то задача решена – графы G1 и G2 изоморфны. Но если X – не подстановочная, то ответа снова не будет.

Одной из особенностей использования пакета *Maple* является то, что сопрягающие матрицы вычисляются значительно медленнее, чем жордановы формы матриц, да и жорданова форма даже для сравнительно небольших матриц находится совсем не быстро.

Поэтому подстановочную трансформирующую матрицу X попробуем найти простым перебором. При изоморфизме степени вершин сохраняются, а в нашей задаче вектор степеней имеет вид [3, 3, 4, 4, 5, 5]. Поэтому самое большее, чем через восемь испытаний можно выяснить: существует ли необходимая подстановочная матрица или нет. Испытаем, например, следующую матрицу T.

$$> T := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ # задание матрицы T

> T1 := MatrixInverse(T); # вычисление матрицы T^{-1}

> is(A2=T.A1.T1); # равенство $A2 = T \cdot A1 \cdot T^{-1}$.выполняется

true

Матрица T является решением уравнения (1). Матрицы A и A2 подобны, и это подобие осуществляется сопряжением перестановочной матрицей T.

Графы G и G2 изоморфны.

Конечно, нашу задачу существенно облегчил разброс значений степеней вершин. Если бы графы оказались однородными и степени больше двух, то в худшем случае пришлось бы испытать 719 проверочных матриц.

Отметим, что статус задачи об изоморфизме графов до сих пор неизвестен, в частности, не выяснено, является ли *проблема изоморфизма* графов полиномиальной (см., например [3], стр. 5).

Простой перебор подстановочных матриц и сопряжений матрицы смежности графа имеет далеко не полиномиальную сложность. Например, для исследования таким способом однородного графа с 24 вершинами на компьютере, выполняющем триллионы операций в секунду, машине придется непрерывно работать более 20 тысяч лет.

Библиографический список

1. Горюшкин А.П. Дискретная математика для бакалавров / А. П. Горюшкин ; М-во образования и науки РФ, ФГБОУ ВПО "Камчатский гос. ун-т им. Витуса Беринга". Петропавловск-Камчатский : КамГУ им. Ви-туса Беринга, 2014. 593 с.

2. Теория графов : учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки бакалавров 220400.62 "Управление в технических системах" / А. П. Горюшкин ; ФГБОУ ВПО "Камчатский гос. технический ун-т". Петропавловск-Камчатский : Изд-во КамчатГТУ, 2014. 171 с.

3. Коршунов А.Д. Некоторые нерешенные задачи дискретной математики и математической кибернетики // Успехи мат. наук. 2009. Т. 64, вып. 5 (389). С. 3-20.

Сведения об авторе:

Александр Петрович Горюшкин, кандидат физико-математических наук, доцент

E-mail: as2021@mail.ru; SPIN-code: 6283-2930, ORCID: 0000-0003-4680-3119.