УДК 517.1 DOI: 10.25206/2307-5430-2023-10-87-91

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

ABOUT THE NECESSARY CONDITIONS AND SUFFICIENT CONDITIONS FOR CONVERGENCE OF A SEQUENCE

С. К. Соболев, В. Я. Томашпольский, А. О. Голосов
Московский Государственный Технический Университет
им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия

S. K. Sobolev, V. Ya. Tomashpolsky, A. O. Golosov
Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Аннотация. Обсуждаются методические аспекты преподавания раздела «предел последовательности и функции» в техническом вузе. Рассматривается применение различных необходимых условий сходимости для обоснования отсутствия предела последовательности. Обсуждаются применения достаточных условий для обоснования сходимости и для вычисления предела последовательности. Разбираются методы нахождения предела рекуррентных последовательностей, сходящихся к неподвижной точке. Анализируется применение условия Липшица, гарантирующего сходимость рекуррентной последовательности.

Ключевые слова: последовательность; предел; необходимость; достаточность; монотонность; ограниченность.

Abstract. Methodological aspects of teaching the section "limit of sequence and function" in a technical university are discussed. The application of various necessary convergence conditions to justify the absence of a sequence limit is considered. The applications of sufficient conditions to justify convergence and to calculate the limit of the sequence are discussed. The methods of finding the limit of recurrent sequences converging to a fixed point are analyzed. The application of the Lipschitz condition, which guarantees the convergence of a recurrent sequence, is analyzed.

Keywords: sequence; limit; necessity; sufficiency; monotony; boundedness.

Актуальность темы: важнейшей задачей курса высшей математики является развитие у студентов логического мышления, умения выстраивать верные причинно-следственные связи, корректно аргументировать и доказывать те или иные утверждения из теории предела.

Цель данного исследования: достижение четкого понимания у студентов сущности необходимого признака, достаточного признака, критерия на примере теории предела последовательности.

Теория предела является краеугольной основой всего математического анализа. Хотя основные результаты в анализе были получены ещё в 17–18 веках, строгая теория предела возникла только в 19 [1, 2]. Всё здание математического анализа пронизано логическими связями следования и эквивалентности. Студенты часто путают определение понятия и его необходимое или достаточное условие [3]. Напомним, что если из условия *P* вытекает условие *Q*, то *Q* называется необходимым для *P*, а условие *P* называется достаточным для *Q*. Условие, которое одновременно необходимо и достаточно, называется критерием. Последовательность $\{x_n\}$ называется фундаментальной, если $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ m\in \boldsymbol{N}}} \left|x_{n+m}-x_n\right|=0$. Это значит, что для любого положительного ε найдется номер $k(\varepsilon)$ такой, что для всех $n>k(\varepsilon)$ и любого $m\in \boldsymbol{N}$ выполняется $\left|x_{n+m}-x_n\right|<\varepsilon$.

Критерий Коши: *для того, чтобы последовательность сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

Необходимые признаки сходимости. С помощью необходимого условия невозможно доказать сходимость последовательности и тем более найти сам предел (если он есть). Можно только, если необходимое условие не выполняется, утверждать, что предела нет.

Первое необходимое условие сходимости: *если последовательность сходится, т.е. имеет конечный предел, то она ограничена*.

Второе необходимое условие сходимости: *если последовательность* $\{x_n\}$ *имеет предел, то* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_{n+1}-x_n\right)=0$*, а также* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n-x_{n-1}\right)=0$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_{n+1}-x_{n-1}\right)=0$, и т.п.

Третье необходимое условие сходимости: *если последовательность* $\{x_n\}$ *имеет предел* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$*, и* $\left\{x_{n(k)}\right\}$*, где* $n(1)<n(2)<n(3)<\ldots$*, – какая-то её подпоследовательность, то последняя имеет тот же предел* $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n(k)}=C$. Значит, если какая-то подпоследовательность $\left\{x_{n(k)}\right\}$ предела не имеет, то и у исходной последовательности предела нет.

Пример 1. Доказать, что последовательность $y_n=\sin n$ не имеет предела.

Решение. Последовательность $\{y_n\}$ ограничена, но это ничего не значит. Допустим, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(y_{n+1}-y_{n-1}\right)=0$. Имеем: $y_{n+1}-y_{n-1}=\sin(n+1)-\sin(n-1)=$ $=2\sin 1\cdot\cos n$. И поскольку $\sin 1\neq 0$, получим $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n=0$. Применим еще раз второй необходимый признак, получим $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=0$. Следовательно

$$1=\lim_{n\to\infty}\left(\sin^2 n+\cos^2 n\right)=\left(\lim_{n\to\infty}\sin n\right)^2+\left(\lim_{n\to\infty}\cos n\right)^2=0+0=0.$$

Полученное противоречие показывает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(y_{n+1}-y_{n-1}\right)\neq 0$, и значит, $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ не существует. ■

Пример 2. Доказать, что последовательность $z_n = \sin(\sqrt{n})$ не имеет предела, хотя и удовлетворяет первым двум необходимым условиям сходимости.

Решение. Очевидно, что эта последовательность ограничена. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}(z_{n+1} - z_n) = 0$. В самом деле:

$$z_{n+1} - z_n = 2\cdot\underbrace{\sin\frac{0{,}5}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}_{\text{бесконечно мала}}\cdot\underbrace{\cos\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}}_{\text{ограничена}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(z_{n+1} - z_n) = 0.$$

Теперь заметим, что подпоследовательность $z_{n^2} = \sin\sqrt{n^2} = \sin n$ предела не имеет (Пример 1). Значит, и $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\sqrt{n}$ не существует. ■

Достаточные признаки сходимости последовательности.

Первое достаточное условие сходимости. *Если последовательность возрастает (убывает) и ограничена сверху (снизу) то она имеет предел.*

Именно так определяется число «е»: как предел последовательности $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, которая возрастает и ограничена сверху числом 3.

Часто бывает нужно найти предел последовательности, заданной рекуррентно: $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, где $\varphi(x)$ – непрерывная функция. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$, то существует и

$$C = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\varphi(x_n) = \varphi\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \varphi(C).$$

Таким образом, предел рекуррентной последовательности $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ является неподвижной точкой, т.е. решением уравнения $x = \varphi(x)$.

Пример 3. Доказать. что последовательность $\{a_n\}$ имеет предел и найти его, где $a_1 = \sqrt{6},\ a_n = \underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6}}}}_{n\text{ корней}}$.

Решение. Заметим, что $a_{n+1} = \varphi(a_n)$, где $\varphi(x) = \sqrt{6+x}$ – непрерывная функция. Индукцией по *n* доказываем, что эта последовательность возрастает и ограничена сверху, например, числом 4. Значит, последовательность $\{a_n\}$ имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = C$ и

$$C = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{6+a_n} = \sqrt{6+\lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{6+C} \Rightarrow C = 3.\blacksquare$$

Первое достаточное условие сходимости можно сформулировать и так:

Если последовательность, начиная с некоторого номера, возрастает (убывает) и ограничена сверху (соответственно, снизу), то она имеет предел.

Пример 4. Доказать, что последовательность $\{b_n\}$ имеет предел, и найти его, где $b_1 = \frac{11}{3}$, $b_n = \frac{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot (n+10)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}$.

Решение. Заметим, что все $b_n > 0$, $b_{n+1} = b_n \cdot \frac{n+11}{2n+3}$ и что

$$b_{n+1} < b_n \Leftrightarrow \frac{b_{n+1}}{b_n} < 1 \Leftrightarrow \frac{n+11}{2n+3} < 1 \Leftrightarrow n+11 < 2n+3 \Leftrightarrow n > 8.$$

Итак, последовательность $\{b_n\}$ убывает, начиная с 9-го номера, и ограничена снизу числом 0. Поэтому она имеет предел:

$$B = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(b_n \cdot \frac{n+11}{2n+3}\right) = \lim_{n\to\infty} b_n \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{n+11}{2n+3} = B \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow B = 0. \blacksquare$$

Рассмотрим другой достаточный признак сходимости, относящийся к рекуррентным последовательностям (в том числе и немонотонным).

Пусть функция $\varphi(x)$ *отображает отрезок* $[a;b]$ *в себя и удовлетворяет на этом отрезке условию Липшица с положительной постоянной* $K < 1$: $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \le K \cdot |x_1 - x_2|$ *для всех* $x_1, x_2 \in [a;b]$. *Последовательность* $\{u_n\}$ *задана так:* $u_1 \in [a;b]$ *произвольно, а* $u_{n+1} = \varphi(u_n)$. *Тогда существует предел* $\lim_{n\to\infty} u_n = C$, *являющийся неподвижной точкой:* $C = \varphi(C)$.

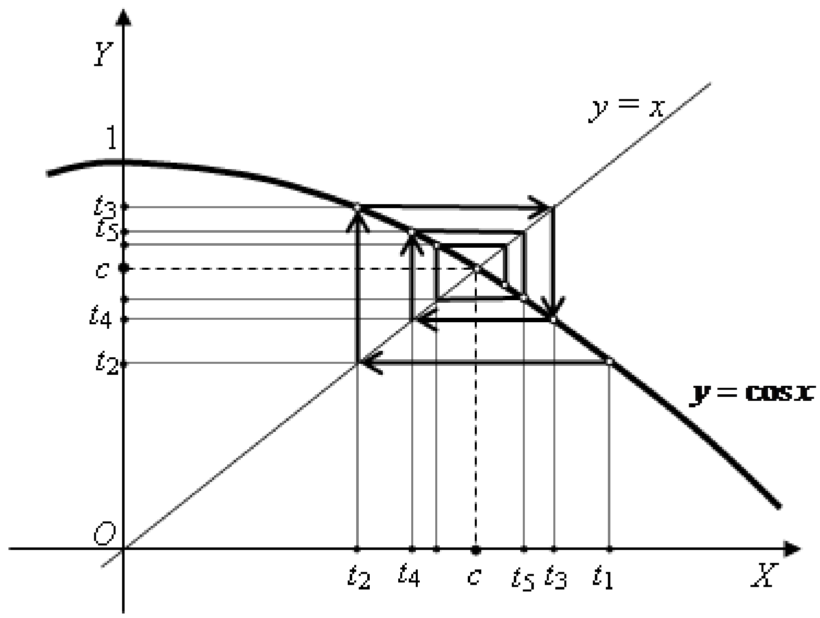

Рис. 1. График рекуррентной последовательности

Пример 5. Рассмотрим последовательность $\{t_n\}$: $t_1 = 1, t_{n+1} = \cos(t_n), n \in \boldsymbol{N}$; функция $\varphi(x) = \cos x$ на отрезке $[0; \frac{\pi}{3}]$ удовлетворяет условию Липшица с константой $K = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$. Поэтому существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = c$ и $c = \cos c$.

Последовательность $\{t_n\}$ сходится к (единственному) корню c уравнения $x = \cos x$ (см. Рис. 1). Последовательно вычисляем:

$$t_2 = \cos 1 = 0.5403, t_3 = \cos(t_2) = 0.8576, \ldots, t_{21} = 0.7392, \ldots, t_{22} = 0.7391.$$

Следовательно, с точностью до 10^{-3}, искомый корень равен $c \cong 0.739$. ■

Выводы: наглядные примеры и контрпримеры к различным признакам сходимости помогают понять причинно-следственные связи в доказательстве и исключить логические ошибки.

Материалы этой статьи обсуждались на методическом семинаре кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана [4].

Библиографический список

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. Т. 1. СПб.: Лань, 2009. 607 с.

2. Зорич В.А. Математический анализ: учебник для вузов. Ч. 1. М.: Изд-во МЦНМО, 2012. XVIII, 700 с.

3. Дуров В.В., Мастихин А.В., Савин А.С. Пределы и непрерывность функций: метод. указания к выполнению типового расчета. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2017. 49 с.

4. Соболев С.К., Томашпольский В.Я. Методический семинар на кафедре «Высшая математика» // Гуманитарный вестник. 2018. № 7. DOI: 10.18698/2306-8477-2018-7-537

Сведения об авторах:

Сергей Константинович Соболев, кандидат физико-математических наук, доцент
E-mail: sergeisob@bmstu.ru; SPIN-code: 4523-3619, ORCID: 0000-0001-6615-4545.

Виктор Яковлевич Томашпольский, кандидат физико-математических наук
E-mail: tomashpolski@bmstu.ru; SPIN-code: 1469-0849, ORCID: 0009-0001-4735-3888.

Андрей Олегович Голосов, кандидат физико-математических наук
E-mail: golosov@bmstu.ru; SPIN-code: 2707-1840, ORCID: 0000-0001-6198-0506.