УДК 514.122 DOI: 10.25206/2307-5430-2023-10-92-97

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ НА КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПАРАМЕТРОМ

SOME PROBLEMS ON SECOND ORDER CURVES WITH PARAMETER

С. К. Соболев, В. Я. Томашпольский, А. О. Голосов
Московский Государственный Технический Университет
им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия

S. K. Sobolev, V. Ya. Tomashpolsky, A. O. Golosov
Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Аннотация. Рассматриваются методические аспекты преподавания раздела «кривые второго порядка» в курсе аналитической геометрии в техническом вузе. Обсуждается необходимость включения в курс нестандартных задач, в частности, задач с параметрами для более глубокого усвоения учебного материала. Такие задачи призваны формировать у студентов исследовательские аналитические навыки. Задачи на касательную к кривой второго порядка рассматривается как задачи с параметром. Исследуется пучок кривых, пересекающихся в одних и тех же точках, как семейство линий, заданных уравнением второго порядка с параметром.

Ключевые слова: кривая; эллипс; гипербола; парабола; фокус; параметр.

Abstract. The methodological aspects of teaching the section "second-order curves" in the course of analytical geometry at a technical university are considered. The necessity of including non-standard problems in the course, in particular, tasks with parameters for deeper assimilation of educational material, is discussed. Such tasks are designed to form students' research and analytical skills. Problems on a tangent to a second-order curve are considered as problems with a parameter. A sheaf of curves intersecting at the same points is investigated as a family of lines described by a second-order equation with a parameter.

Keywords: curve; order; ellipse; hyperbola; parabola; focus; parameter.

Актуальность темы: важнейшей задачей является развитие у студентов исследовательских навыков, умения решать нестандартные задачи, в том числе с параметрами, умения находить новые приемы решения задач на кривые второго порядка. Многие математические задачи могут быть решены введением неизвестного параметра.

Цель данного исследования: разработка методов решения задач с параметрами для углубленного изучения кривых второго порядка.

Теория кривых второго порядка является жемчужиной аналитической геометрии [1, 2]. Эллипс, гиперболу и параболу открыл древнегреческий математик Менехм. С введением в геометрию метода координат, созданного Р. Декартом, теория кривых второго порядка получила новый импульс.

Кривой второго порядка называется линия на плоскости, описываемая алгебраическим уравнением второго порядка с двумя переменными. Поворотом системы координат на некоторый угол можно добиться, чтобы коэффициент при *xy* равнялся нулю:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \ (AC \neq 0)$$

Такие уравнения второго порядка называются неполными. Ограничимся в данной работе рассмотрением только неполных уравнений второго порядка. Мы предлагаем на практических занятиях наряду с обычными задачами по кривым второго порядка [3] рассмотреть задачи с параметром.

Пример 1. Исследовать в зависимости от параметра λ уравнение

$$\lambda x^2 - 4x + y^2 = 0 \tag{1}$$

Решение. Отметим, что при любом λ линия (1) проходит через начало координат. Если $\lambda = 0$, то получим параболу $y^2 = 4x$ с вершиной в начале координат, $p = 2$, координаты фокуса $F(1;0)$. При $\lambda \neq 0$ выделим полный квадрат при *x*, получим:

$$\lambda\left(x - \frac{2}{\lambda}\right)^2 + y^2 = \frac{4}{\lambda} \Leftrightarrow \frac{\lambda^2}{4}\left(x - \frac{2}{\lambda}\right)^2 + \frac{\lambda}{4}y^2 = 1.$$

При $\lambda > 0$ это эллипс, а при $\lambda < 0$ – гипербола, в обоих случаях с центром в точке $Q\left(\frac{2}{\lambda}; 0\right)$. Разберем несколько подслучаев. Если $\lambda > 0$, то полуоси эллипса $a = \frac{2}{\lambda}, b = \frac{2}{\sqrt{\lambda}}$. При $\lambda = 1$ это окружность $(x-2)^2 + y^2 = 4$ радиуса 2. Если $\lambda > 1$, то $a < b$, $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \frac{2}{\lambda}\sqrt{\lambda - 1}$, эксцентриситет $\varepsilon = c : b = \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda}}$. Если $0 < \lambda < 1$, то $a > b$, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{2}{\lambda}\sqrt{1 - \lambda}$, эксцентриситет $\varepsilon = c : a = \sqrt{1 - \lambda}$.

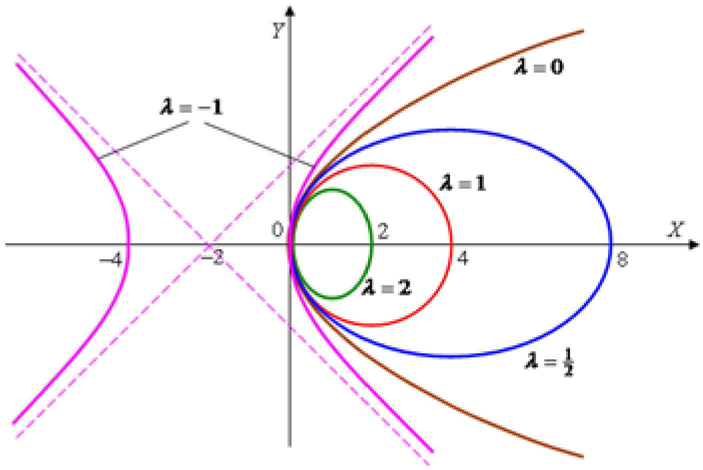

Рис. 1. Семейство кривых второго порядка в зависимости от параметра

При $\lambda < 0$ это гипербола с действительной горизонтальной полуосью $a = -\dfrac{2}{\lambda}$ и вертикальной мнимой полуосью $b = \dfrac{2}{\sqrt{-\lambda}}$. Фокальное расстояние $c = \sqrt{a^2 + b^2} = -\dfrac{2}{\lambda}\sqrt{1-\lambda}$, эксцентриситет и координаты фокусов такие же, как и в предыдущем случае. На рис. 1 представлены линии, заданные уравнением (1) при типичных значениях параметра: $\lambda = 2, \lambda = 1, \lambda = \dfrac{1}{2}, \lambda = 0$ и $\lambda = -1$.■

Задача на нахождение касательной к кривой второго порядка тоже может рассматриваться как задача с параметром.

Пример 2. Найти уравнение касательных к эллипсу

$$\frac{(x-2)^2}{1} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1, \tag{2}$$

проходящих через точку $A(3; -2)$, и указать координаты точек касания.

Решение. Заметим, что точка *A* **не** лежит на этом эллипсе. Уравнение прямой, проходящей через точку $A(3; -2)$, имеет вид $x = 3$ или $y = -2 + k(x-3)$.

Первая прямая, очевидно, касается эллипса в его правой вершине – точке $M_1(3; 1)$ (см. Рис. 2). Теперь проверим, при каких значениях коэффициента *k* вторая прямая касается эллипса. Подставив $y = -2 + k(x-3)$ в уравнение эллипса, получим, после упрощения, квадратное уравнение с параметром *k*:

$$4(x-1)^2 + \left(kx - 3k - 3\right)^2 = 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (k^2+4)x^2 - 2x(3k^2+3k+8) + (9k^2+18k+21) = 0. \tag{3}$$

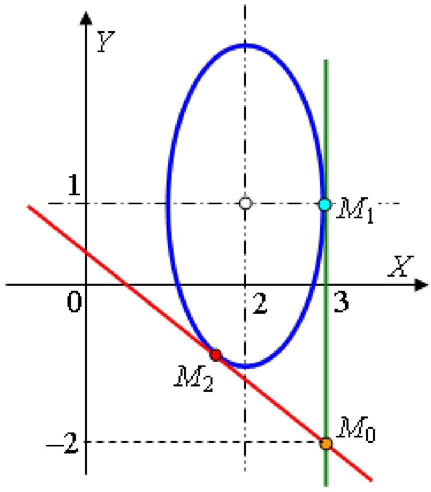

Рис. 2. Касательные к эллипсу

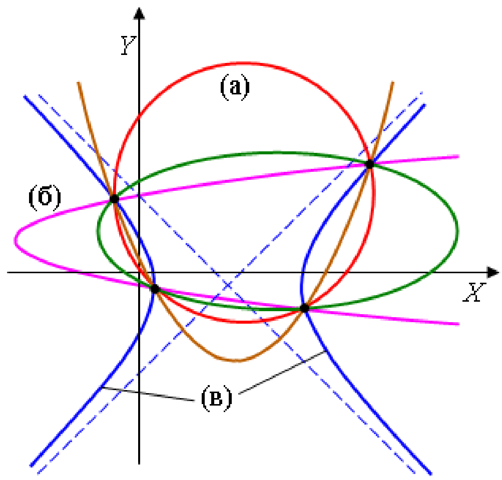

Рис. 3. Пучок кривых второго порядка

Его дискриминант $D(k) = -96k - 80 = -16(6k+5)$.

Касание имеет место при $D(k) = 0$, т.е. при $k = -\dfrac{5}{6}$. Соответствующее уравнение касательной

$$y = -2 - \tfrac{5}{6}(x-3) \Leftrightarrow 5x + 6y - 3 = 0. \tag{4}$$

Абсциссу второй точки касания найдем из уравнения (3), подставив в него $k = -\frac{5}{6}$: $\frac{169}{36}x^2 - \frac{91}{6}x + \frac{49}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{13}{6}x - \frac{7}{2}\right)^2 = 0$, отсюда $x_2 = \frac{21}{13}$. Ординату этой точки найдем, подставив $x_2 = \frac{21}{13}$ в уравнение (4), получим $y_2 = -\frac{11}{13}$.

Известно, что *если уравнения* $\Phi_1(x,y) = 0$ *и* $\Phi_2(x,y) = 0$ *задают на плоскости две линии* L_1 *и* L_2, *которые пересекаются в одной или нескольких точках, то при любом значении параметра* $\lambda \in \boldsymbol{R}$ *уравнение*

$$\lambda\Phi_1(x,y) + \Phi_2(x,y) = 0 \tag{5}$$

задает линию, проходящую через все точки пересечения линий L_1 *и* L_2.

В частности, если $\Phi_1(x,y) = 0$ и $\Phi_2(x,y) = 0$ – неполные уравнения второго порядка, задающие кривые L_1 и L_2 соответственно, то уравнение (5) – также неполное уравнение второго порядка, задающее пучок кривых, проходящих через все точки пересечения кривых L_1 и L_2.

Пример 3. Парабола с вертикальной осью симметрии $(x-2)^2 = 2(y+2)$ и эллипс $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$ пересекаются в четырех точках. Найти уравнение следующих линий, каждая из которых проходила бы через эти четыре точки:

(а) окружности; (б) параболы с горизонтальной осью симметрии;

(в) равносторонней гиперболы.

Решение. Для решения задачи нет необходимости знать координаты точек пересечения этих двух кривых. Раскроем скобки в каждом из уравнений и избавимся во втором уравнении от дроби, получим

$$x^2 - 4x - 2y = 0 \qquad \text{и} \qquad x^2 - 6x + 4y^2 - 8y - 3 = 0$$

Искомые кривые задаются уравнением пучка кривых:

$$\begin{aligned} &\lambda(x^2 - 4x - 2y) + (x^2 - 6x + 4y^2 - 8y - 3) = 0 \Leftrightarrow \\ &(\lambda+1)x^2 + 4y^2 - (4\lambda+6)x - (2\lambda+8)y - 3 = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

подбором соответствующего значения параметра λ:

(а) Уравнение (6) задает окружность при $\lambda + 1 = 4 \Leftrightarrow \lambda = 3$. При этом значении параметра получаем такое уравнение:

$$4x^2 + 4y^2 - 18x - 14y - 3 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \tfrac{9}{4}\right)^2 + \left(y - \tfrac{7}{4}\right)^2 = \frac{142}{16}.$$

(б) Уравнение (6) задает параболу с горизонтальной осью симметрии при $\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$. Получается такое уравнение:

$$4y^2 - 2x - 6y - 3 = 0 \Leftrightarrow \left(2y - \tfrac{3}{2}\right)^2 = 2x + \tfrac{21}{4} \Leftrightarrow \left(y - \tfrac{3}{4}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\left(x + \tfrac{21}{8}\right).$$ см. Рис. 3.

(в) Равносторонняя гипербола получается, если коэффициенты при x^2 и y^2 в уравнении (6) противоположны, т.е. при $\lambda + 1 = -4 \Leftrightarrow \lambda = -5$. Это даёт такое уравнение:

$$-4x^2 + 4y^2 + 14x + 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{\left(x - \tfrac{7}{4}\right)^2}{9/4} - \frac{\left(y + \tfrac{1}{4}\right)^2}{9/4} = 1. \ \blacksquare$$

Выводы: задачи по кривым второго порядка с параметром, требующие рассмотрения различных случаев, использования различных методов решения, вызывают интерес у студентов и служат повышению мотивации к изучению данного раздела математики.

Материалы этой статьи докладывались на методическом семинаре кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана [4].

Библиографический список

1. Акопян А.В., Заславский А.А. Геометрические свойства кривых второго порядка. М.: МНЦМО, 2007. 136 с.

2. Томашпольский В.Я. Становление и развитие научной школы математики Императорского Московского технического училища // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. № 5(17). С. 13. DOI: 10.18698/2308-6033-2013-5-733.

3. Дубограй И.В., Леванков В. И., Максимова Е. В. Методические указания к выполнению домашнего задания по теме "Кривые второго порядка". М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2013. 50 с.

4. Соболев С.К., Томашпольский В.Я. Методический семинар на кафедре «Высшая математика» // Гуманитарный вестник. 2018. № 7. DOI: 10.18698/2306-8477-2018-7-537

Сведения об авторах:

Сергей Константинович Соболев, кандидат физико-математических наук, доцент
E-mail: sergeisob@bmstu.ru; SPIN-code: 4523-3619, ORCID: 0000-0001-6615-4545.

Виктор Яковлевич Томашпольский, кандидат физико-математических наук
E-mail: tomashpolski@bmstu.ru; SPIN-code: 1469-0849, ORCID: 0009-0001-4735-3888.

Андрей Олегович Голосов, кандидат физико-математических наук
E-mail: golosov@bmstu.ru; SPIN-code: 2707-1840, ORCID: 0000-0001-6198-0506.