УДК 51-74

Н. М. Гордеева
Е. С. Попушина
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия

РАЗМЕРНОСТИ И ИХ ЗНАЧЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

Аннотация. Работа посвящена описанию места размерных величин в преподавании математического моделирования студентам инженерных специальностей. Обращается внимание на различную запись зависимостей при использовании систем измерения разных классов. Описывается процесс обезразмеривания уравнений и метод теории размерности и подобия. Обосновывается необходимость включения этого материала в программу обучения будущих инженеров, приводится краткое описание учебного модуля, используемого в МГТУ им. Н.Э. Баумана, рассматриваются примеры, которые используются для обучения студентов инженерных направлений.

Ключевые слова: теория размерностей; математическое моделирование; метод подобия; инженерное образование.

DOI: 10.25206/2307-5430-2019-7-92-99

Введение. Инженерное образование сегодня предполагает освоение будущими инженерами навыков математического моделирования, причем это означает, что инженер должен уметь не только воспользоваться готовым пакетом программ, но и самостоятельно создать математическую модель. Использование размерностей для решения задач механики известно с давних времен. Этим пользовались Галилей, Мариотт, Ньютон, Фурье, Рэлей [1]. Однако стройной теории до 20 века не было, и широкого распространения этот метод не получил. С середины прошлого века благодаря Седову [2] появилась и развилась теория размерности и подобия, с помощью которой можно сравнительно легко и точно решать возникающие задачи.

Метод теории размерности и подобия стал обязательным для теоретических специальностей в университетах. Будущих математиков и механиков учат его применению, а вот в учебный план инженерных специальностей этот курс обычно не входит. Но с развитием новых технологий и появлением новых материалов появилась острая необходимость не только фиксировать результаты экспериментов, но и выводить аналитические зависимости. В МГТУ им. Баумана основы теории размерности и подобия обязательно входят в учебные планы магистров или специалистов инженерных направлений подготовки. Надо заметить, что из-за того, что основное применение эта теория в 20 веке нашла в задачах математической физики и механике сплошных сред, то и основная масса обучающих материалов и задач создана для этих направлений.

Применение размерностей в математическом моделировании. Осознавая важность владения навыками использования теории размерностей для инженеров, в МГТУ разработан курс, включающий темы и задачи, максимально приближенные к тематике будущей профессиональной деятельности [3]. В настоящей работе приводится краткое описание соответствующего учебного модуля, обосновывается необходимость его изучения и приводятся примеры, на которых учатся будущие инженеры.

Весь материал можно разбить на блоки:

1. Понятие размерности и знакомство с разными системами измерений.
2. Приведение уравнений к безразмерному виду.
3. Применение Пи – теоремы для решения задач.
4. Задачи для самостоятельного решения.

Изучение материала модуля начинается с понятия размерности физических величин, приводятся примеры различных систем измерения (СИ, СГС, СГСЭ, СГСМ, МКСА, др.), отмечается произвольность их выбора в зависимости от конкретной задачи, рассматриваются отличия основных единиц измерения от производных единиц измерения.

Пример 1. Система СИ включает 7 основных единиц (килограмм, метр, секунда, ампер, кельвин, моль, кандела [кг, м, с, А, К, моль, кд]). Эти величины не могут быть получены друг из друга, все они являются независимыми. Производные величины в СИ получаются из основных, иногда производные величины могут иметь собственные названия, например, ньютон – единица измерения силы $[\text{Н}] = [\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2]$. Другие не имеют своих названий, например, скорость измеряют в отношении [м/с].

Пример 2. Система СГС включает всего три независимые единицы, которые и дали ей название: сантиметр, грамм, секунда. Остальные единицы измерения являются производными, выражаются через основные три.

Естественно, при записи физических законов в разных системах измерений происходит «перераспределение» размерностей внутри формулы. Так, в СИ часто появляются размерные коэффициенты, а в СГС все коэффициенты безразмерные. Примером служат уравнения Максвелла:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho_f + \rho_b\right); \quad (\text{СИ})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\left(\rho_f + \rho_b\right); \quad (\text{СГС})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0\left(\mathbf{j}_f + \mathbf{j}_b\right) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \quad (\text{СИ})$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\left(\mathbf{j}_f + \mathbf{j}_b\right) + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad \text{(СГС)}$$

Видно, что в СИ появляются размерные коэффициенты: электрическая постоянная ε_0 и магнитная постоянная μ_0, обе являются размерными величинами.

$$\varepsilon_0 = \left[\frac{\text{Ф}}{\text{м}}\right], \mu_0 = \left[\frac{\text{Н}}{\text{А}^2}\right].$$

Начиная со школы, и далее, в вузе обычно используется система СИ, но для теоретических расчетов часто используют СГС. Необходимо обратить внимание студентов на невозможность «смешивания» формул, приводящую к ошибкам.

Далее можно привести примеры других систем измерений. Например, в лекциях Фейнмана используются уравнения, где вышеуказанные постоянные, а также скорость света равны 1 [4].

Следующим обязательным моментом, кроме различий записи в разных системах, является техника «обезразмеривания» уравнений. Для получения аналитических решений не важно, какие значения принимают физические величины, используемые в задаче. При аналитическом решении ответ сначала ищется в виде формулы, а потом в формулу подставляются нужные величины. А при численном решении наибольшая точность достигается при оперировании с данными одного порядка. Более того, почти законом для численных исследований является использование промежутков счета от 0 до 1 или от –1 до 1. Это естественно, т.к. при численных расчетах следует учитывать, погрешности вычислений и методов и способ хранения данных в компьютере. Специалисты, занимающиеся расчетами профессионально, проводят стандартную процедуру приведения уравнений к безразмерному виду, преследуя цель именно достижение точности. Студентам, проходящим подготовку по инженерным специальностям, и часто не получающим достаточных знаний по численным методам, важность процесса обезразмеривания, может быть, неочевидна.

Пример 3. Привести к безразмерному виду уравнение теплопроводности.

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right) + F(x, t).$$

Здесь u – температура, ρ – плотность материала, c – удельная массовая теплоемкость, k – коэффициент теплопроводности, $F(x, t)$ – объемная плотность (удельная мощность) тепловых источников, u_0 – температура, поддерживаемая на границе. В размерном виде это выглядит так:

$$\left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}\frac{\text{К}}{\text{с}} = \frac{1}{\text{м}}\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}\frac{\text{К}}{\text{м}} + \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}\right].$$

Очень часто принимается, что коэффициент теплопроводности не зависит от координаты. Тогда уравнение переписывается в более простом виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),$$

где $a^2 = k/\rho c$ [м^2/с] – коэффициент температуропроводности, а $f(x,t) = F(x,t)/\rho c$, но остается все равно размерным. Все физические величины можно поделить на их характерные размеры. Если мы знаем, что изменение температуры будет происходить в пределах от u_{min} до u_{max}, то можно перейти к неизвестной $\tilde{u} = (u - u_{min})/(u_{max} - u_{min})$, которая не имеет размерности и изменяется в пределах от 0 до 1. Аналогично, если рассматривается распространение тепла в теле, имеющем координаты от 0 до x_{max}, то новая переменная должна быть $\tilde{x} = x/x_{max}$. Если известно характерное время процесса t^*, то за новую переменную времени можно выбрать $\tilde{t} = t/t^*$. Уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} = \frac{a^2 \cdot t^*}{x_{max}^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{t^*}{(u_{max} - u_{min})} \cdot f(x,t).$$

Для численного моделирования такая формулировка задачи более предпочтительна, результаты вычислений будут точнее. При необходимости готовый ответ можно с помощью тех же зависимостей привести к размерному виду.

Далее учебным планом предусмотрено изучение применения теории размерностей и подобия для решения задач. Эта теория требует серьезной математической подготовки, знания основных физических законов, желательно, владение навыками решения задач с уравнениями в частных производных. Конечно, для инженеров используются самые наглядные и простые примеры.

Постулат первый. Если значение некоторой физической величины можно выразить явно с помощью значений других физических величин, то ее размерность будет представлять собой степенной многочлен от размерностей этих величин. Т.е. выражения типа логарифм скорости или температура в степени координаты – исключены. Доказательство этого при желании можно посмотреть в книге [2].

Пи-теорема [1] позволяет от зависимости

$$a = f(a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n),$$

где a – искомая величина, $a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n$ – параметры задачи, причем только k из них имеют независимые размерности, перейти к новой функции

$$a = a_1^{\alpha} a_2^{\beta} \dots a_k^{\gamma} F(\Pi_{k+1}, \dots, \Pi_n).$$

зависящей от меньшего числа параметров. А в случае $k = n$ вся задача сведется к отысканию одной неизвестной константы.

Пример 4. Получить формулу для весового расхода G в единицу времени идеальной тяжелой жидкости, приходящегося на единицу длины ребра вертикального водослива с острым гребнем и со свободной струей. Высота уровня жидкости в водоеме над ребром водослива на далеких от него расстояниях равна h. [5].

Решение. Перечислим все параметры, от которых может зависеть искомая величина (весовой расход G): высота уровня жидкости h, плотность ρ и ускорение свободного падения g. Тогда можно записать, что

$$G = f(\rho, g, h).$$

Будем считать, что в данной задаче характерная длина равна L, масса – M и время T. Выразим через эти величины размерности всех величин (определяемого и определяющих)

$$[G] = MT-3,\ [\rho] = ML-3,\ [g] = LT-2,\ [h] = L.$$

Видно, что размерности ρ, g и h независимы (частный случай П-теоремы, $k = n$).

Запишем выражение размерности $[G]$ в виде степенного одночлена из степеней размерностей $[\rho]$, $[g]$ и $[h]$ с неизвестными показателями α, β и γ

$$[G] = [\rho]\alpha[g]\beta[h]\gamma$$

Приравнивая показатели степени при M, L и T, получим

$$M\!: 1 = \alpha,\ L\!: 0 = -3\alpha + \beta + \gamma;\ T\!: -3 = -2\beta.$$

Откуда α = 1, β = 3/2, γ = 3/2. Поэтому $\Pi = \dfrac{G}{\rho g^{3/2} h^{3/2}}$. С другой стороны из Пи–теоремы имеем П = C, где C − постоянная. Тогда $G = C\rho g^{3/2} h^{3/2}$. Для определения константы C нужно провести всего один эксперимент.

Заметим, что в число определяющих G параметров студенты могут предложить добавить и другие величины. Например, параметры, определяющие форму водослива, или вязкость жидкости. Хотя в условии и есть указание, что ими можно пренебречь (гребень острый и жидкость идеальная), такое усложнение модели не повлияет на итоговый результат, что весовой расход G зависит от высоты h в степени 3/2.

Безразмерный подход может быть полезен и при нахождении аналитических решений обыкновенных дифференциальных уравнений, позволяя сократить число параметров.

Пример 5. Парашютист прыгнул с высоты 1.5 км, а раскрыл парашют на высоте 0.5 км. Сколько времени он падал до раскрытия парашюта? Известно, что предельная скорость падения человека в воздухе нормальной плотности составляет 50 м/сек. Изменением плотности с высотой пренебречь. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости. [6]

Решение. Модель, описывающая вертикальное падение тяжелого тела с высоты H в сопротивляющейся среде.

$$m\frac{dv^*}{dt^*} = F_{\text{тяжести}} - F_{\text{сопротивления}},$$

$$F_{\text{тяжести}} = mg,\ F_{\text{сопротивления}} = kv^2.$$

Откуда

$$m\frac{dv^*}{dt^*} = mg - kv^{*2},\ \frac{ds^*}{dt^*} = v^*.$$

Здесь v^* − скорость падения тела, m − масса тела, g − ускорение свободного падения (будем считать, что g = 10 м/сек).

Безразмерные величины введем следующим образом

$$v = \frac{v^*}{U};\ t = \frac{t^* g}{U};\ s = \frac{s^* U^2}{g}.$$

Здесь U − характерная скорость движения тела (в данной задаче это предельная скорость падения человека в воздухе 50 м/сек); H − характерная длина (в данной задаче удобно взять в качестве H расстояние, которое пролетел парашютист без парашюта, т.е. H = 1000 м). Приводим нашу модель к безразмерному виду

$$\frac{dv}{dt} = 1 - \frac{kU^2}{mg}v^2 \text{ или } \frac{dv}{dt} = 1 - av^2$$

где $a = \dfrac{kU^2}{mg}$ − единственный безразмерный параметр.

Найдем решение полученного дифференциального уравнения с начальным условием (задачи Коши)

$$\frac{dv}{dt} = 1 - av^2,\ v(0) = 0,$$

$$v(t) = \operatorname{th}\left(\sqrt{a}t\right)/\sqrt{a}.$$

Найдем также зависимость пути s от времени t

$$s(t) = \frac{\ln\cos\left(\sqrt{a}t\right)}{a}.$$

Так как $\lim\limits_{t\to+\infty} \operatorname{th}\left(\sqrt{a}t\right) = 1$, то безразмерная предельная скорость падения равна $1/\sqrt{a}$. С другой стороны (с учетом того, как мы ввели безразмерные переменные) она равна 1. Из уравнения $1/\sqrt{a} = 1$, находим, что в нашей задаче $a = 1$.

Итак, ответ: $v(t) = \operatorname{th}(t)$, $s(t) = \ln\operatorname{ch}(t)$ и $t = \ln(e^S + \sqrt{e^S - 1})$.

Основные области применения – математическое моделирование и физическое моделирование [3]. Обрабатываются данные экспериментов или анализируются теоретические зависимости, выраженные, например, дифференциальными уравнениями или функциями. В каких дисциплинах можно найти применение? Геометрия, кинематика, физика сплошных сред, материаловедение и т.п. При разработке новых материалов в материаловедении анализируются результаты измерений. Очень хорошо можно выразить зависимость характеристик материалов, если проанализировать изменение входных параметров на предмет размерности.

Выводы. Студенты получают универсальный и несложный в применении инструмент для будущей исследовательской работы. В качестве необходимого теоретического обоснования достаточно объяснения Пи-теоремы, отработка навыков происходит с помощью упражнений типа 1 – 5.

Какие преимущества сулит использование теории размерности?

1. Теория позволяет понять, какие именно безразмерные параметры должны быть одинаковыми в модельном и натурном эксперименте.

2. Повышается эффективность экспериментов. Можно провести один эксперимент, чтобы понять на качественном уровне, что будет в других. Нет необходимости в проведении лишних экспериментов: без этой теории можно сделать серию опытов для различных размерных параметров, прежде чем станет ясно, что безразмерный параметр был один, и он в ходе опытов не менялся.

3. Обезразмеривание математической модели позволяет на законных основаниях пренебречь малыми слагаемыми, что приводит к более простым уравнениям.

4. Если решение ищется численными методами, то расчетная область с границами от 0 до1 (от -1 до 1) дает более точные результаты, чем области с границами разных порядков.

5. Во время представления результатов на конференциях нагляднее демонстрировать исследование зависимостей от безразмерных параметров (специали-

сты, занимающиеся другими похожими задачами, могут быстро пересчитать результаты для своих размерных параметров).

Библиографический список

1. Тирский Г.А. Анализ размерностей // Соровский образовательный журнал. 2001. Т. 7, № 6. С. 82 – 87.

2. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981. 430 с.

3. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики: учеб. для вузов. Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 367 с.

4. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т.6. Электродинамика / Пер. с англ. М.: URSS, 2016. 352 с.

5. Галин Г. Я. и др. Механика сплошных сред в задачах. Т. 1. М.: Московский лицей, 1996. С. 395.

6. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: URSS, 2009.

Сведения об авторах:

Надежда Михайловна Гордеева

Служебный адрес: 105005, Москва, 2-я Бауманская улица, дом 5, стр. 1, МГТУ им. Н.Э. Баумана, кафедра ФН1 «Высшая математика».

E-mail: nmgordeeva@bmstu.ru. Spin-code: 8406-7531.

Научные интересы: математическое моделирование.

Страница автора в MathNet: http://www.mathnet.ru/rus/person/81106.

Страница автора в eLibrary.ru: https://elibrary.ru/author_items.asp?authorid=699932.

Екатерина Сергеевна Попушина

Служебный адрес: 105005, Москва, 2-я Бауманская улица, дом 5, стр. 1, МГТУ им. Н.Э. Баумана, кафедра ФН1 «Высшая математика».

E-mail: popushinaes@bmstu.ru. Spin-code: 3108-1062.

Научные интересы: математическое моделирование.

Страница автора в eLibrary.ru: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=164126.