УДК 658-562, 51-74

Н. М. Гордеева
И. А. Самойлова
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР ПРИ ОБУЧЕНИИ БУДУЩИХ МЕТРОЛОГОВ

Аннотация: Рассматривается варианты включения теоретико-игрового подхода при построении учебных программ по математическому моделированию для студентов - будущих специалистов по качеству и метрологии. На базе построенной базовой упрощенной модели даются базовые понятия теории игр, анализируются и интерпретируются полученные результаты. Тем самым, закладываются основы для дальнейшей самостоятельной работы студентов при построении и анализе подобных моделей оптимизации производственных процессов, в которые включены несовпадающие интересы взаимодействующих сторон.

Ключевые слова: биматричные игры; управление качеством; равновесие Нэша; решение в чистых и смешанных стратегиях.

DOI: 10.25206/2307-5430-2019-7-100-105

Построение курсов по математическому моделированию для различных групп и направлений подготовки представляет определенный профессиональный вызов преподавателям математических дисциплин. Как правило, студенты бакалавриата и специалитета к последнему курсу обучения, кроме базовых курсов математического анализа, дифференциальных уравнений и т.п., уже изучили и свои профильные дисциплины. Многие из них уже довольно плотно подошли к выбору тем выпускных квалификационных работ и этапу формирования будущих профессиональных интересов. Таким образом, на наш взгляд, построение программ математического моделирования должно решать 3 основные задачи:

1) опираться на уже имеющиеся у студентов знания, умения и навыки;

2) служить основой для последующих спецкурсов и дисциплин;

3) развивать математический аппарат и математическую культуру, в том числе с использованием элементов тех разделов математики, которые не включены в программы учебных планов.

В рамках настоящей статьи излагается подход к решению последней из указанных задач. А именно - знакомству студентов (будущих специалистов по качеству и метрологии) с таким разделом исследования операций, как теория игр. Предлагаемая базовая модель позволяет не только дать основные определения и подходы теории игр [1,2], но и обеспечивает требуемую профессиональную направленность обучения.

Обучение начинается с описания базовой модели. Рассматриваются взаимоотношения 2 разных подразделений одной производственной компании в контексте теории игр. Предполагается, что эти подразделения находятся на последовательных уровнях производственной цепочки - т.е. одно из них является поставщиком продукции для другого (далее мы будем их именовать как «поставщик» и «потребитель»). Каждое из подразделений заинтересовано в оптимизации своих производственных процессов.

В рамках рассматриваемой модели основным измеряемым показателем является выпуск продукции требуемого качества и минимизация брака. Однако производство непременно влечет за собой брак, а значит, и задачу его выявления. Выявлять брак может как подразделение, его допустившее (поставщик) – таким образом, возникает проверка «на выходе», так и структура, которая принимает продукцию (потребитель) - проверка «на входе». Контроль за качеством и выявление брака тем лучше, чем он тщательнее. Но значит, и дороже. Тем самым, интересы условного внутреннего поставщика и такого же условного внутреннего потребителя в части построения системы контроля качества не являются совпадающими.

Каждая из сторон, стремясь к выпуску продукции требуемого качества, тем не менее, рассчитывает на то, что усилия смежника в производственной цепочке будут достаточными для результата. Тем самым, можно говорить о возможности использования теоретико-игрового подхода при моделировании возникающих конфликтных ситуаций. Стратегиями «игроков» будут выбранные ими уровни проверки продукции, функциями выигрыша – стоимостные характеристики спускаемой вниз по цепочке продукции за вычетом затрат на проверку. Игроки будут делать выбор своих стратегий одновременно.

Для упрощения моделирования сначала рассматривается вариант, в котором у поставщика и потребителя игрока будут только по две стратегии - базовый и усиленный уровни проверки. Тем самым моделирование сводится к описанию биматричной игры в нормальной форме размерности 2*2. Для завершения описания игры следует подробно описать структуру матриц выигрышей. При выявлении некачественной продукции «на входе» поставщик подвергается штрафу.

Очевидно, что если продукция более тщательно проверяется «на выходе» на предыдущем уровне (поставщиком), то «на входе» потребителю можно ограничиться базовым уровнем. С другой стороны, если станет известно, что на входе у потребителя реализуется только базовый уровень контроля, то более дорогой в реализации усиленный контроль не будет реализован и на верхнем уровне цепочки у поставщика. А это приведет к тому, что «на вход» потребителю будет подаваться менее качественная продукция, что в свою очередь, приведет к необходимости для него реализовывать более тщательный контроль «на вход». И т.д. Тем самым, возникает конфликт интересов потребителя и поставщика.

Обозначим через V_D и V_U – ценности (стоимости) для потребителя D и поставщика U соответственно (Upstream/Downstream – терминология, принятая в курсах по отраслевым рынкам). Для упрощения можно считать, что эти стоимости равны, т.е. $V_U = V_D = V$. Себестоимость базового и стандартного уровней проверки обозначим через C^S и C^E соответственно ($C^E > C^S$). Будем считать их равными и для поставщика, и для потребителя (от указанных двух предположений легко можно отказаться при дальнейшем анализе модели). Введем понятие потери стоимости от недостаточной проверки. Соответствующие матрицы обозначим через L_D и L_U для потребителя и поставщика соответственно. Как и ранее, будем предполагать, что потери стоимости могут быть 2 видов – высокими (L^H) (« high») и низкими (L^L) («low»).

Матрицы L_D и L_U будут иметь следующий вид

$$L_D = \begin{pmatrix} L^H & L^L \\ L^L & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_U = \begin{pmatrix} L^L & 0 \\ L^H & L^L \end{pmatrix}.$$

Отсутствие единообразия в структуре матриц L_D и L_U связано с асимметричными позициями поставщика и потребителя в производственной цепочке. Так, если потери стоимости (без учета себестоимости проверки) у поставщика U могут быть нулевыми только в том случае, если он обеспечивает усиленный контроль на выходе, а потребитель D, в свою очередь, не особо проверяет «на входе», то у потребителя – ситуация иная. Он может обеспечить себе нулевые потери стоимости только в том случае, если продукция прошла усиленный контроль и на его уровне, и на предыдущем – у поставщика.

Рассуждая аналогично, можно утверждать, что самые большие потери стоимости потребителя возникнут в случае, когда и он, и поставщик ограничились базовым уровнем проверки. С другой стороны, поставщик понесет самые большие потери, когда он выберет лишь базовый уровень контроля на выходе, а потребитель поставит усиленный контроль на вход. Все промежуточные варианты дают нам уровень потери стоимости, равный L^L (равенство этих коэффициентов для различных профилей, и для разных игроков является следствием упрощения модели и может быть снято при дальнейшем анализе – в том числе при расчете числовых коэффициентов).

Таким образом, нами описана игра в нормальной форме со следующими матрицами выигрышей

$$W_D = \begin{pmatrix} V - C^S - L^H & V - C^S - L^L \\ V - C^E - L^L & V - C^E \end{pmatrix},$$

$$W_U = \begin{pmatrix} V - C^S - L^L & V - C^E \\ V - C^S - L^H & V - C^E - L^L \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим различные случаи соотношения разницы в стоимостях уровней проверки и потерях стоимости (т.е. сравним величины $L^H - L^L$, L^L и $C^E - C^S$). Обозначим через $C = C^E - C^S$ – относительную стоимость тщательного уровня проверки относительно базового.

Рассмотрим следующие случаи.

1. $C > L^H - L^L; C > L^L$

Переход на усиленный уровень проверки не является выгодным с точки зрения прогнозируемой потери стоимости, в этом случае и поставщику U, и потребителю D следует ограничиться базовым уровнем проверки. Алгоритм поиска равновесий Нэша прогнозируемо приводит нас к соответствующему равновесию в чистых стратегиях («базовый уровень», «базовый уровень»).

2. $C < L^H - L^L; C < L^L$

Диаметрально противоположный случай по отношению к описанному выше. Потери стоимости при недостаточном уровне проверки довольно высоки при относительно допустимом уровне разницы в стоимостях проверки. Вывод – наличие равновесия Нэша в чистых стратегиях («усиленный уровень», «усиленный уровень»).

Следующие 2 оставшихся случая, а именно

3. $C > L^H - L^L$; $C < L^L$ и

4. $C < L^H - L^L$; $C > L^L$

уже не обеспечивают наличия равновесия в чистых стратегиях, равновесие в смешанных стратегиях имеет вид

$$p = \frac{L^H - L^L - C}{(L^H - L^L) - L^L},$$

$$q = \frac{C - L^L}{(L^H - L^L) - L^L}.$$

Выясним, как повлияет, к примеру, изменение относительной стоимости проверки на характер получаемого равновесия.

Пусть для определенности $L^H = 4$, $L^L = 3$, $C = 2$. При этих значениях равновесие имеет вид $p = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $q = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, что говорит о том, что и поставщику, и потребителю стоит выбирать базовый и усиленный уровни проверки с равными вероятностями.

А при тех же $L^H = 4,\ L^L = 3$, но уменьшенном до $C = \frac{3}{2}$ значении относительной стоимости проверки равновесие меняется на $p = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$; $q = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$, и поставщику уже стоит выбирать усиленный уровень в 3 раза чаще, чем базовый (а потребителю – наоборот).

Таким образом видно, что изменение только 1 параметра, а именно относительной стоимости проверки привело к изменению равновесной ситуации.

Исходя из определения точки равновесия в смешанных стратегиях как вероятности использования чистых стратегий при многократном повторении игры, при моделировании реальной ситуации при заданных условиях (стоимости и эффективности) проверок можно говорить о наличии равновесной ситуации, от которой будет невыгодно отклоняться ни одному из участников. Поэтому при систематических поставках обычно участники цепочки приходят к какому-то «равновесному» решению, принимая для себя в качестве приемлемого тот уровень контроля, который кажется им оптимальным, исходя из полученных оценок.

Можно также модифицировать модель и считать, что потери стоимости поставщика могут быть уже 3 типов – высокими, средними или низкими - $\{L^H; L^M; L^L\}$, где $L^H > L^M > L^L$, а у потребителя по-прежнему только высокими или низкими - $\{L^H; L^L\}$. Тогда матрицы потерь стоимости для потребителя и поставщика будут иметь вид, представленный в таблице 1.

Таким образом, мы получаем биматричную игру с матрицами выигрышей следующего вида (таблица 2).

Модифицировав матрицы выигрышей (вычтя из всех элементов одинаковые значения, что, очевидно, не изменит равновесные состояния), можно перейти к следующей паре матриц (таблица 3).

Таблица 1

Матрицы потерь стоимости для потребителя и поставщика

$L_D =$		S	E
	S	L^H	L^L
	E	L^L	0
$L_U =$		S	E
	S	L^M	L^L
	E	L^H	L^M

Таблица 2

Матрицы выигрышей для потребителя и поставщика

$W_{D,U} =$		S	E
	S	$(V - L^H - C^S, V - L^M - C^S)$	$(V - L^L - C^S, V - L^L - C^E)$
	E	$(V - L^L - C^E, V - L^H - C^S)$	$(V - C^E, V - L^M - C^E)$

Таблица 3

Модифицированные матрицы выигрышей для потребителя и поставщика

$\widetilde{W}_{D,U} =$		S	E
	S	$(C, L^H - L^M + C)$	$(L^H - L^L + C, L^H - L^L)$
	E	$(L^H - L^M, C)$	$(L^H, L^H - L^M)$

Рассмотрев различные случаи соотношений между C, L^H, L^M и L^L аналогично приведенному выше, можно получить различные ситуации равновесий - в чистых и смешанных стратегиях, которым можно дать похожую содержательную интерпретацию.

Из рассмотренных примеров можно сделать следующий вывод: оптимальный уровень проверки устанавливается исходя из интересов обоих участников, а именно – выбирая тот или иной уровень каждый участник должен учитывать интересы другого.

Тем самым, даже начальное знакомство с методами теории игр позволит будущим специалистам, во-первых, лучше понимать природу установления равновесия между звеньями производства, а, во-вторых, оптимально управлять проектами по соблюдению качества.

Библиографический список

1. Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976. 327 с.

2. Шикин Е.В. От игр к играм. Математическое введение. М.: ЛЕНАНД, 2015. 120 с.

Сведения об авторах:

Надежда Михайловна Гордеева

Служебный адрес: 105005, Москва, 2-я Бауманская улица, дом 5, стр. 1, МГТУ им. Н.Э. Баумана, кафедра ФН1 «Высшая математика».

E-mail: nmgordeeva@bmstu.ru. Spin-code: 8406-7531.

Научные интересы: математическое моделирование.

Страница автора в MathNet: http://www.mathnet.ru/rus/person/81106.

Страница автора в eLibrary.ru: https://elibrary.ru/author_items.asp?authorid=699932.

Ирина Александровна Самойлова

Служебный адрес: 105005, Москва, 2-я Бауманская улица, дом 5, стр. 1, МГТУ им. Н.Э. Баумана, кафедра ФН1 «Высшая математика».

E-mail: irinas@bmstu.ru. Spin-code: 3897-0658.

Научные интересы: математическое моделирование, теория игр.

Страница в MathNet: http://www.mathnet.ru/rus/person37784.

Страница в eLibrary.ru: https://elibrary.ru/author_items.asp?authorid=4943.