дания, однако могут обратиться за оперативной помощью к своему преподавателю, присутствующему в аудитории.

Таким образом, обучение математике студентов направления «Теоретическая и прикладная лингвистика» в техническом вузе связано с определенными трудностями. Однако при правильном подходе к организации обучения студентов-гуманитариев и ориентации учебного процесса на освоение математических методов и формирование навыков их применения в профессиональной деятельности дает положительные результаты.

Сведения об авторах:
Суфьян Олиевич Карданов
Служебный адрес: 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
E-mail: s_kardanov@mail.ru. Spin-code: 4306-5237.

Владимир Иванович Леванков
Служебный адрес: 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
E-mail: levx@mail.ru. Spin-code: 5519-4290.

Константин Тузарович Тибилов
Служебный адрес: 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
E-mail: tibilov_kt@mail.ru. Spin-code: 9433-1514.

УДК 514.122.1 + 378.147

С. В. Костин
старший преподаватель
МИРЭА – Российский технологический университет, г. Москва, Россия

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ТИПОВЫХ РАСЧЕТОВ ПРИ ОБУЧЕНИИ СТУДЕНТОВ ТЕМЕ «ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ» КУРСА АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Аннотация. Типовые расчеты являются важным средством обучения математике студентов технических вузов. Они позволяют активизировать и индивидуализировать работу со студентами и как следствие повысить уровень и качество их знаний. В данной статье мы делимся нашим опытом составления задачи для типового расчета для студентов РТУ МИРЭА по теме «Прямая на плоскости» курса аналитической геометрии. Сформулированы руководящие принципы, которыми мы руководствовались при составлении задачи. Также приведена задача и подробные методические указания по ее решению. Один из

выводов данной работы заключается в том, что типовой расчет будет особенно успешно выполнять возложенные на него функции, если он будет содержать интересные, содержательные и в то же время посильные для большинства студентов задачи.

Ключевые слова: аналитическая геометрия; преподавание математики; типовые расчеты.

DOI: 10.25206/2307-5430-2019-7-140-145

1. Введение. Использование типовых расчетов в процессе преподавания высшей математики

Во многих технических вузах России уже давно сложилась и, как правило, хорошо себя зарекомендовала практика использования в процессе обучения студентов так называемых типовых расчетов.

Одним из пионеров внедрения в учебный процесс типовых расчетов был доцент Московского энергетического института Леонид Антонович Кузнецов. Преподавателям старшего поколения хорошо известен составленный Л.А. Кузнецовым и ставший практически классическим сборник типовых расчетов [1].

Типовой расчет – это (как правило, составленный сотрудниками кафедры высшей математики данного вуза) сборник заданий, которые студенты должны выполнить в течение семестра. Каждое задание представлено в достаточном количестве (обычно в 30) вариантах, что позволяет каждому студенту группы получить свой индивидуальный вариант.

В Российском технологическом университете МИРЭА (РТУ МИРЭА) типовые расчеты составлены по всем (или практически по всем) математическим дисциплинам (в том числе по дисциплинам, читающимся на относительно небольших потоках или даже для отдельных групп).

Каждый студент обязан выполнить типовой расчет в течение семестра. Эта обязанность закреплена организационно: выполненный и зачтенный типовой расчет (на котором стоят дата, фамилия и подпись преподавателя, который зачел студенту данный типовой расчет) является для студента допуском на экзамен по соответствующей дисциплине.

С учетом того, что система типовых расчетов весьма широко распространена в технических вузах России, думается, что был бы очень полезен обмен опытом составления типовых расчетов, накопленным кафедрами высшей математики различных вузов.

В данной статье мы хотели бы рассказать о нашем опыте участия в модернизации одного из типовых расчетов. Речь идет о составлении задачи для используемого в РТУ МИРЭА типового расчета по аналитической геометрии. Эта задача посвящена теме «Прямая на плоскости».

2. О составлении задачи по теме «Прямая на плоскости» для типового расчета по аналитической геометрии

Аналитическая геометрия является важной составной частью вузовского курса математики. Этот раздел высшей математики является продолжением и развитием школьного курса геометрии, во всяком случае, той части школьного курса геометрии, которая посвящена векторам и координатам.

Как отмечает в своей книге [2] профессор МГУ Ю.М. Смирнов, аналитическая геометрия «лучше и яснее всех других предметов учит связи геометрии с алгеброй и алгебры с геометрией. Она по существу, как бы является двойным словарем перевода с языка геометрии на язык алгебры и наоборот».

Можно только согласиться с мнением уважаемого профессора. Автор этих строк тоже считает аналитическую геометрию очень важной составной частью вузовского курса математики. Студент, который хорошо разбирается в аналитической геометрии, с большой вероятностью не будет иметь проблем и с другими разделами математики. Скажем больше: с большой вероятностью (если этот студент не перестанет учиться на старших курсах) он станет грамотным инженером, хорошим конструктором…

Некоторое время назад в РТУ МИРЭА возникла потребность в определенном обновлении, модернизации типового расчета по аналитической геометрии. В частности, возникла потребность существенно переработать задачу (а по сути составить новую, более интересную и содержательную задачу) по теме «Прямая на плоскости». Эта работа была выполнена автором данной статьи.

При составлении новой задачи по теме «Прямая на плоскости» мы исходили из следующих руководящих принципов:

1) при решении задачи студент должен продемонстрировать уверенное владение такими понятиями, как «направляющий вектор прямой», «нормальный вектор прямой», «общее уравнение прямой», «каноническое уравнение прямой», «скалярное произведение векторов» (выражение скалярного произведения через длины векторов и угол между ними; выражение скалярного произведения через координаты векторов), «расстояние от точки до прямой» и др.;

2) выходные данные задачи (то есть количество найденных студентом расстояний, углов и т.д., которые приводятся в ответе к задаче) не должно быть очень большим (по разным причинам, но в том числе для облегчения работы преподавателя по проверке полученных студентом результатов);

3) целесообразно, чтобы еще до проверки задачи преподавателем студент (хотя бы предварительно) сам мог проверить правильность полученных результатов (то есть целесообразно, чтобы внутри задачи была заложена возможность контроля правильности полученных результатов);

4) задача по возможности должна связывать школьную и вузовскую математику, то есть она должна перекидывать мостик между школьным курсом геометрии (в данном случае школьным курсом планиметрии) и вузовским курсом аналитической геометрии;

5) задача должна быть по возможности интересной.

Руководствуясь этими принципами, мы составили следующую задачу.

Задача. Точки A, B, C, D заданы своими координатами в прямоугольной декартовой системе координат Oxy на плоскости.

1) Доказать, что $ABCD$ – выпуклый четырехугольник.

2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра M и радиус r этой окружности.

3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра N и радиус R этой окружности.

Данная задача была составлена нами в 30 вариантах. Также мы составили и снабдили подробными образцами решения два демонстрационных варианта: вариант 31 и вариант 32.

Методические указания к задаче

1) Можно предложить два способа доказательства того, что $ABCD$ – выпуклый четырехугольник.

Способ 1. Составить уравнения диагоналей AC и BD. Прямые AC и BD должны иметь ровно одну общую точку K. Найти координаты этой точки. Если точка K лежит строго внутри отрезка AC (то есть $\overrightarrow{AK} = \alpha\,\overrightarrow{AC}$, где $0 < \alpha < 1$) и строго внутри отрезка BD (то есть $\overrightarrow{BK} = \beta\,\overrightarrow{BD}$, где $0 < \beta < 1$), то четырехугольник $ABCD$ выпуклый.

Способ 2. Найти векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$. Эти векторы должны быть неколлинеарными (то есть они должны образовывать базис на плоскости). Разложить вектор $\overrightarrow{AC}$ по этому базису: $\overrightarrow{AC} = \alpha\,\overrightarrow{AB} + \beta\,\overrightarrow{AD}$. Четырехугольник $ABCD$ является выпуклым тогда и только тогда, когда одновременно выполняются три неравенства: $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta > 1$.

2) В четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность тогда и только тогда, когда, во-первых, четырехугольник $ABCD$ является выпуклым и, во-вторых, выполняется равенство

$$AB + CD = BC + AD. \qquad (1)$$

Координаты центра M вписанной окружности можно найти следующим образом: составить уравнения биссектрис двух смежных углов четырехугольника (например, уравнения биссектрис углов A и B), тогда точка M пересечения этих биссектрис будет центром окружности, вписанной в четырехугольник $ABCD$.

Радиус r вписанной окружности можно найти как расстояние от точки M до одной из сторон четырехугольника, например, до стороны AB: $r = d(M, AB)$.

Контроль 1. Для контроля правильности решения задачи целесообразно найти расстояния от точки M до трех других сторон четырехугольника. Все полученные числа должны быть равны радиусу r вписанной окружности.

Контроль 2 (необязательный, по желанию студента). Для контроля правильности решения задачи можно проверить справедливость для данного описанного четырехугольника следующей формулы:

$$S = pr, \tag{2}$$

где S – площадь четырехугольника, p – полупериметр четырехугольника, а r – радиус вписанной окружности. При этом площадь S можно найти, например, по формуле

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi, \tag{3}$$

где d_1 и d_2 – длины диагоналей, а φ – угол между ними.

3) Около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность тогда и только тогда, когда, во-первых, четырехугольник $ABCD$ является выпуклым и, во-вторых, выполняется равенство

$$\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ. \tag{4}$$

Координаты центра N описанной окружности можно найти следующим образом: составить уравнения серединных перпендикуляров двух смежных сторон четырехугольника (например, уравнения серединных перпендикуляров сторон AB и BC), тогда точка N пересечения этих серединных перпендикуляров будет центром окружности, описанной около четырехугольника $ABCD$.

Радиус R описанной окружности можно найти как расстояние от точки N до одной из вершин четырехугольника, например, до вершины A: $R = d(N, A) = NA$.

Контроль 1. Для контроля правильности решения задачи целесообразно найти расстояния от точки N до трех других вершин четырехугольника. Все полученные числа должны быть равны радиусу R описанной окружности.

Контроль 2 (необязательный, по желанию студента). Для контроля правильности решения задачи можно проверить справедливость для данного вписанного четырехугольника следующей формулы:

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD. \tag{5}$$

(это теорема Птоломея, гласящая, что у вписанного четырехугольника сумма произведений противоположных сторон равна произведению диагоналей).

Демонстрационный вариант 31

Числовые данные: $A = (3,10)$, $B = (-4,9)$, $C = (3,-14)$, $D = (6,7)$.

Ответ: 1) $ABCD$ – выпуклый четырехугольник; 2) В четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность; центр этой окружности находится в точке $M = \left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right)$, а радиус равен $r = 3\sqrt{2}$; 3) Около четырехугольника $ABCD$ нельзя описать окружность.

Демонстрационный вариант 32

Числовые данные: $A=(7,8)$, $B=(9,2)$, $C=(-3,-7)$, $D=(3,11)$.

Ответ: 1) $ABCD$ — выпуклый четырехугольник; 2) В четырехугольник $ABCD$ нельзя вписать окружность; 3) Около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность; центр этой окружности находится в точке $N=\left(-\frac{1}{2},\frac{13}{6}\right)$, а радиус равен $R=\frac{5\sqrt{65}}{3\sqrt{2}}$.

3. Заключение

В данной статье мы поделились нашим опытом составления задачи для типового расчета по аналитической геометрии по теме «Прямая на плоскости». Мы старались сделать задачу интересной и содержательной, а также заложить внутрь задачи возможность контроля правильности полученных результатов.

Описанные и вписанные четырехугольники обладают большим количеством замечательных свойств. Например, увлеченным математикой студентам можно предложить (в четных вариантах) проверить справедливость для данного четырехугольника формулы Брахмагупты для площади четырехугольника.

При составлении задачи мы ставили цель не только обучить студентов основным методам решения задач по теме «Прямая на плоскости», но также наша цель состояла в том, чтобы, начиная с самых первых занятий первого курса, постараться увлечь студентов математикой, постараться показать студентам внутреннюю красоту и единство математики…

Насколько это нам удалось – судить Вам, уважаемые читатели.

Мы надеемся, что статья заинтересовала читателей и будем очень благодарен за любые комментарии или замечания по затронутым нами вопросам.

Библиографический список

1. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). М.: Высш. шк., 1983. 175 с.
2. Смирнов Ю.М. Курс аналитической геометрии. М.: УРСС, 2005. 224 с.

Сведения об авторе:

Сергей Вячеславович Костин

Служебный адрес: 119454, г. Москва, проспект Вернадского, д. 78.

E-mail: kostinsv77@mail.ru. Spin-code: 8555-9133.