Библиографический список

1. Долженко О.В., Шатуновский В.Л. Современные методы и технология обучения в техническом вузе. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1990. 192с.

2. Розанова С.А. Математическая культура студентов технических университетов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 176 с.

3. Федеральный государственный стандарт высшего образования. USL: http://fgosvo.ru/fgosvo/151/150/24/28

4. Хуторский А.В. Педагогическая инноватика: методология, теория, практика. М.: УНЦ ДО, 2005. 222 с.

Сведения об авторах:
Елена Александровна Алашеева
Служебный адрес: 443090, г. Самара, ул. Московское шоссе 77.
E-mail: allena_81@mail.ru. Spin-code: 3354-2780.

Наталья Вячеславовна Рогова
Служебный адрес: 443090, г. Самара, ул. Московское шоссе 77.
E-mail: jacolio@list.ru. Spin-code: 6474-2780.

УДК 51:37; 514.177; 517.165

Е. С. Алексеева
член Нижегородского математического общества
А. Э. Рассадин
член правления Нижегородского математического общества
Нижегородское математическое общество, г. Нижний Новгород, Россия

ОЦЕНКИ ДЛИНЫ ЭЛЛИПСА И ФОРМИРОВАНИЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ КОМПЕТЕНТНОСТИ ИНЖЕНЕРОВ

Аннотация. В статье представлена подробная методическая разработка факультативного занятия с продвинутыми студентами технического вуза, на котором обсуждаются оценки снизу для полного эллиптического интеграла 2-го рода. Благодаря известной связи этого интеграла с длиной эллипса эти оценки делаются на основе геометрических теорем, лежащих на периферии втузовского курса высшей математики. Неподдельный интерес учащихся должна вызвать указываемая преподавателем возможность для каждой такой оценки, рассматриваемой на занятии, получить это же неравенство с помощью инструментария математического анализа, без использования геометрических соображений, то

есть демонстрация как единства математики, так и скрытых взаимосвязей между различными её разделами.

Ключевые слова: активное участие обучаемых в учебном процессе; обратное неравенство Гёльдера; эксцентриситет; изопериметрическое неравенство; теорема Боннезена.

DOI: **10.25206/2307-5430-2019-7-23-28**

Умение взглянуть на инженерную проблему с разных сторон должно культивироваться на протяжении всего времени обучения студента в техническом вузе. Очевидно, что ключевая роль в перманентной реализации этого процесса должна принадлежать дисциплинам физико-математического цикла. Ясно также, что на младших курсах особое внимание нужно уделять простоте и наглядности подбираемых для этой цели примеров, которые, однако, должны быть содержательными. Продемонстрируем возможности такого подхода на классической задаче о вычислении длины эллипса.

Рассмотрим эллипс с полуосями a и b, заданный параметрическими уравнениями:

$$x = a \cdot \cos t, \quad y = b \cdot \sin t, \quad t \in [0, 2 \cdot \pi], \tag{1}$$

причём будем считать, что $a \geq b > 0$.

Подсчитывая его длину L по известной формуле [1, с. 649], получим:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} \cdot dt = 4 \cdot a \cdot \mathrm{E}(k), \tag{2}$$

где $k = \sqrt{1 - b^2 / a^2}$ – эксцентриситет эллипса (1), а

$$\mathrm{E}(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} \cdot dt \tag{3}$$

– полный эллиптический интеграл 2-го рода в форме Лежандра [2, с. 151].

Определённый интеграл (3) является одним из первых примеров интегралов, не выражающихся через элементарные функции, с которым сталкивается будущий инженер. С другой стороны, этот интеграл весьма часто возникает в технических приложениях (см. [2] и библиографию там), поэтому задача о получении оценок интеграла (3), выражающихся через элементарные функции, возникает естественным образом.

Простейшую оценку такого рода можно получить, применяя к эллипсу (1) известное изопериметрическое неравенство между длиной L замкнутой плоской кривой и площадью S ограниченной этой кривой фигуры [3, с. 11]:

$$L^2 - 4\cdot\pi\cdot S \geq 0. \qquad (4)$$

Наиболее приемлемым способом получения неравенства (4) для студентов технических вузов является метод тригонометрических рядов, предложенный А. Гурвицем в статье [4]. На русском языке этот метод подробно описан к книге [5, с. 98], и, вследствие его компактности и доступности, вполне может быть не только продемонстрирован учащимся, но и предложен в качестве темы небольшого доклада на описываемом факультативном занятии одному из студентов.

Подставим в неравенство (4) формулу (2) и известное выражение для площади эллипса (1) $S = \pi\cdot a\cdot b$ [1, с. 642], тогда после замены через эксцентриситет k эллипса (1) отношения полуосей эллипса $b/a = \sqrt{1-k^2}$ получим, что для $k \in [0,1]$:

$$\mathrm{E}(k) \geq \frac{\pi}{2}\cdot\sqrt[4]{1-k^2}\,. \qquad (5)$$

Однако это неравенство может быть выведено и чисто аналитически, без использования геометрических понятий – длины и площади.

Для демонстрации такого пути рассуждений обратимся к обратному неравенству Гёльдера [6, с.16], справедливому для положительных функций $f(t)$ и $g(t)$, непрерывных на отрезке $[\alpha,\beta]$:

$$\int_\alpha^\beta f(t)\cdot g(t)\cdot dt \geq \left(\int_\alpha^\beta f^{\,p}(t)\cdot dt\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_\alpha^\beta g^{q}(t)\cdot dt\right)^{\frac{1}{q}}, \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \qquad (6)$$

где, в отличие от общеизвестного неравенства Гёльдера (см., например, [1, с. 608]), параметр p удовлетворяет неравенству $0 < p < 1$.

Вывод этого неравенства, приведённый в книге [6], прост и легко обозрим, поэтому он тоже может быть предложен в качестве темы небольшого доклада на рассматриваемом занятии уже другому студенту.

Выберем $f(t)=1$, $g(t)=\sqrt{1-k^2\sin^2 t}$, $\alpha=0$, $\beta=\pi/2$, $p=2/3$, тогда $q=-2$, и неравенство (6) сводится к следующему неравенству:

$$\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}\cdot dt \geq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\left(\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{1-k^2\sin^2 t}\right)^{-\frac{1}{2}}. \qquad (7)$$

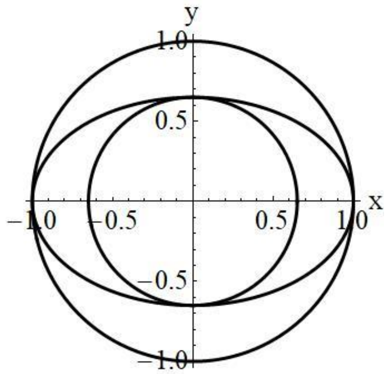

Рис. 1. Эллипс, вписанная в него окружность и описанная около него окружность

Интеграл в правой части неравенства (7) удобнее всего вычислить заменой $\zeta = \sqrt{1-k^2} \cdot tgt$, не обращаясь к теории вычетов:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1-k^2\sin^2 t} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}. \qquad (8)$$

Подставляя затем значение интеграла (8) в неравенство (7), получим снова неравенство (5). Подчеркнём, что неравенство (7), как и исходное неравенство (6), никак не связано с геометрическими представлениями об эллипсе (1).

Далее, оценку (5) для интеграла (3) можно улучшить, воспользовавшись обобщением изопериметрического неравенства (4), данного Т. Боннезеном в статье [7], а именно, пусть на плоскости замкнутая кривая без самопересечений длины L ограничивает область D площади S, и пусть r – радиус вписанного круга для этой кривой, т. е. радиус наибольшего круга, содержащегося в $\overline{D}$, а R – радиус её описанного круга, т. е. радиус наибольшего круга, содержащегося в $\overline{D}$, т. е. радиус наименьшего круга, содержащего D, тогда справедливо следующее неравенство [7]:

$$L^2 - 4 \cdot \pi \cdot S \geq \pi^2 \cdot (R-r)^2. \qquad (9)$$

Правая часть этого неравенства называется изопериметрическим дефектом [3, 7]. Он показывает, насколько левая часть изопериметрического неравенства (4) может отличаться от нуля.

На русском языке доказательство неравенства (9) подробно описано в книге [3, с. 14 и с. 22]. Однако это доказательство является довольно сложным, поэтому преподаватель на занятии может лишь наметить основные его вехи.

Очевидно, что для эллипса (1) $R = a$ и $r = b$ (см. рис. 1), поэтому, подставляя эти значения в неравенство (9) и заменяя отношения полуосей эллипса через его эксцентриситет k, получим:

$$\mathrm{E}(k) \geq \frac{\pi}{4} \cdot (1 + \sqrt{1-k^2}). \qquad (10)$$

В том, что оценка (10) лучше, чем оценка (5), легко убедиться с помощью элементарной формулы квадрата разности. Наконец, неравенство (10) тоже можно вывести чисто аналитически, без использования геометрических понятий.

Для этого, следуя [8, с. 118], рассмотрим двумерные векторы $\vec{\xi}=(\cos t,\ \ \sqrt{1-k^2}\cdot\sin t)$ и $\vec{\eta}=(\cos t,\ \ \sin t)$. Применяя к этим векторам неравенство Коши-Буняковского [1, с. 393], получим, что:

$$\cos^2 t+\sqrt{1-k^2}\cdot\sin^2 t\le\sqrt{1-k^2\sin^2 t}. \qquad (11)$$

Интегрируя неравенство (11) по t в пределах от 0 до $\pi/2$, опять придём к неравенству (10).

Графики функции (3) и правых частей неравенств (5) и (10) в зависимости от эксцентриситета эллипса k приведены на рис. 2.

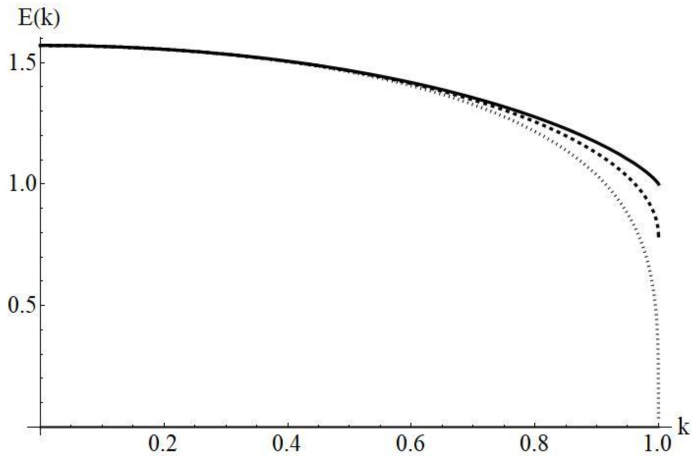

Рис. 2. Полный эллиптический интеграл 2-го рода (сплошная линия), его оценка снизу с помощью изопериметрического неравенства (точечная линия), его оценка снизу с помощью неравенства Боннезена (пунктирная линия)

Таким образом, из сказанного выше вытекает следующий план факультативного занятия с продвинутыми студентами технического вуза:

1) преподаватель выводит формулу (2) для длины эллипса;

2) студенты делают короткие сообщения о выводе неравенств (4) и (6);

3) на основе рассказанных студентами доказательств изопериметрического неравенства и обратного неравенства Гёльдера преподаватель выводит неравенство (5) двумя способами;

4) преподаватель комментирует неравенство Боннезена (9) и выводит неравенство (10) двумя способами;

5) в качестве домашнего задания преподаватель предлагает студентам нарисовать относительную погрешность оценок (5) и (10) с помощью доступных им систем компьютерной математики.

В процессе проведения занятия для оживления восприятия учащихся преподавателю также целесообразно излагать биографические сведения об А. Гурвице, Т. Боннезене и С.Л. Соболеве, результаты которых были применены.

Благодарим к. ф.-м. н. З.Я. Якупова (КНИТУ-КАИ им. А.Н. Туполева), д. ф.-м. н. В.Ж. Сакбаева (МФТИ) и д. ф.-м. н. Н.Н. Шамарова (МГУ им. М.В. Ломоносова) за ценные обсуждения, А.В. Секацкую (ЯрГУ им. П.Г. Демидова) за съёмку видеопрезентации, а также М.И. Болотова (ННГУ им. Н.И. Лобачевского) за любезное предоставление технической возможности для этой съёмки.

Библиографический список

1. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 1. М.: Высш. шк., 1988. 712 с.

2. Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970. 304 с.

3. Бураго Ю.Д., Залгаллер В.А. Геометрические неравенства. Л.: Наука, 1980. 288 с.

4. Hurwitz A. Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier // Annales scientiques de l'École Normale Supérieure. 1902. Série 3. Tome 19. P. 357–408.

5. Аминов Ю.А. Дифференциальная геометрия и топология кривых. М.: Наука, 1987. 160 с.

6. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. 336 с.

7. Bonnesen T. Sur une amélioration de l'inégalité isopérimètrique du cercl et la démonstration d'une inégalité de Minkowski // C. R. Acad. sci. Paris. 1921. 172, p. 1087 – 1089.

8. Садовничий В.А., Григорян А.А., Конягин С.В. Задачи студенческих математических олимпиад. М.: Изд-во МГУ, 1987. 310 с.

Сведения об авторах:
Елена Сергеевна Алексеева
Служебный адрес: г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, корп. VI, к. 406.
E-mail: kometarella@mail.ru.

Александр Эдуардович Рассадин
Служебный адрес: г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, корп. VI, к. 406.
E-mail: brat_ras@list.ru.
Страница автора в MathNet: http://www.mathnet.ru/rus/person78260.