3. Никонорова Ю.В. Проблемы и перспективы развития электронного обучения студентов технических вузов // Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. XV Междунар. научн. конф. (с. Цей, 15-20 июля 2019 г.). Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2019. С. 230–231.

4. Трунова Л. В. Внедрение в образовательный процесс дистанционных технологий с использованием локальных средств разработки электронных курсов // Молодой ученый. 2017. № 25. С. 49–52. URL https://moluch.ru/archive/159/44662/ (дата обращения: 05.03.2019).

5. Электронное обучение и дистанционные образовательные технологии. URL: https://studbooks.net/1801488/pedagogika/elektronnoe_obuchenie_distantsionnye_obrazovatelnye_tehnologii (дата обращения: 25.03.2019).

6. https://www.dropbox.com

7. http://doodle.com

8. https://getkahoot.com/ , https://kahoot.it/

Сведения об авторах:
Юлия Васильевна Никонорова
E-mail: nikonorova2009@mail.ru, vitikafmat@mephi.ru.

Наталья Ивановна Чабанова
E-mail: nich@inbox.ru, vitikafmat@mephi.ru.

УДК 517.9:532.5

Ю. В. Никонорова
кандидат физико-математических наук, доцент
Д. В. Швец
студент
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,
г. Волгодонск, Россия

РЕАЛИЗАЦИЯ МЕЖПРЕДМЕТНЫХ СВЯЗЕЙ КАК СРЕДСТВО ПОВЫШЕНИЯ МОТИВАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ НА ПРИМЕРЕ ПРИЛОЖЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К ГИДРОДИНАМИКЕ

Аннотация. В статье рассмотрены ряд практических задач гидродинамики, сводящихся к решению дифференциальных уравнений. Целью статьи является установление междисциплинарного подхода, касающегося теории дифференциальных уравнений и гидродинамики, влекущего за собой повышение мотивации изучения обеих дисциплин. Реализацией цели статьи является приведение кратких решений представленных задач гидродинамики через теорию дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: междисциплинарный подход; дифференциальные уравнения; гидродинамика.

DOI: 10.25206/2307-5430-2019-7-215-220

Одной из важнейших задач подготовки будущего специалиста является умение грамотно и эффективно использовать полученные математические знания и умения в профессиональной деятельности. Зачастую в процессе изучения математических дисциплин наблюдается некоторая оторванность от реальных технических задач, студенты не видят приложения изучаемых математических объектов, алгоритмов и методов в будущей профессии. Поэтому можно считать, что междисциплинарный подход является той основой, на которой базируется мотивация к обучению. Например, исследователь Минаева А.М. считает, что межпредметные связи развивают логическое мышление, «формируют представления о математике как части общечеловеческой культуры, о значимости математики в развитии цивилизации и современного общества; создают фундамент для математического развития, формируют механизмы мышления, характерные для математической деятельности» [4].

При изучении теории дифференциальных уравнений на первой лекции обязательно студенческая аудитория задает вопрос: «С какой целью изучается данная дисциплина? Где ее приложение в нашей будущей профессии?» Поэтому на первой лекции, при объяснении дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными, с целью повышения интереса к дисциплине, имеет смысл приводить ряд простых примеров приложения дифференциальных уравнений. Например, можно указать, что простейшее уравнение вида $\frac{dX}{dt} = kX$, где k – коэффициент пропорциональности, описывает ситуации определения массы радия при радиоактивном распаде (t – время); изменения атмосферного давления X воздуха от высоты t; снижения температуры тела (здесь $X=T-t_0$, t_0 – температура среды охлаждения); увеличения массы X бактерий (t – время) [6, с. 325]. Также можно упомянуть то, что дифференциальные уравнения Бернулли используются при гидравлических расчетах насосных установок, гидравлических турбин, трубопроводов, приборов для измерения скоростного напора и расхода жидкости [8]. Дифференциальные уравнения необходимы в гидродинамике для расчета движения грунтовых вод, построения моделей турбулентности, струйных течений жидкости, изучения вихревых структур и потенциальных течений несжимаемой жидкости [8]. Задача обтекания тела конечного размера однородным неограниченным потоком также решается при помощи дифференциальных уравнений.

Рассмотрим применение дифференциальных уравнений в гидродинамике. Приводимые ниже задачи имеет смысл приводить на лекциях уже после всех разобранных тем теории дифференциальных уравнений в качестве приложений.

В гидродинамике применяются дифференциальные уравнения, описывающие движение идеальной или реальной жидкости. Одним из таких уравнений является уравнение Навье-Стокса. Данное уравнение описывает движение вязкой жидкости. В векторном виде:

$$\frac{\partial \bar{\upsilon}}{\partial t} = -(\bar{\upsilon} \cdot \nabla)\bar{\upsilon} + \nu \Delta \upsilon - \frac{1}{\rho} + f \ ,$$

где ∇ – оператор набла, Δ – векторный оператор Лапласа, t – время, ν – коэффициент кинематической вязкости, ρ – плотность, p – давление, $\bar{\upsilon} = (\upsilon^1, ..., \upsilon^n)$ – векторное поле скорости, f – векторное поле массовых сил, n – плоская или трехмерная область, в которой движется жидкость [7].

При решении уравнения Навье-Стокса получаются различные законы гидромеханики. Одним из простых решений данного уравнения является закон Пуазейля. «Закон Пуазейля – закон, определяющий расход жидкости при установившемся течении вязкой несжимаемой жидкости в тонкой цилиндрической трубке круглого сечения» [3].

$$Q = \int_S \upsilon(r) dS = 2\pi \int_0^R \upsilon(r) r dr = \frac{\pi D^4 (p_1 - p_2)}{128 \cdot \eta L} = \frac{\pi R^4 (p_1 - p_2)}{8 \cdot \eta L},$$

где «Q – расход жидкости в трубопроводе; D – диаметр трубопровода; U – скорость жидкости вдоль трубопровода, r – расстояние от оси трубопровода, R – радиус трубопровода, $p_1 - p_2$ – разность давлений на входе и на выходе из трубы, η - вязкость жидкости, L – длина трубы» [3].

«Данный закон описывает течение Пуазейля - ламинарное течение жидкости через каналы в виде прямого кругового цилиндра или слоя между параллельными плоскостями» [3]. На примере решения задачи, покажем применение закона Пуазейля.

Рассмотрим ламинарный поток жидкости с радиусом r и длиной l. Результирующая сила будет $F = (P_1 - P_2)\pi r^2$, где P_1 и P_2 – давление.

На боковую поверхность цилиндра, со стороны внешней жидкости, действует сила внутреннего трения, тогда по формуле Ньютона для вязкого трения: $F_{тр} = \eta \frac{du}{dr} S = \eta \frac{du}{dr} 2\pi r l$, $S = 2\pi r l$ – площадь боковой поверхности цилиндра. Результирующая сила равна силе трения $F_{тр} = F = -\eta \frac{du}{dr} 2\pi rl = (P_1 - P_2)\pi r^2$, $du = -\frac{P_1 - P_2}{2l\eta} rdr$, тогда скорость равна $\int_0^{\upsilon} d\upsilon = -\frac{P_1 - P_2}{2l\eta} \int rdr \Rightarrow \upsilon = \frac{P_1 - P_2}{4l\eta}(R^2 - r^2)$. Результат решения свидетельствует о том, что наибольшей скоростью обладает слой жидкости, движущийся вдоль оси трубы при $r=0$. Площадь сечения для слоя радиуса r и толщиной dr составляет $dS = 2\pi rdr$, слой переносит за одну секунду объем жидкости в количестве $dQ = udS = u \cdot 2\pi rdr$. Тогда объем протекающей жидкости равен $dQ = \pi \frac{P_1 - P_2}{2l\eta}(R^2 - r^2) rdr$, $Q = \pi \frac{P_1 - P_2}{2l\eta} \int_0^R (R^2 - r^2) rdr = \frac{(P_1 - P_2)\pi R^4}{8l\eta}$.

Помимо уравнения Навье-Стокса, для описания движения жидкости используются уравнения Эйлера. Данные уравнения описывают движение потока идеальной жидкости и учитывают силы, воздействующие на него [3].

В векторной форме уравнение Эйлера имеет вид: $\frac{d\bar{\upsilon}}{dt} = \bar{g} - \frac{1}{\rho} grad(p)$. Слагаемые в правой части учитывают влияние внешних сил и давление собственной массы жидкости: $\bar{g}(x,y,z,t)$ – напряженность внешнего силового поля, $p(x,y,z,t)$ – давление жидкости, ρ – плотность жидкости. Вектор $\bar{\upsilon}(x,y,z,t)$ – скорость движения жидкости, $\frac{d\bar{\upsilon}}{dt}$ – ускорение жидкости. Для одномерного потока, уравнение Эйлера имеет вид: $\upsilon \frac{d\bar{\upsilon}}{dx} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp}{dx}$

На примере решения задачи, покажем применение уравнения Эйлера.

По горизонтальной трубе протекает жидкость плотностью 950 кг/м3. Давление на входе в трубу 0,3 МПа, на выходе из трубы 1 МПа. Скорость на входе в трубу 50 м/с. Определить скорость на выходе из трубы.

Запишем уравнение Эйлера для стационарного потока $\upsilon \frac{d\bar{\upsilon}}{dx} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp}{dx}$

Умножим обе части на dx и проинтегрируем: $\upsilon d\upsilon = -\frac{dp}{\rho}$. Тогда $\frac{\rho\upsilon^2}{2} + p = const$. Запишем это выражение для двух сечений, входного и выходного: $\frac{\rho\upsilon_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho\upsilon_2^2}{2} + p_2$. Выразим из этого уравнения скорость и подставим известные величины: $\upsilon_2 = \sqrt{\upsilon_1{}^2 - \frac{2(p_2 - p_1)}{\rho}} = \sqrt{50 - \frac{2(10^6 - 3 \cdot 10^5)}{950}} = 32{,}04\ м/с$.

Рассмотрим примеры задач гидродинамики, также сводящиеся к решению дифференциальных уравнений, которые имеет смысл разбирать на практических занятиях как иллюстрации к соответствующим темам теории дифференциальных уравнений.

Задача (тема: уравнения второго порядка). В электрической цепи последовательно соединены катушка индуктивности L =0,4 Гн и электрическая ванна, с начальным сопротивлением 2 Ом. В ванне в литре воды растворен хлористый водород в объеме 10 г. При разложении кислоты током меняется концентрация раствора. Напряжение на клеммах цепи 20 В, электрохимический эквивалент k хлористого водорода равен 0,000381 г/Кл, начальный ток 10 А. Требуется определить зависимость количества соляной кислоты в растворе от времени.

Ход решения: Уравнение задачи имеет вид $L\dfrac{d^2Q}{dt^2}+\dfrac{dQ}{dt}\cdot\dfrac{k_1}{M_0-kQ}=E$ Неизвестная функция - количество y хлористого водорода, который не разложился к моменту t, приведем уравнение к виду $yy''+ay'+by=0,$ где $a=\dfrac{k_1}{L}=50, b=\dfrac{kE}{L}=0,0191.$ Тогда при начальных условиях $y_0=M_0=10; y_0'=-kI_0=-0,00381,$ приблизительное решение $y=10-0,00381t$.

Задача, общую постановку которой можно использовать в качестве индивидуальных домашних заданий, имеет вид: в некоторой емкости содержится *A* единиц вещества, растворенного в воде, объемом *B*. В единицу времени в емкость поступает вода в размере *M* единиц, и раствор вытекает в размере *N* единиц. Требуется определить массу вещества через Т единиц времени. Преподаватель поясняет только общий ход решения. Тогда, зная общее решение, а именно $x(T)=A\left(\dfrac{B}{B+(M-N)\cdot T}\right)^{\frac{N}{M-N}}$, можно задавать произвольные исходные данные для самостоятельного выполнения задания.

Также приведем пример из индивидуального домашнего задания по теории дифференциальных уравнений, связанного с гидродинамикой.

Задание. Диск, вращающийся в воде, медленно останавливается силой трения, пропорциональной угловой скорости. Пусть начальная угловая скорость 3 оборота секунду, а после одной минуты вращения 2 (об. /сек.) Найти угловую скорость через 3 минуты. Ответ: 8/9 (об. /сек.).

В качестве вывода, можно сказать следующее. Междисциплинарные связи теории дифференциальных уравнений и гидродинамики повышают наглядность изучаемого материала, показывают его связи с реальными практическими задачами, что, в свою очередь увеличивает мотивацию студентов и их успеваемость по обеим дисциплинам.

Библиографический список

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: учеб. пособие для вузов. 22-е изд., перераб. СПб.: Профессия, 2001. 432 с.

2. Биркгоф Г. Гидродинамика: Методы, факты, подобие. URL: http://sci.alnam.ru/book_gidro.php. (Дата обращения 10.04.2019).

3. Ларионов В. Введение в гидродинамику // URL: http://old.kpfu.ru/f6/bin_files/hydrodynamics!39.pdf. (Дата обращения: 11.04.2019)

4. Минаева А.М. Использование межпредметных связей в преподавании математики в техническом вузе. // Материалы VII Международной студенческой научной конференции «Студенческий научный форум» URL:https://scienceforum.ru/2015/article/2015015224. (Дата обращения: 07.09.2019).

5. Молекулярная физика и термодинамика – течение жидкости по трубе. URL: http://files.lib.sfu-kras.ru/ebibl/umkd/u_course/Lekc/Part2/Glava6/6.10.htm. (Дата обращения 10.04.2019).

6. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. 4-е изд. М.: Айрис-пресс, 2006. 608 с.: ил. (Высшее образование).

7. Навье-Стокса уравнения для идеальной жидкости // Справочник химика 21. Химия и химические технологии. URL: https://chem21.info/info/152122/. (Дата обращения 10.04.2019)

8. Энциклопедия по машиностроению XXL. Оборудование, материаловедение, механика и… URL: https://mash-xxl.info/info/687780/. (Дата обращения 10.09.2019).

Сведения об авторах:
Юлия Васильевна Никонорова
Служебный адрес: г. Волгодонск, ул. Ленина д.73/94.
E-mail: nikonorova2009@mail.ru.

Дмитрий Владимирович Швец
E-mail: svecdima6@gmail.com.