УДК 517.925.51

О. В. Опалихина
кандидат технических наук, доцент
Санкт-Петербургский государственный университет
аэрокосмического приборостроения, г. Санкт-Петербург, Россия

ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

Аннотация. В статье оценивается влияние инновационных форм обучения на формирование профессиональных компетенций выпускников технических вузов. С этой целью проводился мониторинг промежуточных аттестаций студентов старших курсов технических направлений, на начальном этапе обучения которых практические занятия сочетались с применением Wolfram технологий. Для мониторинга были выбраны направления, использующие при решении прикладных инженерных задач критерии математической теории устойчивости. По результатам мониторинга можно сделать вывод, что внедрение в учебный процесс на начальном этапе обучения Wolfram технологий помогает студентам получить фундаментальные логические знания, навыки математического моделирования и расчета, позволяющие сформировать профессиональные компетенции.

Ключевые слова: инновационные формы обучения; Wolfram технологии; фундаментальные логические знания; критерий устойчивости Ляпунова; критерий устойчивости Рауса-Гурвица; матрица Гурвица; оценка качества динамической системы.

DOI: 10.25206/2307-5430-2019-7-226-231

Формирование компетенций, которыми должны обладать выпускники технических вузов в результате освоения цикла профессиональных дисциплин, невозможно без фундаментальных логических знаний. Мониторинг итогов промежуточных аттестаций по техническим дисциплинам за последние пять лет показал, что лучшие результаты имеют студенты, имеющие навыки логического мышления, полученные при изучении математических дисциплин на младших курсах [1]. Формированию навыков логического мышления способствует внедрение в учебный процесс инновационных форм обучения, сочетающих курс лекций с интерактивной формой практических занятий, использующих современные информационные технологии. На базе компьютерного класса проводились практические занятия, на которых студенты направлений «Системы управления летательными аппаратами», «Авиационные приборы и измерительно-вычислительные комплексы», «Мехатроника и робототехника» при решении математических задач, а также задач теоретической и прикладной механики использовали пакет Wolfram Mathematica.

Математическая теория устойчивости используется в теоретической и прикладной механике. Без знания критериев устойчивости нельзя на старших курсах в полной мере изучить такие дисциплины, как «Основы автоматического управления», «Системы стабилизации, ориентации и навигации», «Мехатроника и робототехника».

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i\left(t, x_1, \ldots x_n\right), i = 1, 2, \ldots n. \quad (1)$$

Функции f_i (i=1,2,…,n) имеют непрерывные частные производные первого порядка. Пусть $x_i=x_i(t;t^0,x_1^0,\ldots,x_n^0)$, где i=1,2,…,n – решение системы (1) с начальными значениями x_i^0 при $t=t^0$, т. е. $x_i^0=x_i(t^0;t^0,x_1^0,\ldots,x_n^0)$. Каждое частное решение такой системы представляется как движение материальной точки в n-мерном пространстве.

Движение точки с координатами $x_i=x_i(t;t^0,x_1^0,\ldots,x_n^0)$ называется устойчивым по Ляпунову, если для каждого ε>0 можно найти такое δ>0, что для $\left|x_i^0 - \tilde{x}_i^0\right| < \delta,\ i = 1, \ldots n$ в интервале $t^0 \le t < \infty$ справедливо неравенство

$$\left|x_i\left(t; t^0, x_1^0, \ldots, x_n^0\right) - x_i\left(t; t^0, \tilde{x}_1^0, \ldots, \tilde{x}_n^0\right)\right| < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, n.$$

Известно, что решение $x_i=x_i(t;t^0,x_1^0,\ldots,x_n^0)$ рассматривается как невозмущенное, а $x_i = x_i\left(t; t^0, \tilde{x}_1^0, \ldots, \tilde{x}_n^0\right)$ - возмущенное движение. Сделав замену $x_i = \tilde{x}_i + x_i(t),$ здесь $x_i(t)=x_i(t;t^0,x_1^0,\ldots,x_n^0)$, i=1,2,…,n и введя новые координаты $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n$, получим уравнение невозмущенного движения в новых координатах $\tilde{x}_i(t) = 0.$ В преобразованной системе $\tilde{x}_i$ обозначим x_i.

Для правых частей системы справедливо равенство $f_i(t;0,\ldots,0)=0$ и система $\frac{dx_i}{dt} = f_i, i = 1, \ldots, n$ может быть записана как

$$\frac{dx_i}{dt} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \varphi_i(t; x_1, \ldots, x_n), a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\left(t; 0, \ldots, 0\right) = \text{const}, i = 1, \ldots, n. \quad (2)$$

В выражении (2) a_{ij} не зависит от времени. Получена линеаризованная по отношению к системе (2) система уравнений

$$\frac{dx_i}{dt}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, i = 1, ..., n. \tag{3}$$

Требуется исследовать устойчивость тривиального (нулевого) решения $\tilde{x}_i(t) \equiv 0, i = 1, ..., n$ по Ляпунову. Известно, что достаточное условие устойчивости тривиального (нулевого) решения дает следующая теорема [2,3]: 1) пусть все корни характеристического уравнения линеаризованной системы (3), т.е. корни уравнения $\det(a_{ij} - \lambda\delta_{ij})=0$ имеют отрицательную действительную часть, 2) все функции $\varphi_i(t; x_1,\ldots, x_n)$ удовлетворяют условию

$$\left|\varphi_i\left(t; x_1, ..., x_n\right)\right| \le M\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\}^{\frac{1}{2}+\alpha},$$

где M – определенным образом выбранная константа, $\alpha > 0$. Тогда тривиальное (нулевое) решение системы $\frac{dx_i}{dt} = f_i, i = 1, ..., n$ устойчиво.

При решении прикладных инженерных задач критерий устойчивости Ляпунова дополняется критерием устойчивости Рауса-Гурвица, позволяющим определить имеет ли характеристическое уравнение отрицательные вещественные корни. Согласно критерию Рауса-Гурвица для того, чтобы все корни характеристического уравнения имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы были положительными все главные диагональные миноры матрицы Гурвица. Критерий Рауса-Гурвица позволяет рассматривать только коэффициенты характеристического уравнения без вычисления корней: $f(\lambda)=a_0\lambda^n+ a_1\lambda^{n-1}+\ldots+ a_{n-1}\lambda+ a_n=0$ [2,3].

Исследуем устойчивость динамической системы, используя критерий Рауса-Гурвица (рис. 1).

Рис. 1. Структурная схема динамической системы

В нашем случае характеристическое уравнение имеет вид [4]

$$f(\lambda)=a_0\lambda^4+a_1\lambda^3+a_2\lambda^2+a_3\lambda^{+}a_4=0,$$

$$T_{\text{эм}}\cdot T_{\text{я}}\cdot T_{\text{у}}\cdot\lambda^4+T_{\text{эм}}\cdot(T_{\text{я}}+T_{\text{у}})\lambda^3+(T_{\text{эм}}+T_{\text{у}})\cdot\lambda^2+1\cdot\lambda+KD=0,$$

где $T_{\text{эм}}$, $T_{\text{я}}$, $T_{\text{у}}$ – электромеханическая и якорная (электромагнитная) постоянные времени двигателя и постоянная времени усилителя соответственно, с; KD – коэффициент передачи; $a_0= T_{\text{эм}}\cdot T_{\text{я}}\cdot T_{\text{у}}$, $a_1= T_{\text{эм}}\cdot (T_{\text{я}} + T_{\text{у}})$, $a_2= T_{\text{эм}}+ T_{\text{у}}$, $a_3=1$, $a_4=KD$.

Перед расчетом студенты вводят исходные данные в окно, которое появляется после запуска программы Wolfram Mathematica (рис. 2). После выполнения команд на экран выводится график, характеризующий качество исследуемой динамической системы (рис. 3)

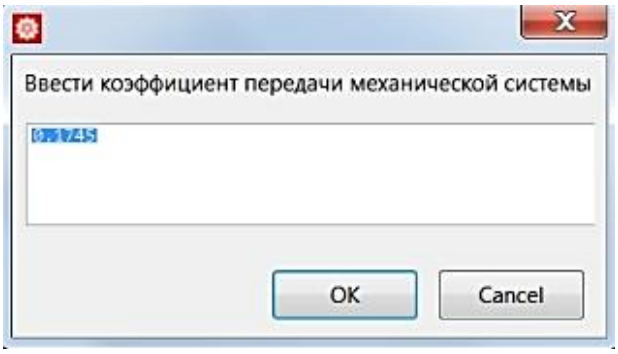

Рис. 2. Ввод исходных данных

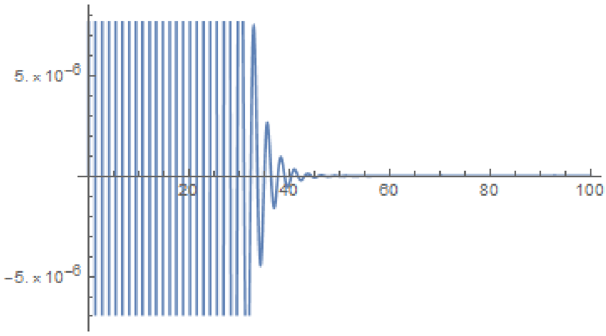

Рис. 3. Исследование качества динамической системы

При отсутствии русификации интерфейса Wolfram Mathematica имена функций можно задавать кириллицей, поставив им в соответствие оригинальные встроенные функции. Для этого сначала на русском языке создается список опций каждой встроенной функции, а затем задается соответствие русского названия встроенному аналогу: {Ввести=Input, переменная=equat, решение=solu, Решить уравнения=Solve, константа=cnst, привести=Reduce, Истина=True, Ложь=False, если=if, результат=result, Делай=Do, прервать цикл=Break, обратное преобразование Лапласа=Inverse Laplace Transform, Графика=Graphics, Линия=Line, Рамка=Frame->True, Оси=Axes->True, график=Plot};. Программа предусматривает расчет главных диагональных миноров матрицы Гурвица, проверку выполнения условий $\Delta_1>0$, $\Delta_2>0$, $\Delta_3>0$, $\Delta_4>0$, $a_3(a_1a_2-a_0a_3)> a_1^2\, a_4$:

$$\Delta 1=\text{a1},$$

$$\Delta 2=\begin{vmatrix}\text{a1a0}\\ \text{a3a2}\end{vmatrix},\ \text{Det}[\Delta 2],$$

$$\Delta 3 = \begin{vmatrix} a1 & a0 & 0 \\ a3 & a2 & a1 \\ 0 & a4 & a3 \end{vmatrix}, \text{Det}[\Delta 3],$$

$$\Delta 4 = \begin{vmatrix} a1 & a0 & 0 & 0 \\ a3 & a2 & a1 & a0 \\ 0 & a4 & a3 & a2 \\ 0 & 0 & 0 & a4 \end{vmatrix}, \text{Det}[\Delta 4],$$

$a3*(a1*a2-a0*a3)-a4*a1^2$

привести[$a3*(a1*a2-a0*a3)-a4*a1^2>0$]

Делай[результат={Δ1&&Det[Δ2]&&Det[Δ3]&&Det[Δ4]}]

результат

Делай[если[Δ1>0&&Det[Δ2]>0&&Det[Δ3]>0&&Det[Δ4]>0,

результат=Истина; прервать цикл[Δ1<0Or Det[Δ2]<0Or Det[Δ3]<0Or Det[Δ4]<0]]]

результат

обратное преобразование Лапласа[$K/((Tm*Tem*\lambda^2+Tem*\lambda+1)*\lambda*(Tu*\lambda+1)+K),\lambda,t$]

график[обратное преобразование Лапласа

[$K/((Tm*Tem*\lambda^2+Tem*\lambda+1)*\lambda*(Tu*\lambda+1)+K),\lambda,t],\{t,0,100\}$].

Мониторинг студентов старших курсов технических направлений показал, что сочетание традиционных форм обучения с применением Wolfram технологий позволяет в два раза сократить время, затрачиваемое студентами на выполнение расчетных заданий и курсовых работ, способствует формированию навыков логического мышления, умению решать прикладные инженерные задачи с использованием современных математических программных продуктов.

Библиографический список

1. Опалихина О.В. Математические методы решения прикладных инженерных задач //Актуальные проблемы преподавания математики в техническом вузе. 2018. № 6. С. 203-207.

2. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. М.: Либроком, 2012. 224 с.

3. Краснов М.Л., Кисилев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М.: Наука, 1981. 302 с.

4. Опалихина О.В. Исследование устойчивости замкнутой позиционной системы/О.В. Опалихина //Моделирование и ситуационное управление качеством сложных систем: сб. докл. научной сессии ГУАП (8–12 апр. 2019 г.). Санкт-Петербург: ГУАП, 2019. С. 70–77.

Сведения об авторе:
Ольга Викторовна Опалихина
Телефон: +7(981) 809-97-72. E-mail: sokosapsa@mail.ru.
Spin-code: 1355-3342.
Научные интересы: микромеханические датчики давления, вибродиагностика роторных систем, цифровая обработка механических колебаний.

УДК 378.147

С. Б. Патрушев
кандидат технических наук, доцент
Новосибирский государственный университет экономики и управления «НИНХ» (НГУЭУ), г. Новосибирск, Россия

РАСШИРЕНИЕ РАМОК МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ ИНЖЕНЕРОВ

Аннотация. Актуальность широкого включения математических структур, таких как: вещественная интервальная арифметика и теория нечетких множеств, в программы подготовки инженеров объясняется необходимостью применения приближенных вычислений при проектировании технических объектов высокой или очень высокой размерности. Целью работы является демонстрация применения указанных математических структур при проектировании систем электроснабжения промышленных предприятий, требующих учета расчетных коэффициентов, представленных или интервалами, или нечеткими понятиями. Приводятся результаты использования данных методов приближенных вычислений в некоторых сферах инженерной деятельности.

Ключевые слова: проектирование систем электроснабжения; математика в инженерном образовании; интервальная арифметика; нечеткие множества; лингвистическая переменная.

DOI: 10.25206/2307-5430-2019-7-231-236

Способы решения современных проблем математического образования инженеров неразрывно связаны с идеями основателей философии техники Ф.