Merrill, J. van Merrienboer, M.P. Driscoll (Eds.). New York: Taylor & Francis Group, 2008. Ch. 23. P. 269-276.

7. Juan A.A., Huertas M.A., Trenholm S., Steegmann C. Teaching mathematics online: emergent technologies and methodologies. Hershey: IGI Global, 2011. 414 p.

Сведения об авторах:
Артем Николаевич Семакин
Служебный адрес: 141282, Московская область, г. Ивантеевка, ул. Рощинская, д. 9, кв. 560.
E-mail: arte-semaki@yandex.ru. Spin-code: 2619-6278.

Дмитрий Михайлович Чирков
E-mail: chirkovdm@live.com. Spin-code: 6628-4919.

Галина Петровна Емгушева
E-mail: galina_emg@mail.ru. Spin-code: 8803-6341.

УДК 512.544.22

Н. И. Сидняев
доктор технических наук, профессор
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ ОБОСНОВАНИИ СВЯЗИ ГОМОМОРФИЗМОВ С ОТНОШЕНИЕМ КОНГРУЭНТНОСТИ

Аннотация. В статье излагаются методологические аспекты, касающееся связи гомоморфизмов с отношением конгруэнтности, которое хорошо известно для общих алгебраических систем и может быть установлено непосредственно для алгебраических моделей различных типов. Показана тесная связь гомоморфизмов с отношением конгруэнтности. Отношение эквивалентности на множестве трактуется как рефлексивное, симметричное и транзитивное бинарное отношение, для которого N является как областью определения, так и областью значений. Для каждого такого отношения R существует разбиение множества N на непересекающиеся подмножества, причем два элемента принадлежат одному и тому же подмножеству тогда и только тогда, когда эти элементы находятся в отношении R. Предполагается, что подмножество, содержащее элемент x, является множеством эквивалентности элемента x относительно R. Бинарное отношение постулируется рефлексивным и транзитивным.

Материал будет полезен для преподавателей и методистов и может быть востребован для специальных кафедр технических вузов.

Ключевые слова: методология; гомоморфизм; конгруэнтность; индукция; эквивалентность.

DOI: **10.25206/2307-5430-2019-7-281-287**

Существует важное обстоятельство, касающееся гомоморфизмов, которое хорошо известно для общих алгебраических систем и может быть установлено непосредственно для моделей, составляющих объект нашего исследования [1-3]. Это тесная связь гомоморфизмов с отношением конгруэнтности. Под отношением конгруэнтности для модели $\mathcal{N} = <N, 0, S>$ будем подразумевать такое отношение эквивалентности R на множестве N что из xRy следует $(Sx)R(Sy)$. Отношение эквивалентности на множестве N- это такое рефлексивное, симметричное и транзитивное бинарное отношение R, для которого N является как областью определения, так и областью значений. Для каждого такого отношения R существует разбиение множества N на непересекающиеся подмножества, причем два элемента принадлежат одному и тому же подмножеству тогда и только тогда, когда эти элементы находятся в отношении R (это весьма простое обстоятельство имеет чисто теоретико-множественный характер) [1]. Подмножество, содержащее элемент x, является множеством эквивалентности элемента x относительно R, обозначим его через xR. Бинарное отношение xRy будет рефлексивным, если имеет место xRx, симметричным, если из xRy следует yRx, и транзитивным, если из xRy и yRz следует xRz. Приведем простой пример отношения конгруэнтности. Пусть N – множество целых чисел, $Sx = x+m$ (m – некоторое целое число), а отношение xRy есть сравнимость x и y по модулю p ($x \equiv y \pmod p$). Тогда 1) $x \equiv x \pmod p$, 2) если $x \equiv y \pmod p$, то $y = x \pmod p$, 3) если $x \equiv y \pmod p$ и $y \equiv z \pmod p$, то $x \equiv z \pmod p$, и, наконец, 4) если $x \equiv y \pmod p$, то и $x + m \equiv y + m \pmod p$. Следовательно, сравнимость двух чисел есть отношение конгруэнтности. Этот пример является частным случаем более общего соотношения конгруэнтности в множестве натуральных чисел [3,4].

Предположим h – любой гомоморфизм модели $\mathcal{N}$ в некоторую другую модель, тогда отношение R_h такое, что для любых $x, y \in N$ м имеем xR_hy в том и только в том случае, когда $hx = hy$ является отношением конгруэнтности. Обратно для каждого отношения конгруэнтности R в модели $\mathcal{N}$ существует гомоморфизм h, отображающий $\mathcal{N}$ на некоторую другую модель $\mathcal{N}_R$ так, что $R_h = R$. Чтобы по заданным модели $\mathcal{N}$ и отношению конгруэнтности R построить модель $\mathcal{N}_R$, возьмем для каждого элемента $x \in N$ все эквивалентные ему элементы: они образуют некоторый класс эквивалентности x_R. Множество этих классов для всех $x \in N$ примем в качестве множества N_R, а в качестве операции S_R – такую, что $S_R x_R = (Sx)_R$ для всех

$x \in N$ и $x \in x_R$ (существование этой операции следует из того, что R – отношение конгруэнтности на N), и положим $\mathcal{N}_R$ = <N_R, 0_R, S_R>.

Если мы определим h как функцию, отображающую N на N_R и такую, что $hx = x_R$ для всех $x \in N$, то легко увидим, что h есть гомоморфизм $\mathcal{N}$ на $\mathcal{N}_R$ и что $R_h = R$ (т. е. из xRy следует $hx = hy$ и обратно). Если h_1 и h_2 – гомоморфизмы $\mathcal{N}$ соответственно на модели $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$ и если $R_{h_1} = R_{h_2}$, $Sx \in N$ изоморфны. Отсюда следует, что каждый гомоморфный образ модели $\mathcal{N}$ изоморфен одной из моделей $\mathcal{N}_\mathrm{R}$, определенных некоторым [1] отношением конгруэнтности R на N. Следовательно, *каждая индукционная модель изоморфна модели $\mathcal{N}_R^*$, определенной некоторым отношением конгруэнтности R в системе $\mathcal{N}^*$ натуральных чисел.*

Таким образом, можно дать явное описание всех отношений конгруэнтности на модели $\mathcal{N}^*$ в терминах известного отношения порядка – отношения «меньше» на $\mathcal{N}^*$. Это отношение порядка можно ввести внутри аксиоматической теории N^* (т. е. в теории моделей Пеано), положив по определению, что $x < y$ тогда и только тогда, когда существует элемент $z \neq 0$, для которого $x + {}^*z = y$. Так как каждая индукционная модель обладает функцией сложения, то можно воспользоваться этим определением, чтобы определить отношение «меньше» в каждой индукционной модели, но в общем случае отношение, полученное таким образом, не будет отношением порядка [4-6]. Именно, пусть m, n – любые элементы множества N^* натуральных чисел. Определим отношение конгруэнтности $R_{m,n}$ на N^* посредством следующего правила: $xR_{m,n}y$ тогда и только тогда, когда справедливо одно из следующих двух условий:

1) $x, y < n$ и $x = y$;

2) $x, y \geq n$ и для некоторого $z \in N^*$ имеет место либо $x = y +^* (z \times^* m)$, либо $y = x +^* (z \times^* m)$.

Таким образом, бинарное отношение R на множестве N^* является отношением конгруэнтности в модели $\mathcal{N}^*$ тогда и только тогда, когда оно либо является отношением тождества в $\mathcal{N}^*$, либо существуют числа m, $n \in N^*$, такие, что $R = R_{m,n}$. Если R отношение конгруэнтности, отличное от отношения тождества, то должен существовать хотя бы один $x \in N^*$, такой, что xRy для некоторого $y \neq x$. Выберем в качестве n наименьшее из этих чисел x. Из выбора n следует, что имеются числа $z \neq 0$, такие, что $nR(n +^* z)$; выберем m наименьшим из этих чисел z. Тогда можно показать, что $R = R_{m,n}$.

Отношения конгруэнтности $R_{\mathrm{m},0}$ являются так называемыми «конгруэнтностями по модулю», хорошо изученными в теории чисел, где принято писать $x \equiv y \pmod{m}$ вместо $xRm,0y$. Индукционная модель $\mathcal{N}^*_{\mathrm{R}_{\mathrm{m},0}}$, соответствующая такому отношению, есть просто система классов вычетов по модулю m, а операции сложения и умножения в этой модели являются обычными операциями $+ \pmod{m}$ и $\times \pmod{m}$. Отношение конгруэнтности $R_{m,n}$ для $n>0$, по-видимому, мало отражено в литературе; однако достаточно небольшого размышления, чтобы читатель мог получить ясное интуитивное представление о моделях $\mathcal{N}^*_{\mathrm{R_{m,n}}}$, так же как и о соответствующих операциях сложения и умножения. Между прочим, очевидно, что если R одно из «модулярных» отношений конгруэнтности $R_{m,0}$, то S^*_{R} является перестановкой элементов N^*_{R}, так что $\mathcal{N}^*_{\mathrm{R}}$ в этом случае удовлетворяет условиям для всех $x,y \in N$, если $x \neq y$, то $Sx \neq Sy$. С другой стороны, если R – одно из отношений конгруэнтности $R_{m,n}$ для $n>0$, то ясно, что $0^*_{\mathrm{R}} \neq \mathrm{S}^*_{\mathrm{R}}\mathrm{x}_{\mathrm{R}}$ для всех $x_R \in \mathrm{N}^*_{\mathrm{R}}$, так что $\mathcal{N}^*_{\mathrm{R}}$ удовлетворяет в этом случае для всех $x \in N$ $Sx \neq 0$. Таким образом, каждая индукционная модель удовлетворяет для всех $x \in N$ $Sx \neq 0$ или $x,y \in N$, если $x \neq y$, при $Sx \neq Sy$.

Рассмотрим случай, когда f любая операция на N^*, для определенности бинарная операция. Если R есть произвольное отношение конгруэнтности на $\mathcal{N}^*$, то, вообще говоря, не существует ни одной бинарной операции g на N^*_{R}, которая является гомоморфным образом f при гомоморфизме h, соответствующем R. Нетрудно видеть, что необходимым и достаточным условием для существования такой гомоморфной операции g служит то, что для всех x, x_1, y, $y_1 \in N^*$, таких, что xRx_1 и yRy_1 имеет место условие (fxy) $R(f\mathrm{x}_1\mathrm{y}_1)$. Если это условие справедливо, то g есть такая операция на N^*_R, что $gx_Ry_R = (fxy)_R$ для всех $x, y, \in N^*$.

Например, хотя $2 \equiv 2 \pmod 3$ и $0 \equiv 3 \pmod 3$, мы имеем $2^0 \not\equiv 2^3 \pmod 3$. Следовательно, операция возведения в степень в N^* не имеет гомоморфного образа в $\mathrm{N}^*_{3,0}$. С другой стороны, $+^*$ и $\times^*$ суть примеры так называемых *универсальных (бинарных) операций* на N^*, т. е. они являются операциями f, обладающими тем свойством, что для любого отношения конгруэнтности R на N^* (fxy) $R(fx_1y_1)$, если x, y, x_1, y, – такие элементы N^*, что xRx_1 и yRy_1. Таким образом можно назвать f модулярной операцией, если она обладает этим свойством для всех модулярных отношений конгруэнтности R (и не обязательно для других отношений конгруэнтности). Именно в силу этого обстоятельства каждая индукционная модель обладает операциями сложения и умножения. Если операция j на N^* получена путем примитивной рекурсии, то необходимо отметить, что она получена из f и g путем простейшей рекурсии.

Вообще, n операцию j (при любом n= 1, 2,…) можно получить из (n — 1) операции f и (n + 1) операции g (случай n = 2 здесь представлен только для краткости, так как идея доказательства одна и та же при любом n. Ясно, что приведенное выше определение универсальных бинарных операций без труда переносится и на случай n операций, где n любое из универсальных операций f и g; является ли эта операция j обязательно универсальной. Пример операции возведения в степень показывает, что это может не иметь места. Однако если j окажется коммутативной, то она будет универсальной: это может быть показано путем обобщения доказанных известных теорем [2–4]. Таким образом, вследствие некоммутативности операции возведения в степень на множестве N^* натуральных чисел невозможно вывести существование операции возведения в степень в каждой индукционной модели путем соответствующего распространения доказательства теоремы [7].

Конечно, при высказанных условиях коммутативность, достаточная для универсальности, ни в коем случае не является необходимой. Например, операция j, такая, что jxy = $x^{г} \times y$ для всех x, y ∈N*, есть универсальная операция, и она получается путем примитивной рекурсии из универсальных функций f, g, таких, что fx = 0 и gxyz = $z+x^2$ для всех x, y, z∈N*, но j не коммутативна.

Необходимо отметить, что основанием для определения по математической индукции в модели $\mathcal{N}$ является существование единственного гомоморфизма $\mathcal{N}$ в какую-нибудь другой модели, так, например, для всех определений по математической индукции для моделей Пеано [3, 5].

Так, например, система из пяти аксиом Пеано для натурального ряда N и функции S формулируется так:

(1) $0 \in N$;

(2) $x \in N \to Sx \in N$;

(3) $x \in N \to Sx \neq 0$;

(4) $x \in N \wedge y \in N \wedge Sx = Sy \to x = y$;

(5) $0 \in M \wedge \forall x(x \in M \to \wedge Sx \in M) \to N \subseteq M$ для любого свойства M (аксиома индукции).

В первом варианте вместо 0 использовалась 1. Эти аксиомы категоричны, т.е. любые две системы (N, S, 0) и (N', S', 0'), удовлетворяющие аксиомам Пеано, изоморфны. Как известно изоморфизм определяется функцией $f(x,x)$ [5], где

$$f(0,0)=0',\ f(Sx,Sx)=S'f(x,x);\ f(x,Sy)=f(x,y);\ f(x,y)=0 \text{ для } y<x.$$

Существование $f(x,y)$ для всех пар (x,y) и взаимная однозначность при $x \leq y$ доказываются по индукции. Аксиомы Пеано позволяют развить теорию чисел, в частности ввести обычные арифметические функции и доказать их свойства. Все аксиомы независимы, однако (3) и (4) можно объединить в одну:

$$x \in N \wedge y \in N \wedge x < y \to x \neq y,$$

если определить $x < y$ как

$$\forall M[M(Sx) \wedge \forall z M(z) \to M(Sz)) \to M(y)].$$

Независимость доказывается предъявлением модели, в которой верны все аксиомы, кроме рассматриваемой. Для (1) такая модель – натуральный ряд, начиная с единицы; для (2) -множество $N \cup \{1/2\}$, где $S(0)=1/2$, $S(1/2)=1$; для (3) -множество $\{0\}$; для (4) -множество $\{0,1\}$; для (5) -множество N {-1}.

За арифметику Пеано можно принять в языке первого порядка с функциональными символами S,+, $\times$, состоящую из аксиом:

$$Sx \neq 0, \;\; Sx = Sy \rightarrow x = y,$$

определяющих равенств для +, $\times$ и схемы индукции

$$A(0) \wedge \forall x (A(x) \rightarrow A(Sx)) \rightarrow \forall x A(x).$$

Оказывается, эти свойства характерно для моделей Пеано-редких моделей, в которых все определения по математической индукции могут быть обоснованы. Здесь полезно привести такую теорему:

Теорема. Пусть $\mathcal{N}$ *– такая модель, что для любой модели* $\mathcal{N}_1$ *имеется единственный гомоморфизм* h, *преобразующий модель* $\mathcal{N}$ *в* $\mathcal{N}_1$. *Тогда* $\mathcal{N}$ *есть модель Пеано.*

Рассмотрим доказательство. Пусть $\mathcal{N}$ = <*N*, 0, *S*> удовлетворяет условию теоремы и, если *G* – подмножество множества N, такое, что $0 \in G$ и всякий раз, когда $x \in G$, также и $Sx \in G$, то $G=N$. По терминологии теории множеств, соответственно выражают условия, что 0 не принадлежит области значений *S* и что операция *S* взаимно-однозначна. О подмножестве *G* из *N*, говорят, что оно замкнуто относительно *S*. Если рассматривать <*N, S*> в качестве алгебраической системы, то подмножество *G* из *N*, замкнутое относительно *S*, будет подалгеброй системы. Отсюда следует, что единственная подалгебра <*N, S*>, содержащая элемент 0, есть само *N*. В алгебраической терминологии это условие формулируется так: элемент 0 порождает алгебру <*N,S*>. Можно также рассматривать саму систему <*N*, 0, *S*> в качестве алгебраической системы. В этом случае, чтобы подмножество *G* из *N* рассматривалось как подалгебра [6], оно должно содержать 0 и быть замкнутым относительно S. Таким образом, единственной подалгеброй из <*N*, 0, *S*> является само *N*. С этой целью допустим, что *G* – любое подмножество *N*, которое содержит 0 и замкнуто относительно *S*. Допустим *H*—дополнение подмножества *G* (в множестве *N*) и, что *H* непусто. Рассмотрим взаимно однозначное отображение k множества *H* на множество *P,* не пересекающееся с *N,* и обозначим через *M* объединение множеств *N* и *P.*

Далее используем унарную операцию, когда *N*-функция, имеющая *N* в качестве своей области определения, область значений которой является подмножеством множества *N*. Для любого $x \in N$ Sx означает элемент из *N*, полученный применением операции *S* к *x*. Определим унарную операцию *T* на *M* следующим образом:

1) если $x \in N$, то $Tx = Sx;$

2) если $x \in H$ *и* $Sx \in H$, *то* $T(kx) = k\{Sx);$

3) если $x \in H$ и $Sx \in G$, то $T(kx) = Sx.$

Пусть $\mathcal{M}$ — модель $\langle M, 0, T\rangle$. Ясно, что отображение h_1 множества N в M, такое, что $h_1x = x$ для всех $x \in N$, является гомоморфизмом $\mathcal{N}$ в $\mathcal{M}$. С другой стороны, рассмотрим следующее отображение h_2 множества N в M:

1) если $x \in G$, то $h_2x = x$;

2) если $x \in H$, то $h_2x = kx$.

Нетрудно видеть, что h_2 также является гомоморфизмом и h_2 отлично от h_1. Но, это противоречит условию теоремы, и следовательно, не верно допущение, что H непусто. Итак, H пусто, т. е. $G=N$. Поэтому модель $\mathcal{N}$ должна быть индукционной.

В заключение можно отметить, что существует гомоморфизм h' модели $\mathcal{N}^*$ на $\mathcal{N}$. С другой стороны, условие нашей теоремы утверждает, что имеется гомоморфизм h модели $\mathcal{N}$ в $\mathcal{N}^*$. Как и в доказательстве теоремы, можно рассмотреть сложную функцию (hh'), которая является гомоморфизмом $\mathcal{N}^*$ в себя и, следовательно, должна быть тождественной операцией на $\mathcal{N}^*$. Стало быть, гомоморфизм h' взаимно однозначен и поэтому является изоморфизмом $\mathcal{N}^*$ на $\mathcal{N}$.

Эта идея может быть успешно реализована на адаптационных занятиях по математике в техническом вузе и при изучении синтетического, аналитического методов, а также метода от противного.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 19-11-00230.

Библиографический список

1. Соломинский И.С. Метод математической индукции. М.: Наука. 1974. 63 с.

2. Томашпольский В.Я., Сидняев Н.И. О математике, математиках и кафедре «Высшая математика»/ Под ред. Н.И.Сидняева. Москва: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. 258 с.

3.Генкин Л. О математической индукции / Пер. с англ. М.Д. Гриндлингера, под ред. И .М. Яглома. М.: Физматлит, 1962. 36 с.

4. Вавилов В.В. и др. Задачи по математике / Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. М.: Наука, 1987. 396 с.

5. Виленкин Н.Я. Индукция. Комбинаторика: пособие для учителей. М.: Просвещение, 1976. С. 4–18.

6. Головина Л.И., Яглом И.М. Индукция в геометрии. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1956.100 с.

7. Соломинский И.С., Головина Л.И., Яглом И.М. О математической индукции. М.: Наука, 1967. С.7-59.

Сведения об авторе:

Николай Иванович Сидняев

Служебный адрес: 119633 г. Москва, ул. Чоботовская д.17, кв. 58. Тел. для связи 89629959830, раб. 84992636392.

E-mail: sidn_ni@mail.ru. Spin-code: 8742-8182.