УДК 518.12

С. К. Соболев
кандидат физико-математических наук, доцент
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия

НЕКОТОРЫЕ ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ В ОБЩЕМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Аннотация. Обсуждается роль прикладных задач в математических дисциплинах младших курсах в техническом университете. Рассматриваются автономные системы дифференциальных уравнений второго порядка, описывающих движение с трением, для которых закон сохранения механической энергии уже не выполняется. Однако первый интеграл такой системы можно рассматривать как некий закон сохранения. Разбирается задача о явлении резонанса для устоявшихся вынужденных колебаний механического амортизатора и электрического контура. Рассматриваются случаи, когда при определенном соотношении между параметрами контура резонанс возможен или невозможен.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение; автономная система; первый интеграл; закон сохранения; резонанс; вынужденные колебания.

DOI: **10.25206/2307-5430-2019-7-293-299**

Введение. При составлении планов и рабочих программ математических дисциплин возникает вопрос о месте и объеме рассматриваемых прикладных задач, т.е. задач практического содержания. Мало научить вычислять тот или иной интеграл, этот интеграл надо ещё составить. Преподаватели «чистых» математических дисциплин младших курсов часто спорят об этом. Одни считают, что прикладным задачам не место в традиционных математических дисциплинах, а прикладные задачи пусть разбирают преподаватели инженерных дисциплин. Другие считают, что прикладные задачи обязательно следует рассматривать в каждом разделе математических дисциплин. Собственно, изучая то и или иное математическое понятие, например, интеграл, студентам надо научиться чётко отвечать на четыре вопроса: (1) что это такое, т.е. точное определение; (б) какими свойствами оно обладает; (3) как это находить, т.е. способы его вычисления, и самое главное (4) зачем оно надо, т.е. каковы геометрические и физические применения.

Мы, безусловно считаем необходимым включения прикладных задач в программы общих математических курсов, и хотели бы подробно рассмотреть два примера, иллюстрирующих этот тезис, и которые стоило бы разобрать со студентами в разделе «дифференциальные уравнения».

1. Первый интеграл как закон сохранения. Законы сохранения играют исключительно важную роль в физике: это законы сохранения энергии, массы, импульса и т.д. [1, 2, 4, 7, 8]. Многие из этих законов получаются как первые интегралы. В частности, в замкнутых механических системах без трения выполняется закон сохранения механической (кинетической плюс потенциальной) энергии. При наличии трения это уже не так. Однако и при наличии трения можно найти величину, зависящую только от скорости и положения тела, сохраняющуюся во времени – это первый интеграл системы дифференциальных уравнений, описывающих движение тела.

Пример 1. Тело массой *m* падает с высоты *H*, с начальной нулевой скоростью, сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости: $F = kv^2$ (коэффициент k известен), $h = h(t)$ – высота тела в момент времени *t*. Тогда $v = -\dfrac{dh}{dt}$, $m \cdot \dfrac{dv}{dt} = -kv^2 + mg$

Имеем автономную систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dh}{dt} = -v; \quad \frac{dv}{dt} = g - \frac{kv^2}{m}. \tag{1}$$

Заметим, что все время падения $v > 0$ и $\dfrac{dv}{dt} > 0 \;\Rightarrow kv^2 < mg$. Для нахождения первого интеграла этой системы избавимся от *t*, поделив одно уравнение на другое, получим уравнение первого порядка

$$\frac{dh}{dv} = \frac{mv}{kv^2 - mg} \tag{2}$$

которое легко интегрируется:

$$h = \frac{m}{2k}\ln\left|kv^2 - mg\right| + C = \frac{m}{2k}\ln\left(1 - \frac{kv^2}{mg}\right) + C_1.$$

Получаем первый интеграл

$$G_1(h, v) \equiv h - \frac{m}{2k}\ln\left(1 - \frac{kv^2}{mg}\right) = const. \tag{3}$$

Поскольку для любых решений $x = x(t),\; v = v(t)$ системы (1)

$$h(t) - \frac{m}{2k}\ln\left(1 - \frac{k\,v^2(t)}{mg}\right) = const$$

его можно рассматривать как некий закон сохранения. Подставив начальные значения $h_0 = H, v_0 = 0$ получим $const = H$.

Учитывая, что $\ln(1+x) \approx x$ при малых x, получим, что при небольших скоростях и достаточно малом коэффициенте сопротивлении воздуха

$$G_1(h,v) \approx h - \frac{m}{2k}\left(-\frac{kv^2}{mg}\right) = \frac{1}{mg}\left(mgh + \frac{mv^2}{2}\right) = const.$$

Это знакомый закон сохранения механической энергии. Заметим, что при полном отсутствии сопротивления воздуха ($k = 0$) уравнение (2) принимает вид $\frac{dh}{dv} = -\frac{v}{g}$. Оно приводит первому интегралу $gh + \frac{v^2}{2} = const$, выражающему все тот же закон сохранения механической энергии.

Целесообразно предложить студентам самим найти закон сохранения (первый интеграл) в той же задаче (с учетом сопротивления воздуха), но при движении тела от земли вертикально вверх с начальной скоростью v_0.

Ответ: $G_2(h,v) \equiv h + \frac{m}{2k}\ln\left(1 + \frac{kv^2}{mg}\right) = const$.

2. Явление резонанса. Резонанс – это значительное увеличение амплитуды вынужденных колебаний системы при определенном изменении некоторых параметров, как правило, частоты этих колебаний. Явление резонанса – одно из важнейших в физике и технике. Оно встречается в электронике, акустике, оптике, химии и медицине [3, 5, 6, 9, 10, 11]. Студенты должны хорошо понимать математическую «подоплёку» этого явления. Кроме того, они могут попутно знакомиться с двумя совершенно разными физическими системами, имеющими одинаковую математическую модель.

Пример 2. Рассмотрим механический амортизатор, состоящий из массы m, пружины жесткостью k и демпфера вязкостью n (коэффициент пропорциональности между трением и скоростью). К массе приложена внешняя периодическая сила $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$ с частотой ω, см. Рис.1. Пусть x – отклонение положения массы от равновесия, $v = \frac{dx}{dt}$ – её скорость. По второму закону Ньютона, $m \cdot \frac{dv}{dt} = F(t) - k \cdot x - n \cdot v$, откуда получаем неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + n \cdot \frac{dx}{dt} + k \cdot x = F_0 \sin \omega t. \qquad (4)$$

Аналогичная математическая модель описывает полный электрический контур, состоящий из соединённых последовательно резистора с сопротивлением R, конденсатора ёмкостью C, катушки индуктивностью L и внешним подключенным переменным напряжением $E(t) = E_0 \sin(\omega t)$, Рис. 2. Падение напряжения ΔU на резисторе, катушке и конденсаторе описывается формулами $\Delta U_1 = R \cdot J$, $\Delta U_2 = L\dfrac{dJ}{dt}$, $\Delta U_3 = \dfrac{Q}{C}$ соответственно, где $Q = Q(t)$ – заряд на пластинах конденсатора, $J(t) = \dfrac{dQ}{dt}$ – электрический ток в цепи в момент времени *t*.

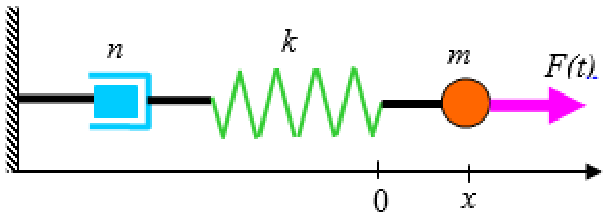

Рис. 1. Механический амортизатор

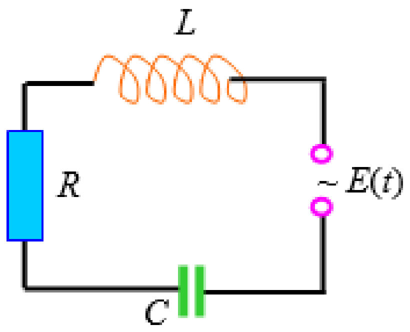

Рис. 2. Электрический контур

Получим такое уравнение, полностью аналогичное (4):

$$L \cdot \frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E_0 \sin \omega t. \qquad (5)$$

Таблица соответствия

m	*n*	*k*	*x*	*v*
L	*R*	1/*C*	*Q*	*J*

Общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + n \cdot \frac{dx}{dt} + k \cdot x = 0$$

(собственные колебания) имеет следующий вид в зависимости от корней характеристического уравнения $m\lambda^2 + n\lambda + k = 0$ с коэффициентами *m*, *n*, *k* > 0: либо $x_{oo}(t) = C_1 t^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}$, где $\lambda_{1,2} < 0$ вещественны и различны; либо $x_{oo}(t) = t^{\alpha t}(C_1 + C_2 t)$, где $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha$ и α вещественно и отрицательно; либо $x_{oo}(t) = t^{\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)$, где $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ комплексные и $\alpha < 0$.

Заметим, что во всех случаях собственные колебания со временем затухают:

$$\lim_{t \to +\infty} x_{oo}(t) = 0. \qquad (6)$$

Любое решение неоднородного уравнения (4) имеет вид $x(t) = x_{oo}(t) + x_{чн}(t)$, где $x_{чн}(t)$ – какое-нибудь частное решение уравнения (4). Из (6) вытекает, что при больших значениях времени t устоявшиеся колебания системы будут практически совпадать с вынужденными: $x(t) \approx x_{чн}(t)$, где

$$x_{чн} = A \cdot \cos \omega t + B \cdot \sin \omega t. \tag{7}$$

Нам нужна амплитуда $D = \sqrt{A^2 + B^2}$. Подстановкой (7) в (4) находим

$$B = \frac{(k - m\omega^2)F_0}{(k - m\omega^2)^2 + n^2\omega^2}, \; A = \frac{-n\omega F_0}{(k - m\omega^2)^2 + n^2\omega^2}, \; D = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + n^2\omega^2}}.$$

Амплитуда вынужденных колебаний зависит от частоты ω:

$$D = D(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{f(\omega)}},$$

где $f(\omega) = \left(k - m\omega^2\right)^2 + n^2\omega^2 = m^2\mu^2 + \left(n^2 - 2mk\right)\mu + k^2 = g(\mu)$, $\mu = \omega^2 > 0$ (при прочих постоянных параметрах). Резонансом называется достижение максимума амплитуды $D(\omega)$ при определенном значении частоты $\omega = \omega_0$.

Случай 1) $n^2 - 2mk \ge 0 \Leftrightarrow n \ge \sqrt{2mk}$ (большое трение), тогда функция $g(\mu)$ возрастает на $[0; +\infty)$ и минимум достигается при $\mu = 0 \Rightarrow \omega = 0$. Этот случай физически не интересен, **резонанс вырожденный:** $D_{\max} = \dfrac{F_0}{\sqrt{g_{\min}}} = \dfrac{F_0}{k}$.

Случай 2) $n^2 - 2mk < 0 \Rightarrow n < \sqrt{2mk}$ (маленькое трение), тогда минимум квадратичной функции $g(\mu)$ достигается при $\omega^2 = \mu = \dfrac{2mk - n^2}{2m^2} > 0$ т.е. при $\omega = \dfrac{\sqrt{mk - \dfrac{n^2}{2}}}{m} = \omega_0$ – резонансная частота, при этом максимальное значение амплитуды равно $D_{\max} = \dfrac{F_0}{\sqrt{g_{\min}}} = \dfrac{2mF_0}{b\sqrt{4mk - n^2}}$

В случае полного электрического контура, невырожденный резонанс наблюдается при $R < \sqrt{\dfrac{L}{2C}}$ для резонансной частоты $\omega_0 = \dfrac{1}{L}\sqrt{\dfrac{2L - CR^2}{2C}}$, и максимальная амплитуда равна $D_{\max} = \dfrac{2LE_0\sqrt{C}}{R\sqrt{4L - CR^2}}$.

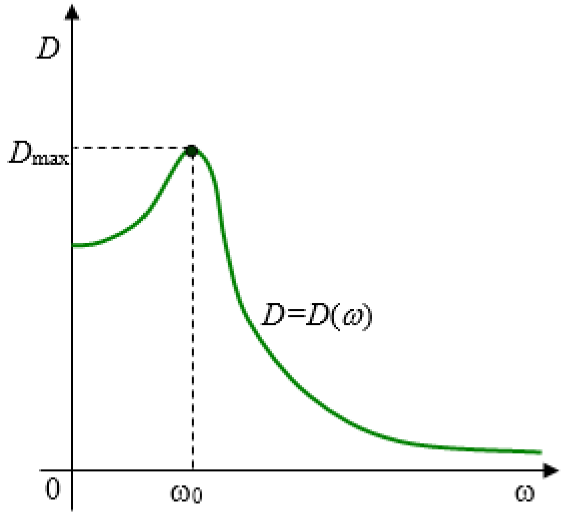

Рис. 3. Зависимость амплитуды устоявшихся вынужденных колебаний от их частоты

Представляет интерес нахождение резонанса, т.е. максимума амплитуды *D*, если переменной считать ёмкость *C* (а не частоту ω), а все остальные параметры постоянны. Он достигается при $C = \dfrac{1}{L\omega^2}$ и равен $D_{\max} = \dfrac{L_0}{R\omega}$.

Библиографический список

1. Вигнер Э. Инвариантность и законы сохранения. Этюды о симметрии: пер. с англ. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 318 с.

2. И. Е.Иродов. Механика. Основные законы: учеб. пособие для вузов. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. 309 с.

3. Квашнин С. Е., Максимов А. А. Проход через резонанс ультразвукового ланжевенового преобразователя для хирургии // Биомедицинская радиоэлектроника. 2012. № 10. С. 38-44.

4. Розенблат Г. М. Первые интегралы и их применение при решении задач механики. М.: Едиториал УРСС, 2003. 24 с.

5. Сергеев Н. А., Рябушкин Д. С. Основы квантовой теории ядерного магнитного резонанса. М.: Логос, 2013. 270 с.

6. Тимофеев А. В. Резонансные явления в колебаниях плазмы. М.: Физматлит, 2009. 295 с.

7. Тупчиев В. А. Обобщенные решения законов сохранения. М.: Физматлит, 2006. 227 с.

8. Фистуль В. И. Фундаментальные законы классической физики. М.: Физматлит, 2002. 130 с.

9. Фримэн Р. Магнитный резонанс в химии и медицине; пер. с англ. М.: URSS: КРАСАНД, 2009. 331 с.

10. Харланов А. В. Пространственно-временной резонанс // Биомедицинская радиоэлектроника. 2008. № 4. С. 24-30.

11. Широносов В. Г. Резонанс в физике, химии и биологии. Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 2000. 92 с

Сведения об авторе
Сергей Константинович Соболев
Служебный адрес: г. Москва, 105005, Рубцовская набережная, 2/18, кафедра «Высшая математика».
E-mail: sergesobolev@mail.ru. Spin-code: 4523-3619.

УДК 378.147

М. Н. Сомова
старший преподаватель
О. М. Беличенко
старший преподаватель
Сибирский государственный университет науки и технологий
имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск, Россия

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ОБУЧЕНИИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Аннотация. Формирование у будущих бакалавров инженерных направлений подготовки компетенций, предусмотренных федеральным государственным образовательным стандартом, требует совершенствования образовательного процесса. Введение в процесс обучения теории вероятностей элементов компьютерного моделирования способствует формированию статистического мышления, необходимого для критического анализа и системного подхода при решении задач прикладного характера. Цель работы - показать возможности использования компьютерного статистического моделирования в обучении теории вероятностей студентов с целью формирования статистического стиля мышления. Приводятся примеры компьютерных статистических моделей опытов с бросанием монеты и анализ этих моделей.

Ключевые слова: теория вероятностей; математическая статистика; компьютерное моделирование; компьютерная статистическая модель; образование; статистическое мышление.

DOI: 10.25206/2307-5430-2019-7-299-303

Федеральные государственные образовательные стандарты нового поколения направлений подготовки 09.03.04 "Программная инженерия" требуют от