УДК 514

В.В. Гарбарук[1]
кандидат технических наук, доцент
В.А. Семенов[2]
старший преподаватель
У.В. Терентьева[1]
студент
[1]Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I, г. Санкт-Петербург, Россия
[2]Балтийский государственный технический университет ("Военмех") имени Д.Ф.Устинова, г. Санкт-Петербург, Россия

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Аннотация. Представлены темы и структура единого задания по математике и начертательной геометрии, предлагаемого кафедрой «Высшая математика» ПГУПСа студентам первого курса. Такое задание повышает уровень знаний студентов по указанным дисциплинам и помогает приобретению навыков выбора оптимального способа решения различных задач. Подробно рассмотрено решение задачи о взаимном расположении двух прямых, заданных координатами четырех точек. Показано, что ранг, составленной из координат точек, определяет расположение четырех точек на следующих геометрических объектах: точка, прямая, плоскость, пространство.

Ключевые слова: методология обучения; линейная алгебра; аналитическая геометрия; начертательная геометрия; единое задание.

DOI: 10.25206/2307-5430-2020-8-69-74

Формирование у студентов навыков приложения знаний, полученных в процессе изучения курса высшей математики к решению задач других дисциплин является важной частью подготовки квалифицированных специалистов. Основатель начертательной геометрии Монж в своей книге [1] записал пожелание, чтобы начертательная геометрия и математика изучались вместе. Любую задачу начертательной геометрии можно решить аналитически, поскольку в этих дисциплинах изучаются одинаковые объекты: точки, линии, поверхности. Использование на практических занятиях по математике задач начертательной геометрии способствует увеличению интереса студентов к каждой из дисциплин, показывает универсальность математических методов и моделей, возможность решения задачи различными методами, например, для проверки ответа, полученного аналитически. При постоянном уменьшении часов, отводимых на изучение математики, все большее значение приобретает наличие междисциплинарных связей в обучении студентов, в том числе интеграция графических и аналитических методов решения геометрических задач [2 – 7].

Наполнение абстрактных математических формул конкретным геометрическим содержанием улучшает усвоение материала студентом. Реализация единого задания была осуществлена для ряда строительных специальностей ПГУПС. Была снижена трудоемкость стандартного типового расчёта, но включено в дополнительное задание с тремя задачами начертательной геометрии, сформулированными в стандартных математических терминах.

I. Заданы три координаты точек A, B, C, D.

1. Через точку C провести прямую, параллельную отрезку AB (записать уравнение этой прямой).

2. Построить следы AB (записать уравнения прямых, проходящих через проекции точек AB на координатные плоскости xOy, xOz, yOz).

3. Определить взаимное положение прямых AB и CD.

II. Заданы все координаты точек A, B, C и две координаты точки D.

1. Найти недостающую координату точки D, принадлежащей плоскости, заданной точками ABC.

2. Через точку D провести горизонтальную плоскость α (записать уравнение плоскости с нормальным вектором (0; 0; 1), проходящей через точку D).

3. Найти линию пересечения плоскостей α и ABC (записать каноническое уравнение этой прямой).

III. Заданы координаты точек A, B, C, D, M, K. Построить точки пересечения пирамиды $ABCD$ и отрезка MK (найти координаты точек пересечения пирамиды и прямой).

Формулировка задач указывает на различие способов заданий изучаемых объектов в рассматриваемых дисциплинах: прямая задается двумя точками, плоскость – тремя точками вместо математических уравнений. Рассмотрим подробно задачу, в которой требуется определить взаимное расположение прямых в пространстве, одна из которых задана точками A и B, а другая – точками E и F. В начертательной геометрии взаимное расположение прямых определяется по чертежу, подобные задачи называются позиционными. Если прямые параллельны, то их проекции параллельны или совпадают. Если две прямые пересекаются, то проекции точки пересечения K принадлежат проекциям прямых (рис. 1). Случай скрещивающихся прямых приведен на рисунке 2.

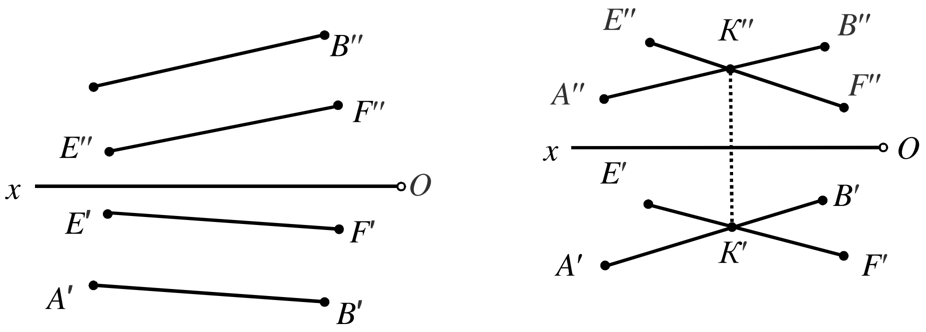

Рис. 1. Параллельные и пересекающиеся прямые

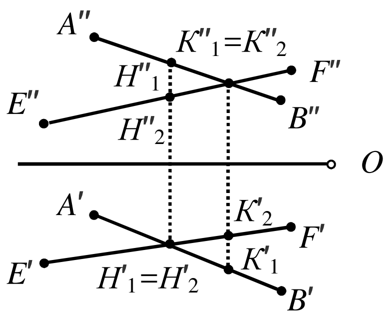

Рис. 2. Скрещивающиеся прямые

На занятиях по математике из координат точек A, B, E и F студент составляет матрицу $M = \begin{pmatrix} x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_E & y_E & z_E & 1 \\ x_F & y_F & z_F & 1 \end{pmatrix}$. Если ранг матрицы M равен четырем, то ее определитель отличен от нуля.

$$\det M = \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_E & y_E & z_E & 1 \\ x_F & y_F & z_F & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A & 0 \\ x_E - x_A & y_E - y_A & z_E - z_A & 0 \\ x_F - x_A & y_F - y_A & z_F - z_A & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_E - x_A & y_E - y_A & z_E - z_A \\ x_F - x_A & y_F - y_A & z_F - z_A \end{vmatrix} = -\overline{AB} \cdot (\overline{AE} \times \overline{AF}) \neq 0.$$

Векторы $\overline{AB}$, $\overline{AE}$, $\overline{AF}$ задают параллелепипед с точками A, B, E, F в вершинах треугольной пирамиды (рис. 3), следовательно, прямые AB и EF скрещиваются.

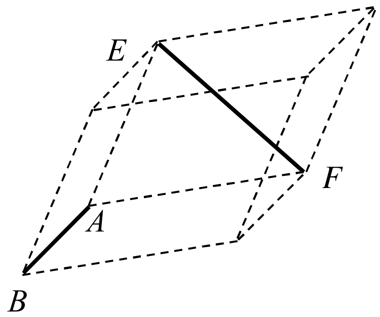

Рис. 3. Параллелепипед

В начертательной геометрии задачи определения расстояний между различными графическими объектами называются метрическими. Они решаются, в основном, построением взаимно перпендикулярных прямых и плоскостей. Расстояние между скрещивающими прямыми можно вычислить, поделив объем параллелипеда на площадь параллелограмма, лежащего в его основании: $d=\dfrac{\left|\overline{AE}\cdot(\overline{AB}\times\overline{EF})\right|}{\left|\overline{AB}\times\overline{EF}\right|}$. Отметим, что задача вычисления кратчайшего расстояния между двумя скрещивающимися прямыми часто встречается в учебниках по аналитической геометрии, однако без применения векторных операций ее решение становится громоздким [8, стр. 85–86]. Если $\overline{AB}\times\overline{EF}=\overline{0}$, то прямые AB и EF коллинеарны. Эти прямые пересекаются при $\overline{AE}\cdot(\overline{AB}\times\overline{EF})=0$ и $\overline{AB}\times\overline{EF}\neq\overline{0}$. Если прямые параллельны или пересекаются, то ранг матрицы M равен трем, и четыре точки принадлежат одной плоскости.

Рассмотрим конкретный пример. Прямая AB задана точками (2; 4; 3) и (3; 6; 5), прямая EF – точками (1; 2; 0) и (0; 0; –2). Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{EF}$ коллинеарны, прямые AB и EF параллельны, расстояние между ними $d=\dfrac{\left|\overline{AB}\times\overline{AE}\right|}{\left|\overline{AB}\right|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Если этими точками задать прямые AE и BF, то они будут пересекаться в точке C. Координаты точки C (рис. 4) удовлетворяют векторным равенствам $\overline{OC}=\overline{OA}+t\cdot\overline{AE}$ и $t\cdot\overline{AE}+s\cdot\overline{BF}=\overline{AB}$, которые можно преобразовать в формулу

$$\overline{OC}=\overline{OA}+\frac{(\overline{AB}\cdot\overline{BF})(\overline{AE}\cdot\overline{BF})-(\overline{AB}\cdot\overline{AE})(\overline{BF}\cdot\overline{BF})}{(\overline{AE}\cdot\overline{BF})^2-\left|\overline{AE}\right|^2\cdot\left|\overline{BF}\right|^2}\cdot\overline{AE}.$$

Отметим, что знаменатель последней формулы отличен от нуля, если прямые не параллельны (и не совпадают).

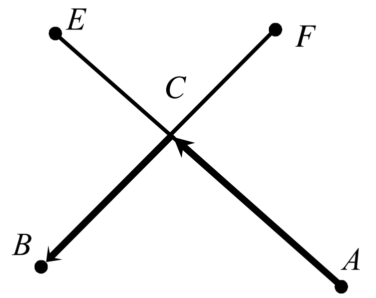

Рис. 4. Точка пересечения прямых

Для рассматриваемого примера

$$\overline{OC}=\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}+\frac{36\cdot(-29)-(-11)\cdot 94}{36^2-14\cdot 94}\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}+\frac{1}{2\cdot}\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}5\\3\\1{,}53\end{pmatrix}.$$

При ранге матрицы M равном двум четыре точки лежат на одной прямой и две заданные прямые совпадают. Единице ранг матрицы может равняться только при равенстве координат всех заданных точек A, B, E и F. Ранг M определяет расположение четырех точек на следующих геометрических объектах: точка, прямая, плоскость, пространство.

Решения даже простых, но реальных задач помогут студентам понять суть основных положений векторного исчисления, аналитической геометрии и линейной алгебры. В настоящее время нет необходимости в составлении своих компьютерных программ при решении задач профессионального характера. Имеется множество готовых пакетов программ, разработанных специализированными фирмами. Работая за компьютером в качестве пользователя, студент развивает навыки общения с пакетом программ, однако при этом глубокие знания и умения у него не всегда вырабатываются. Для успешной работы с программами нужно обладать алгоритмическим мышлением, т.е. инженер должен не только быть уверенным пользователем пакетов программ, но и понимать принципы их создания. Геометрическое и математическое моделирования, являясь теоретической основой компьютерной графики, позволяют как осознанно использовать пакеты САПР, так и создавать свои алгоритмы и программы.

Библиографический список

1. Монж Гаспар. Начертательная геометрия / Под ред. проф. Д. И. Каргина. – М.: Изд. АН СССР, 1947. – 292 с.

2. Гарбарук В. В., Семенов В. А., Тихомиров С. Г. Интеграция графических и аналитических методов решения геометрических задач // Математика в вузе и школе: Тр. междунар. научн.-метод. конф. СПб, 2017. С. 33–37.

3. Сальков Н.А. Начертательная геометрия – база для геометрии аналитической // Геометрия и графика. – 2016. – Т. 4, №. 1. – С. 44–54.

4. Волков В. Я. Элементы математизации теоретических основ начертательной геометрии / В. Я. Волков [и др.] // Геометрия и графика. – 2015. – Т. 3. № 1. – С. 3–15.

5. Феоктистова Л. А., Талипова И. П., Рзаева Т. В. К вопросу о связи начертательной геометрии с аналитической геометрией // Естественные и технические науки. – 2015. – № 11. – С. 303–307.

6. Гарбарук В. В., Павлюкова М. И., Тихомиров С. Г. Общие задания по аналитической и начертательной геометриям: сб. тр. III Междунар. научн.-мет. конф. «Проблемы математической и естественно-научной подготовки в инженерном образовании». – СПб, 2014. – С. 73–74.

7. Хейфец А. Л. Реорганизация курса начертательной геометрии как актуальная задача развития кафедр графики // Геометрия и графика. – 2013. – Т. 1. № 2. – С. 21–23.

8. Рубан П. И., Гармаш Е. Е. Руководство к решению задач по аналитической геометрии. М.: Изд. Высшая школа, 1963. – 314 с.

Сведения об авторах:

Виктор Владимирович Гарбарук

Служебный адрес: СПб,190031, Московский пр. 9, ФГБОУ ВО ПГУПС, кафедра «Высшая математика»; e-mail: vmkaf@pgups.ru, spin-code: 3278-1985.

Виктор Алексеевич Семенов

Служебный адрес: СПб,190005, 1-я Красноармейская ул. 1, БГТУ "Военмех", кафедра «Инженерная и машинная геометрия и графика»; e-mail: semenov.1947@indox.ru; spin-code: 9111-4340.

Ульяна Викторовна Терентьева

Служебный адрес: СПб,190031, Московский пр. 9, ФГБОУ ВО ПГУПС; e-mail: trntv.u@gmail.com.