УДК 517.9, 372.851, 51-74

Н.М. Гордеева
Е.С. Попушина
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ

Аннотация. Предлагается ввести в программу дисциплины «Обыкновенные дифференциальные уравнения» (ОДУ) для инженерных специальностей метод решения с помощью разложения по параметру. Простота этого метода позволяет включить его в учебные планы тех направлений и специальностей, где нет углубленного изучения математики, при этом этот метод хорошо демонстрирует возможность получения приближенных решений для уравнений, не имеющих аналитического решения. Таким образом, строится мост между изучением ОДУ, имеющих аналитическое решение, и приближенными методами решения ОДУ с помощью математических пакетов.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения; разложение по параметру; инженерное образование.

DOI: 10.25206/2307-5430-2020-8-88-96

Введение. Стандартный набор знаний будущего инженера по дифференциальным уравнениям включает несколько классов уравнений, которые можно решить аналитически, теорему Коши и знакомство с прикладными пакетами, решающими дифференциальные уравнения методом Рунге-Кутты.

Все динамические процессы, с которыми студентам придется сталкиваться в профессиональной жизни, описываются дифференциальными уравнениями. Большинство из них не решаются аналитически. Грамотное применение пакетов программ возможно только при условии глубокого понимания характера возможных решений. В противном случае можно получить результаты, противоречащие здравому смыслу.

Метод разложения по параметру достаточно прост, чтобы не требовать от студентов – «технарей» серьезной математической подготовки и хорошо иллюстрирует характер решения. Поэтому авторы активно обращаются к нему при преподавании дисциплины «Дифференциальные уравнения» студентам инженерных специальностей. Также метод полезен для построения курсов для магистров, которым требуется быстро восстановить навыки решения обыкновенных дифференциальных уравнений и глубже понимать связь между теоретическими моделями и экспериментальными данными.

Основная часть. Для изучения выбирается класс обыкновенных дифференциальных уравнений, которые можно записать в виде:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \mu),\ x \in \mathbf{R}^n. \tag{1}$$

Если речь идет о задаче Коши, то добавляется начальное условие

$$x(t_0, \mu) = g(\mu). \tag{2}$$

Перед решением уравнения надо вспомнить теорему Тейлора для функции одной переменной и для функции нескольких переменных. Можно обратить внимание студентов на плюсы и минусы представления функции в виде ряда Тейлора, обсудить вопрос, когда выгодно прибегать к такому представлению.

Теорема 1 (о разложимости по параметру вещественного решения) [1]. Пусть в области D пространства (t, x) при $|\mu - \mu_0| < \delta$ функции $f(t, x, \mu)$, $g(\mu)$ и их производные до порядка p включительно по x и μ непрерывны и при $\mu = \mu_0$ решение $x(t, \mu_0)$ задачи (1) на отрезке $t_0 \le t \le t_1$ проходит внутри D. Тогда при μ, достаточно близких к μ_0, решение $x(t, \mu)$ на этом отрезке существует, имеет непрерывные производные по μ до порядка p включительно и разлагается по степеням разности $\mu - \mu_0$.

$$x(t, \mu) = v_0(t) + v_1(t)(\mu - \mu_0) + \ldots + v_p(t)(\mu - \mu_0)^p + o\left((\mu - \mu_0)^p\right). \tag{3}$$

Здесь $v_0(t) = x(t, \mu_0)$, а для отыскания функций $v_1(t), \ldots, v_p(t)$ надо подставить разложение (3) в уравнение (1) и начальные условия (2), разложить функции f и g по степеням разности $\mu - \mu_0$ в левой и правой частях уравнения.

Со студентами старшекурсниками можно обсудить более сложную теорему (для ее изучения требуется знать комплексный анализ, что выходит за рамки программы первого курса).

Теорема 2 (о разложимости по параметру комплексного решения системы уравнений) [2]. Если выполнены условия теоремы 1 и в окрестности каждой точки области D функции $f(t, x, \mu)$ и $g(\mu)$ аналитические по x, μ, то решение задачи (1–2) разлагается в степенной ряд по $\mu - \mu_0$, сходящийся при μ, достаточно близких к μ_0.

Пример 1 [3]**.** Разложить по параметру μ до второй степени решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + \frac{2\mu}{t}, x(1) = -1. \tag{4}$$

Сначала ищем решение уравнения (4) при μ = 0, т.е.

$$\frac{dx}{dt} = x^2, x(1) = -1.$$

Найдем его общее решение методом разделения переменных

$$\frac{dx}{x^2} = dt,\ \int \frac{dx}{x^2} = \int dt,\ -\frac{1}{x} = t + C.$$

Из условия $x(1) = -1$ находим значение константы C

$$-\frac{1}{-1} = 1 + C,\ C = 0.$$

Окончательно получаем $x = -1/t$. Условия теоремы 1 выполнены при любом p в области $t \geq \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ любое.

При $\mu \neq 0$ ищем решение в виде

$$x(t,\mu) = v_0(t) + v_1(t)\mu + v_2(t)\mu^2 + o(\mu^2). \tag{5}$$

Подставим степенной ряд (5) в дифференциальное уравнение (4)

$$\frac{d}{dt}\left(v_0(t) + v_1(t)\mu + v_2(t)\mu^2 + o(\mu^2)\right) = \left(v_0(t) + v_1(t)\mu + v_2(t)\mu^2 + o(\mu^2)\right)^2 + \frac{2\mu}{t}.$$

Приравняв коэффициенты при нулевой, первой и второй степенях параметра μ, получаем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dv_0}{dt}=v_0^2,\ \frac{dv_1}{dt}=2v_0v_1+\frac{2}{t},\ \frac{dv_2}{dt}=2v_0v_2+v_1^2.$$

Также подставляя (5) в начальное условие $x(1)=-1$, получим

$$v_0(1)+v_1(1)\mu+v_2(1)\mu^2+o(\mu^2)=-1.$$

Снова приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях параметра μ, имеем $v_0(1)=-1, v_1(1)=0, v_2(1)=0$.

Заметим, что функция $v_0(t)$ была найдена выше (при решении исходного уравнения при $\mu = 0$), поэтому $v_0(t)=-1/t$. С учетом этого для функции $v_1(t)$ получаем задачу Коши

$$\frac{dv_1}{dt}=-\frac{2v_1}{t}+\frac{2}{t}, v_1(1)=0.$$

Это линейное неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение. Будем решать его методом вариации произвольной постоянной. Сначала решим однородное уравнение

$$\frac{dv_1}{dt}=-\frac{2v_1}{t}.$$

Его общее решение, найденное методом разделения переменных, имеет вид $v_1=C_1t^{-2}$. Далее, считая константу функцией переменной t и подставляя найденное решение в неоднородное уравнение, получим, что $C_1'=2t$. Откуда, $C_1=t^2+C_2$, а $v_1=(t^2+C_1)t^{-2}$. С учетом начального условия $v_1(1)=0$

$$v_1=1-\frac{1}{t^2}.$$

Аналогично находим, что $v_2 = \frac{t}{3} - \frac{2}{t} + \frac{8}{3t^2} - \frac{1}{t^3}$.

Окончательно имеем

$$x(t,\mu) = -\frac{1}{t} + \mu\left(1 - \frac{1}{t^2}\right) + \mu^2\left(\frac{t}{3} - \frac{2}{t} + \frac{8}{3t^2} - \frac{1}{t^3}\right) + o\left(\mu^2\right).$$

Если точности решения не хватает, можно продолжить процесс, приравняв коэффициенты про более высоких степенях параметра μ и находя функции $v_3(t)$, $v_4(t)$ и т.д.

Замечание. Из примера 1 видно, что для решения задач на малый параметр от студентов требуется только навык решения ОДУ методом разделения переменных и методом вариации постоянной. Подробное решение примера 1 позволяет освежить навыки решения ОДУ студентам старших курсов и магистрам.

Пример 2. Разложить по параметру μ до второй степени решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \mu t + \frac{\ln x}{t}, x(1) = 1.$$

Также как в примере 1 сначала решим задачу при μ = 0

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\ln x}{t}.$$

Общее решение этого уравнения возможно только с использованием интегрального логарифма [4], но частное при $x(1)=1$ легко увидеть: $x(t)\equiv 1$. Это единственное решение задачи Коши, так как выполняются все условия соответствующей теоремы. Далее ищем решение в виде

$$x(t,\mu) = v_0(t) + v_1(t)\mu + v_2(t)\mu^2 + o\left(\mu^2\right).$$

Подставляя $x(t,\mu)$ в исходное уравнение, используя формулу Тейлора и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, получаем

$$\frac{dv_0}{dt} = \frac{\ln v_0}{x}, \quad \frac{dv_1}{dt} = t + \frac{v_1}{tv_0}, \quad \frac{dv_2}{dt} = \frac{v_2}{tv_0} - \frac{v_1^2}{2tv_0^2}.$$

Из начального условия имеем: $v_0(1)=1, v_1(1)=0, v_2(1)=0$.

Решая систему, получаем ответ

$$x(t,\mu)=1+\mu\left(t^2-t\right)+\mu^2\left(\frac{t}{6}-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{2}-\frac{x^4}{6}\right)+o\left(\mu^2\right).$$

Замечание. В примере 2 отсутствие общего решения при $\mu = 0$ не дает напрямую использовать математические пакеты, позволяя продемонстрировать преимущества аналитических подходов к решению задачи. Существенное отличие пример 2 от примера 1 – это использование формулы Тейлора, что полезно для закрепления навыков работы с ней.

Метод составления задач для самостоятельного решения. На основании примера 1 были составлены похожие задачи для использования их в типовых расчетах, на рубежных контролях или экзаменах.

За основу берется задача Коши

$$y' = a\mu y^{\alpha} + by^{\beta}, y\left(x_0\right) = y_0,$$

где требуется разложить по параметру μ до второй степени решение этого уравнения. Подбор коэффициентов a, α, b и β осуществляется следующим образом. Изначально они берутся из некоторого набора значений (который можно менять как в сторону расширения, так и уменьшения), а именно

$$a=-5,-4,-3,-2,-1,1,2,3,4,5\,,$$

$$\alpha=-3,-2,-1,1,2,3\,,$$

$$b=-5,-4,-3,-2,-1,1,2,3,4,5\,,$$

$$\beta=-1,2,3\,.$$

Для упрощения поиска решения и не слишком длинных итоговых функций, необходимо, чтобы $x_0=1$. Из тех же соображений

$$y_0=\left(\left(1-\beta\right)b\right)^{\frac{1}{1-\beta}}.$$

В среде MATLAB была написана программа, которая находит решения поставленной задачи при всех значениях параметров, отсеивая «некрасивые» варианты. Были приняты следующие критерии фильтрации:

1) $y_0 \in \mathbf{R}$, так как, очевидно, нужны только действительные решения, а формула для y_0 может давать и комплексные значения. Данное условие можно проанализировать аналитически без использования программы, но учитывая единообразие алгоритма проще дописать пару строчек кода, чем каждый раз задавать новую связь между параметрами b и β.

2) y_0 должно иметь простой вид. Например, не должно быть $y_0 = \sqrt{12}$ или $y = 3^{1/3}$. Можно отказаться от этого критерия, но при составлении заданий считалось, что условие и ответ должны выглядеть как можно проще.

3) Удаляются варианты содержащие особые решения вида $v_2 \equiv 0$, так как проще совсем не рассматривать такие задачи, чем разбираться, почему MATLAB на них «спотыкается», или для каких значений параметров они появляются.

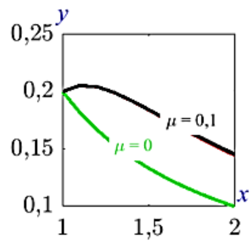
4) Приближенное решение при $\mu = 0{,}1$ не должно отличаться от численного более чем на 0,01 в точке $x = 2$. Это нужно, чтобы задача явно демонстрировала преимущества метода малого параметра по сравнению с численным решением.

вариант 109

Разложить по параметру μ до второй степени решение уравнения

$$y' = \frac{3\,\mu}{x^3} - 5\,y^2, y(1) = \frac{1}{5}$$

Система уравнений:
$v_0' + 5\,{v_0}^2 = 0;$
$10\,v_0\,v_1 + v_1' - \frac{3}{x^3} = 0$ или $\frac{2\,v_1}{x} + v_1' - \frac{3}{x^3} = 0;$
$v_2' + 5\,{v_1}^2 + 10\,v_0\,v_2 = 0$ или $\frac{2\,v_2}{x} + \frac{45\,(\ln x)^2}{x^4} + v_2' = 0;$
Функции ряда:
$v_0 = \frac{1}{5\,x};$
$v_1 = \frac{3\,\ln x}{x^2};$
$v_2 = \frac{90\,\ln x}{x^3} + \frac{45\,(\ln x)^2}{x^3} - \frac{90}{x^2} + \frac{90}{x^3};$



Ответ: $y(x) = \mu^2\left(\frac{90\,\ln x}{x^3} + \frac{45\,(\ln x)^2}{x^3} - \frac{90}{x^2} + \frac{90}{x^3}\right) + \frac{1}{5\,x} + \frac{3\,\mu\,\ln x}{x^2}.$

Рис. 1. Результат работы генератора вариантов задачи.
Условие и ответ для преподавателя

Перечисленные критерии были выбраны не из соображений оптимального поиска всех задач, решение которых можно получить аналитически. Нужно было лишь получить достаточное количество различных вариантов примерно одинаковой сложности. Сами критерии выбирались так, чтобы их можно было легко проверять в программе. Например, второй критерий проверятся наличием или отсутствием в строке для переменной, задающей значение y_0, символа «^» или строки «sqrt».

Если считать, что все значения параметров a, α, b и β из выбранного набора возможны, то получаем оценку в 1800 вариантов. Из них по первому критерию отбрасывается 600, по второму – 480 из оставшихся, по третьему – 60, и наконец, по четвертому – 346. Итого остается 314 вариантов. В таблице 1 показано, сколько раз каждое значение параметров a, α, b и β встречается среди «хороших вариантов».

Таблица 1

Значение параметров a, α, b и β

	–5	–4	–3	–2	–1	1	2	3	4	5
a	15	19	28	39	53	54	41	30	20	15
α	–	–	88	78	68	40	26	14	–	–
b	12	16	25	77	48	48	35	25	16	12
β	–	–	–	–	0	–	272	42	–	–

Оказалось, что значения параметров a, α, b распределены достаточно равномерно, а вот для параметра β картина совсем другая. Так, значение $\beta = -1$ не удовлетворяет критериям поиска вообще, значение 2 встречается намного чаще, чем 3. Для получения более разнообразных, но все еще простых вариантов задачи можно ввести дополнительные параметры и рассмотреть, например, уравнение

$$y' = a\mu y^{\alpha} x^{\gamma} + b y^2 x^{\delta},\ y(x_0) = y_0.$$

Однако и вышеуказанная программа позволяет генерировать достаточное число вариантов задачи, так как число студентов на потоке составляет около ста человек. Для ускорения проверки работ студентов программа генерирует подробный ответ к каждой задаче. На рис. 1 показан пример ответа к одному из вариантов.

Далее приведем формулировку примера 1, которую можно использовать при изучении дисциплины «Математическое моделирование». Она же демонстрирует учащимся преимущества метода разложения по малому параметру.

Пример 3. Дано твердое тело, температура которого равна θ^* и зависит от времени t^* и параметра μ. Известно, что безразмерная скорость изменения температуры равна

$$\frac{d\theta}{dt} = (\theta - 1)^2 + \frac{2\mu}{t+1},\quad \theta = \frac{\theta^* - \theta_0}{\theta_1 - \theta_0},\quad t = \frac{t^*}{T},$$

где θ_0 =200 K – начальная температура тела, θ_1 = 220 K– температура воздуха, окружающего тело; T = 10 с – время, которое занимает процесс изменения температуры тела. Подобрать значения параметра μ так, чтобы температура тела через 10 с после начала процесса равнялась бы 211 K.

Выводы. Для изучения указанной темы требуется знание математического анализа уровня первого курса, элементарные знания из теории дифференциальных уравнений и степенных рядов. Если предусмотрены лекции, то можно вспомнить соответствующие теоремы с доказательством и дать новые. На семинаре достаточно отработать несколько решений с возрастающей сложностью. Студенты получают и сравнивают аналитическое и приближенное решения на практике.

Библиографический список

1. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. – Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. – 468 с.

2. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969. – 424 с.

3. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. – 240 с.

4. Abramovich M., Stegun I. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables, national bureau of standarts //Appl. Math. series. – 1964. – Т. 55. – №. 361. – С. 9.

Сведения об авторах:

Надежда Михайловна Гордеева

Служебный адрес: 105005, Москва, 2-я Бауманская улица, дом 5, стр. 1. МГТУ им. Н.Э. Баумана, кафедра ФН1 «Высшая математика»; e-mail: nmgordeeva@bmstu.ru; spin-code: 8406-7531.

Научные интересы автора: математическое моделирование; http://www.mathnet.ru/rus/person/81106;
https://elibrary.ru/author_items.asp?authorid=699932.

Екатерина Сергеевна Попушина

Служебный адрес: 105005, Москва, 2-я Бауманская улица, дом 5, стр. 1. МГТУ им. Н.Э. Баумана, кафедра ФН1 «Высшая математика»; e-mail: popushinaes@bmstu.ru; spin-code: 3108-1062.

Научные интересы автора: математическое моделирование; http://www.mathnet.ru/php/person.phtml?option_lang=rus&personid=99504;
https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=164126.