УДК 519.832, 519.852, 519.853

**А.А. Кузнецова**
кандидат физико-математических наук
Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия

# ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ В КУРСЕ ТЕОРИИ ИГР И ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

**Аннотация.** Рассмотрены методические аспекты преподавания теории игр и исследования операций в техническом вузе. Обоснована польза включения в соответстсвующие курсы лабораторных работ. Приведены примеры задач курсов, допускающих решения с помощью инструмента «Поиск решения» в среде MS Excel, даны указания к решению.

**Ключевые слова**: исследование операций; симплекс-метод; теория игр; лабораторная работа; MS Excel.

**DOI: 10.25206/2307-5430-2020-8-158-163**

**Введение.** В МГТУ им. Н. Э. Баумана элементы теории игр изучаются как в рамках курса исследования операций на факультетах СГН и ИБМ, так и в качестве отдельного предмета на факультете ИБМ. При этом в первом случае студенты уже знакомы с постановкой задачи линейного программирования и методами их решения, во втором случае это не обязательно. Часто на семинаре по решению матричных игр в смешанных стратегиях рассмотрение задач ограничивается примером игр 2x2, в которых существует явная формула для нахождения вероятностей, поскольку решение игры больших размеров является трудоемкой задачей. Выходом может стать введение в курс теории игр лабораторных работ. Инструмент «Поиск решения» MS Excel позволяет решить матричную игру после сведения её к задаче линейного программирования. Если теория игр является частью курса исследования операций, то имеет смысл изучить решение ЗЛП симплекс-методом в среде MS Excel в начале курса [2]. В ином случае проводить лабораторные работы тоже представляется возможным. Студенты экономических и гуманитарных специальностей обычно уже умеют работать с электронными таблицами MS Excel, поэтому это удачный выбор вспомогательного инструмента. Примером лабораторной работы по теории игр может служить описанная в настоящем докладе лабораторная работа №1.

Инструмент «Поиск решения» может быть также использован в курсе исследования операций для численного решения целочисленных задач линейного программирования и нелинейных оптимизационных задач в дополнение к изучению аналитических методов. Примеры даются лабораторными работами №2 и №3.

**Лабораторная работа 1. Решение игры в смешанных стратегиях**. Рассмотрим игру двух лиц (*A* и *B*), заданную платежной матрицей $C=\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$, игрокам *A* и *B* доступны стратегии $A_1, A_2, ...A_m$, и $B_1, B_2, ...B_n$, соответственно. Будем считать, что если игрок *A* использует стратегию $A_i$, а игрок $B$ - стратегию $B_j$, то число $c_{ij}$ есть *выигрыш* игрока $A$ и *проигрыш* игрока $B$. Решением игры в смешанных стратегиях является набор вероятностей, с которыми эти стратегии будут использованы; мы будем использовать обозначения $S_A=\left(p_1, p_2, ...p_m\right)$, $S_B=\left(q_1, q_2, ...q_n\right)$ для обозначения смешанных стратегий игроков *A* и *B*.

Обозначим *цену игры* (выигрыш *A* и проигрыш *B* в равновесии) за $v$, тогда оптимальная смешанная стратегия игрока *A* может быть найдена как решение задачи линейного программирования, смысл которой в том, что математическое ожидание выигрыша *A* при каждой стратегии *B* не меньше цены игры, при этом игрок *A* стремится максимизировать свой выигрыш:

$$\begin{cases} c_{11}p_1 + c_{21}p_2 + ... + c_{m1}p_m \ge v; \\ c_{12}p_1 + c_{22}p_2 + ... + c_{m2}p_m \ge v; \\ \\ c_{1n}p_1 + c_{2n}p_2 + ... + c_{mn}p_m \ge v; \end{cases}$$
$$v \to \max.$$

В то же время оптимальная стратегия игрока *B* может быть найдена из условий того, что математическое ожидание проигрыша *B* не превышает цены игры при любой стратегии *A*, при этом игрок *B* стремится минимизировать свой проигрыш

$$\begin{cases} c_{11}q_1 + c_{12}q_2 + ... + c_{1n}q_n \le v; \\ c_{21}q_1 + c_{22}q_2 + ... + c_{2n}q_n \le v; \\ \\ c_{m1}q_1 + c_{m2}q_2 + ... + c_{mn}q_n \le v; \end{cases}$$
$$v \to \min.$$

Воспользуемся тем, что $\sum_{i=1}^{m} p_i = \sum_{j=1}^{n} q_j = 1$, разделим каждое из уравнений первой системы на $v$ и обозначим $x_i = p_i / v, v = 1, ...m$. Заметим, что условие максимизации $\nu$ равносильно условию минимизации $\sum_{i=1}^{m} x_i$, так $\nu = \left( \sum_{i=1}^{m} x_i \right)^{-1}$.

Имеем

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{21}x_2 + \ldots + c_{m1}x_m \geq 1; \\ c_{12}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{m2}x_m \geq 1; \\ \\ c_{1n}x_1 + c_{2n}x_2 + \ldots + c_{mn}x_m \geq 1; \end{cases}$$
$$X_* = x_1 + x_2 + \ldots + x_m \to \min.$$

Аналогично, разделив каждое из уравнений второй системы на $\nu$, обозначив $y_i = q_i / \nu, \nu = 1,\ldots n$, и учитывая, что $\nu = \left( \sum_{i=1}^{n} y_i \right)^{-1}$ мы получаем

$$\begin{cases} c_{11}q_1 + c_{12}q_2 + \ldots + c_{1n}q_n \leq 1; \\ c_{21}q_1 + c_{22}q_2 + \ldots + c_{2n}q_n \leq 1; \\ \\ c_{m1}q_1 + c_{m2}q_2 + \ldots + c_{mn}q_n \leq 1; \end{cases}$$
$$Y^* = y_1 + y_2 + \ldots y_n \to \max.$$

Заметим, что теореме двойственности $X_* = Y^*$, причем каждый из экстремумов равен $\nu^{-1}$.

В качестве примера рассмотрим игру 3x3, задаваемую матрицей $C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 9 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, найдем смешанную стратегию $S_A = (p_1, p_2, p_3)$ игрока *A*. Согласно алгоритму обозначим $x_i = p_i / \nu$, $i = 1,2,3$ и составим задачу линейного программирования:

$$X = x_1 + x_2 + x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 + 7x_3 \geq 1, \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 \geq 1, \\ 8x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 1, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Алгорим решения в среде MS Excel:

1. Выделить в таблице ячейки, отвечающие за переменные $x_1, x_2, x_3$. В таблице 1 им соответствуют ячейки *B2, C2, D2*. Заметим, что соответствующие ячейки необходимо обнулять при каждом запуске «Поиска решений».

2. Задать формулой целевую функцию; в таблице целевая функция находится в ячейке *E2*, т.е. *E2 = B2+ C2+D2*. В начале работы ячейке *E2* автоматически присваивается нулевое значение.

3. Задать левые части ограничений системы формулами, а правым присвоить значения. В таблице 1 левым частям уравнений системы соответствуют ячейки *B4, B5, B6*, например *B4= 3B2+9 C2+7D2*.

4. Вызвать инструмент «Поиск решения» из вкладки «Данные», добавить ссылки на ячейки переменных, целевой функции и ограничений, потребовав неотрицательности переменных на вкладке «Параметры»

5. Выполнить оптимизацию, в результате чего значения ячеек, соответствующих целевой функции и переменных автоматически изменятся на оптимальные: $x_1 = 0.(074) = 2/27$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0.(1)=1/9$, $F=0.(185) = 5/27$ .

6. Преобразовать полученные переменные $x_1, x_2, x_3$ в вероятности смешанной стратегии по формулам $p_i = x_i v = x_i / X$ (в таблице 1 ячейки *B8, C8, D8)*.

Таблица 1

*Алгорим решения в среде MS Excel*

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | X |
| 2 | | 0.(074) | 0 | 0.(1) | 0.(185) |
| 3 | | | Ограничения | | |
| 4 | Огр. 1 | 1 | >= | 1 | |
| 5 | Огр. 2 | 1 | >= | 1 | |
| 6 | Огр. 3 | 1.(037) | >= | 1 | |
| 7 | | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | |
| 8 | | 0.4 | 0 | 0.6 | |

**Лабораторная работа 2. Целочисленная задача линейного программирования.** Решим в целых неотрицательных числах задачу $F = 3x + y \to \max$, при ограничениях

$$\begin{cases} 4x + 3y \le 18, \\ x + 2y \le 6, \\ 0 \le x \le 5, \\ 0 \le y \le 4. \end{cases}$$

Таблица 2

*Алгорим решения в среде MS Excel*

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| *1* | | *x* | | *y* | *F* |
| *2* | | *4* | | *0* | *12* |
| *3* | | | *Ограничения* | | |
| *4* | *Огр. 1* | *16* | *<=* | *18* | |
| *5* | *Огр. 2* | *4* | *<=* | *6* | |
| *6* | *Огр. 3* | *4* | *<=* | *5* | |
| *7* | *Огр. 4* | *0* | *<=* | *4* | |

Алгоритм решения:

1. Организуем хранение переменных, соответствующих *x, y*, целевой функции *F* и ограничениям аналогично предыдущей лабораторной работе.
2. Вызовем функцию «Поиск решения», зададим переменные, целевую функцию и ограничения, но потребуем не только неотрицательности переменных x, y, но и их *целочисленности*, для чего введем отдельное ограничение на каждую переменную в диалоговом окне. Полученное решение приведено в таблице 2.

**Лабораторная работа 3. Задачи нелинейного программирования**. Задача о потребительском выборе [3]. В магазине продаются товары трех видов по ценам *a, b, c,* при этом $a \ge b \ge c$. Функция полезности при покупке товаров в объемах *x, y, z* выражается формулой $U(x,y,z) = (1+x)(1+y)(1+z)$. Бюджет покупателя составляет *S* рублей. В каком количестве покупатель должен приобрести товары, чтобы максимизировать функцию полезности? Описанная задача сводится к задаче максимизации функции $U(x,y,z)$ при ограничениях $ax + by + cz \le S,\ x, y, z \ge 0$.

Рассмотрим задачу о потребительском выборе с параметрами $S = 10,\ a = 5,\ b = 3,\ c = 2$, тогда ограничения приобретают вид $5x + 3y + 2z \le 10,\ x, y, z \ge 0$.

Таблица 3

*Алгорим решения в среде MS Excel*

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| *1* | | *x* | *y* | *z* | *U* |
| *2* | | *0.(3)* | *1.(2)* | *2.(3)* | *9.8765* |
| *3* | | | *Ограничения* | | |
| *4* | *Огр. 1* | *10* | *<=* | *10* | |

Алгоритм решения:

1. Организуем хранение переменных, соответствующих *x, y, z* целевой функции *U* и ограничению.
2. Вызовем функцию «Поиск решения», зададим переменные, целевую функцию и ограничения, выбрав в качестве метода *«Поиск решения нелинейных задач»*. Полученное решение приведено в таблице 3.

**Заключение.** Число лабораторных работ, проводимых в курсе, зависит как от объема курса, так и от количества часов, выделяемых на дисциплину. В работе подробно описаны 3 лабораторные работы, одна из которых относится к курсу теории игр, а 2 – к курсу исследования операций. Примеры ещё нескольких лабораторных работ по исследованию операций даются в [2]. Целесообразно также проведение отдельной лабораторной работы по решению двойственных задач линейного программирования в различных постановках [4].

## Библиографический список

1. Кремер Н. Ш. Исследование операций в экономитке. – М.: Юрайт, 2017. – 438 с.

2. Кузнецова А. А. Лабораторные работы в курсе исследования операций // Актуальные проблемы преподавания математики в техническом вузе. – 2019. – Т. 7. С. 153–158.

3. Исмагилов Р. С., Калинкин А. В., Станцо В. В. Нелинейное и динамическое программирование. – М.: МГТУ, 2007. – 38 с.

4. Васильев Н. С., Станцо В. В. Двойственность в линейном программировании и теория матричных игр. – М.: МГТУ, 2010. – 46 с.

**Сведения об авторе:**

Анна Александровна Кузнецова

Служебный адрес: 105055, Россия, Москва, 2-ая Бауманская ул., д. 5; e-mail: kuznetsova.a.a@bmstu.ru, kuznetsova.a.a@bk.ru; spin-code: 2012-1660.

Страница автора в MathNet: http://www.mathnet.ru/php/person.phtml?option_lang=rus&personid=57456.