УДК 51:7

В.И. Петрашев
старший преподаватель
С.В. Рябцева
старший преподаватель
Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, г. Белгород, Россия

МЕТОД ОЦЕНОК ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Аннотация. Данная статья посвящена методу оценок при решении уравнений или неравенств. В статье рассказывается о том, что такое мажоранта и миноранта функции и как эти понятия применяются к решению уравнений и неравенств. А также приводятся примеры решения некоторых задач. Приведенные примеры показывают, что метод оценок не требует специфической подготовки и каких-то особенных навыков, но зато требует умения обобщать и анализировать, причем его применение значительно сокращает и упрощает решение. Применение этого метода может быть полезно не только для школьников, но и для студентов ВУЗов различных специальностей.

Ключевые слова: математика; миноранта; мажоранта; среднее арифметическое; среднее геометрическое; неравенство Коши; область определения; множество значений.

DOI: 10.25206/2307-5430-2020-8-216-223

Метод оценок – нестандартный метод решения уравнений и неравенств, который часто встречается при решении некоторых заданий школьных и вузовских олимпиад, а также заданий из ЕГЭ (в основном, во второй части) и незаслуженно обделен вниманием школы.

Основная идея метода оценок состоит в том, чтобы найти мажоранту (миноранту) данной функции. Мажорантой данной функции *f(x)* на заданном промежутке называется такое число M, что $f(x) \leq M$ для всех x из данного промежутка. Минорантой данной функции *f(x)* на заданном промежутке называется такое число N, что $f(x) \geq M$ для всех x из данного промежутка. Само слово мажоранта (миноранта) происходит от французского majorer (minorer), что в переводе означает «объявлять большим (меньшим)».

Пусть мы имеем уравнение $f(x) = g(x)$ или неравенство $f(x) \leq g(x)$ и существует такое число M, что для любого x из области определения данных функций выполняется $f(x) \geq M$ и $g(x) \leq M$ (обращаем внимание на то, что для меньшей функции $f(x)$ M является минорантой, а для большей функции $g(x)$ это же число M является мажорантой). Тогда исходное уравнение (неравенство) равносильно системе неравенств: $M \le f(x) \le g(x) \le M$,

что равносильно системе: $\begin{cases} f(x) = M \\ g(x) = M \end{cases}; \quad => \quad f(x) = g(x) = M.$

Уравнения и неравенства решаются совершенно одинаково, главное в подобных задачах - увидеть наличие мажоранты (миноранты). Можно предположить, что метод оценок используется, если:

1) нам задано смешанное уравнение (или неравенство), т.е. в задании есть разнородные функции;

2) входящие в уравнение (неравенство) функции имеют сложный, пугающий вид;

3) в одной части уравнения (неравенства) стоят ограниченные функции, а в другой данные числа;

4) переменных в задании больше, чем уравнений или неравенств.

Метод оценок требует умения оперировать такими понятиями как: функция и ее свойства (монотонность, ограниченность, экстремумы и др.), производная, среднее арифметическое, среднее геометрическое, а также знания некоторых нестандартных неравенств и тождеств.

Применение метода оценок значительно сокращает и упрощает решение задач. Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Решить уравнение:

$$cos\,4x - cos\,2x = \sqrt{5 - sin^2 3x}.$$

Оценим каждую часть уравнения: $f(x) = \cos 4x - \cos 2x$; $g(x) = \sqrt{5 - sin^2 3x}.$

$$-1 \le \cos 4x \le 1;\ -1 \le -\cos 2x \le 1, \quad => \ -2 \le f(x) \le 2.$$

$$-1 \le -sin^2 3x \le 0, => \ 4 \le 5 - sin^2 3x \le 5, => \ 2 \le \sqrt{5 - sin^2 3x} \le \sqrt{5},$$

$$=> \ g(x) \ge 2.$$

Получаем следующую систему: $2 \le g(x) = f(x) \le 2$ или

$$\begin{cases} cos\,4x - cos\,2x = 2 \\ \sqrt{5 - sin^2 3x} = 2 \end{cases}; \quad => \begin{cases} \cos 4x = 1 \\ \cos 2x = -1; \\ sin^2 3x = 1 \end{cases} => \begin{cases} 4x = 2\pi n, \ \ n\epsilon Z \\ 2x = \pi + 2\pi m, m\epsilon Z; \\ 3x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k\epsilon Z \end{cases} =>$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi n}{2}, \ \ n\epsilon Z \\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi m, m\epsilon Z \\ x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi k}{3}, \ \ k\epsilon Z \end{cases} =>$$

Используя единичную окружность, получаем следующее решение уравнения $x = \frac{\pi}{2} + \pi l, l\epsilon Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi l, l\epsilon Z$.

Пример 2. Решить уравнение:

$$\sqrt{4-x} + \sqrt{x-2} = x^2 - 6x + 11.$$

Оценим каждую часть уравнения: $f(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{x-2}$; $g(x) = x^2 - 6x + 11$.

Найдем область определения $f(x)$:

$$D(f): \begin{cases} 4 - x \geq 0; \\ 2 - x \geq 0; \end{cases} => \begin{cases} x \leq 4; \\ x \geq 2; \end{cases} => \ \ D(f) = [2; 4].$$

Далее найдем мажоранту $f(x)$ с помощью производной:

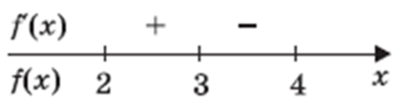
$$f'(x) = \left(\sqrt{4-x} + \sqrt{x-2}\right)' = -\frac{1}{2\sqrt{4-x}} + \frac{1}{2\sqrt{x-2}} = \frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{x-2}}{2\sqrt{(4-x)\cdot(x-2)}}.$$

Область определения $D(f') = (2; 4)$.

Найдем критические точки $f(x)$: $\sqrt{4-x} - \sqrt{x-2} = 0$, =>

$$4 - x = x - 2, \qquad => \ \ x = 3.$$

Так как $3 \epsilon D(f)$ и $f'(3) = 0$, => $x = 3$ - критическая точка $f(x)$. Функция в левой части уравнения $f(x)$ непрерывна и на отрезке $[2; 4]$ имеет единственный экстремум. В нашем случае



$$\max_{[2;4]} f(x) = f(3) = 2; \quad => \quad f(x) \leq 2.$$

Оценим правую часть уравнения, выделяя полный квадрат:

$$g(x) = x^2 - 6x + 11 = \ (x-3)^2 + 2,$$
$$D(g) = \mathbb{R}; \quad 2 \leq g(x) \leq +\infty; \ => \ g(x) \geq 2.$$

Таким образом, получили: $\begin{cases} f(x) \leq 2; \\ g(x) \geq 2; \end{cases} \ => \ f(x) = g(x) = 2.$ Т.е. решением уравнения будет число $x = 3$.

Ответ: $x = 3$.

Несмотря на то, что способ нахождения наибольшего и наименьшего значений с помощью производной достаточно громоздкий, часто он бывает единственно возможным. Поэтому владеть им необходимо и полезно.

Пример 3. Найти множество значений функции:

$$y = \frac{9}{\pi} \arccos \frac{3\sqrt{2} + \sin x - \cos x}{4\sqrt{2}}.$$

Применим метод оценок. Для этого, используя основные свойства тригонометрических функций, преобразуем аргумент арккосинуса и оценим получившуюся функцию:

$$\frac{3\sqrt{2} + sin\, x - cos\, x}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\left(3 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x\right) =$$
$$= \frac{1}{4}\left(3 + \cos\frac{\pi}{4} sin\, x - \sin\frac{\pi}{4} cos\, x\right) = \frac{1}{4}(3 + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right));$$
$$-1 \leq \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1, \quad => \quad 2 \leq 3 + sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 4,$$
$$=> \quad \frac{1}{2} \leq \frac{1}{4}(3 + sin(x - \frac{\pi}{4})) \leq 1 \cdot$$

Так как функция $y = \arccos x$ монотонно убывающая на всей своей области определения, то в соответствии с последним двойным неравенством, меняя знак на противоположный, имеем:

$$0 \le \arccos 1 \le \arccos(\frac{1}{4}(3 + sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right))) \le \arccos \frac{1}{2} \le \frac{\pi}{3} \cdot$$

$$0 \le \frac{9}{\pi} arccos(\frac{1}{4}(3 + sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right))) \le 3 \quad \text{или} \quad 0 \le y \le 3 \cdot$$

Ответ: $y \epsilon [0; 3] \cdot$

Пример 4. Решите неравенство:

$$(x^2 + 2x + 2) \cdot \cos(x + 1) \ \ge 2x^2 + 4x + 3 \cdot$$

Так как $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 \ \ge 1 \quad \forall\, x \,\epsilon\, \mathbb{R}$, то разделим обе части неравенства на это выражение и получим равносильное неравенство:

$$\cos(x + 1) \ \ge \frac{2x^2 + 4x + 3}{x^2 + 2x + 2}, \quad => \ \cos(x + 1) \ge 1 + \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 2}, \quad =>$$

$$cos(x + 1) \ge 1 + \frac{(x + 1)^2}{(x + 1)^2 + 1} \cdot$$

В такой форме удобно оценить обе части неравенства, используя простейшие свойства входящих функций: $f(x) = \cos(x + 1)$, $g(x) = 1 + \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2+1} \cdot$

$$-1 \le \cos(x + 1) \ \le 1, \qquad => \ -1 \ \le f(x) \le 1, \quad => \quad f(x) \ \le 1.$$

$$1 + \frac{(x + 1)^2}{(x + 1)^2 + 1} \ge 1, \quad => \quad g(x) \ \ge 1 \quad => \quad 1 \le g(x) \le f(x) \le 1\,.$$

Получаем равносильную систему уравнений:

$$\begin{cases} \cos(x + 1) = 1 \\ 1 + \dfrac{(x + 1)^2}{(x + 1)^2 + 1} = 1 \end{cases}; \quad => \quad x = -1.$$

Ответ: $x = \ -1.$

Пример 5. При каких значениях параметра a неравенство

$\sqrt{x^2-10x+26} \geq \frac{a^2+2a-3}{a^2+2a-8}$ верно для всех значений x?

Пусть $g(x)=\sqrt{x^2-10x+26}$ и $f(a)=\frac{a^2+2a-3}{a^2+2a-8}$, тогда $f(a) \leq g(x)$.

Оценим каждую функцию, предварительно преобразуя данные выражения.

$$g(x)=\sqrt{x^2-10x+26}=\sqrt{(x-5)^2+1} => \begin{cases} \mathrm{D}(g): x\epsilon(-\infty;+\infty); \\ \mathrm{E}(g): y\ \epsilon\ (\ 1;+\infty\ ]; \end{cases} => g(x) \geq 1$$

$$f(a)=\frac{a^2+2a-3}{a^2+2a-8}=\frac{(a^2+2a-8)+5}{a^2+2a-8}=1+\frac{5}{a^2+2a-8}=1+\frac{5}{(a+1)^2-9}.$$

В результате исходное неравенство принимает вид: $f(a) \leq 1 \leq g(x)$. Поэтому далее решаем неравенство:

$$1+\frac{5}{(a+1)^2-9} \leq 1 \ => \ \frac{5}{(a+1)^2-9} \leq 0 \ => \ (a+1)^2-9<0$$

$$=> \ (a+1)^2<9 \ => \ |a+1|<3 \ => \ -3<a+1<3 \ =>$$

$$-4<a<2 \ => \ a\ \epsilon\ (-4;2).$$

Ответ: $a\ \epsilon\ (-4;2)$.

Пример 6. Решите неравенство: $x^{1005}+\frac{2010}{\sqrt{x}} \leq 2011$.

При решении данного неравенства удобно использовать классическое неравенство Коши, известное школьникам как неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим:

$\frac{\mathrm{a}_1+\mathrm{a}_2+\cdots+\mathrm{a}_\mathrm{n}}{\mathrm{n}} \geq \sqrt[\mathrm{n}]{\mathrm{a}_1 \cdot \mathrm{a}_2 \cdot \cdots \cdot \mathrm{a}_\mathrm{n}}$, $\forall\ \mathrm{a}_\mathrm{i} \geq 0$, причем равенство достигается только в том случае, когда $a_1=\ a_2=\ \cdots=\ a_n$.

Преобразуем левую часть данного неравенства, рассматривая второе слагаемое как сумму 2010 дробей $\frac{1}{\sqrt{x}}$, а всю левую часть как сумму из 2011 слагаемых, которую (используя неравенство Коши) заменим на среднее геометрическое:

$$x^{1005}+\frac{2010}{\sqrt{x}}=x^{1005}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{x}}\geq$$

$$\geq 2011\cdot\sqrt[2011]{x^{1005}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}}.$$

В результате получаем следующее равносильно неравенство:

$$2011\cdot\sqrt[2011]{x^{1005}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}}\leq x^{1005}+\frac{2010}{\sqrt{x}}\leq 2011,=>$$

$$2011\cdot\sqrt[2011]{x^{1005}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}}\leq 2011,\qquad =>$$

$$2011\cdot\sqrt[2011]{x^{1005}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}}=2011,=>$$

$$2011\cdot\sqrt[2011]{1}=2011.$$

Поскольку равенство среднего геометрического и среднего арифметического возможно только при равенстве входящих элементов, то получаем: $x^{1005}=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $=>$ $x=1$.

Решение единственное, так как во всех других случаях, кроме $x=1$, левая часть исходного неравенства будет больше 2011.

Ответ: $x=1$.

Пример 7. Решите систему уравнений:

$\begin{cases} xy+yz+zx=12 \\ xyz=2+x+y+z \end{cases}$ при условии, что $\begin{cases} x>0 \\ y>0. \\ z>0 \end{cases}$

Условие положительности переменных подсказывает применение неравенства Коши. Из первого уравнения системы:

$\frac{xy+yz+zx}{3}\geq\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$, т.е. $\sqrt[3]{x^2y^2z^2}\leq 4$ $=> x^2y^2z^2\leq 64$ $=> xyz\leq 8$.

В соответствии с этим результатом и вторым уравнением системы:

$2+x+y+z\leq 8$, но согласно неравенству Коши: $\frac{2+x+y+z}{4}\geq\sqrt[4]{2xyz}$ $=>$

$2 + x + y + z \geq 4 \cdot \sqrt[4]{2xyz}$, но $4\sqrt[4]{2xyz} \leq 4\sqrt[4]{2 \cdot 8} \leq 4\sqrt[4]{16} = 8$.

Т.о., $8 \leq 2 + x + y + z \leq 8 => 2 + x + y + z = 8 => x = 2, y = 2$, $z = 2$, т.к. неравенство Коши имеет место при условии $x = y = z$.

Ответ: (2; 2; 2).

Приведенные примеры показывают, что метод оценок не требует специфической подготовки и каких-то особенных навыков, но зато требует умения обобщать и анализировать. Применение этого метода может быть полезно не только для школьников, но и для студентов ВУЗов различных специальностей.

Библиографический список

1. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2019. /Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. – Ростов-на-Дону, Легион, 2018.
2. Математика. 50 тренировочных вариантов экзаменационных работ для подготовки к ЕГЭ. Профильный уровень // И.В. Ященко, А.Л. Семенова. – М., АСТ, 2014-2020.
3. Математика. Как получить максимальный балл на ЕГЭ. – М., Интеллект-Центр, 2019.

Сведения об авторах:

Владимир Иванович Петрашев

Служебный почтовый адрес: Россия, 308012, г. Белгород, ул. Костюкова 46, БГТУ им. В. Г. Шухова, кафедра высшей математики; телефон: +7 4722 30□99-06, +7 4722 30□99-01, +7 4722 54□20-87; сайт кафедры: http://pm.bstu.ru/department; e-mail: petrashev_v@mail.ru.

Светлана Васильевна Рябцева

Служебный почтовый адрес: Россия, 308012, г. Белгород, ул. Костюкова 46, БГТУ им. В. Г. Шухова, кафедра высшей математики; телефон: +7 4722 30□99-06, +7 4722 30□99-01, +7 4722 54□20-87; сайт кафедры: http://pm.bstu.ru/department; e-mail: Noelee@yandex.ru.