УДК 511.216

С.К. Соболев
кандидат физико-математических наук, доцент
Московский государственный технический университет имени Н.Э.Баумана (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия

ОБ УСКОРЕНИИ СХОДИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Аннотация. Рассматриваются сходящиеся последовательности, монотонно зависящие от некоторого параметра, предел которых от этого параметра не зависит. Эти последовательности ограничены, при одних значениях параметра они строго возрастают, а при других убывают. Исследуется вопрос о нахождении оптимального значения параметра, при котором сходимость последовательности самая быстрая. В качестве примера рассматриваются: последовательность в определении числа «е», постоянная Эйлера – Маскерони и асимптотическая формула Стирлинга. Материал статьи может быть полезен для студентов направления «Прикладная математика» в техническом университете.

Ключевые слова: последовательность; сходимость; монотонность; постоянная Эйлера; формула Стирлинга; ускорение сходимости.

DOI: 10.25206/2307-5430-2020-8-230-236

Введение. Многие важные математические константы определяются как предел некоторой последовательности, например, число e, постоянная Эйлера [1]. Однако эти последовательности сходятся довольно медленно. Возникает вопрос: как ускорить сходимость?

Даны две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, имеющие один и тот же предел C при $n \to \infty$. Будем считать что первая последовательность сходится к числу С быстрее, чем вторая, если $(x_n - C) = o(y_n - C)$ при $n \to \infty$.

Пусть некоторая последовательность $\{x_n(\lambda)\}$ монотонно зависящая от параметра λ, сходится при $n \to \infty$ к одному и тому же пределу C для всех значениях параметра. При этом для некоторого значения параметра $\lambda = \alpha$ последовательность $\{x_n(\alpha)\}$ возрастает, а для другого $\lambda = \beta$ убывает. Тогда между α и β найдётся $\lambda = \lambda^*$, при котором последовательность $\{x_n(\lambda^*)\}$ сходится к числу C быстрее всего. Значение λ^* находится как предел $\lambda^* = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n$ где последовательность $\{\lambda_n\}$ находится из уравнения $x_n(\lambda_n) = C$.

1. Последовательности, быстро сходящиеся к числу *e*

Известно, что последовательность $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ возрастает и ограничена сверху, например, числом 3. а последовательность $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ограничена снизу, например, числом 1, и убывает. Обе они имеют один и тот же предел, равный 2,7182818…, называемый числом ***e***, и справедливы неравенства $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = a_n < e < b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, откуда вытекают неравенства

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \qquad (1)$$

Заметим, что вообще $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\lambda} = e$ при любом постоянном λ.

Возникают две взаимосвязанные задачи:

Задача 1. При каких значениях параметра λ последовательность $c_n(\lambda) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\lambda}$ является возрастающей, а для каких – убывающей (хотя бы начиная с некоторого номера $n = n_0(\lambda)$, зависящего от λ)?

Задача 2. для какого значения $\lambda = \lambda^*$ последовательность $c_n(\lambda) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\lambda}$ сходится к числу ***e*** быстрее всего?

Решения этих задач требуют применения не только теории предела [2, 3] , но и дифференциального исчисления [4].

Решение задачи 1: последовательность $c_n(\lambda) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\lambda}$ при $\lambda \ge \frac{1}{2}$ убывает, а при $\lambda < 0$ возрастает (начиная с некоторого номера).

Решение задачи 2. Найдем последовательность $\{\lambda_n\}$, удовлетворяющую тождеству $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\lambda_n} = e$: $\quad \lambda_n = \dfrac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - n$.

Оптимальное значение λ^* находится как её предел:

$$\lambda^* = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - n\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-(1+x)^{-1}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-1}{2x(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x)} = \frac{1}{2}.$$

Итак, *среди всех последовательностей* $c_n(\lambda) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\lambda}$ *быстрее всего к числу е сходится последовательность* $c_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$.

Например, $a_{1000} = 2{,}7169...$, $b_{1000} = 2{,}7196...$, $c_{1000} = 2{,}718282...$.

На рис. 1 представлены графики функций $y = f_\lambda(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\lambda}$ в области $x > 0$ для значений $\lambda = 0$; $\lambda = 0{,}2$; $\lambda = 0{,}4$; $\lambda = 0{,}5$; $\lambda = 0{,}7$ и $\lambda = 1$. ■

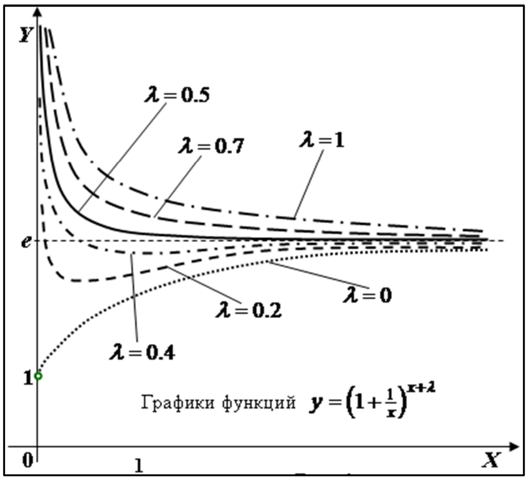

Рис. 1. Графики функций $y = f_\lambda(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\lambda}$

Теперь попробуем найти последовательность, которая сходится к числу *e* еще быстрее, чем $\{c_n\}$.

Рассмотрим еще раз последовательность $c_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \sqrt{1+\frac{1}{n}}$, которая убывает и поэтому стремится к числу ***e*** сверху. Рассмотрим также последовательность $d_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \sqrt{1+\frac{1}{n+1}} = \; = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \sqrt{\frac{n+2}{n+1}}$. Ясно, что $d_n < c_n$. Можно показать, что последовательность $\{d_n\}$ возрастает. Последовательности $\{c_n\}$ и $\{d_n\}$ стремятся к числу ***e*** сверху и снизу соответственно.

Рассмотрим последовательность $e_n(\beta) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \sqrt{1+\frac{1}{n+\beta}}$. Очевидно, что $c_n = e_n(0)$, и $d_n = e_n(1)$, и что $\lim\limits_{n\to\infty} e_n(\beta) = e$ при любом значении $\beta = const$. Найдем оптимальное значения параметра β, при котором последовательность $e_n(\beta)$ **стремится к числу *e* быстрее всего**. Оно равно пределу последовательности $\{\beta_n\}$, удовлетворяющей уравнению $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \sqrt{1+\frac{1}{n+\beta_n}} = e$, т.е. $\beta_n = \left(\frac{1}{e^2 \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2n} - 1} - n\right)$. Вычисления показывают, что $\beta^* = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \frac{1}{6}$.

Итак, *среди всех рассмотренных нами последовательностей быстрей всего к числу **e** стремится последовательность*

$$f_n = \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n \cdot \sqrt{1+\tfrac{1}{n+\frac{1}{6}}} = \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n \cdot \sqrt{\tfrac{6n+7}{6n+1}}\,,$$

причем, $a_n < d_n < e < f_n < c_n < b_n$.

Например, при $n=10$: $a_{10} = 2{,}59374\ldots$, $d_{10} = 2{,}70908\ldots$, $f_{10} = 2{,}71831\ldots$, $c_{10} = 2{,}72034\ldots$, $b_{10} = 2{,}85312\ldots$. А при $n=100$ точность вообще очень высока: $f_{100} = 2{,}718281865\ldots$. Ошибка $\left|f_{100} - e\right| \approx 3\cdot 10^{-8}$.

2. Постоянная Эйлера– Маскерони

Известно, что последовательность $h_n = H_n - \ln n$, где $H_n = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}$, сходится и имеет своим пределом число $\gamma = 0.577215665\ldots$, называемое ***постоянной Эйлера Маскерони***. Доказательство основано на следующем факте:

Последовательность $g_n = H_n - \ln(n+1)$ возрастет, а последовательность $h_n = H_n - \ln n$ убывает и, поскольку $g_n < h_n$, эти последовательности ограничены и имеют один и тот же предел, а именно число γ. т. к. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(h_n - g_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln(n+1) - \ln n\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$.

В самом деле, согласно (1)

$$h_{n+1} - h_n = \left(H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n + \ln n\right) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 0\,.$$

Аналогично,

$$g_n - g_{n-1} = \left(H_n - \ln(n+1) - H_{n-1} + \ln n\right) = \frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > 0.$$

Собственно, очевидно, что при любом значении $\alpha = const$

$$\lim_{n\to\infty}\left(H_n - \ln\left(n+\alpha\right)\right) = \gamma \qquad (2)$$

Оптимальное значение $\alpha = \alpha^*$, при котором сходимость (2) самая быстрая, находится как предел $\alpha^* = \lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n$, где α_n удовлетворяет уравнению

$$H_n - \ln\left(n+\alpha_n\right) = \gamma\text{, т.е. } \alpha_n = \left(e^{H_n-\gamma} - n\right) \text{ и}$$

$$\alpha^* = \lim_{n\to\infty}\left(e^{H_n-\gamma} - n\right) = \lim_{n\to\infty} n\cdot\left(e^{H_n-\gamma-\ln n} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\cdot\left(H_n - \ln n - \gamma\right).$$

Вычисления показывают, что $\alpha^* = \dfrac{1}{2}$ и поэтому $\gamma \approx H_n - \ln\left(n + \frac{1}{2}\right) \equiv \gamma_n$. Например, при $n = 100$:

$$H_{100} = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \tfrac{1}{100} = 5.1873775\ldots,\ g_{100} = H_{100} - \ln 101 = 0.572257,$$
$$h_{100} = H_{100} - \ln 100 = 0.5822037,\ \gamma_{100} = H_{100} - \ln(100.5) = 0.5772197.$$

Ошибка составляет менее $4 \cdot 10^{-6}$.

3. Формула Стирлинга.

Формулой Стирлинга называется асимптотическая формула:

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \text{ при } n \to \infty .$$

Для её вывода надо доказать:

(А) последовательность $x_n = \dfrac{n! \cdot e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ сходится;

(Б) предел этой последовательности равен $\sqrt{2\pi}$.

Обоснование А. Последовательность $x_n = \dfrac{n! \cdot e^n}{n^n \cdot \sqrt{n}}$ убывает, а последовательность $y_n = \dfrac{n! \cdot e^n}{n^n \cdot \sqrt{n+1}}$ возрастает. В самом деле,

$$x_n > x_{n+1} \Leftrightarrow \frac{n! \cdot e^n}{n^n \cdot \sqrt{n}} > \frac{(n+1)! \cdot e^{n+1}}{(n+1)^{n+1} \cdot \sqrt{n+1}} \Leftrightarrow c_n = \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} > e.$$

Аналогично,

$$y_n < y_{n+1} \Leftrightarrow \frac{n! \cdot e^n}{n^n \cdot \sqrt{n+1}} < \frac{(n+1)! \cdot e^{n+1}}{(n+1)^{n+1} \cdot \sqrt{n+2}} \Leftrightarrow d_n = \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n \sqrt{1 + \tfrac{1}{n+1}} < e.$$

Поэтому последовательность $\{x_n\}$ убывает и ограничена снизу любым членом последовательности $\{y_m\}$, например, $y_2 = \dfrac{e^2}{2\sqrt{3}} \cong 2.13$. Поэтому существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n! \cdot e^n}{n^n \cdot \sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n! \cdot e^n}{n^n \cdot \sqrt{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \delta$.

Б. Из формулы Валлиса $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(2n+1)}\cdot\left(\dfrac{2n!!}{(2n-1)!!}\right)^2=\dfrac{\pi}{2}$ следует, что $\delta=\sqrt{2\pi}$ (подробности опускаем).

Поскольку при любом значении $\alpha = const$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot e^n}{n^n\cdot\sqrt{n+\alpha}}=\delta=\sqrt{2\pi}\,, \tag{3}$$

то оптимальное значение $\alpha=\alpha^*$, гарантирующее наиболее быструю сходимость (3), есть предел $\alpha^*=\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n$, где α_n находится из уравнения $\dfrac{n!\cdot e^n}{n^n\cdot\sqrt{n+\alpha_n}}=\sqrt{2\pi}$, откуда $\alpha_n=\dfrac{(n!)^2\,e^{2n}}{n^{2n}2\pi}-n$ и

$$\alpha^*=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n!)^2\,e^{2n}}{n^{2n}2\pi}-n\right). \tag{4}$$

Вычисление предела (4) показывает, что $a^*=\dfrac{1}{6}$.

Итак, мы получили более точную формулу:

$$n!\sim\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot\sqrt{2\pi(n+\tfrac{1}{6})}\equiv\mathrm{St}(n)\,. \tag{5}$$

Например, $10!=3628800$, по уточненной формуле Стирлинга (5): $10!\approx\mathrm{St}(10)\cong 3628685$. Относительная ошибка составляет около 0,003%.

4. Задание для студентов. Рассмотрим последовательность $S_n=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. (а) Подобрать постоянные A и $p>0$ так, чтобы $S_n\sim A\cdot n^p$ при $n\to\infty$; (б) доказать, что последовательность $x_n=S_n-An^p$ убывает, а последовательность $y_n=S_n-A(n+1)^p$ возрастает; (в) доказать что эти две последовательности имеют один и тот же предел δ, причем, $-2<\delta<-1$; (д) найти значение параметра $\lambda=\lambda^*$, при котором последовательность $x_n(\lambda)=S_n-A(n+\lambda)^p$ сходится к числу δ быстрее всего.

Библиографический список

1. Грэхем Р. Л., Кнут Д. Э., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики; пер. с англ. – М.: Мир: БИНОМ, 2009. – 703 с.

2. Морозова В. Д. Введение в анализ: учебник для втузов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2016. – 407 с.

3. Дуров В. В., Мастихин А. В., Савин А. С. Пределы и непрерывность функций: метод. указания к выполнению типового расчета – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2017. – 49 с.

4. Иванова Е. Е. Дифференциальное исчисление функций одного переменного: учебник для втузов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2017. – 407

Сведения об авторе:

Сергей Константинович Соболев

Служебный почтовый адрес: г. Москва, 105005, Рубцовская набережная, 2/18, кафедра «Высшая математика»; e-mail: sergeisob@bmstu.ru; spin-code: 4523-3619.

Научные интересы: методика преподавания высшей математики, автоматическая генерация заданий по математике для студентов.