УДК 517.521.2

С.К. Соболев
кандидат физико-математических наук, доцент
В.Я. Томашпольский
кандидат физико-математических наук
А.В. Тюленев
кандидат физико-математических наук
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ С ПАРАМЕТРОМ В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Аннотация. Рассмотрены методические аспекты преподавания курса «Ряды» в техническом вузе. Обсуждается необходимость включения в курс задач повышенной трудности, в частности, на исследование числовых рядов с параметром для более глубокого усвоения учебного материала, формирования у учащихся исследовательских аналитических навыков и четкого видения места данного раздела среди других разделов курса математического анализа. Подробно рассмотрены несколько примеров исследования сходимости числового ряда с параметром. В каждом примере указываются знания и навыки, необходимые для его решения.

Ключевые слова: числовой ряд; признак сходимости; параметр; формула Стирлинга; абсолютная сходимость; уловная сходимость.

DOI: 10.25206/2307-5430-2020-8-236-242

Числовые ряды являются важнейшим средством математического анализа [1, 2]. Традиционно студенты технических вузов в разделе «Числовые ряды» изучают необходимый признак, признаки сравнения, Даламбера, радикальный и интегральный признаки Коши, признаки Лейбница и Дирихле [3, 4, 5].

Мы предлагаем рассмотреть задачи на исследование рядов с параметрами. Решение такой задачи носит исследовательский характер, поскольку приходится рассматривать разные случаи. От студентов требуется уверенное владение различными разделами курса математического анализа. Задачи такого типа вызывают интерес у обучающихся и служат повышению мотивации к изучению данного раздела.

Разберем несколько задач на исследование сходимости положительного числового ряда с параметром.

Пример 1. При каких положительных значениях параметра p сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)^{p}$?

Решение. Подобрать признак для исследования довольно сложно. Методом исключения можно догадаться, что подойдет предельный признак. Возникает вопрос, как подобрать эквивалентный ряд? Необходимо применить формулу Маклорена: $\sin x = x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^4\right)$ при $x\to 0$. Получим $\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)^{p}\sim\frac{1}{(6n)^{3p}}$ при $n\to\infty$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(6n)^{3p}}$ сходится при $p>\frac{1}{3}$ (как ряд Дирихле). Следовательно, по предельному признаку сравнения исходный ряд сходится также при $p>\frac{1}{3}$.

При решении данной задачи требуется хорошо знать раздел «Формула Тейлора», а также хорошо ориентироваться в разделе «сравнение бесконечно малых».

Пример 2. При каких положительных значениях параметра p сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(\operatorname{arcctg} n)^{p}$?

Решение. Вновь задачу можно решить, применив предельный признак. Эквивалентный ряд можно подобрать, если применить формулу $\operatorname{arcctg} x=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, верную при $x>0$, поэтому $\operatorname{arcctg} x\sim\frac{1}{x}$ при $x\to+\infty$. Таким образом, $(\operatorname{arcctg} n)^{p}\sim\frac{1}{n^{p}}$ при $n\to\infty$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p}}$ сходится при $p>1$ (как ряд Дирихле). Следовательно, по предельному признаку сравнения исходный ряд сходится при $p>1$ и расходится при $p\le 1$.

Для решения этой задачи нужно знать таблицу эквивалентности.

Пример 3. При каких положительных значениях параметров p и q сходится ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{p}(\ln n)^{q}}$?

Решение. Сначала рассмотрим разные значения параметра p. При $p>1$ можно применить мажорантный признак сравнения: $\frac{1}{n^p(\ln n)^q}\le\frac{1}{n^p(\ln 2)^q}$. Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p(\ln 2)^q}$ сходится при любом значении q (как ряд Дирихле). Следовательно, по признаку сравнения исходный ряд сходится.

При $p<1$ также можно применить признак сравнения, однако потребуются более сложные оценки. Неравенство $\frac{1}{n^p(\ln n)^q}\ge\frac{1}{n}$ равносильно неравенству $\ln n\le n^{\frac{1-p}{q}}$. Как известно, последовательность $\ln n$ имеет меньший порядок роста, чем последовательность n^{α} при любом $\alpha>0$, значит существует натуральное m такое, что для всех $n\ge m$ выполняется неравенство $\frac{1}{n^p(\ln n)^q}\ge\frac{1}{n}$. Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится (как гармонический). Следовательно, по признаку сравнения исходный ряд также расходится при любом значении q.

Теперь рассмотрим случай $p=1$. Для исследования ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^q}$ применим интегральный признак Коши. Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^q}$. Эта функция непрерывна при $x\ge 2$, убывает и $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. Исследуем несобственный интеграл первого рода от данной функции. При $q\ne 1$ $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^q}=\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{d\ln x}{(\ln x)^q}=\int\limits_{\ln 2}^{+\infty}\frac{dt}{t^q}$. Данный интеграл сходится при $q>1$ и расходится при $q\le 1$. Следовательно, при $p=1$ и $q>1$ ряд сходится, а при $p=1$ и $q\le 1$ ряд расходится по интегральному признаку Коши.

Для решения этой задачи требуется комплекс различных навыков. Нужно владеть техникой интегрирования, знать теорию несобственных интегралов, уметь сравнивать бесконечно большие величины.

Теперь разберем пару примеров на исследование абсолютной и условной сходимости знакопеременного ряда с параметром.

Пример 4. Исследовать сходимость ряда в зависимости от параметра p

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n p^n}{n!}.$$

Решение. Так как в условии есть множитель $n!$, то, скорее всего, подойдет признак Даламбера, который мы применим к ряду из модулей. Найдем предел:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^{n+1}p^{n+1}}{(n+1)!}\right|\cdot\left|\frac{n!}{n^n p^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}|p|n^n}{(n+1)n^n}=|p|\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}=$$

$$=|p|.\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=|p|e.$$

При $|p|<\frac{1}{e}$ ряд сходится абсолютно, при $|p|>\frac{1}{e}$ ряд расходится. Пусть теперь $|p|=\frac{1}{e}$.

При $p=\frac{1}{e}$ получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!e^n}$. Для его исследования применим формулу Стирлинга:

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \text{ при } n\to\infty.$$

Действительно, $\frac{n^n}{n!e^n}\sim\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(\frac{e}{n}\right)^n\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ при $n\to\infty$. Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ расходится (как ряд Дирихле), то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!e^n}$ расходится по предельному признаку. При $p=-\frac{1}{e}$, получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!(-e)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, к которому попробуем применить признак Лейбница. В самом деле, $a_n=\frac{n^n}{n!e^n}\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\to 0$ при $n\to\infty$ и $a_n>0$. Поскольку последовательность, эквивалентная монотонной, не обязана быть монотонной, убывание последовательности a_n проверим непосредственно:

$$a_{n+1} \,?\, a_n \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \,?\, 1 \Leftrightarrow \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{e^n n!}{n^n} \,?\, 1 \Leftrightarrow \frac{(n+1)^n}{n^n e} \,?\, 1 \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \,?\, e.$$

Поскольку последовательность $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ возрастает и имеет своим пределом число *e*, то $b_n < e$, знак ? есть <, т.е. $a_{n+1} < a_n$. Следовательно, по признаку Лейбница ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!(-e)^n}$ сходится, причём, условно.

Для решения этого примера надо хорошо знать тему «предел последовательности».

Пример 5. Исследовать сходимость ряда в зависимости от параметра *p*:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\sqrt{3})}{n^p}.$$

Решение. При $p \le 0$ ряд расходится, т.к. не выполняется необходимый признак. При $p > 1$ ряд сходится абсолютно по признаку сравнения: $\left|\frac{\sin(n\sqrt{3})}{n^p}\right| \le \frac{1}{n^p}$. При $0 < p \le 1$ применим признак Дирихле: $a_n = \frac{1}{n^p} > 0$, убывает и стремится к нулю при $n \to \infty$, $b_n = \sin\left(n\sqrt{3}\right)$, последовательность частичных сумм $B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ ограничена, поскольку из тригонометрии известно, что $\sum\limits_{k=1}^{n}\sin(k\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ (при $\alpha \ne 2\pi n$), и поэтому $|B_n| \le \frac{1}{\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\sqrt{3})}{n^p} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n b_n$ сходится. Аналогично показывается, что и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\beta)}{n^p}$ для любого β сходится при $p > 0$. Покажем, что наш ряд сходится при $0 < p \le 1$ условно. В самом деле, $\left|\frac{\sin(n\sqrt{3})}{n^p}\right| \ge \frac{\sin^2(n\sqrt{3})}{n^p} = \frac{1-\cos(2n\sqrt{3})}{2n^p} = x_n - y_n$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^p}$. расходится при $p \le 1$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(2n\sqrt{3}\right)}{2n^p}$ сходится по признаку Дирихле, поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x_n - y_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(n\sqrt{3})}{n^p}$, а вмести с ним и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin(n\sqrt{3})}{n^p}\right|$ расходится.

Для решения этой задачи требуется хорошо знать тригонометрию и свойства сходящихся рядов.

Эти задачи и подобные им можно на экзамене предложить студентам, претендующим на отличную оценку.

Материалы этой статьи докладывались на методическом семинаре кафедры «Высшая математика» [6].

Библиографический список

1. Власова Е.А. Ряды: учебник для втузов; – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. – 611 с.
2. Зорич В. А. Математический анализ: учебник для вузов. – М.: Изд-во МЦНМО, 2018. Ч. 1. 2018., 564 с.
3. Томашпольский В. Я., Шевченко М. Н., Янов И. О. Числовые ряды: метод. указания к выполнению типового расчета – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. – 33 с.
4. Карданов С. О. Числовые ряды. Теория и практика: метод. указания к выполнению домашнего задания – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2017. – 43 с.
5. Кандаурова И. Е., Михайлова О. В. Числовые ряды: метод. указания к решению задач. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2017. – 42 с.
6. Соболев С.К., Томашпольскаий В.Я., Методический семинар на кафедре «Высшаяя математика» // Гуманитарный: электронный журнал. – 2018. – № 7. http://hmbul.ru/catalog/edu/pedagog/537.html DOI: 10.18698/2306-8477-2018-7-537

Сведения об авторах:

Сергей Константинович Соболев

Служебный почтовый адрес: Москва, 105005, Рубцовская набережная, 2/18, кафедра «Высшая математика»; e-mail: sergeisob@bmstu.ru; spin-code: 4523-3619.

Научные интересы: методика преподавания высшей математики, автоматическая генерация заданий по математике для студентов.

Виктор Яковлевич Томашпольский

Служебный почтовый адрес: Москва, 105005, Рубцовская набережная, 2/18, кафедра «Высшая математика»; e-mail: tomashpolski@bmstu.ru; spin-code: 1469-0849.

Научные интересы: методика преподавания высшей математики, история математики в России.

Андрей Всеволодович Тюленев

Служебный почтовый адрес: Москва, 105005, Рубцовская набережная, 2/18, кафедра «Высшая математика»; e-mail: tyulenevav@ya.ru; spin-code: 6966-6032.

Научные интересы: методика преподавания высшей математики, обыкновенные дифференциальные уравнения, теория алгоритмов и математическая логика.