УДК 519.178

Д. А. Булекбаев[1]
доктор технических наук, доцент
А. В. Морозов[1]
кандидат физико-математических наук, профессор
М. А. Пирожков
[1]Военно-космическая академия имени А. Ф. Можайского, г. Санкт-Петербург, Россия

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ ПАРОСОЧЕТАНИЙ В ПРОИЗВОЛЬНОМ ГРАФЕ

Аннотация. Предлагается алгоритм построения всех наибольших паросочетаний в произвольном связном графе, основанный на предварительном представлении графа специальной матрицей с последующей процедурой комбинаторного построения паросочетаний. Алгоритм использует способ кодирования элементов графа с помощью простых чисел. Тем самым, реализуется идея цифровизации графа. Такой подход позволяет работать с графом как с числовым объектом, не теряя взаимно однозначного соответствия с его геометрической структурой. Изложенный материал может быть использован как при решении конкретных задач теории графов, так и в учебном процессе.

Ключевые слова: *граф; простые числа; паросочетание.*

DOI: 10.25206/2307-5430-2021-9-6-10

Рассмотрим связный граф $G(V,E)$, где V − множество вершин, а E − множество ребер. Подмножество ребер $M \subset E$ называется *паросочетанием* на G, если для любого ребра $(a,b) \in M$ следует, что $deg\,(a) = deg(b)\ = 1$. Паросочетание называется *наибольшим*, если его мощность наибольшая среди всех паросочетаний в G [1,2].

В статье [3] отмечалось, что выбор эффективной и удобной структуры данных представления графа имеет принципиальное значение для разработки алгоритмов решения задач на графах, а, следовательно, является актуальной задачей. В настоящей статье, в отличии от работы [3], вводится второй метод кодирования. Он состоит в том, что простыми числами кодируются не ребра графа, а его вершины. Это позволяет отказаться от использования дополнительной процедуры – факторизации чисел.

Разберем алгоритм на конкретном примере куба $К_3$ (рис. 1).

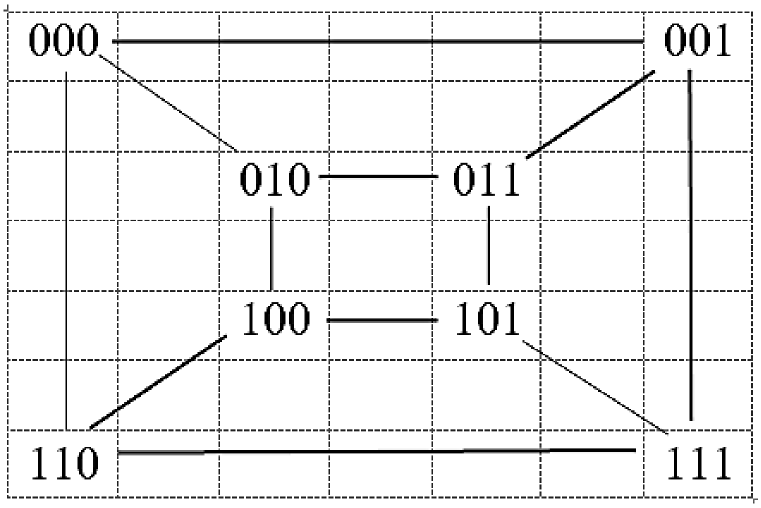

Рис. 1. Куб K_3

В соответствии с предлагаемым методом занумеруем вершины графа K_3 простыми числами так как это показано на рис. 2.

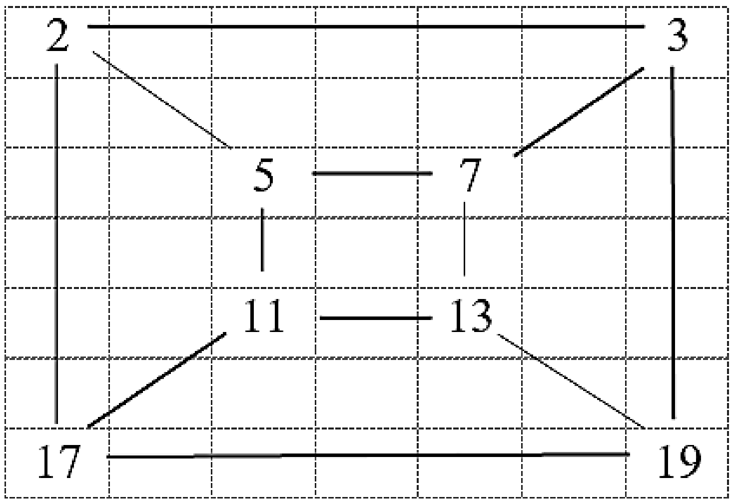

Рис. 2. Граф K_3

После этого ребра графа кодируются произведениями простых чисел кодов вершин, находящихся на концах ребер. Так вершины 2 и 3 соединяет ребро с кодом 2×3, вершины 13 и 19 соединены ребром с кодом 13×19 и т.д.

Введем в рассмотрение матрицу А, определяющую список смежности нашего графа:

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 5 & 7 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 7 & 5 & 13 & 11 & 11 & 13 \\ 17 & 19 & 11 & 13 & 17 & 19 & 19 & 17 \end{Vmatrix}.$$

Здесь в первой строке записаны коды всех вершин графа, а в столбцах – коды вершин, смежных с вершинами в первой строке.

Далее, сведем список смежности в следующую таблицу (полуматрицу)

$$\left\| \begin{array}{cccccccc} 2 & 3 & 5 & 7 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ & 2 & 2 & & & & 2 & \\ & & & 3 & & & & 3 \\ & & & 5 & 5 & & & \\ & & & & & 7 & & \\ & & & & & 11 & 11 & \\ & & & & & & & 13 \\ & & & & & & & 17 \end{array} \right\|.$$

Здесь условно записаны все коды ребер графа. В первой строке опять перечислены коды вершин графа. В строке с двойками перечислены коды ребер $2 \times 3, 2 \times 5, 2 \times 17$. В строке с тройками – коды ребер $3 \times 7, 3 \times 19$ и т.д.

Чтобы получить паросочетание надо выбирать ребра, не имеющие общих концевых вершин. В условиях кодирования простыми числами это означает, что НОД (наибольший общий делитель) кодов ребер должен равняться 1.

Работу алгоритма поясним на нашем примере. Взяв первое ребро 2×3, необходимо удалить строку с тройками, иначе НОД $(2 \times 3, 3 \times 7) = 3$. Теперь можно выбрать код ребра 5×7 и удалить строку с семерками. На очереди код 11×13 и после удаления строки 13, остается код ребра 17×19. Таким образом, получено паросочетание $\{2 \times 3,\ 5 \times 7,\ 11 \times 13,\ 17 \times 19\}$.

В общем виде этот процесс сводится к построению следующего леса, состоящего из трех деревьев:

	2×3			**2×5**			**2×17**	
5×7		**5×11**	**3×7**		**3×19**	**3×7**		**3×19**
11×13	**11×17**	**7×13**	**11×13**	**11×17**	**7×13**	**5×11**	**5×7**	**5×11**
17×19	**13×19**	**17×19**	**17×19**	**13×19**	**11×17**	**13×19**	**11×13**	**7×13**

На каждом уровне к каждой ветви присоединяются значения тех ребер, которые взаимно просты со всеми числами в ветви.

Замечание. При численной реализации данного алгоритма целесообразно наращивать матрицу паросочетаний по следующей схеме:

первая итерация $\left\| \begin{array}{c} 2 \times 3 \\ 2 \times 5 \\ 2 \times 17 \end{array} \right\|$, вторая итерация $\left\| \begin{array}{cc} 2 \times 3 & 5 \times 7 \\ 2 \times 3 & 5 \times 11 \\ 2 \times 5 & 3 \times 7 \\ 2 \times 5 & 3 \times 19 \\ 2 \times 17 & 3 \times 7 \\ 2 \times 17 & 3 \times 19 \end{array} \right\|$, и т.д.

На последнем шаге получаем матрицу B, содержащую все 9 паросочетаний

$$B = \left\| \begin{matrix} 6 & 35 & 143 & 323 \\ 6 & 35 & 187 & 247 \\ 6 & 55 & 91 & 323 \\ 10 & 21 & 143 & 323 \\ 10 & 21 & 187 & 247 \\ 10 & 57 & 91 & 187 \\ 34 & 21 & 55 & 247 \\ 34 & 57 & 35 & 143 \\ 34 & 57 & 55 & 91 \end{matrix} \right\|.$$

Факторизовав элементы этой матрицы в виде произведений простых чисел, получаем окончательный результат

$$B = \left\| \begin{matrix} (2,3) & (5,7) & (11,13) & (17,19) \\ (2,3) & (5,7) & (11,17) & (13,19) \\ (2,3) & (5,11) & (7,13) & (17,19) \\ (2,5) & (3,7) & (11,13) & (17,19) \\ (2,5) & (3,7) & (11,17) & (13,19) \\ (2,5) & (3,19) & (7,13) & (11,17) \\ (2,17) & (3,7) & (5,11) & (13,19) \\ (2,17) & (3,19) & (5,7) & (11,13) \\ (2,17) & (3,19) & (5,11) & (7,13) \end{matrix} \right\|.$$

В заключении отметим, что данный алгоритм можно использовать при решении конкретных задач, математические модели которых представляются графами, а также в учебном процессе при изучении соответствующей темы курса «Дискретная математика».

Библиографический список

1. Харари Ф. Теория графов. М.: Едиториал УРСС. 2003. 300 с.

2. Андерсон Джеймс А. Дискретная математика и комбинаторика: Пер. с англ. М.: Издательский дом «Вильясм», 2003. 960 с.

3. Морозов А. В., Пирожков М. А. Новый способ компьютерного представления графов // Academy. 2018. № 5 (32). С. 5–7.

Сведения об авторах:

Булекбаев Дастанбек Абдыкалыкович

Служебный почтовый адрес: 197082, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Ждановская, 13; e-mail: vka@mil.ru.

Морозов Алексей Валентинович
Служебный почтовый адрес: 197082, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Ждановская, 13; e-mail: vka@mil.ru; spin-code: 1901-4920.

Пирожков Михаил Александрович
Служебный почтовый адрес: 197082, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Ждановская, 13; e-mail: vka@mil.ru.