УДК 517.5

С. О. Папков
доктор физико-математических наук, доцент
Ю. И. Папкова
кандидат физико-математических наук, доцент
И. В. Ольшанская
кандидат технических наук, доцент
Севастопольский государственный университет, г. Севастополь, Россия

О СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЯХ В СТАНДАРТНОМ КУРСЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Аннотация. Специальные функции являются неотъемлемой частью современного математического образования. В то же время для многих инженерных и экономических направлений подготовки знакомство с ними не включается в стандартный курс высшей математики. В статье представлен ряд методических приемов, позволяющих познакомить студентов с некоторыми наиболее востребованными специальными функциями на занятиях высшей математикой при изучении таких разделов как определенный интеграл, дифференциальные уравнения и ряды. Предлагается использовать специальные функции в образовательном процессе как средство выработки продуктивных качеств у студентов, которые в дальнейшем способствуют адаптации в профессиональной деятельности.

Ключевые слова: *специальные функции; высшая математика; методика преподавания.*

DOI: 10.25206/2307-5430-2021-9-87-93

Математика интенсивно проникает во все сферы человеческой деятельности, так как ее аппарат позволяет объективно отражать законы окружающего мира, используя широкий спектр математических функций, методов и приемов, умений для поиска связей между различными процессами.

Целью университетского курса высшей математики является не простое ознакомление с различными математическими понятиями и их свойствами, а приобретение умений, которые позволят будущему специалисту проявить себя в профессиональной деятельности при решении прикладных задач, усовершенствовать свое логическое и абстрактное мышление. Для достижения данной цели современный подход к разработке программ курса высшей математики должен опираться на профессиональное направление будущего специалиста, поэтому должно присутствовать более углубленное исследование связи математики с техническими и специальными профессиональными дисциплинами. Например, при углубленном изучении высшей математики, в различных приложениях используют специальные функции [1], их применяют в задачах физики, акустики, теории упругости, гидродинамики, теории вероятностей, теории информации, автоматизации и т.д.

Согласно общепринятому определению, которое, например, представлено в Википедии: «Специальные функции – это встречающиеся в различных приложениях математики (чаще всего — в различных задачах математической физики) функции, которые не выражаются через элементарные функции. Специальные функции представляются в виде рядов или интегралов». С другой стороны определение в английском варианте Википедии оказывается созвучно с определением в Britannica: «Special functions are particular mathematical functions that have more or less established names and notations due to their importance in mathematical analysis, functional analysis, geometry, physics, or other applications». Заметим, что в этом определении отсутствует упоминание об элементарных функциях. Действительно, если вспомнить, что при определенных значениях параметров специальные функции могут вырождаться в элементарные функции [2] (например, гипергеометрическая функция Гаусса ${}_2F_1(a, b, c; z)$, в частном случае ${}_2F_1(-n, b, b;\ x) = (1-x)^n$, а ортогональные многочлены Чебышева, Лаггера, Якоби, Лежандра и др. будучи специальными функциями являются многочленами, то есть элементарными функциями, отсутствие оговорки о выражении через элементарные функции в англоязычном определении представляется вполне закономерным.

Тем не менее, для введения в рассмотрение большинства специальных функций наиболее важным с методической точки зрения является именно невозможность их выразить в общем случае через знакомые студентам со школьной скамьи элементарные функции. Поэтому предлагается знакомить студентов со специальными функциями при вычислении «не берущихся» интегралов, при решении некоторых дифференциальных уравнений, решении краевых задач математической физики.

В частности, многие специальные функции, представленные в виде интегралов можно ввести в разделе «Определенный интеграл», рассматривая интегралы, первообразные которых не выражаются через элементарные функции. К ним относятся:

– гамма-функция

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt;$$

– функция ошибок

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt;$$

– интегральный синус

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}dt;$$

– интегральный косинус

$$\operatorname{Ci}(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}dt;$$

– интегральная показательная функция

$$\operatorname{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t}dt, \ (-\infty < x < 0);$$

– интегральный логарифм

$$\operatorname{Li}(x) = \int_0^x \frac{1}{\ln t}dt, \ (x > 0, x \neq 1).$$

Подобные функции встречаются в различных технических задачах, а их значения приводятся в специальных таблицах.

В качестве примера можно рассмотреть «не берущийся» интеграл, который студенты не могут вычислить по формуле Ньютона-Лейбница, опираясь лишь на знания элементарных функций

$$\int_0^1 \frac{\sin 2x}{x}dx.$$

Вначале используем специальную функцию интегральный синус и найдем значение интеграла по формуле Ньютона Лейбница, опираясь на таблицу значений этой специальной функции (например, из [1]):

$$\int_0^1 \frac{\sin 2x}{x}dx = \int_0^2 \frac{\sin t}{t}dt = \operatorname{Si}(2) - \operatorname{Si}(0) = 1{,}605$$

Здесь же в аудитории перед студентами, можно найти данный интеграл приближенно с помощью численного метода трапеций с шагом $h = 0{,}2$:

$$\int_0^1 \frac{\sin 2x}{x}dx \approx \frac{2{,}000}{2} + 1{,}947 + 1{,}793 + 1{,}553 + 1{,}249 + \frac{0{,}909}{2} = 1{,}600.$$

Указав, конечно, что в точке $x = 0$ вместо значения подынтегральной функции берется ее предел. Погрешность вычисления составила ε = 0,005. Подобный подход также будет полезен при изложении численных методов интегрирования в качестве верификации полученных приближенных значений.

В математическом анализе, в теории функций комплексного переменного часто используется гамма-функция, так как с ее помощью выражается большое количество интегралов, сумм рядов и т.д. К сожалению, в курсе высшей математики для некоторых инженерных и экономических специальностей ее часто не упоминают, хотя гамма-функция играет огромную роль в математической статистике, в технических и экономических приложениях. Например [3], плотность распределения χ^2 Пирсона с n степенями свободы выражается формулой

$$f(x) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x/2}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \;(x \geq 0)$$

А плотность распределения Стьюдента с n степенями свободы имеет вид

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

Очевидно, что, если студенты не знакомы с гамма-функцией, подобные формулы попросту не будут восприниматься, что не позволяет полностью овладеть материалом.

Специальная функция дзета-функция Римана

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \;(s \in C, Re\; s > 1)$$

рассматривается в аналитической теории чисел, имеет приложения в теоретической физике. Дзета-функция появилась в исследованиях Эйлера при вещественном значении s, он вывел формулу, связывающую дзета-функцию с простыми числами. Полученные формулы широко используют в криптографии, поэтому студентам специальности информационная безопасность следует больше внимания уделить изучению дзета-функции, а также ее свойствам.

Познакомить студентов с дзета-функций предлагается при изучении теории рядов. Например, при изложении достаточных признаков сходимости числовых рядов с положительными членами изучается признак сравнения в предельной форме, при этом, эталонным рядом сравнения во многих учебниках [4] предлагается брать ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

который очевидно сходится при $s > 1$ и расходится в противном случае. Связь данного ряда с дзета-функций очевидна, и на наш взгляд, является удобным случаем познакомить студентов с этой функцией и некоторыми ее значениями и свойствами.

При решении дифференциальных уравнений используют специальные функции: сферические, цилиндрические и т.д. Например, уравнения математической физики, содержащие оператор Лапласа в цилиндрических координатах, с помощью метода разделения переменных, сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям, содержащим цилиндрические функции: Бесселя, Ханкеля, Макдональда и т.д. Хорошо разработанная теория данных функций, наличие подробных таблиц и широкая область применения (электромагнитные волны в цилиндрическом волноводе, теплопроводность в цилиндрических объектах, формы колебания тонкой мембраны, обработка сигналов) служат достаточным основанием, чтобы отнести цилиндрические функции в число наиболее важных специальных функций. Цилиндрические функции Бесселя являются самыми распространенными из всех специальных функций. Они имеют многочисленное приложение в астрономии, механике и физике. Применение данных специальных функций студентами, изучающими курс уравнения математической физики, позволит решить разнообразные краевые задачи. При изучении темы «Линейные однородные дифференциальные уравнений второго порядка» имеется возможность показать в качестве примера уравнения Бесселя, рассказать о фундаментальной системе решений этих уравнений.

В заключении хотелось бы еще раз отметить, что все предметы математического цикла составляют основу технического образования будущего инженера, так как без использования математических знаний в процессе профессиональной деятельности невозможно рассчитывать на создание высокотехнологической и конкурентоспособной продукции. Понимание и применение специальных функций позволит студентам решать разнообразные задачи, расширит их математический кругозор, будет способствовать формированию интереса к изучению высшей математики.

Библиографический список

1. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами: Пер. с англ. / Ред. Абрамовица М., Стиган И. М.: Наука, 1979. 831 с.

2. Прудников А. П. Интегралы и ряды. Дополнительные главы / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит-ры, 1986. 800 с.

3. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для втузов. М.: «Высшая школа», 1977. 479 с.

4. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 1. М.: Наука, 1974. 480 с.

Сведения об авторах:

Станислав Олегович Папков

Служебный почтовый адрес: ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет», 299053, г. Севастополь, ул. Университетская 33; e-mail: SOPapkov@sevsu.ru, stanislav.papkov@gmail.com.

Научные интересы автора: свободные колебания, устойчивость, теория упругости, аналитические решения, бесконечные системы линейных уравнений, интегральные уравнения, асимптотика, методика преподавания высшей математики.

Страница автора в eLibrary.ru:

https://elibrary.ru/author_items.asp?authorid=881393&pubrole=100&show_refs=1&show_option=0.

Юлия Игоревна Папкова

Служебный почтовый адрес: ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет», 299053, г. Севастополь, ул. Университетская 33, e-mail: YIPapkova@sevsu.ru, yulia.papkova@gmail.com.

Научные интересы автора: акустика моря, теория волноводов, аналитические решения, асимптотика, методика преподавания высшей математики.

Страница автора в eLibrary.ru:

https://elibrary.ru/author_items.asp?authorid=906489&pubrole=100&show_refs=1&show_option=0.

Ирина Владимировна Ольшанская

Служебный почтовый адрес: ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет», 299053, г. Севастополь, ул. Университетская 33; e-mail: irinaolsh@mail.ru.

Научные интересы автора: гибкие производственные системы, надежность, производительность, виды простоев, методика преподавания высшей математики.

Страница автора в eLibrary.ru:

https://elibrary.ru/author_items.asp?authorid=806327&pubrole=100&show_refs=1&show_option=0.