УДК 378.147, 517/926

**С. К. Соболев**
кандидат физико-математических наук, доцент
**В. Я. Томашпольский**
кандидат физико-математических наук, доцент
**А. В. Тюленев**
кандидат физико-математических наук, доцент
**И. Л. Покровский**
кандидат физико-математических наук, доцент
Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия

# НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ В КУРСЕ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ» В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

**Аннотация.** Рассмотрены методические аспекты преподавания обыкновенных дифференциальных уравнений в техническом университете. Анализируется программа курса по дифференциальным уравнениям в ИМТУ. Обсуждается необходимость включения в курс нестандартных задач, в частности, задач с параметром для более глубокого усвоения учебного материала, формирования у студентов исследовательских аналитических навыков и четкого видения места данного раздела среди других разделов курса высшей математики. Разобраны примеры из теории линейных дифференциальных равнений.

**Ключевые слова:** *дифференциальное уравнение; линейное уравнение; решение; параметр; фундаментальная система; определитель Вронского.*

**DOI: 10.25206/2307-5430-2021-9-98-103**

## 1. Исторический экскурс

Дифференциальные уравнения являются важнейшим разделом высшей математики. Дифференциальные уравнения применяются в курсах теоретической механики, физики, сопротивлении материалов и многих других.

Высшую математику В МГТУ им. Н.Э. Баумана (тогда он назывался Императорским Московским техническим училищем) преподают с 1868 г. Становление её курса связано с именем первого профессора по кафедре высшей математики училища А. В. Летникова (1837–1888). Выдающийся российский математик и педагог, Алексей Васильевич Летников был одним из организаторов Московского Математического общества, в котором он курировал дифференциальные уравнения [1].

Программа курса математики для различных отделений училища в то время включала аналитическую геометрию, дифференциальное и интегральное исчисление, сферическую геометрию, начала дифференциальной геометрии и высшей алгебры. Заключительным разделом курса были дифференциальные уравнения. Изучались однородные, линейные уравнения первого порядка, Уравнение Бернулли, Клеро. Линейное уравнения *n*-го порядка, его решение в разных случаях. За более, чем 150 лет программа данного раздела не претерпела существенных изменений. Основное внимание и тогда, и в настоящее время на практических занятиях уделяется технике решения всех изучаемых типов уравнений [2, 3, 4].

Мы предлагаем на практических занятиях наряду с обычными задачами рассмотреть задачи повышенной трудности, в частности, задачи с параметрами. Задачи такого типа развивают у учащихся умение подойти к проблеме с разных сторон, искать различные способы решения. Такие задачи вызывают интерес у обучающихся и служат повышению мотивации к изучению данного раздела.

## 2. Нестандартные задачи

Разберем несколько примеров на тему «Линейные дифференциальные уравнения».

**Пример 1.** Даны две функции $y_1 = x^2$ и $y_2 = \cos x$. Составить (а) неоднородное линейное дифференциальное уравнение первого порядка, для которого эти две функции были бы частными решениями; (б) однородное линейное дифференциальное уравнение наименьшего порядка, фундаментальная система решений которого содержит эти две функции (1°) с постоянными коэффициентами; (2°) с переменными коэффициентами.

**Решение.** (а) Общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка имеет вид

$$y = Cf(x) + g(x).$$

При этом можно в качестве частного решения взять $g(x) = x^2$, а в качестве решения однородного уравнения – разность двух решений неоднородного уравнения: $f(x) = \cos x - x^2$.

Таким образом, общее решение искомого уравнения имеет вид

$$y = C\left(\cos x - x^2\right) + x^2. \quad (1)$$

Чтобы получить это уравнение, продифференцируем (1) по $x$

$$y' = C(-\sin x - 2x) + 2x \quad (2)$$

и исключим константу $C$ из (1) и (2).

Получим $\dfrac{y'}{2x+\sin x} + \dfrac{y}{\cos x - x^2} = \dfrac{x^2}{\cos x - x^2} + \dfrac{2x}{2x+\sin x}$.

(б1°) Общее решение искомого линейного однородного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 \cos x + C_5 \sin x.$$

Следовательно, характеристический многочлен этого уравнения имеет корни $\lambda = 0$ (кратности 3) и $\lambda = \pm i$ (кратности 1 каждый) и поэтому имеет вид

$$\lambda^3(\lambda^2+1) = \lambda^5 + \lambda^3.$$

Само линейное однородное уравнение такое: $y^{(5)} + y^{(3)} = 0$.

(б) Общее решение искомого дифференциального уравнения в этом случае имеет вид $y = C_1 x^2 + C_2 \cos x$. Система функций $\left\{y; x^2; \cos x\right\}$ линейно зависима. Значит, определитель Вронского данной системы равен нулю:

$$W[y, x^2, \cos x] = \begin{vmatrix} y & x^2 & \cos x \\ y' & 2x & -\sin x \\ y'' & 2 & -\cos x \end{vmatrix} = 0.$$

Разложив этот определитель по первому столбцу, получим:

$$y''\left(-x^2 \sin x - 2x\cos x\right) + y'(x^2+2)\cos x + y\left(-2x\cos x + 2\sin x\right) = 0.$$

Или

$$y'' - y'\frac{(x^2+2)\cos x}{x^2 \sin x + 2x\cos x} + y\frac{2x\cos x - 2\sin x}{x^2\sin x + 2x\cos x} = 0.$$

**Пример 2.** При каких значениях параметров $p$ и $q$ все решения уравнения $y'' + py' + qy = 0$ ограничены на $\mathbb{R}$?

**Решение.** Составим характеристическое уравнение $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. Если $D \geq 0$, то это уравнение имеет два вещественных корня первой кратности $\lambda_1$ и $\lambda_2$ или вещественный двукратный корень $\lambda$. В этом случае среди решений исходного дифференциального уравнения есть неограниченная функция вида $y = e^{\lambda x}$ (при двукратном корне $\lambda = 0$ среди решений есть неограниченная функция $y = x$).

Если $D < 0$ (т.е. $q > p^2/4$), то характеристическое уравнение имеет два комплексных корня первой кратности $\lambda = \alpha \pm i\beta$, где $\alpha = -p/2$ и $\beta = \sqrt{q - p^2/4}$. Общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид $y = c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$. Все решения будут ограничены только при $\alpha = 0$, а значит и при $p = 0$. Итак все решения уравнения $y'' + py' + qy = 0$ ограничены на $\mathbb{R}$ только при $p = 0$ и $q > 0$.

**Ответ:** $p = 0$; $q > 0$.

Для решения данной задачи необходимо владеть навыками исследовательской работы. Нужно рассматривать и анализировать разные случаи.

**Пример 3.** Могут ли функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, графики которых изображены на рисунке 1, быть решениями одного и того же линейного однородного дифференциального уравнение второго порядка $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ с непрерывными коэффициентами $a(x)$, $b(x)$?

**Решение.** Рассмотрим определитель Вронского для системы функций $\{f(x); g(x)\}$:

$$W(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}.$$

Поскольку в точке $x_0$ функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют экстремум, то $f'(x_0) = g'(x_0) = 0$, следовательно, $W(x_0) = 0$, а значит функции $f(x)$ и $g(x)$ линейно зависимы, т.е. $f(x) = kg(x)$. Но в этом случае нули этих функций должны совпадать. А на чертеже графики функций $f(x)$ и $g(x)$ пересекают ось $OX$ в разных точках. Следовательно, функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ не могут быть решениями одного и того же линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка.

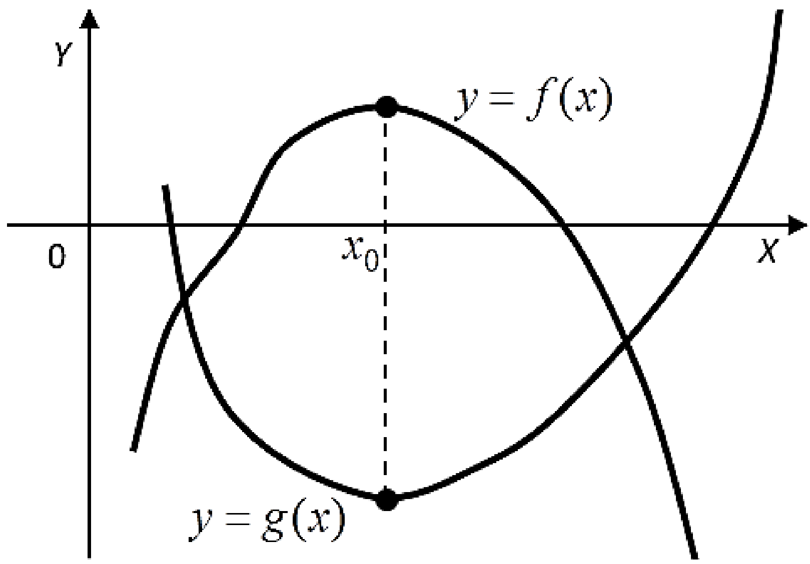


*Рис. 1.* Грфики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$

Эти задачи и подобные им можно на экзамене предложить студентам, претендующим на отличную оценку.

Материалы этой статьи докладывались на методическом семинаре кафедры «Высшая математика» [5].

## Библиографический список

1. Томашпольский В. Я. Становление и развитие научной школы математики Императорского Московского технического училища // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. № 5(17). 13 с. DOI: 10.25206/2307-5430-2021-9-- 10.18698/2308-6033-2013-5-733.

2. Ефремова С. Н., Косова А. В., Ласковая Т. А. Методические аспекты изложения темы «Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида» в курсе «Дифференциальные уравнения» // Научно-методический электронный журнал «Концепт». 2018. № V3. С. 8–17. URL: http://e-koncept.ru/2018/186021. htm. DOI: 10.25206/2307-5430-2021-9-- 10.24422/MCITO.2018.V3.11559.

3. Акимова И. Я., Ахметова Ф. Х. Метод интегрируемых комбинаций решения нормальных систем дифференциальных уравнений при обучении студентов технических вузов // Научно-методический электронный журнал Концепт. 2016. № 7. С. 149–155, http://e-koncept.ru/2016/16154.htm

4. Облакова Т. В. Метод фундаментального решения в курсах «Дифференциальные уравнения» и «Уравнения математической физики» Инженерный вестник. 2015. № 4, http://engbul.bmstu.ru/doc/764920.html.

5. Соболев С. К., Томашпольскаий В. Я., Методический семинар на кафедре «Высшая математика» // Гуманитарный вестник (МГТУ им. Н. Э.Баумана): электронный журнал. 2018. № 7. http://hmbul.ru/catalog/edu/pedagog/ 537.html DOI: 10.25206/2307-5430-2021-9-- 10.18698/2306-8477-2018-7-537.

**Сведения об авторах:**

Сергей Константинович Соболев

Служебный почтовый адрес: г. Москва, 105005, Рубцовская набережная, 2/18, кафедра «Высшая математика»; e-mail: sergeisob@bmstu.ru; spin-code 4523-3619.

Научные интересы: методика преподавания высшей математики, автоматическая генерация заданий по математике для студентов.

Виктор Яковлевич Томашпольский

Служебный почтовый адрес: г. Москва, 105005, Рубцовская набережная, 2/18, кафедра «Высшая математика»; e-mail: tomashpolski@bmstu.ru; spin-code 1469-0849.

Научные интересы: методика преподавания высшей математики, история математики в России.

Андрей Всеволодович Тюленев

Служебный почтовый адрес: г. Москва, 105005, Рубцовская набережная, 2/18, кафедра «Высшая математика»; e-mail: tyulenevav@ya.ru; spin-code 6966-6032.

Научные интересы: методика преподавания высшей математики, обыкновенные дифференциальные уравнения, теория алгоритмов и математическая логика.

Илья Леонидович Покровский

Служебный почтовый адрес: г. Москва, 105005, Рубцовская набережная, 2/18, кафедра «Вычислительная математика и математическая физика»; e-mail: pokrovski.ilia@yandex.ru; spin-code: 9629-2750.

Научные интересы: методика преподавания высшей математики, обыкновенные дифференциальные уравнения.