УДК 372.851, 51-74

Н. М. Гордеева
Е. С. Попушина
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия

ИНТЕГРИРОВАНИЕ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Аннотация. В МГТУ им. Н.Э. Баумана большое внимание уделяется геометрическим приложениям определенного интеграла. Задачи на нахождение площадей, объемов, площадей поверхностей имеют практическое значение для будущих инженеров. Большая часть таких задач может быть решена при изучении кратных интегралов на втором курсе. Но для некоторых плоских фигур, а также осесимметричных тел можно обойтись однократным интегрированием, если применить полярные координаты. Навыки решения подобных задач не только необходимы для дальнейшего освоения учебного плана, но и востребованы практикой. В статье описаны последовательные шаги обучения интегрированию в полярных координатах.

Ключевые слова: *полярные координаты; определенный интеграл; инженерное образование.*

DOI: 10.25206/2307-5430-2021-9-27-33

Введение. Инженерное образование подразумевает высокий уровень математической подготовки. Программы математических дисциплин в большинстве технических вузов аналогичны друг другу. Чаще всего различия возникают на последних курсах, когда в зависимости от специализации студентам даются более глубокие знания в отдельных направлениях математики. Для первокурсников содержание занятий по математическому анализу почти во всех вузах для всех специальностей одинаковое. Для занятий могут использоваться классические учебники и задачники, например, широко известный задачник под редакцией Д.П. Демидовича [1]. Однако даже в этом хорошо зарекомендовавшем себя сборнике нет необходимого количества примеров для освоения темы интегрирования в полярных координатах. В МГТУ им. Н.Э. Баумана геометрическим свойствам определенного интеграла придается большое значение, в том числе, вычислению площадей, объемов и т.п. с помощью полярных координат (на первом курсе). Полярные координаты применяются во многих инженерных и физических задачах, но часто техника интегрирования не успевает отрабатываться в стандартных программах. Поэтому большинство материалов разрабатываются преподавателями МГТУ им. Н.Э. Баумана самостоятельно [2, 3].

Необходимость. Основные причины подробного изучения данной темы в курсе интегрирования во время первого года обучения:

1. Это часть математической культуры – к концу первого курса студент должен знать несколько систем координат и уметь в них работать.

2. Удобство применения полярных координат при вычислении характеристик некоторых типов фигур и тел с осевой симметрией.

3. Практические навыки вычисления объемов сложных тел без использования теории кратных интегралов.

4. Подготовка студентов к программе второго курса по кратным интегралам, где приходится оперировать разными системами координат, уметь выбирать наиболее выгодные пути решения, хорошо владеть навыками перехода от одной системы координат к другой.

Трудности. Трудности обусловлены в наиболее частых случаях не столько формальным незнанием, сколько поверхностным усвоением знаний по интегрированию. Так, студенты могут легко подставить в формулы необходимые функции, могут найти любой берущийся интеграл с помощью справочника или интернета, но ошибаются в выборе границ интегрирования. Такая ошибка возникает, если формулы были заучены без понимания.

Пример 1. Найти площадь фигуры, расположенной внутри кривой $r(\varphi)=1-\sin\varphi$ и одновременно вне кривой $r(\varphi)=-3\sin\varphi$.

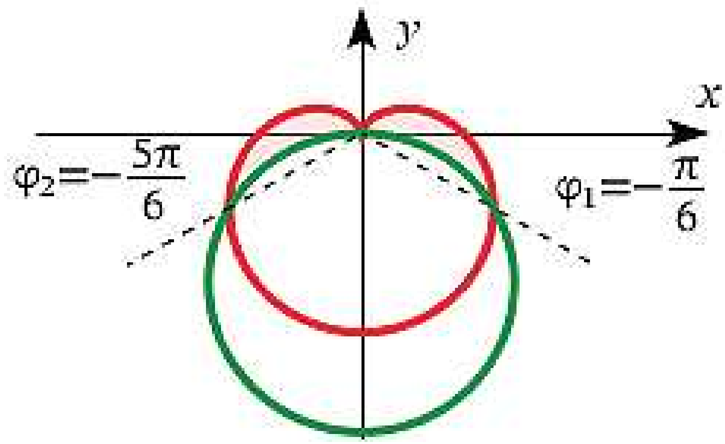


Рис. 1. Кривая $r(\varphi)=1-\sin\varphi$ (кардиоида, красным цветом) и кривая $r(\varphi)=-3\sin\varphi$ (окружность, зеленым цветом)

Рекомендуемая схема решения:

1. Изобразить оба графика.

2. Найти точки пересечения (для чего нужно решить уравнение $1-\sin\varphi = -3\sin\varphi$).

3. Заштриховать фигуру, площадь который надо найти. Расставить пределы интегрирования.

4. Найти значение интеграла (интегралов).

Первые два пункта студенты или выполняют правильно, или делают ошибки, но не принципиальные.

Серьезные ошибки возникают с расстановкой пределов интегрирования: типичная ошибка, когда студенты вычитают функцию нижнего графика из функции верхнего (как в декартовых координатах).

В вышеуказанном примере есть две точки пересечения: $-\dfrac{\pi}{6}$; $-\dfrac{5\pi}{6}$.

Учитывая симметрию, можно рассматривать только правую полуплоскость, найти площадь искомой фигуры и умножить ее на два.

При изменениях угла от $-\dfrac{\pi}{6}$ до 0 площади складываются из элементарных площадей, ограниченных лучами $\varphi = -\dfrac{\pi}{6}$, $\varphi = 0$ и графиками $r(\varphi) = 1-\sin\varphi$ и $r(\varphi) = -3\sin\varphi$. А при изменении угла от 0 до $\dfrac{\pi}{2}$ – только графиком функции $r(\varphi) = 1-\sin\varphi$.

Правильным решением будет

$$S = 2\left(\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}\left((1-\sin\varphi)^2-(-3\sin\varphi)^2\right)d\varphi+\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\varphi)^2\,d\varphi\right)$$

Типичная ошибка студентов, не разобравшихся в теме – это составление интеграла вида

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\left((1-\sin\varphi)-(-3\sin\varphi)\right)d\varphi$$

Как этого избежать и какие обязательные этапы надо отработать, чтобы помочь студенту усвоить тему за пару занятий?

Первый шаг.

На первом этапе надо познакомить студентов с полярными координатами и построить графики ряда функций в полярных координатах. Это необходимо, чтобы, во-первых, поработать над психологическими привычками связывать известные выражения с известными графиками («видеть за синусом синусоиду, а не окружность»). Например, в полярных координатах графики функции $r=\varphi$, $r=\sin\varphi$ – это не биссектриса и синусоида. Во-вторых, надо построить лемнискату, кардиоиду, окружность, проходящую через начало координат, и другие самые распространенные графики и обязательно обратить внимание на то, при каких значениях аргумента они существуют, сравнить запись одних и тех же функций в разных координатах.

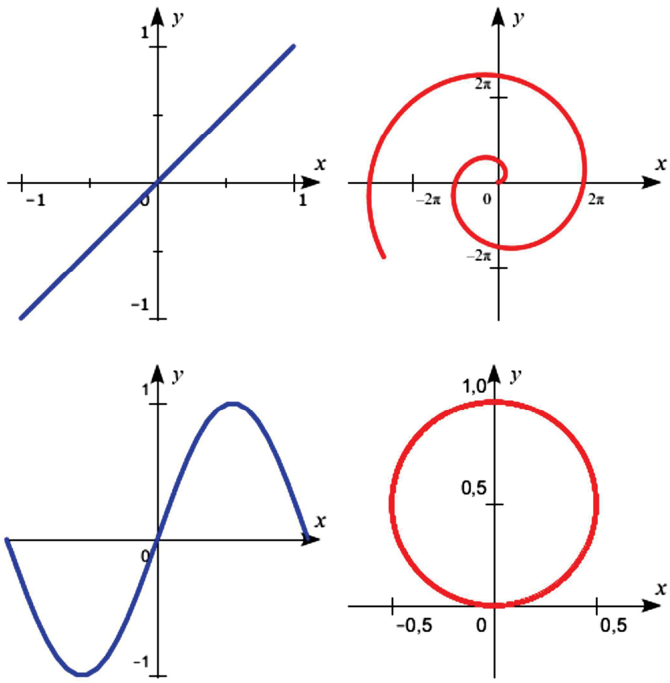
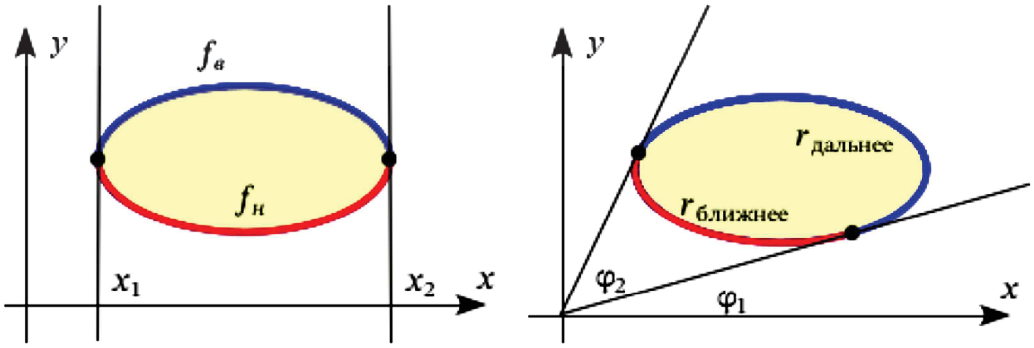


Рис. 2. Графики функций $y=x$, $y=\sin x$
(в декартовых координатах, синий цвет) и $r=\varphi$, $r=\sin\varphi$
(в полярных координатах, красный цвет)

Второй шаг.

Определение границ интегрирования. Возвращаясь к типичной ошибке, которую надо избежать, следует еще раз обратить внимание, что только в декартовых координатах при интегрировании найдется площадь под графиком. В полярных координатах надо представлять площадь как сумму элементарных секторов. К сожалению, аналогичные задачи не найдены в печатных учебниках, но они используются на контрольных мероприятиях в МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Пример 2. Определить границы интегрирования и записать формулу для вычисления площади, исходя из данных рисунка:



$$S = \int_{x_1}^{x_2} \left(f_в(x) - f_н(x)\right) d\varphi \qquad S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(r^2_{дальнее}(\varphi) - r^2_{ближнее}(\varphi)\right) d\varphi$$

Рис. 3. Определение границ интегрирования при вычислении площадей фигур в декартовых и полярных координатах

Сначала надо рассмотреть простые области, а потом перейти к случаям, где надо разделить искомую площадь на сумму нескольких площадей, например, как на рисунке 4.

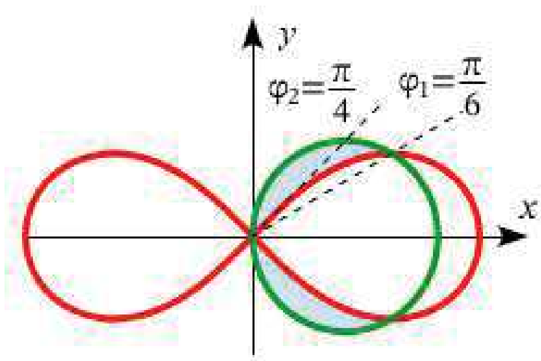


Рис. 4. Пересечение лемнискаты и окружности

Третий шаг.

Нахождение площадей, получающихся в результате пересечения нескольких графиков. Сначала ищутся точки пересечения, потом исследуется, на сколько частей надо поделить данную фигуру, расставляются пределы интегрирования и определяются функции, какие от каких вычитать. На третьем этапе (не раньше) можно решать задачи, аналогичные примеру 1, разобранному в начале.

Здесь важным условием является аккуратность в изображении графиков, а также знание областей определения, иначе можно неправильно разделить искомую площадь на более простые сегменты.

Четвертый шаг.

Подробное изучение графиков в полярных координатах и понимание формул позволяет перейти от вычисления площадей к другим геометрическим приложениям. Для осесимметричных тел можно найти объем тела и площадь поверхности, даже если не пользоваться кратными интегралами. При выводе формул для длины дуги, объема тела, площади поверхности надо хорошо понимать «структуру» полярных координат. Если первые три этапа пройдены, то такие задачи уже не являются сложными для студентов.

Набор задач для семинаров. Все специальности технического университета условно можно поделить на три группы: условно технические, на которых можно не изучать полярные координаты (во всяком случае, не обязательно заниматься интегрированием), специальности с базовой подготовкой, где можно ограничиться задачами первых двух этапов, и специальности с углубленной математической подготовкой, где уровень студентов и цели обучения позволяют рассматривать все четыре типа задач.

Создание материалов. Как упоминалось выше, классические задачники, даже предназначенные для технических вузов [1], содержат очень мало задач. И по ним сложно выстроить методически необходимую «лестницу» из задач возрастающей сложности. Уже много лет именно в МГТУ им. Н.Э. Баумана пишутся методические материалы по геометрическим свойствам интеграла.

И если на семинарах можно пользоваться актуализированными методичками, то для проверки знаний (контрольные работы, экзамены) необходимо создать некоторый автоматический «генератор» задач. Но создание такого «генератора» осложняется особенностями представления функций в полярных координатах. Для решения на компьютере «красивые» значения и ответы не важны. А на контрольных, когда студенты вручную вычисляют значения, все решения должны быть «красивыми», иначе время на решение одной задачи может увеличиться во много раз.

Если не выбрать «удачные» функции и границы, то вычисление интегралов сильно усложнится. И вместо тренировки необходимых навыков будут тренироваться просто навыки счета, задача будет занимать много времени и не будет выполнять нужную для обучения функцию.

Для полярных координат принято в контрольных задачах выбирать, например, «красивые» границы при значениях углов $0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}$ и так далее. Имея набор кривых, проходящих через известные точки, преподаватель вручную может менять масштаб, ориентацию кривых, выбор площадей (внутри одной кривой и снаружи другой). Таким образом, можно получить целый «банк» подходящих задач.

Заключение. Успех усвоения темы полярных координат в большой степени зависит от первых двух шагов. Если отработать со студентами подробно несколько задач начальной сложности, то дальнейшее обучение как правило не вызывает проблем. Такая работа на первом курсе является фундаментом для дальнейшего обучения: при изучении кратных интегралов, где используются цилиндрические и сферические координаты, а также для физических задач, где студенты выбирают самостоятельно те системы координат, которые наиболее выгодны.

Библиографический список

1. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / Под ред. Б. П. Демидовича. М.: АСТ: Астрель; Владимир: ВКТ, 2010. 495 с.

2. Белов В. Н., Косова А. В., Чуев В. Ю. Определенный интеграл: метод. указания к выполнению типового расчета / Белов В. Н., Косова А. В., Чуев В. Ю.; МГТУ им. Н. Э. Баумана. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2009. 45 с.

3. Семакин А. Н. Смешанная форма обучения высшей математике студентов с ограниченными возможностями здоровья // Открытое образование. 2020. Т. 24, № 1. С. 34–44.

Сведения об авторах:

Надежда Михайловна Гордеева

Служебный почтовый адрес: 105005, Москва, 2-я Бауманская улица, дом 5, стр. 1. МГТУ им. Н.Э. Баумана, кафедра ФН1 «Высшая математика»; e-mail: nmgordeeva@bmstu.ru; spin-code 8406-7531.

Научные интересы автора: математическое моделирование.

Страница в MathNet: http://www.mathnet.ru/rus/person/81106.

Страница в eLibrary.ru https://elibrary.ru/author_items.asp?authorid=699932.

Екатерина Сергеевна Попушина

Служебный почтовый адрес: 105005, Москва, 2-я Бауманская улица, дом 5, стр. 1. МГТУ им. Н.Э. Баумана, кафедра ФН1 «Высшая математика»; e-mail: popushinaes@bmstu.ru; spin-code: 3108-1062.

Научные интересы автора: математическое моделирование.

Страница в MathNet:
http://www.mathnet.ru/php/person.phtml?option_lang=rus&personid=99504.

Страница в eLibrary.ru: https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=164126.