УДК 519.17

А. П. Горюшкин
кандидат физико-математических наук, доцент
Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга,
г. Петропавловск-Камчатский, Россия

О ПРИМЕНЕНИИ КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕХНИКИ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ДИСЦИПЛИНЫ «ТЕОРИЯ ГРАФОВ»

Аннотация. В статье обсуждается методика использования пакета математических символьных вычислений *Maple* при изучении вузовского курса «Теория графов». В работе демонстрируется применение подпакетов «Теория графов» и «Линейная алгебра» для нахождения и проверки связи между тремя основными матрицами, задающими граф (матрицей смежности, матрицей инцидентности и матрицей Кирхгофа). Эти же подпакеты *Maple* используются для нахождения числа остовных деревьев графа связного графа. Одновременно с машинным нахождением матриц демонстрируется связь между этими матрицами, причем машинный иллюстрирующий эксперимент может продолжаться сколь угодно долго. Компьютерная иллюстрация также без ограничения на число опытов предложена и для теоремы Кирхгофа о деревьях, а также для экспериментальной проверки свойств матрицы Кирхгофа.

Ключевые слова: *граф; матрица смежности; матрица инцидентности; матрица Кирхгофа; транспонирование матриц; алгебраическое дополнение; остов графа; Maple; машинная команда.*

DOI: 10.25206/2307-5430-2021-9-34-40

Современное поколение студентов с определенным трудом воспринимает и понимает доказательство теорем. Для лучшего понимания теоретического материала целесообразно использовать все доступные средства. Одним из таких средств является вычислительный эксперимент. Многолетний опыт автора показал исключительную полезность рассмотрения серии примеров, иллюстрирующих доказываемый факт. Естественно, что эксперименты такого рода лучше всего производить с помощью вычислительной техники.

Здесь предлагаются два таких эксперимента из теории графов: связь между основными матрицами, задающие граф, и свойство матрицы Кирхгофа. Опыты обучаемый проводит самостоятельно и многократно, лишь меняя исходные данные.

В пакете символьных вычислений *Maple* для нахождения матрицы смежности А и матрицы инцидентности В есть соответствующие команды, однако команды для вычисления матрицы Кирхгофа (обозначим ее К) в пакете *Maple* пока нет. Для нахождения К воспользуемся связью между этими тремя матрицами: матрица A_1 = В B^{T} отличается от матрицы К лишь тем, что вне диагонали в матрице A_1 стоят единицы, а в матрице К в точности на этих же местах находятся числа –1. Диагональю матрицы К является вектор степеней (без упорядочения) данного графа (например, [1]).

Зададим случайный граф G на n вершинах с m ребрами и найдем с помощью вычислительной техники все три матрицы и вектор степеней графа G.

Пусть, например, число вершин графа равно шести, а число ребер – девяти.

> with(GraphTheory): # вход в подпакет «Теория графов»

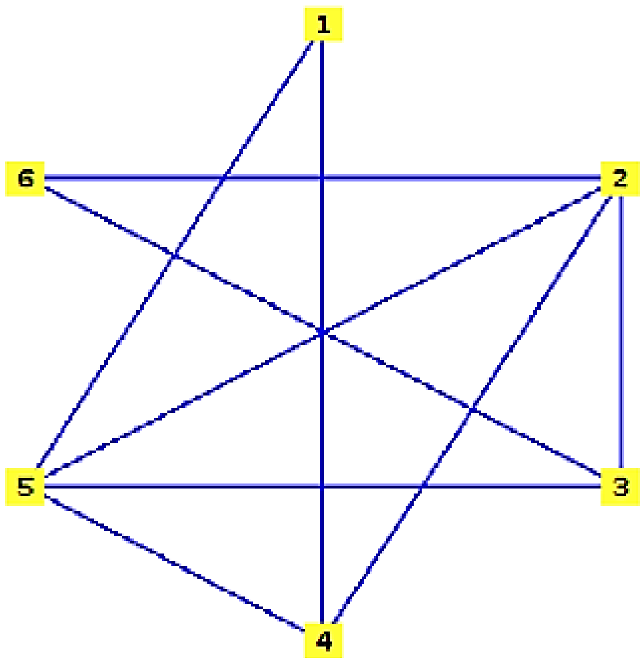
> with(RandomGraphs): # вход в подпакет «Случайный граф»

> n:= 6;m:=9: G:=RandomGraph(n, m); # создание случайного графа G

G := Graph 1: an undirected unweighted graph with 6 vertices and 9 edge(s)

Граф G создан, но он пока невидим. Построим геометрическую интерпретацию графа G.

> DrawGraph(G); # построение геометрической интерпретации графа G



Найдем теперь матрицу смежности А и матрицу инцидентности В графа G.

> A: = AdjacencyMatrix(G); # вычисление матрицы смежности G

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> B: = IncidenceMatrix(G); # вычисление матрицы инцидентности графа G

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Трансформируем матрицу $B_1 = B^T$, и вычислим произведение $S = B \cdot B^T$. Теория утверждает, что матрица S должна отличаться от матрицы смежности A только диагональю. На диагонали матрицы S должен расположиться вектор степеней графа G, а в матрице A диагональ заполнена нулями. Проверим так ли на нашем примере.

Для выполнения действий над матрицами необходимо войти в подпакет «Линейная алгебра».

> with(linalg):# вход в подпакет «Линейная алгебра»

> B1: = transpose(B); # транспонирование матрицы B

$$B1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

> S: = evalm(B&*B1); # вычисление матрицы B · B^T

$$S := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

> evalm(S – A); # вычисление матрицы S – A

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

> DegreeSequence(G); # вычисление вектора степеней графа G

$$[2, 4, 3, 3, 4, 2]$$

Машинные вычисления полностью подтвердили теоретическую связь между матрицей смежности и матрицей инцидентности графа.

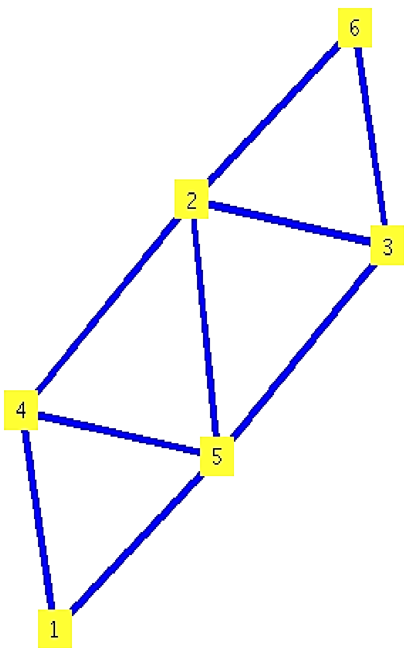
Просто из любопытства спросим, является ли исследуемый граф планарным.

> IsPlanar(G, 'F'); # граф G – планарный?

true

Граф G – планарный. Для нашего графа можно это было увидеть непосредственно, построив его геометрическую интерпретацию в другом стиле.

> DrawGraph(G, style = spring); # построение геометрической интерпретации графа G в стиле spring



А теперь уже не из любопытства, а беспокоясь о следующей задаче, спросим, является ли наш граф связным.

> IsConnected(G); # граф G – связный?

true

Конечно, для нашего конкретного графа G этот вопрос можно было и задавать – на геометрической интерпретации ясно видно, что этот граф не распадается на отдельные куски. Но так будет не всегда: при случайном формировании графа он вполне может оказаться и несвязным. Заметим, что явное изображение матрицы Кирхгофа и геометрическая интерпретация графа для решения задачи о числе составных деревьев вовсе не нужны.

Наш граф связный, и, следовательно, у него есть остовное дерево. С помощью теоремы Кирхгофа о деревьях найдем число остовных деревьев в нашем графе. В первом примере диагональная матрица S – A имела такую же диагональ, что и матрица Кирхгофа. Вместо матрицы A теперь из S вычтем 2A, и в результате получим матрицу Кирхгофа K.

> K:= evalm(S-2*A); # вычисление матрицы Кирхгофа

$$K := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Алгебраические дополнения всех элементов матрицы Кирхгофа имеют одно и то же числовое значение. Найдем для примера дополнительный минор первого элемента первого столбца.

> det(minor(K, 1, 1)); # вычисление минора M_{11}

$$55$$

Ответ на вопрос о числе остовных деревьев получен: в графе G содержится 55 остовных деревьев.

Для иллюстрации свойства матрицы Кирхгофа можно вычислить алгебраические дополнения *каждого* из элементов матрицы K и непосредственно убедится в их равенстве.

> for i to n do for j to n do
print((-1)^(i+j)*det(minor(K, i, j)))
end do end do;

По этой команде для нашего графа G будут выданы 36 (в общем виде n^2) равных чисел.

Поставим теперь курсор снова на команду

> n:= 6;m:=12: G:=RandomGraph(n, m);

Последовательно нажимая на клавишу «Enter» вплоть до последней команды (если сформированный случайный граф окажется связным), студент самостоятельно может снова и снова повторять компьютерный эксперимент каждый раз с новыми данными и снова наглядно убеждаться и в теоретической связи между тремя матрицами графа, и свойствами алгебраических дополнений матрицы Кирхгофа.

Библиографический список

1. Горюшкин А. П. Теория графов: учеб. пособие для бакалавров вузов. Петропавловск-Камчатский: Изд-во КамчатГТУ, 2014. 172 с.

Сведения об авторе:

Александр Петрович Горюшкин

Служебный почтовый адрес: 683032 г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4, КамГУ имени Витуса Беринга, офис 28; e-mail: as2021@mail.ru; spin-code 6283-2930.