Министерство образования Российской Федерации
Омский государственный технический университет

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ.
Двойственность.
Зависимость оптимальных планов от исходных данных

Методические указания
для студентов дневного и заочного отделений

Омск – 2003

Составитель: Соколовский Мирон Наумович, доцент

Редактор Г.М.Кляут
ИД 06030 от .
Подписано в печать . Формат 60х84х1/16. Бумага офсетная.
Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ.л. . Уч.-изд.л. .
Тираж . Заказ .

Издательство ОмГТУ. 644050, г. Омск, пр-т Мира,11
Типография ОмГТУ

6. Двойственность в линейном программировании

Понятие **двойственности** является одним из важнейших в теории ЛП. С каждой задачей ЛП связывается другая вполне определенная задача, которая называется **двойственной** к исходной **(прямой)** задаче. Изучение связей между прямой и двойственной задачами помогает понять свойства каждой из них. Понятие двойственности и связанный с ним **двойственный симплекс-метод** решения задач ЛП используются при анализе зависимости оптимальных планов от изменений в условиях задачи ЛП.

Двойственной к стандартной задаче (14) – (16) называется задача ЛП от m переменных $y_1,\ldots,y_m$ вида

$$G = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \quad - \min, \tag{31}$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \geq c_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \geq c_n, \end{cases} \tag{32}$$

$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0, \ldots, y_m \geq 0. \tag{33}$$

Связь между условиями **прямой** задачи (14) – (16) и **двойственной** (31) – (33) показана схематически в таблице 5:

Таблица 5

$$\begin{array}{c|cccccc|cc|c|}
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{x_1} & x_2 & \ldots & x_j & \ldots & \multicolumn{1}{c}{x_n} & & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{G} \\ \cline{2-7} \cline{10-10}
y_1 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} & \leq & & b_1 \\
y_2 & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} & \leq & & b_2 \\
. & . & . & \ldots & . & \ldots & . & . & & . \\
y_i & a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in}. & \leq & & b_i \\
. & . & . & \ldots & . & \ldots & . & . & & . \\
y_m & a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} & \leq & & b_m \\ \cline{2-7} \cline{10-10}
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & & & & & \multicolumn{1}{c}{} & & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\downarrow} \\
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\geq} & \geq & \ldots & \geq & \ldots & \multicolumn{1}{c}{\geq} & & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\min} \\
\end{array}$$

$$F \quad \boxed{c_1 \quad c_2 \quad \ldots \quad c_j \quad \ldots \quad c_n} \to \max$$

Ограничения и целевая функция прямой задачи «записаны» в **строках** таблицы 5, ограничения и целевая функция двойственной задачи «читаются» по **столбцам.** Ограничению с номером i прямой задачи соответствует переменная y_i двойственной; переменной x_j прямой задачи - $j-$ое ограничение двойственной.

Пример 15. Записать условие задачи, двойственной к стандартной задаче из примера 11.

Решение. Воспользуемся схемой из таблицы 5. Рядом с ограничениями каждой из задач записаны в скобках соответствующие переменные другой задачи:

Прямая задача

$$F = 12x_1 + 4x_2 + 5x_3 \quad - \max,$$

$$\begin{array}{ll} (y_1) & 2x_1 \qquad\quad + x_3 \le 9, \\ (y_2) & 2x_1 + x_2 \qquad\quad \le 10, \\ (y_3) & 2x_1 + x_2 + x_3 \le 11, \\ (y_4) & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 13, \\ & x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x \ge 0. \end{array}$$

Двойственная задача

$$G = 9y_1 + 10y_2 + 11y_3 + 13y_4 \quad - \min,$$

$$\begin{array}{ll} (x_1) & 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4 \ge 12, \\ (x_2) & \qquad\quad y_2 + y_3 + 2y_4 \ge 4, \\ (x_3) & y_1 \qquad\qquad y_3 + 2y_4 \ge 5, \\ & y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0,\ y_4 \ge 0. \end{array}$$

Двойственную задачу примера 15 можно привести к стандартному виду, затем записать условие двойственной к ней и снова привести к стандартному виду. Проверьте, что результатом таких преобразований будет исходная (прямая) задача. Нетрудно понять, что и в общем случае **задача, двойственная к двойственной совпадает с исходной.** Поэтому прямую и двойственную задачи называют также **взаимодвойственными** или **двойственной парой.**

В теории ЛП доказаны следующие утверждения (**теоремы двойственности),** устанавливающие связи между свойствами задач двойственной пары.

Теорема 1. Если одна из задач двойственной пары разрешима, т. е имеет оптимальные планы, то разрешима и другая задача. При этом для оптимальных планов X^* и Y^* имеет место равенство $F(X^*) = G(Y^*)$.. Для разрешимости одной (а, значит, и другой) задачи необходимо и достаточно, чтобы каждая из них имела хотя бы один допустимый план.

Теорема 2. Для того, чтобы допустимые планы $X^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ и $Y^* = (y_1^*, \ldots y_m^*)$
пары двойственных задач (14) – (16) и (31) – (33) были их оптимальными планами, необходимо и достаточно, чтобы они удовлетворяли системе уравнений

$$x_j^* \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j \right) = 0, \qquad 1 \le j \le n;$$

$$y_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0, \qquad 1 \le i \le m.$$

Теорема 1 – центральный результат всей теории ЛП. Теорема 2 позволяет найти оптимальный план одной из задач двойственной пары по оптимальному плану другой.

Пример 16. Решить задачу ЛП

$$F = 6x_1 + 9x_2 + 15x_3 \quad - \min,$$

$$\begin{aligned} -x_1 \quad + x_2 \quad + 3x_3 &\ge 4, \\ 2x_1 \quad + x_2 \quad - x_3 &\ge 2, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

Решение. Запишем условие двойственной задачи

$$G = 4y_1 + 2y_2 \quad - \max,$$
$$\begin{aligned} (x_1) \quad & -y_1 + y_2 \le 6, \\ (x_2) \quad & y_1 + y_2 \le 9, \\ (x_3) \quad & 3y_1 - y_2 \le 15, \\ & y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0. \end{aligned}$$

Эту задачу можно решить графически (проделайте самостоятельно), в результате получим $G^* = 30,\ y_1^* = 6,\ y_2^* = 3$. По теореме 1 исходная (прямая) задача также имеет оптимальный план $X^* = \left(x_1^*, x_2^*, x_3^*\right)$. Чтобы найти X^*, подставим $y_1^* = 6$, $y_2^* = 3$ в систему уравнений из теоремы 2:

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_1^*\left(-6+3-6\right)=0, & \\ x_2^*\left(6+3-9\right)=0, & \rightarrow \text{ используются переменные прямой и ограничения двойственной задачи} \\ x_3^*\left(3\cdot 6-3-15\right)=0\,, & \\ 6\left(-x_1^*+x_2^*+3x_3^*-4\right)=0, & \rightarrow \text{ используются переменные двойственной и ограничения прямой задачи.} \\ 3\left(2x_1^*+x_2^*-x_3^*-2\right)=0. & \end{array} \right.$$

Второе и третье уравнения представляют собой тождества 0 = 0. Из остальных уравнений находим единственный оптимальный план исходной задачи $x_1^* = 0$, $x_2^* = 5/2,\ x_3^* = 1/2$. Для определения F^* даже не обязательно подставлять эти числа в выражение для целевой функции F, так как из теоремы 1 следует $F^* = G^* = 30$ (проверьте подстановкой).

В разобранном примере решалось более «легкая» из пары двойственных задач, ответ другой задачи получался после решения системы линейных уравнений. В случае , когда оптимальный план одной из задач находится **симплекс-методом,** оптимальный план другой можно найти непосредственно по заключительной симплексной таблице без дополнительных вычислений.

Пример 17. Приведем обе задачи двойственной пары из предыдущего примера к канонической форме. В прямой задаче заменим $F - \min$ на $-F - \max$ и введем балансовые переменные S_1, S_2; в двойственной задаче введем балансовые переменные t_1, t_2, t_3.

Прямая задача

$$-F=-6x_1-9x_2-15x_3-\max,$$

$$\begin{array}{ll} (y_1) & -x_1+x_2+3x_3-S_1=4, \\ (y_2) & 2x_1+x_2-x_3-S_1=2, \\ & x_1,x_2,x_3,S_1,S_2\ge 0. \end{array}$$

Двойственная задача

$$G=4y_1+2y_2-\max,$$

$$\begin{array}{ll} (x_1) & -y_1+2y_2+t_1=6, \\ (x_2) & y_1+y_2+t_2=9, \\ (x_3) & 3y_1-y_2+t_3=15, \\ & y_1,y_2,t_1,t_2,\ t_3\ge 0. \end{array}$$

Примем за базисные переменные S_1,S_2 в прямой задаче (тогда x_1,x_2,x_3 – свободные) и переменные t_1,t_2,t_3 в двойственной задаче (тогда y_1,y_2 – свободные). Каждая **базисная** переменная S_1,S_2,t_1,t_2,t_3 содержатся в определенном ограничении **одной** из задач двойственной пары; этому ограничению соответствует определенная **свободная** переменная **другой** задачи. Это позволяет установить следующее **соответствие между переменными взаимодвойственных задач:**

$$\begin{array}{lcc} \text{Переменные прямой задачи} & \overbrace{S_1 \quad\quad S_2}^{\text{БАЗИСНЫЕ}} & \overbrace{x_1 \quad x_2 \quad x_3}^{\text{СВОБОДНЫЕ}} \\ & \updownarrow \quad\quad \updownarrow & \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \\ \text{Переменные двойственной задачи} & \underbrace{y_1 \quad\quad y_2}_{\text{СВОБОДНЫЕ}} & \underbrace{t_1 \quad t_2 \quad t_3}_{\text{БАЗИСНЫЕ}} \end{array}$$

Запишем симплексные таблицы обеих задач, в которых переменные S_1,S_2,t_1,t_2,t_3 приняты за базисные:

		(t_1)	(t_2)	(t_3)	$(-G)$
	T_0	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
(y_1)	S_1	1	-1	$\boxed{-3}$	-4
(y_2)	S_2	-2	-1	1	-2
	$-F$	6	9	15	0

		(S_1)	(S_2)	(F)
	$\tilde{T}_0$	$-y_1$	$-y_2$	1
(x_1)	t_1	-1	2	6
(x_2)	t_2	1	1	9
(x_3)	t_3	$\boxed{3}$	-1	15
	G	-4	-2	0

В таблицах T_0 и $\tilde{T}_0$ рядом с каждой переменной записана в скобках соответствующая переменная двойственной задачи; добавлены также символы $(-G)$ и (F) в правых верхних углах. Благодаря этим дополнениям любое из равенств канонических форм обеих задач можно «прочитать» как в **строке одной** из таблиц, так и в **столбце другой** (во втором случае надо использовать переменные, записанные в скобках). Например, первая строка T_0 и первый столбец $\tilde{T}_0$ являются записями эквивалентных равенств $S_1=(-x_1)+(-1)(-x_2)+(-3)(-x_3)+(-4)$ и $S_1=(-1)\,x_1+x_2+3x_3+(-4)$; в последней строке $\tilde{T}_0$ и последнем столбце T_0 тоже записаны эквивалентные равенства $G=(-4)(-y_1)+(-2)(-y_2)$ и $-G=(-4)y_1+(-2)\,y_2$. Связь таблиц T_0 и $\tilde{T}_0$ аналогична связи двух транспонированных относительно друг друга матриц: обозначения строк $S_1(y_1), S_2(y_2), -F$ в T_0 переходят в обозначения столбцов $-y_1(S_1)$, $-y_2(S_2), F$ в $\tilde{T}_0$; числа 1,-1,-3,-4 первой строки T_0 переходят в числа -1, 1, 3, -4 первого столбца $\tilde{T}_0$ и т.д.

Таблица $\tilde{T}_0$ допустима (числа 6, 9, 5 неотрицательны), ее можно принять за начальную для решения двойственной задачи симплекс-методом. По инструкциям симплекс-метода **находим** разрешающий элемент 3 таблицы $\tilde{T}_0$. В таблице T_0 **примем** за разрешающий соответствующий элемент (-3) и выполним симплексные преобразования таблиц T_0 и $\tilde{T}_0$. В результате получим новые таблицы T_1 и $\tilde{T}_1$:

		(t_1)	(t_2)	(y_1)	$(-G)$
	T_1	$-x_1$	$-x_2$	$-S_1$	1
(t_3)	x_3	$-1/3$	$1/3$	$-1/3$	$4/3$
(y_2)	S_2	$-5/3$	$-4/3$	$1/3$	$-10/3$
	$-F$	11	4	5	-20

		(x_3)	(S_2)	(F)
	$\tilde{T}_1$	$-t_3$	$-y_2$	1
(x_1)	t_1	$1/3$	$5/3$	11
(x_2)	t_2	$-1/3$	$4/3$	4
(S_1)	y_1	$1/3$	$-1/3$	5
	G	$4/3$	$-10/3$	20

Таблицы T_1 и $\tilde{T}_1$ связаны между собой точно так же, как две предыдущие, T_0 и $\tilde{T}_0$. Каждая из них содержит системы уравнений, эквивалентные условиям прямой и двойственной задач. Продолжая решение двойственной задачи симплекс-методом, **находим** в $\tilde{T}_1$ разрешающий элемент 4/3; в T_1 **принимаем** за разрешающий соответствующий элемент (-4/3). После выполнения симплексных преобразований получим таблицы T_2 и $\tilde{T}_2$:

		(t_1)	(y_2)	(y_1)	$(-G)$
	T_2	$-x_1$	$-S_2$	$-S_1$	1
(t_3)	x_3	$-3/4$	$1/4$	$-1/4$	$1/2$
(t_2)	x_2	$5/4$	$-3/4$	$-1/4$	$5/2$
	$-F$	6	3	6	-30

		(x_3)	(x_2)	(F)
	$\tilde{T}_2$	$-t_3$	$-t_2$	1
(x_1)	t_1	$3/4$	$-5/4$	6
(S_2)	y_2	$-1/4$	$3/4$	3
(S_1)	y_1	$1/4$	$1/4$	6
	G	$1/2$	$5/2$	30

Допустимая таблица $\tilde{T}_2$ удовлетворяет условию оптимальности (числа 1/2, 5/2 положительны).Ей соответствует единственный оптимальный опорный план двойственной задачи : $y_1^* = 6,\ y_2^* = 3,\ t_1^* = 6,\ t_2^* = 0,\ t_3^* = 0$ (t_2 и t_3 – свободные в $\tilde{T}_2$), $G^* = 30$. Учитывая «транспонированность» $\tilde{T}_2$ и T_2 и соответствие между переменными взаимодвойственных задач, по таблице $\tilde{T}_2$ можно найти и оптимальный опорный план ($x_1^*, x_2^*, x_3^*, S_1^*, S_2^*$) прямой задачи. Переменные x_1, S_2, S_1, записанные в скобках в левом столбце $\tilde{T}_2$, будут **свободными** в T_2, следовательно $x_1^* = S_2^* = S_1^* = 0$. Переменные x_3 и x_2 , записанные в скобках в верхней строке $\tilde{T}_2$, будут **базисными** в T_2, следовательно $x_3^* = 1/2,\ x_2^* = 5/2$ (см. строку G в $\tilde{T}_2$).

Очевидно, что $F^* = G^* = 30$. Аналогично оба оптимальных плана можно найти по таблице T_2.

Связь между симплексными таблицами прямой и двойственной задач, которая использовалась в примере 17, является основой нового способа решения задач ЛП, получившего название **двойственного симплекс-метода.** В этом методе начальная и все следующие таблицы удовлетворяют **условию оптимальности** вместо требования **допустимости** в обычном симплекс-методе. Заключительная таблица дает оптимальный план или позволяет сделать вывод об отсутствии допустимых (и тем более оптимальных) планов. Правила выбора разрешающего элемента в текущей симплексной таблице получаются из соответствующих правил обычного симплекс-метода для двойственной задачи с учетом связей между таблицами двойственной пары.

Алгоритм двойственного симплекс метода

Шаг 1. Объявить начальную симплексную таблицу (удовлетворяющую условию оптимальности) и соответствующий базисный план **текущими.**

Шаг 2. Просмотреть столбец свободных членов текущей таблицы (кроме элемента в строке целевой функции).

а) Если в столбце свободных членов нет отрицательных элементов (все ≥ 0), то текущий базисный план – оптимальный.

б) Если в столбце свободных членов отрицательные элементы, выбирать среди них наибольший по модулю и объявить соответствующую строку **разрешающей.**

Шаг 3. Просмотреть разрешающую строку текущей таблицы (кроме элемента в столбце свободных членов)

а) Если в разрешающей строке нет отрицательных элементов (все ≥ 0), то задача не имеет допустимых планов, и, следовательно, не разрешима.

б) Если в разрешающей строке есть отрицательные элементы, для всех содержащих эти элементы столбцов вычислить и записать в строку $\overline{\theta}$ отношения коэффициентов строки целевой функции к соответствующим (отрицательным) элементам разрешающей строки – **двойственные симплексные отношения.** Столбец **с минимальным по модулю** двойственным симплексным отношением объявить **разрешающим,** элемент на пересечении разрешающего столбца с разрешающей строкой объявить **разрешающим.**

Шаг 4. Выполнить симплексное преобразование текущей таблицы с разрешающим элементом, выбранным на шаге 3б); объявить полученную таблицу и соответствующий базисный план **текущими.**

Шаг 5. Перейти к шагу 2.

Двойственный симплекс-метод «выгодно» применять, когда легко находится какая-нибудь симплексная таблица, удовлетворяющая условию оптимальности (т. е. допустимая таблица двойственной задачи).

Пример 18. Решить задачу ЛП

$$F = -3x_2 - 2x_3 \quad - \max,$$
$$\begin{cases} x_1 - 6x_2 - 2x_3 = -9 \\ -11x_2 + x_3 + x_5 = -6 \\ 10x_2 - 14x_3 + x_4 = -13 \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0.$$

Решение. Здесь нет «очевидных» начальных базисных переменных для применения обычного симплекс-метода; чтобы найти начальную таблицу, пришлось бы предварительно решить вспомогательную задачу (см. п. 5). Заметим, что выражение F содержит только **две** переменные, x_2 и x_3, причем обе с **отрицательными** коэффициентами, -3 и -2. Выбрав x_2 и x_3 за свободные (тогда x_1, x_4, x_5- базисные), получим симплексную таблицу T_0, удовлетворяющую условию оптимальности – элементами строки F будут положительные числа 3 и 2. Чтобы найти остальные элементы T_0, надо разрешать систему ограничений относительно x_1, x_4, x_5; в данной задаче эти переменные выражаются через x_2 и x_3 непосредственно из 1-го, 3-го и 2-го уравнений соответственно. Используя T_0 в качестве начальной, применим двойственный симплекс-метод.

T_0	$-x_2$	$-x_3$	
x_1	-6	-2	-9
x_5	-11	1	-6
x_4	10	-14	-13
F	3	2	0
$\bar{\theta}$	–	$-2/14$	

В столбце свободных членов таблицы T_0 наибольшим по модулю отрицательным элементом является (-13) в строке x_4. Эта строка – разрешающая; в ней есть только один отрицательный элемент (-14) в столбце x_3. Столбец x_3 – разрешающий, элемент (-14) – разрешающий.

Выполнив симплексное преобразование T_0, получим таблицу T_1.

T_1	$-x_2$	$-x_4$	
x_1	$-52/7$	$-1/7$	$-50/7$
x_5	$-72/7$	$1/14$	$-97/14$
x_3	$-5/7$	$-1/14$	$13/14$
F	$31/7$	$1/7$	$-13/7$
$\bar{\theta}$	$-31/52$	-1	

T_2	$-x_1$	$-x_4$	
x_2			$25/26$
x_5			$77/26$
x_3			$21/13$
F	$31/52$	$21/52$	$-159/26$

В T_1 разрешающая строка x_1. Наибольшее по модулю двойственное симплексное отношение $(-31/52)$ указывает на разрешающий столбец x_2. При переходе от T_1 к T_2 вычисляем сначала элементы столбца свободных членов. Так как все они оказались неотрицательными, T_2 не только удовлетворяет условию оптимальности, как все предыдущие, но и допустима. По критерию оптимальности $x_1^* = 0$, $x_2^* = 25/26$, $x_3^* = 21/13$, $x_4^* = 0$, $x_5^* = 77/26$ - единственный оптимальный план, $F^* = -159/26$.

Типичными примерами задач с очевидной начальной таблицей для двойственного симплекс-метода являются задача о диете (7) – (9) и **задача о раскрое.**

Пример 19. Листы материала размером $6 \times 13\text{м}^2$ надо раскроить так, чтобы получились заготовки двух типов: 800 штук заготовок размером $4 \times 5\,\text{м}^2$ и 400 штук заготовок размером $2 \times 3\,\text{м}^2$. Как получить необходимое число заготовок с минимальным расходом материала?

Решение. В условиях задачи способ раскроя листа полностью определяется парой чисел (a, b), где a и b – количества получающихся заготовок размеров 4×5 и 2×3 соответственно. Для получения необходимого числа заготовок из минимального числа листов можно использовать только «не улучшаемые» способы раскроя, т. е. такие, для которых раскрои вида $(a+1, b)$ и $(a, b+1)$ невозможны. Легко проверяется, что таких способов раскроя имеется всего четыре: (3, 1), (2, 6), (1,9) и (0, 13),

ЧЕРТЕЖ

Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 – число листов, раскроенных этими четырьмя способами. Тогда $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ – расход материала (в листах), а $3x_1 + 2x_2 + x_3$ и $x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 13x_4$ - количества полученных заготовок размеров 4×5 и 2×3. Моделью задачи о раскрое будет следующая задача ЛП:

$$\begin{aligned} F = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\quad - \min, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq 800, \\ x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 13x_4 &\geq 400, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &> 0. \end{aligned}$$

Каноническая форма этой задачи имеет вид

$$\begin{aligned} -F = -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &\quad - \max, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - S_1 &= 800, \\ x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 13x_4 - S_2 &= 400, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, S_1, S_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Таблица T_0 с базисными переменными S_1, S_2 удовлетворяет условию оптимальности и применение двойственного симплекс-метода дает цепочку таблиц T_0, T_1, T_2 :

T_0	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	
S_1	$\boxed{-3}$	-2	-1	0	-800
S_2	-1	-6	-9	-13	-400
$-F$	1	1	1	1	0

T_1	$-S_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	
x_1	$-1/3$	$2/3$	$1/3$	0	$800/3$
S_2	$-1/3$	$-16/3$	$-26/3$	-13	$-400/3$
$-F$	$1/3$	$1/3$	$2/3$	1	$-800/3$

T_2	$-S_1$	$-S_2$	$-x_3$	$-x_4$	
x_1					250
x_2					25
$-F$	$5/16$	$1/16$	$1/8$	$3/16$	-275

По критерию оптимальности из T_2 получаем $F^* = 275,\ x_1^* = 250,\ x_2^* = 25,\ x_3^* = x_4^* = S_1^* = S_2^* = 0$. Таким образом требуемое число заготовок можно получить из 275 листов, раскроив 250 из них первым способом и 25 – вторым способом.

В заключение выясним **экономический смысл** оптимальных значений переменных **двойственной задачи** (31) – (33) в случае, когда прямая задача (14) – (17) рассматривается как модель **задачи о ресурсах.** Напомним, что в этом случае правые части $b_1,\ldots,b_m$ ограничений прямой задачи (эти же числа – коэффициенты целевой функции G двойственной задачи) представляют собой запасы ресурсов, а величина $\max F = F^*$ – максимально возможный доход от реализации всей произведенной продукции. Предположим, что $Y^* = \left(y_1^*,\ldots,y_m^*\right)$ – единственный оптимальный план двойственной задачи. Из первой теоремы двойственности следует, что

$$F^* = G^* = b_1 y_1^* + \ldots + b_m y_m^* .$$

В примере 21 следующего п.7 будет показано, что Y^* **остается** единственным оптимальным планом задачи, двойственной к задаче о ресурсах с **измененными** запасами $b_1+\Delta_1,\ldots,b_m+\Delta_m$, если приращения запасов $\Delta_1,\ldots,\Delta_m$ достаточно малы. Максимальным значением дохода будет величина

$$F^*\left(\Delta_1,\ldots,\Delta_m\right) = \left(b_1+\Delta_1\right)y_1^* + \ldots + \left(b_m+\Delta_m\right)y_m^* = F^* + y_1^*\Delta_1 + \ldots + y_m^*\Delta_m .$$

Из последнего равенства видно, что при $y_i^* = 0$ малые изменения запаса i-го ресурса не меняют величину максимального дохода F^*; такие ресурсы называются **недефицитными.** Ресурсы, для которых $y_i^* > 0$, называются **дефицитными** - увеличение (уменьшение) из запасов увеличивает (уменьшает) доход F^*. Числа $y_1^*,\ldots,y_m^*$ определяют скорость возрастания F^* при увеличении соответствующего запаса и называются **ценностями** или **теневыми ценами ресурсов** в данных условиях производства; задача, двойственная к задаче о ресурсах, называется **задачей о ценности ресурсов.**

Используя понятие дефицитности и теневых цен ресурсов, можно дать экономическое истолкование постановке двойственной задачи (31) – (33) и утверждениям теорем двойственности. В частности, вторая группа уравнений теоремы 2 означает, что дефицитные ресурсы $(y_i^* > 0)$ в оптимальных планах производства расходуются полностью $(S_i^* = 0)$, а все ресурсы, которые расходуются не полностью $(S_i^* > 0)$, являются недефицитными $\left(y_i^* = 0\right)$.

Пример 20. Построить модель задачи о ценности ресурсов для задачи о ресурсах из примера 11. Найти ценности и определить статус (дефицитные, недефицитные) ресурсов, указать самый ценный ресурс.

Решение. Моделью задачи о ценности ресурсов является задача ЛП, двойственная к модели самой задачи о ресурсах. Условие этой задачи записано в примере15. Ценности ресурсов, т. е. компоненты $y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*$ оптимального плана двойственной задачи, можно найти непосредственно по заключительной таблице T_3 прямой задачи (см. пример 11) аналогично тому, как это сделано в примере 17. Записанные в скобках переменные $y_{1,} y_2, y_3, y_4, t_1, t_2, t_3$ двойственной задачи

		(y_1)	(y_2)	(y_3)	(G)
	T_3	$-S_1$	$-S_2$	$-S_3$	1
(t_1)	x_1	$1/2$	$1/2$	$-1/2$	4
(t_2)	x_2	-1	0	1	2
(t_3)	x_3	0	-1	1	1
(y_4)	S_4	$3/2$	$3/2$	$-7/2$	3
	F	2	1	3	61

$(t_1, t_2, t_3 -$ балансовые$)$ соответствуют переменным $S_{1,} S_2, S_3, S_4, x_1, x_2, x_3$ прямой задачи. Столбцы таблицы T_3 содержат уравнения двойственной задачи с базисными переменными y_1, y_2, y_3 и свободными

$t_1, t_2, t_3, y_4 : y_1 = (1/2)\,t_1 + (-1)\,t_2 + 0 \cdot t_3 + (3/2)\,y_4 + 2, \ldots,\quad G = 4t_1 + 2t_2 + t_3 + 3y_4 + 61$.
В соответствующем базисном плане $t_1 = t_2 = t_3 = y_4 = 0$, $y_1 = 2$, $y_2 = 1$, $y_3 = 3$, $G = 61$. Из оптимальности T_3 для прямой задачи следует, что $y_1^* = 2$, $y_2^* = 1$, $y_3^* = 3$, $y_4^* = 0 -$ оптимальный план двойственной задачи. Таким образом, четвертый ресурс недефицитный $(y_4^* = 0)$, все остальные – дефицитные. Самым ценным является третий ресурс $\left(y_3^* = 3\right)$.

Упражнения

18. Решить задачу ЛП, используя графический метод решения задачи, двойственной к исходной:

а) $F = 4x_1 + 24x_2 + 20x_3 + 6x_4 - \quad \min$,

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 2, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 \geq 5, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

б) $F = 4x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 6x_4 - \quad \min$,

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 3x_4 \leq 30, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 20, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

19. Построить двойственную задачу, решить одну из них и записать оптимальный план и записать оптимальный план другой задачи:

а) $F = 3x_1 + 8x_2 + 5x_3 + \quad \max$,

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 4, \\ x_1 + 2x_3 \le 7, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 12, \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, \ge 0.$

б) $F = x_1 + 3x_2 + 2x_3 - \quad \min$,

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 \ge 5, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 10 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 \ge 2, \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, \ge 0.$

20. Решить двойственным симплекс-методом

$$F = 12x_1 + 27x_2 + 6x_3 - \quad \min,$$
$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \ge 14,$$
$$x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 6,$$
$$6x_1 + 9x_2 + 2x_3 \ge 22,$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

21. Минимальное количество автобусов, обеспечивающих потребность в пассажирских перевозках на городских маршрутах, остается постоянным в пределах каждого из шести четырехчасовых интервалов 0 часов – 4 часа, 4 часа – 8 часов, …,
20часов – 24 часа, и составляет 4, 8, 10, 7, 12, 4 автобуса соответственно. Каждый автобус используется непрерывно в течении восьми часов один раз в сутки, начало смены совпадает с началом одного из указанных четырехчасовых интервалов времени. Требуется определить минимальное значение общего количества автобусов, выходящих на городские маршруты в течение суток. Сколько автобусов занято при этом в каждой из шести восьмичасовых смен?

22. На складе предприятия имеются заготовки (бруски) длиной 8,1 м. Из этих заготовок требуется изготовить 100 комплектов более коротких заготовок, в один комплект входят два бруска длиной 3 м. и по одному бруску длиной 2м. и 1,5м. Необходимо раскроить исходный материал так, чтобы получить требуемое количество комплектов коротких заготовок с минимальными отходами. Указание: Рассмотреть все способы раскроя заготовок длины 8,1 м., в которых отходами будут бруски длиной менее, чем 1,5 м. Всего таких способов будет 10. Один из них, например, дает 2 заготовки длиной 3м. и одну заготовку длиной 2м.; при этом в отходы пойдет брусок длиной $8{,}1 - 2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 0{,}1$м.

7. Исследование зависимости оптимальных планов от исходных данных задачи ЛП

С помощью симплекс-метода, обычного или двойственного, можно не только находить оптимальные планы задач двойственной пары, но и исследовать, как меняются эти планы при различных изменениях в ограничениях и целевых функциях рассматриваемых задач.

Покажем, как проводятся такие исследования на примере конкретной пары «задача о ресурсах – задача о ценности ресурсов» (см. примеры 11, 15, 20):

$$
\begin{aligned}
&F = 12x_1 + 4x_2 + 5x_3 \quad - \max,\\
&(y_1)\ 2x_1 \qquad\qquad + x_3 + S_1 = 9,\\
&(y_2)\ 2x_1 + x_2 \qquad\quad + S_2 = 10,\\
&(y_3)\ 2x_1 + x_2 + x_3 + S_3 = 11,\\
&(y_4)\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + S_4 = 13,\\
&\quad x_1, x_2, x_3, S_1, S_2, S_3, S_4 \ge 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&G = 9y_1 + 10y_2 + 3y_3 + 3y_4 \quad - \min,\\
&(x_1)\quad 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4 - t_1 = 12,\\
&(x_1)\qquad\qquad y_2 + y_3 + 2y_4 - t_2 = 4,\\
&(x_3)\quad y_1 \qquad\quad + y_3 + 2y_4 - t_3 = 5,\\
&\quad y_1, y_2, y_3, y_4, t_1, t_2, t_3 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Для удобства изложения запишем начальную и заключительную таблицы цепочки, полученной при решении симплекс-методом первой из этих задач, задачи о ресурсах (см. T_0, T_3 в примере 11 и T_3 в примере 20):

		(t_1)	(t_2)	(t_3)	(G)
$T_{нач}$		$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
(y_1)	S_1	2	0	1	9
(y_2)	S_2	2	1	0	10
(y)	S_3	2	1	1	11
(y_4)	S_4	1	2	2	13
	F	-12	-4	-5	0

		(y_1)	(y_2)	(y_3)	(G)
$T_{закл}$		$-S_1$	$-S_2$	$-S_3$	1
(t_1)	x_1	$1/2$	$1/2$	$-1/2$	4
(t_2)	x_2	-1	0	1	2
(t_3)	x_3	0	-1	1	1
(y_4)	S_4	$3/2$	$3/2$	$-7/2$	3
	F	2	1	3	61

Пример 21 (Изменение правых частей ограничений). В исходной задаче о ресурсах изменились только запасы ресурсов (правые части ограничений), новые значения запасов равны $9 + \Delta_1$, $10 + \Delta_2$, $11 + \Delta_3, 13 + \Delta_4$ соответственно. Записать симплексную таблицу новой задачи в базисе таблицы $T_{закл.}$, сформулировать правила построения такой таблицы. Показать, что при достаточно малых значениях приращений $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ ценности ресурсов не изменяются.

Решение. Введем обозначения $\tilde{S}_1 = S_1 - \Delta_1$, $\tilde{S}_2 = S_2 - \Delta_2$, $\tilde{S}_3 = S_3 - \Delta_3$, $\tilde{S}_4 = S_4 - \Delta_4$. Тогда условия задачи с измененными запасами запишутся в виде

$$
\begin{aligned}
F &= 12x_1 + 4x_2 + 5x_3 \quad - \max, \\
\tilde{S}_1 &= 9 - 2x_1 \quad - x_3, \\
\tilde{S}_2 &= 10 - 2x_1 - x_2, \\
\tilde{S}_3 &= 11 - 2x_1 - x_2 - x_3, \\
S_4 &= 13 - x_1 - 2x_2 - 2x_3, \\
& x_1, x_2, x_3, \tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \tilde{S}_3, \tilde{S}_4 \ge 0 .
\end{aligned}
$$

Эта запись отличается от записи уравнений в таблице $T_{нач.}$ только заменой S_1, S_2, S_3, S_4, на $\tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \tilde{S}_3, \tilde{S}_4$ соответственно. Так как системы уравнений в таблицах $T_{нач.}$ $T_{закл.}$ эквивалентны, уравнение новой задачи можно привести к виду

$$
\begin{aligned}
F &= 61 - 2\tilde{S}_1 - \tilde{S}_2 - 3\tilde{S}_3, \\
x_1 &= 4 - (1/2)\tilde{S}_1 - (1/2)\tilde{S}_2 + (1/2)\tilde{S}_3, \\
x_2 &= 2 + \tilde{S}_1 - \tilde{S}_3, \\
x_3 &= 1 + \tilde{S}_2 - \tilde{S}_3, \\
\tilde{S}_4 &= 3 - (3/2)\tilde{S}_1 - (3/2)\tilde{S}_2 + (7/2)\tilde{S}_3 .
\end{aligned}
$$

После замены $\tilde{S}_1, \ldots, \tilde{S}_4$ на их выражения $\tilde{S}_1 = S_1 - \Delta_1, \ldots, \tilde{S}_4 = S_4 - \Delta_4$, получим систему, соответствующую искомой таблице $T(\Delta)$,

	$T(\Delta)$	(y_1) $-S_1$	(y_2) $-S_2$	(y_3) $-S_3$	(G) 1				
(t_1)	x_1	$1/2$	$1/2$	$-1/2$	$4+$	$(1/2)\cdot\Delta_1 +$	$(1/2)\cdot\Delta_2 +$	$(-1/2)\cdot\Delta_3$	
(t_2)	x_2	-1	0	1	$2+$	$(-1)\cdot\Delta_1 +$	$0\cdot\Delta_2 +$	$1\cdot\Delta_3$	
(t_3)	x_3	0	-1	1	$1+$	$0\cdot\Delta_1 +$	$(-1)\cdot\Delta_2 +$	$1\cdot\Delta_3$	
(y_4)	S_4	$3/2$	$3/2$	$-7/2$	$3+$	$(3/2)\cdot\Delta_1 +$	$(3/2)\cdot\Delta_2 +$	$(-7/2)\cdot\Delta_3 +$	$1\cdot\Delta_4$
	F	2	1	3	$61+$	$2\cdot\Delta_1 +$	$1\cdot\Delta_2 +$	$3\cdot\Delta_3$	

Правила построения таблицы $T(\Delta)$:

Таблица $T(\Delta)$ отличается от $T_{закл.}$ только значениями элементов столбца свободных членов. К свободным членам таблицы $T_{закл.}$ надо прибавить поправки, зависящие линейно от приращений $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$. Приращения $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ связаны с переменными S_1, S_2, S_3, которые были базисными в $T_{нач.}$ и стали свободными в $T_{закл.}$; эти приращения входят в поправки с коэффициентами, равными элементам соответствующей строки таблицы $T_{закл.}$ из столбцов S_1, S_2, S_3. Приращение Δ_4 связано с переменной S_4, которая осталась базисной в $T_{закл.}$; Δ_4 входит только в поправку свободного члена строки S_4, причем с коэффициентом, равным **единице.**

При достаточно малых приращениях $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ таблица $T(\Delta)$ удовлетворяет (строго) критерию оптимальности – в ней положительны как элементы столбца свободных членов (они близки к положительным значениям 4, 2, 1, 3 из $T_{закл.}$), так и элементы строки F (совпадают с значениями 2, 1, 3 из $T_{закл.}$). Совпадение ценностей ресурсов в исходной задаче и задаче с малыми изменениями запасов ресурсов следует из совпадения строк F (без свободных членов) в таблицах $T(\Delta)$ и $T_{закл.}$; в каждой их этих задач $y_1^* = 2,\ y_2^* = 1,\ y_3^* = 3,\ y_4^* = 0$.

Пример 22 (Изменение коэффициентов целевой функции). В исходной задаче о ресурсах изменились только доходы от реализации единицы готовой продукции (коэффициенты целевой функции), новые значения доходов равны $12 + \delta_1$, $4 + \delta_2$, $5 + \delta_3$ соответственно.

Записать симплексную таблицу новой задачи в базисе таблицы $T_{закл.}$ Показать, что при достаточно малых значениях приращений доходов $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ оптимальный план задачи не изменится.

Решение. Изменению коэффициентов целевой функции в задаче о ресурсах соответствует изменение правых частей ограничений в двойственной задаче (о ценности ресурсов). Повторим все рассуждения предыдущего примера, заменяя в них уравнения задачи о ресурсах на уравнения двойственной задачи. В результате получим, что искомая таблица $T(\delta)$ задачи о ресурсах с измененными доходами отличается от таблицы $T_{закл.}$ только значениями элементов строки F и имеет вид

$T(\ )$	$-S_1$	$-S_2$	$-S_3$	
x_1	$1/2$	$1/2$	$-1/2$	4
x_2	-1	0	1	2
x_3	0	-1	1	1
S_4	$3/2$	$3/2$	$-7/2$	3
F	γ_1	γ_2	γ_3	γ_0

$$\gamma_1 = 2 + (1/2)\cdot\delta_1 + (-1)\cdot\delta_2 + 0\cdot\delta_3,$$
$$\gamma_2 = 1 + (1/2)\cdot\delta_1 + 0\cdot\delta_2 + (-1)\cdot\delta_3,$$
$$\gamma_3 = 3 + (1/2)\cdot\delta_1 + 1\cdot\delta_2 + 1\cdot\delta_3,$$
$$\gamma_0 = 61 + 4\cdot\delta_1 + 2\cdot\delta_2 + 1\cdot\delta_3.$$

К элементам строки F таблицы $T_{закл.}$ прибавляются поправки, зависящие линейно от приращений $\delta_1, \delta_2, \delta_3$. Коэффициенты при $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ в этих поправках равны элементам соответствующего столбца таблицы $T_{закл.}$ из строк x_1, x_2, x_3 (сформулируйте самостоятельно правила вычисления поправок в ситуации, когда некоторые из свободных переменных таблицы $T_{нач.}$ остаются свободными и в таблице $T_{закл.}$).

При достаточно малых приращениях $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ элементы $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ строки F положительны и таблица $T(\delta)$ удовлетворяет критерию оптимальности. В этом случае оптимальный план $x_1^* = 4$, $x_2^* = 2$, $x_3^* = 1$, $S_1^* = S_2^* = S_3^* = 0$, $S_4^* = 3$ задачи с измененными доходами совпадает с оптимальным планом исходной задачи о ресурсах.

Пример 23. В исходной задаче о ресурсах запасы 9, 10, 11, 13 изменились и составляют 9, 10, 14, 8 соответственно. Найти новый оптимальный план производства.

Решение. Симплексная таблица $T(\Delta)$ задачи с измененными запасами, построенная с помощью заключительной таблицы $T_{\text{закл.}}$ исходной задачи о ресурсах, удовлетворяет **условию оптимальности** при **любых** значениях приращений $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ (см. пример 21). Поэтому $T(\Delta)$ **всегда** можно использовать как начальную для решения задачи с измененными запасами **двойственным** симплекс-методом. В условиях данного примера имеем: $\Delta_1 = 9 - 9 = 0$, $\Delta_2 = 10 - 10 = 0$, $\Delta_3 = 14 - 11 = 3$, $\Delta_4 = 8 - 13 = -5$. Далее находим свободные члены таблицы $T(\Delta)$:

$$4 + (1/2)\cdot 0 + (1/2)\cdot 0 + (-1/2)\cdot 3 = 5/2;\ \ 2 + (-1)\cdot 0 + 0\cdot 0 + 1\cdot 3 = 5;\ 1 + 0\cdot 0 + (-1)\cdot 0 +$$

$$+1\cdot 3 = 4;\ 3 + (3/2)\cdot 0 + (3/2)\cdot 0 + (-7/2)\cdot 3 + 1\cdot(-5) = -25/2;\ 61 + 2\cdot 0 + 1\cdot 0 + 3\cdot 3 = 70.$$

$T(\Delta)$	$-S_1$	$-S_2$	$-S_3$	
x_1	$1/2$	$1/2$	$-1/2$	$5/2$
x_2	-1	0	1	5
x_3	0	-1	1	4
S_4	$3/2$	$3/2$	$-7/2$	$-25/2$
F	2	1	3	70

$T^*(\Delta)$	$-S_1$	$-S_2$	$-S_4$	
x_1				$30/7$
x_2				$10/7$
x_3				$3/7$
S_3				$25/7$
F	$23/7$	$16/7$	$6/7$	$415/7$

Таблица $T^*(\Delta)$, содержащая оптимальный план $x_1^* = 30/7$, $x_2^* = 10/7$, $x_3^* = 3/7$, $S_1^* = S_2^* = S_4^* = 0$, $S_3^* = 25/7$, $F^* = 415/7$ новой задачи, получается с помощью двойственного симплекс-метода уже после **первого** симплексного преобразования. Для нахождения нового оптимального плана симплекс-методом без использования заключительной таблицы исходной задачи пришлось бы выполнить не менее трех симплексных преобразований (почему?).

Пример 24. В исходной задаче о ресурсах доходы 12, 4, 5 от реализации трех видов продукции изменились и составляют 12, 2, 7 соответственно. Найти новый оптимальный план производства.

Решение. Симплексная таблица $T(\delta)$ задачи с измененными доходами, построенная с помощью таблицы $T_{\text{закл.}}$ исходной задачи, **допустима** при **любых**

значениях приращений $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ (см. пример 22). Поэтому $T(\delta)$ **всегда** можно использовать как начальную для решения задачи с измененными доходами **симплекс-методом.** В условиях данного примера $\delta_1 = 12 - 12 = 0$, $\delta_2 = 6 - 4 = 2$, $\delta_3 = 3 - 5 = -2$. Далее находим элементы строки F таблицы $T(\delta)$:

$$\gamma_1 = 2 + (1/2)\cdot 0 + (-1)\cdot(-2) + 0\cdot 2 = 4, \quad \gamma_2 = 1 + (1/2)\cdot 0 + 0\cdot(-2) + (-1)(2) = -1,$$

$$\gamma_3 = 3 + (-1/2)\cdot 0 + 1\cdot(-2) + 1\cdot 2 = 3, \quad \gamma_0 = 61 + 4\cdot 0 + 2\cdot(-2) + 1\cdot 2 = 59.$$

$T(\delta)$	$-S_1$	$-S_2$	$-S_3$	
x_1	$1/2$	$1/2$	$-1/2$	4
x_2	-1	0	1	2
x_3	0	-1	1	1
S_4	$3/2$	$\boxed{3/2}$	$-7/2$	3
F	4	-1	3	59

$T^*(\delta)$	$-S_1$	$-S_4$	$-S_3$	
x_1				3
x_2				2
x_3				3
S_2				2
F	5	$2/3$	$2/3$	61

Как и в предыдущем примере, использование заключительной таблицы исходной задачи позволяет найти новый оптимальный план быстрее, чем при «прямом» решении задачи с измененными условиями симплекс-методом. Таблица $T^*(\delta)$, содержащая новый оптимальный план $x_1^* = 3$, $x_2^* = 2$, $x_3^* = 3$, $S_1^* = S_3^* = S_4^* = 0, S_2^* = 2$, $F^* = 61$, получается уже после первого преобразования таблицы $T(\delta)$. В отличии от предыдущего примера разрешающий элемент выбирается по правилам обычного (а не двойственного) симплекс-метода.

Пример 25. В условии изменилась только величина запаса самого ценного ресурса. При каких изменениях этой величины ценности ресурсов не меняются?

Решение. Ценности ресурсов $y_1^* = 2$, $y_2^* = 1$, $y_3^* = 3, y_4^* = 0$ найдены в примере 20, самым ценным оказался третий ресурс. Рассмотрим таблицу $T(\Delta_3)$, которая получается из таблицы $T(\Delta)$ примера 21 при $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_4 = 0$:

	$T(\Delta_3)$	(y_1) $-S_1$	(y_2) $-S_2$	(y_3) $-S_3$	
(t_1)	x_1				$4 - (1/2)\Delta_3$
(t_2)	x_2				$2 + \Delta_3$
(t_3)	x_3				$1 + \Delta_3$
(y_4)	S_4				$3 - (7/2)\Delta_3$
	F	2	1	3	$61 + 3\Delta_3$

$T(\Delta_3)$ - одна из симплексных таблиц задачи, в которой по сравнению с исходной изменилась (получила приращение Δ_3) только величина запаса третьего ресурса. Таблице $T(\Delta_3)$ соответствует опорный план $y_1 = 2,\ y_2 = 1, y_3 = 3,\ y_4 = 0$ задачи **о ценности ресурсов,** компоненты которого совпадают с ценностями ресурсов исходной задачи. Этот опорный план будет оптимальным при тех значениях Δ_3, для которых $T(\Delta_3)$ допустима, т. е. при выполнении системы неравенств $4-(1/2)\Delta_3 \ge 0,\ 2+\Delta_3 \ge 0,\ 1+\Delta_3 \ge 0,\ 3-(7/2)\Delta_3 \ge 0.$ Решая эту систему, получим $-1 \le \Delta_3 \le 6/7.$

Таким образом ценности ресурсов не меняются, если запас самого ценного (третьего) ресурса изменяется в пределах от 11-1=10 до 11+(6/7).

Пример 26. В условии изменилась только величина максимального из доходов от реализации единицы продукции. При каких изменениях этой величины оптимальный план производства не меняется?

Решение. Максимальный из доходов от реализации единицы продукции в исходной задаче имеет продукция первого вида. Предположим, что величина этого дохода изменилась и ее новое значение равно $12+\delta_1$. Одной из симплексных таблиц новой задачи будет таблица $T(\delta_1)$, в которую превращается $T(\delta)$ (см. пример 22) при $\delta_2 = \delta_3 = 0$:

$T(\delta_1)$	$-S_1$	$-S_2$	$-S_3$	
x_1				4
x_2				2
x_3				1
S_4				3
F	$2+(1/2)\delta_1$	$1+(1/2)\delta_1$	$3-(1/2)\delta_1$	$61+4\delta_1$

Таблице $T(\delta_1)$ соответствует опорный план $x_1 = 4,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1,\ S_1 = S_2 = S_3 = 0,$ $S_4 = 3$, совпадающий с оптимальным планом исходной задачи о ресурсах. Этот опорный план будут оптимальным при тех значениях δ_1, для которых $T(\delta_1)$ удовлетворяет условию оптимальности, т. е. при выполнении системы неравенств $2+(1/2)\,\delta_1 \ge 0,\ 1+(1/2)\,\delta_1 \ge 0,\ 3-(1/2)\,\delta_1 \ge 0.$ Решая эту систему, получим $-2 \le \delta_1 \le 6.$ Таким образом оптимальный план производства не меняется, если доход от реализации первого вида продукции изменяется в пределах от 12 – 2=10 до 12+6=18.

Пример 27. Для улучшения качества продукции в процесс производства вводится новый (пятый) вид ресурса. Технологические коэффициенты и запас нового ресурса равны 1, 2, 3 и 9 соответственно. Найти оптимальный план производства и величину максимального дохода в новых условиях.

Решение. Ведению нового ресурса соответствует введение дополнительного ограничения $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 9$ в стандартную модель задачи о ресурсах. Если оптимальный план исходной задачи удовлетворяет дополнительному ограничению, то он, очевидно, остается оптимальным для задачи с этим дополнительным ограничением. В условии данного примера оптимальный план исходной задачи $X^* = (4,2,1)$ не удовлетворяет дополнительному ограничению, $4 + 2\cdot 2 + 3\cdot 1 = 11 > 9$. Чтобы найти новый оптимальный план, совсем не обязательно решать заново задачу ЛП с дополнительным ограничением. Гораздо быстрее приводит к цели (и не только в данном примере) введение дополнительного ограничения в таблицу $T_{\text{закл.}}$ исходной задачи.

Новое ограничение $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 9$ приведем к каноническому виду $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + S_5 = 9,\ S_5 \ge 0$ (смысл переменной S_5 - остаток нового ресурса). Чтобы ввести новое ограничение-равенство в $T_{\text{закл.}}$, отнесем S_5 к базисным и заменим переменные x_1, x_2, x_3 их выражениями через свободные переменные S_1, S_2, S_3 таблицы $T_{\text{закл.}}$. Тогда новое равенство запишется в виде $S_5 = 9 - x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 9 - (4 - (1/2)S_1 - (1/2)S_2 + (1/2)S_3) - 2(2 + S_1 - S_3) - 3(1 + S_2 - S_3)$, или, после приведения подобных членов,

$$S_5 = -2 - (3/2)S_1 - (5/2)S_2 + (9/2)S_3.$$

Введем в $T_{\text{закл.}}$ строку, соответствующую этой форме записи нового ограничения. В результате получим таблицу $\tilde{T}_0$ - одну из симплексных таблиц задачи с дополнительным ограничением:

$\tilde{T}_0$	$-S_1$	$-S_2$	$-S_3$	
x_1	$1/2$	$1/2$	$-1/2$	4
x_2	-1	0	1	2
x_3	0	-1	1	1
S_4	$3/2$	$3/2$	$-7/2$	3
S_5	$3/2$	$5/2$	$-9/2$	-2
F	2	1	3	61

$\tilde{T}_1$	$-S_1$	$-S_2$	$-S_5$	
x_1				$38/9$
x_2				$14/9$
x_3				$5/9$
S_4				$41/9$
S_3				$4/9$
F	3	$8/3$	$2/3$	$179/3$

Таблица $\tilde{T}_0$ удовлетворяет условию оптимальности (это следует из способа построения $\tilde{T}_0$). Применяя двойственный симплекс-метод, уже после первого преобразования получим таблицу $\tilde{T}_1$, содержащую новый оптимальный план $\tilde{x}_1^* = 38/9,\ \tilde{x}_2^* = 14/9,\ \tilde{x}_3^* = 5/9,\ \tilde{S}_1^* = 0,\ \tilde{S}_2^* = 0,\ \tilde{S}_3^* = 4/9,\ \tilde{S}_4^* = 41/9,\ \tilde{S}_5^* = 0,\ \tilde{F}^* = 179/3$. Новый оптимальный план хуже старого – доход от реализации всей произведенной продукции уменьшился ($\tilde{F}^* < F^*$). Этого и следовало ожидать, т. к. введение дополнительного ограничения не может привести к увеличению максимального значения целевой функции (попробуйте обосновать это утверждение и дать ему геометрическую интерпретацию).

Пример 28. Технологические коэффициенты и доход от реализации единицы нового (четвертого) вида продукции равны 1, 3, 1, 2 и 10 соответственно. Выгодно ли введение в план производства нового вида продукции? Если да, найти новый оптимальный план и величину максимального дохода.

Решение. Обозначим объем производства нового вида продукции через x_4. Стандартная модель задачи о ресурсах, учитывающая возможность производства нового вида продукции, отличается от модели исходной задачи дополнительными слагаемыми $x_4, 3x_4, x_4, 2x_4$ и $10x_4$ в ограничениях и целевой функции:

$$F = 12x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 \quad - \max,$$

$$\begin{aligned} 2x_1 \quad\quad + x_3 + \quad x_4 &\le 9, \\ 2x_1 + x_2 \quad\quad + 3x_4 &\le 10, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + \quad x_4 &\le 11, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &\le 13, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0. \end{aligned}$$

Переменной x_4 соответствует дополнительное ограничение $y_1 + 3y_2 + y_3 +$ $+ 2y_4 \ge 10$ двойственной задачи о ценности ресурсов. Оптимальный план $Y^* =$ $= (2, 1, 3, 0)$ исходной задачи о ценности ресурсов не удовлетворяет этому ограничению, $2 + 3 \cdot 1 + 3 + 2 \cdot 0 = 8 < 10$. Поэтому новое значение $\tilde{G}^*$ минимума целевой функции G будет **больше** , чем старое значение $G^* = 61$(сравните с неравенством $\tilde{F}^* < F^*$ в конце предыдущего примера). Из первой теоремы двойственности следует, что $\tilde{F}^* = \tilde{G}^* > G^* = F^* = 61$. Здесь $\tilde{F}^*$-новое значение максимального дохода от реализации всей произведенной продукции; неравенство $\tilde{F}^* > F^*$ означает, что в условиях данного примера введение в план производства нового вида продукции выгодно.

Чтобы найти новый оптимальный план $\tilde{X}^* = \left(\tilde{x}_1^*, \tilde{x}_2^*, \tilde{x}_3^*, \tilde{x}_{41}^*\right)$ и $\tilde{F}^* = F\left(\tilde{X}^*\right)$, введем в таблицу $T_{\text{закл.}}$ дополнительный столбец, соответствующей переменной x_4 прямой задачи и переменной t_4 из канонической формы $y_1 + 3y_2 + y_3 + 2y_4 -$ $- t_4 = 10,\ t_4 \ge 0$ нового ограничения двойственной задачи. Элементы дополнительного столбца находятся так же, как элементы дополнительной строки в предыдущем примере, вместо нового ограничения прямой задачи надо использовать новое ограничение двойственной задачи. Базисные переменные двойственной задачи y_1, y_2, y_3 выражаются через свободные переменные t_1, t_2, t_3, y_4 по формулам (см. столбцы таблицы $T_{\text{закл.}}$):

$$\begin{aligned} y_1 &= 2 + (1/2)t_1 - t_2 + (3/2)\,y_4, \\ y_2 &= 1 + (1/2)\,t_1 - t_3 + (3/2)\,y_4, \\ y_3 &= 3 - (1/2)\,t_1 + t_2 + t_3 - (7/2)\,y_4. \end{aligned}$$

После подстановки этих выражений в равенство $y_1 + 3y_2 + y_3 + 2y_4 - t_4 = 10$ новое ограничение запишется в виде

$$t_4 = -2 + (3/2)\,t_1 + 0 \cdot t_2 + (-2)\,t_3 + (9/2)y_4 .$$

Результатом введения в $T_{закл.}$ дополнительного столбца, соответствующего последнему равенству, будет симплексная таблица $\tilde{T}_0$ новой задачи:

	$\tilde{T}_0$	(y_1) $-S_1$	(y_2) $-S_2$	(y_3) $-S_3$	(t_4) $-x_4$	G 1
(t_1)	x_1	$1/2$	$1/2$	$-1/2$	$3/2$	4
(t_2)	x_2	-1	0	1	0	2
(t_3)	x_3	0	-1	1	-2	1
(y_4)	S_4	$3/2$	$3/2$	$-7/2$	$9/2$	3
	F	2	1	3	-2	61

	$\tilde{T}_1$	(y_1) $-S_1$	(y_2) $-S_2$	(y_3) $-S_3$	(y_4) $-x_4$	
(t_1)	x_1	$1/2$	$1/2$	$-1/2$	$3/2$	3
(t_2)	x_2	-1	0	1	0	2
(t_3)	x_3	0	-1	1	-2	$7/3$
(t_4)	x_4	$3/2$	$3/2$	$-7/2$	$9/2$	$2/3$
	F	$8/3$	$5/3$	$13/9$	$4/9$	$187/3$

Таблица $\tilde{T}_0$ допустима (это следует из способа ее построения). Применяя обычный симплекс метод, уже после первого преобразования получим таблицу $\tilde{T}_1$, содержащую новый оптимальный план:

$$\tilde{x}_1^* = 3,\ \tilde{x}_2^* = 2,\ \tilde{x}_3^* = 7/3,\ \tilde{x}_4^* = 2/3,\ \tilde{S}_1^* = \tilde{S}_2^* = \tilde{S}_3^* = \tilde{S}_4^* = 0,\ \tilde{F}^* = 187/3.$$

Введение в план производства нового вида продукции привело к увеличению дохода на $\tilde{F}^* - F^* = 187/3 - 61 = 4/3$.

8. Расчетно-графическая работа «Линейное программирование»

Работа предусматривает выполнение трех заданий. Исходными данными всех вариантов первых двух заданий являются расширенная матрица системы ограничений-равенств и строка коэффициентов целевой функции канонической задачи ЛП. В вариантах третьего задания представлены исходные данные задачи о ресурсах: технологическая матрица размера 4×3 (в левом верхнем углу), запасы ресурсов (столбец b), доходы от реализации единицы каждого вида продукции (строка c). Дополнительные данные $\tilde{b}, \tilde{c}, a_{5}.$ и $a_{.4}$ соответствуют различным изменениям условий задачи о ресурсах.

Решение всех задач варианта 33, кроме заданий 1а) и 2а), содержатся в следующих примерах данных методических указаний:

№ задания	1б	2б	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8
№ примера	14	18	11	15,20	23	24	25	26	27	28

Эти примеры можно использовать как образцы выполнения соответствующих заданий.

Задание 1. Решить каноническую задачу ЛП а) графически; б) симплекс-методом, отыскав предварительно начальную симплексную таблицу с помощью вспомогательной задачи:

1. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 1 & 0 & 11 \end{array}\right)$

$(5, -1, 1, 0, 0)$

2. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 6 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right)$

$(6, 1, -1, -2, 0)$

5. $\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -3 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 6 & 1 & 6 \end{array}\right)$

$(8, 1, -3, 0, 0)$

6. $\left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 3 & 8 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 6 & 5 \end{array}\right)$

$(0, 1, -3, -1, -1)$

7. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$

$(1, -2, -1, -1, 0)$

8. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 6 & 1 & 1 & 2 & 1 & 9 \\ -1 & 0 & -1 & 7 & 8 & 14 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$

$(0, 1, -6, 1, -3)$

9. $\left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & 0 & 3 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 6 & 2 & 9 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right)$

$(-8, -1, -1, 1, 0)$

10. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 6 & 3 & 6 & 15 \end{array}\right)$

$(-1, 3, -1, 1, 0)$

11. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 8 & 4 & 12 & 4 & 12 & 24 \end{array}\right)$

$(0,\ 2,\ 0,\ 1,\ -3)$

12. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 8 & 16 & 8 & 8 & 24 & 32 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 1 & 15 \end{array}\right)$

$(10,\ 5,\ -25,\ 5,\ 0)$

13. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & 1 & 1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$

$(6,\ 0,\ -1,\ 1,\ 2)$

14. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & -1 & 4 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & 0 & 8 & 1 & 12 \end{array}\right)$

$(-5,\ -1,\ 3,\ -1,\ 0)$

15. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 12 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 16 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$

$(5,\ 3,\ 2,\ -1,\ 1)$

16. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 12 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$

$(7,\ 0,\ 1,\ -1,\ 1)$

17. $\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 1 & 1 & 11 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$

$(6,\ -1,\ 2,\ -1,\ 1)$

18. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & -1 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$

$(0,\ 0,\ 3,\ -2,\ -1)$

19. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 6 & 3 & 1 & 1 & 1 & 20 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$

$(1,\ 7,\ 2,\ 1,\ -1)$

20. $\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 2 & 14 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$(2,\ 0,\ 1,\ -1,\ 1)$

21. $\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 1 & 1 & 18 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$

$(6,\ 1,\ 0,\ 1,\ 2)$

22. $\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right)$

$(0,\ 3,\ 1,\ -1,\ 1)$

23. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$

$(3,\ 0,\ 1,\ -2,\ 1)$

24. $\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 10 \end{array}\right)$

$(0,\ 5,\ 1,\ -1,\ 1)$

25. $\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$

$(5,\ 1,\ -1,\ 1,\ 2)$

26. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 12 \end{array}\right)$

$(5,\ 0,\ 1,\ -1,\ 1)$

27. $\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 1 & 1 & 1 & 11 \end{array}\right)$

$(7,\ 0,\ 2,\ -1,\ 1)$

28. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & 5 & 1 & 2 & 1 & 28 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right)$

$(1,\ -4,\ 1,\ 1,\ 1)$

29. $\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 1 & 1 & 1 & 20 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$

$(0,\ 8,\ 2,\ 1,\ -1)$

30. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 5 & 1 & 1 & 2 & 14 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$(0,\ -2,\ 1,\ -1,\ 1)$

31. $\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 2 & 6 & 2 & 1 & 1 & 18 \end{array}\right)$

$(7,\ 2,\ 0,\ 1`,\ 2)$

32. $\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$(1,\ 3,\ 1,\ -1,\ 1)$

33. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 11 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$

$(1,\ 2,\ 1,\ -1,\ 1)$

Задание 2. Решить каноническую задачу ЛП а)графически; б) двойственным симплекс-методом:

1. $\left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & -2 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ -4 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$

$(-1, -10,\ 0,\ 0,\ 0)$

2. $\left(\begin{array}{ccccc|c} -6 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 0 & -12 & 1 & -2 \end{array}\right)$

$(0,\ -2,\ 0,\ -4,\ 0)$

3. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & -2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -32 & 4 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 8 & -16 & 4 & -1 \end{array}\right)$

4. $\left(\begin{array}{ccccc|c} -12 & 0 & 0 & 3 & 3 & -8 \\ 3 & 0 & 3 & -9 & 0 & -8 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 0 & -3 \end{array}\right)$

$(0,\ 0,\ -2,\ -1,\ 0)$

$(-1,\ 0,\ 0,\ -5,\ 0)$

5. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$

$(0,\ -1/2,\ 0,\ 0,\ -2)$

6. $\left(\begin{array}{ccccc|c} -4 & 2 & 0 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 2 & 0 & -5 \end{array}\right)$

$(-1/3,\ -1/2,\ 0,\ 0,\ 0)$

7. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 4 & 4 & -8 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 0 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & -8 & 0 & 2 & 4 & -7 \end{array}\right)$

$(0,\ -2/3,\ 0,\ -1,\ 0)$

8. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & 5 & 0 & 0 & -20 & -2 \\ 0 & -5 & 10 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 15 & -15 & -1 \end{array}\right)$

$(0,\ -1,\ 0,\ 0,\ -1/2)$

9. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -2 & 0 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$

$(0,\ -1/3,\ 0,\ -2/3,\ 0)$

10. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -3 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 5 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$

$(0, -3,\ 0,\ -2,\ 0)$

11. $\left(\begin{array}{ccccc|c} -6 & 2 & 6 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & -3 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right)$

$(-2,\ 0,\ 0,\ -2,\ 0)$

12. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & 0 & -5 \end{array}\right)$

$(0,\ -1,\ 0,\ 0,\ -3)$

13. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -1 & -2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{array}\right)$

$(-2,\ 0,\ 0, -3,\ 0)$

14. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 2 & 3 & 0 & -5 & -15 \\ -3 & 0 & 2 & 0 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -5 \end{array}\right)$

$(0,\ 0, -3,\ 0,\ -5)$

15. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & 0 & 0 & 1 & -11 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & -1 & -9 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$

$(0,\ -5,\ -4,\ 0,\ 0)$

16. $\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$

$(-7,\ 0,\ -10,\ 0,\ 0)$

17. $\left(\begin{array}{ccccc|c} -3 & -4 & 0 & 0 & 0 & -17 \\ -2 & 0 & -3 & 0 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right)$

$(-2,\ 0,\ -6,\ 0,\ 0)$

18. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 & -11 \end{array}\right)$

$(0,\ 0,\ 0,\ -5,\ -7)$

19. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -1 & -6 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 5 & -19 & 0 & 0 & -13 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$

$(0,\ -1, -3,\ 0,\ 0)$

20. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -10 & 1 & 1 & 0 & -16 \\ 1 & -3 & 0 & -3 & 0 & -12 \\ 0 & -6 & 0 & -2 & 1 & -17 \end{array}\right)$

$(0,\ -5,\ 0,\ -7,\ 0)$

21. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -5 & 0 & 1 & -4 & -20 \\ 0 & -4 & 1 & 0 & 2 & -9 \\ 1 & -6 & 0 & 0 & 1 & -18 \end{array}\right)$

$(0,\ -1/7,\ 0,\ 0,\ -10)$

22. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 & -10 & -4 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$

$(0,\ 0, -3,\ 0,\ -8)$

23. $\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 & -17 & -19 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -28 & -17 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right)$

$(-7,\ 0,\ 0,\ 0,\ -10)$

24. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & -5 & 0 & -5 & 0 & -2 \\ 0 & 20 & 5 & -25 & 0 & -1 \\ 0 & 15 & 0 & -30 & 10 & -1 \end{array}\right)$

$(0,\ -1/2, 0,\ -1/3,\ 0)$

25. $\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$

$(-12,\ 0, -1/13,\ 0,\ 0)$

26. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 12 & 6 & 0 & -18 & 0 & -1 \\ 12 & 0 & 6 & -18 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & -6 & 3 & -1 \end{array}\right)$

$(-1/3,\ 0, 0,\ -1,\ 0)$

27. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & -5 & 0 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -10 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$

$(0,\ -1/2,\ 0,\ -3,\ 0)$

28. $\left(\begin{array}{ccccc|c} -4 & 0 & 2 & -2 & 0 & -7 \\ 2 & 2 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ -6 & 0 & 0 & 2 & 2 & -5 \end{array}\right)$

$(-1/2,\ 0, 0,\ -7/2,\ 0)$

29. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -6 & 3 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -6 & -6 & 0 & 6 & -7 \\ 3 & 3 & -9 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$

$(0,\ -1, -1/6,\ 0, 0)$

30. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 0 & 3 & -3 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right)$

$(-5,\ 0, 0,\ -3/2, 0)$

31. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 & -12 & -9 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -4 & -10 \\ -4 & 1 & 0 & 0 & 2 & -14 \end{array}\right)$

$(-10,\ 0, 0,\ 0,\ -7)$

32. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 1 & -14 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & -7 \end{array}\right)$

$(0,\ 0, -5,\ 0,\ -3)$

$$33.\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -6 & -2 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & -11 & 1 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 10 & -14 & 1 & 0 & -13 \end{array}\right)$$

$$(0,\ -3, -2,\ 0,\ 0)$$

Задание 3.

3.1**.** Построить математическую модель задачи о ресурсах. Найти оптимальный план производства, максимальный доход и остатки ресурсов.

3.2. Построить математическую модель задачи о ценности ресурсов. Найти ценности и определить статус ресурсов (дефицитный, недефицитный), указать самый ценный ресурс.

3.3. Найти оптимальный план производства задачи с измененными значениями (столбец $\tilde{в}$) запасов ресурсов.

3.4. Найти оптимальный план производства задачи с измененными значениями (строка $\tilde{c}$) доходов от реализации единицы продукции.

3.5. В условии изменилась только величина запаса самого ценного ресурса. При каких изменениях этой величины ценности ресурсов не меняются?

3.6. В условии изменилась только величина максимального из доходов от реализации единицы продукции. При каких изменениях этой величины оптимальный план производства не меняется?

3.7. Для улучшения качества продукции в процессе производства используется новый (пятый) вид ресурса. Технологические коэффициенты и запас нового ресурса известны (строка $a_{5\cdot}$). Найти новый оптимальный план производства и величину максимального дохода.

3.8. Известны технологические коэффициенты и доход от реализации единицы нового (четвертого) вида продукции (столбец $a_{\cdot 4}$). Выгодно ли введение в план нового вида продукции? Если да, найти новый оптимальный план производства и величину максимального дохода.

1.

1	0	2	3
1	2	0	7
1	1	2	8
1	2	2	9
6	8	6	b \ c

$\tilde{b} = (3,9,4,9)'$

$\tilde{c} = (5,10,6)$

$a_{5\cdot} = (1,1,3,5)$

$a_{\cdot 4} = (0,3,2,1,12)$

2.

1	0	2	12
1	2	0	8
1	1	2	13
2	1	2	22
7	6	12	b \ c

$\tilde{b} = (12,8,16,20)'$

$\tilde{c} = (7,5,14)$

$a_{5\cdot} = (1,1,1,8)$

$a_{\cdot 4} = (0,3,2,1,12)$

3.

1	0	2	5
1	2	0	9
1	1	2	10
2	2	1	12
5	6	3	b \ c

$\tilde{b} = (5,13,7,12)'$

$\tilde{c} = (4,8,3)$

$a_{5\cdot} = (2,1,1,6)$

$a_{\cdot 4} = (3,2,1,2,11)$

4.

1	0	2	8
1	2	0	16
1	2	1	19
1	2	2	26
10	12	13	b \ c

$\tilde{b} = (8,16,21,20)'$

$\tilde{c} = (10,10,15)$

$a_{5\cdot} = (0,1,2,12)$

$a_{\cdot 4} = (0,2,1,6,10)'$

5.

1	0	2	13
1	2	0	9
1	2	1	17
2	1	2	18
9	8	8	b \ c

$\tilde{b} = (13,11,11,18)'$

$\tilde{c} = (11,5,8)$

$a_{5\cdot} = (3,0,1,7)$

$a_{\cdot 4} = (2,1,3,1,10)'$

6.

1	0	2	6
1	2	0	12
1	2	1	14
2	2	1	17
8	14	8	b \ c

$\tilde{b} = (6,12,17,14)'$

$\tilde{c} = (6,17,8)$

$a_{5\cdot} = (3,1,1,11)$

$a_{\cdot 4} = (0,3,2,2,17)'$

7.

1	0	2	5
1	2	0	15
2	1	1	15
1	2	2	19
8	14	8	b \ c

$\tilde{b} = (5,18,9,19)'$

$\tilde{c} = (7,16,8)$

$a_{5\cdot} = (3,1,2,12)$

$a_{\cdot 4} = (3,1,1,1,12)'$

8.

1	0	2	9
1	2	0	7
2	1	1	13
2	1	2	18
10	7	7	b \ c

$\tilde{b} = (9,7,16,13)'$

$\tilde{c} = (11,5,7)$

$a_{5\cdot} = (1,3,1,8)$

$a_{\cdot 4} = (3,2,1,2,15)'$

9.

1	0	2	10
1	2	0	16
2	1	1	18
2	2	1	22
13	14	11	b \ c

$\tilde{b} = (10,19,13,22)'$

$\tilde{c} = (10,15,11)$

$a_{5\cdot} = (3,1,0,11)$

$a_{\cdot 4} = (1,1,2,3,16)'$

10.

1	0	2	3
2	1	0	8
1	1	2	9
1	2	2	17
13	7	14	b / c

$\tilde{b} = (3,8,11,11)'$

$\tilde{c} = (15,5,4)$

$a_{5\cdot} = (3,1,2,9)$

$a_{\cdot 4} = (3,0,1,2,15)'$

11.

1	0	2	12
2	1	0	5
1	1	2	15
2	1	2	15
11	5	6	b / c

$\tilde{b} = (12,8,10,15)'$

$\tilde{c} = (12,4,6)$

$a_{5\cdot} = (1,3,1,8)$

$a_{\cdot 4} = (3,1,2,2,12)'$

12.

1	0	2	17
2	1	0	11
1	1	2	18
2	2	1	19
12	7	16	b / c

$\tilde{b} = (17,11,20,16)'$

$\tilde{c} = (14,4,16)$

$a_{5\cdot} = (1,3,1,12)$

$a_{\cdot 4} = (1,3,2,1,21)'$

13.

1	0	2	9
2	1	0	11
1	2	1	10
1	2	2	11
15	9	10	b / c

$\tilde{b} = (9,14,7,11)'$

$\tilde{c} = (16,8,10)$

$a_{5\cdot} = (1,3,2,10)$

$a_{\cdot 4} = (1,1,2,3,16)'$

14.

1	0	2	15
2	1	0	8
1	2	1	13
2	1	2	22
7	9	6	b / c

$\tilde{b} = (15,8,15,17)'$

$\tilde{c} = (5,12,6)$

$a_{5\cdot} = (3,2,1,17)$

$a_{\cdot 4} = (3,3,1,2,12)'$

15.

1	0	2	17
2	1	0	17
1	2	1	15
2	2	1	15
11	7	4	b / c

$\tilde{b} = (17,10,11,15)'$

$\tilde{c} = (13,6,4)$

$a_{5\cdot} = (1,3,1,11)$

$a_{\cdot 4} = (3,1,1,2,12)'$

16.

1	0	2	14
2	1	0	19
2	1	1	23
1	2	2	32
16	7	9	b / c

$\tilde{b} = (14,19,25,25)'$

$\tilde{c} = (18,6,9)$

$a_{5\cdot} = (1,0,3,16)$

$a_{\cdot 4} = (3,1,1,2,15)'$

17.

1	0	2	11
2	1	0	8
2	1	1	15
2	1	2	18
15	7	6	b / c

$\tilde{b} = (11,9,12,18)'$

$\tilde{c} = (17,6,6)$

$a_{5\cdot} = (3,1,1,12)$

$a_{\cdot 4} = (1,1,2,3,14)'$

18.

1	0	2	17
2	1	0	8
2	1	1	15
2	2	1	18
13	5	10	b / c

$\tilde{b} = (17,8,17,16)'$

$\tilde{c} = (14,3,10)$

$a_{5\cdot} = (1,3,1,14)$

$a_{\cdot 4} = (3,1,1,2,16)'$

19.

2	0	1	13
1	2	0	10
1	1	2	21
1	2	2	20
12	16	8	b / c

$\tilde{b}=(13,12,15,20)'$

$\tilde{c}=(10,17,8)$

$a_5.=(2,3,0,15)$

$a._4=(3,1,1,2,19)'$

20.

2	0	1	11
1	2	0	9
1	1	2	9
2	1	2	17
8	5	8	b / c

$\tilde{b}=(11,9,11,12)'$

$\tilde{c}=(10,4,8)$

$a_5.=(2,1,3,13)$

$a._4=(2,3,1,2,12)'$

21.

2	0	1	5
1	2	0	9
1	1	2	12
2	2	1	13
14	14	5	b / c

$\tilde{b}=(5,11,9,,13)'$

$\tilde{c}=(16,12,5)$

$a_5.=(3,1,1,9)$

$a._4=(2,3,2,1,21)'$

22.

2	0	1	9
1	2	0	6
1	2	1	11
1	2	2	18
6	8	4	b / c

$\tilde{b}=(9,6,12,14)'$

$\tilde{c}=(5,10,4)$

$a_5.=(2,3,1,13)$

$a._4=(3,1,2,2,12)'$

23.

2	0	1	9
1	2	0	12
1	2	1	17
2	1	2	14
12	10	6	b / c

$\tilde{b}=(9,13,11,14)'$

$\tilde{c}=(14,7,6)$

$a_5.=(3,1,2,16)$

$a._4=(2,1,1,3,16)'$

24.

2	0	1	17
1	2	0	11
1	2	1	14
2	2	1	24
8	12	6	b / c

$\tilde{b}=(17,11,15,18)'$

$\tilde{c}=(6,13,6)$

$a_5.=(1,3,1,14)$

$a._4=(2,3,1,2,12)'$

25.

2	0	1	12
2	1	0	7
1	2	1	15
2	2	1	14
14	7	2	b / c

$\tilde{b}=(12,7,9,17)'$

$\tilde{c}=(12,8,2)$

$a_5.=(2,3,1,13)$

$a._4=(3,1,2,2,12)'$

26.

2	0	1	11
1	2	0	11
2	1	1	15
2	1	2	22
15	6	7	b / c

$\tilde{b}=(11,11,17,18)'$

$\tilde{c}=(16,4,7)$

$a_5.=(3,2,0,15)$

$a._4=(2,3,1,2,15)'$

27.

2	0	1	14
1	2	0	8
2	1	1	17
2	2	1	18
16	14	6	b / c

$\tilde{b}=(14,9,14,18)'$

$\tilde{c}=(18,12,6)$

$a_{5.}=(1,3,1,14)$

$a._4=(3,1,2,1,18)'$

28.

2	0	1	13
2	1	0	12
1	1	2	13
1	2	2	16
17	8	13	b c

$$\tilde{b} = (13,12,14,14)'$$
$$\tilde{c} = (18,6,13)$$
$$a_{5\cdot} = (1,3,2,15)$$
$$a_{\cdot 4} = (2,3,1,2,22)'$$

29.

2	0	1	4
2	1	0	8
1	1	2	13
2	1	2	12
14	5	4	b c

$$\tilde{b} = (4,9,9,12)'$$
$$\tilde{c} = (15,6,4)$$
$$a_{5\cdot} = (3,1,2,11)$$
$$a_{\cdot 4} = (3,1,2,2,14)'$$

30.

2	0	1	10
2	1	0	14
1	1	2	14
2	2	1	24
9	6	11	b c

$$\tilde{b} = (10,14,16,20)'$$
$$\tilde{c} = (9,5,13)$$
$$a_{5\cdot} = (2,1,3,18)$$
$$a_{\cdot 4} = (2,1,3,2,20)'$$

31.

2	0	1	16
2	1	0	18
1	2	1	19
1	2	2	19
11	6	3	b c

$$\tilde{b} = (16,20,16,19)'$$
$$\tilde{c} = (9,8,3)$$
$$a_{5\cdot} = (1,1,2,13)$$
$$a_{\cdot 4} = (3,1,2,2,11)'$$

32.

2	0	1	13
2	1	0	11
1	2	1	20
2	1	2	29
10	9	6	b c

$$\tilde{b} = (13,11,22,22)'$$
$$\tilde{c} = (10,7,8)$$
$$a_{5\cdot} = (3,1,0,12)$$
$$a_{\cdot 4} = (1,1,3,2,17)'$$

33.

2	0	1	9
2	1	0	10
2	1	1	11
1	2	2	13
12	4	5	b c

$$\tilde{b} = (9,10,14,8)'$$
$$\tilde{c} = (12,2,7)$$
$$a_{5\cdot} = (1,2,3,9)$$
$$a_{\cdot 4} = (1,3,1,2,10)'$$