Министерство образования Российской Федерации
Омский государственный технический университет

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Методические указания
для студентов дневного и заочного отделений

Омск – 2003

Составитель Соколовский Мирон Наумович, доцент

Редактор Г. М. Кляут
ИД 06039 от 12.10.01 .
Подписано в печать 17.04.03. Формат 60х84х1/16. Бумага офсетная.
Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ. л. 2,25. Уч.-изд. л. 2,25.
Тираж 100 экз. Заказ

Издательство ОмГТУ. 644050, г. Омск, пр-т Мира, 11
Типография ОмГТУ

1. Некоторые примеры экономических задач, приводящих к модели линейного программирования (ЛП)

Пример 1. Задача об использовании ресурсов.

При производстве двух видов продукции (P_1 и P_2) используются четыре вида ресурсов: R_1, R_2, R_3, R_4. Затраты ресурсов каждого вида на производство одной единицы продукции каждого вида, имеющиеся запасы ресурсов и доходы от реализации одной единицы продукции заданы в таблице 1.

Таблица 1

Вид ресурса	Расход ресурса на единицу продукции		Запасы ресурса
	P_1	P_2	
R_1	2	3	19
R_2	2	1	13
R_3	0	3	15
R_4	3	0	18
Доход от единицы продукции	7	5	

Требуется найти план производства, возможный при данных запасах и расходах ресурсов и обеспечивающий наибольший доход, а также величину этого дохода. Построим **математическую модель** данной задачи. Ясно, что конкретный вариант организации производства полностью определяется значениями следующих величин: объемами производства продукции видов P_1 и P_2; расходами ресурсов R_1, R_2, R_3 и R_4 на производство планируемых объемов продукции; доходом от реализации произведенной продукции. В модели все связи между этими величинами, вытекающие из содержательной (в данном случае экономической) постановки задачи, должны быть записаны в виде определенных математических соотношений. В терминах значений этих же величин должна быть сформулирована и цель планирования.

1. **Выбор переменных модели.** Обозначим x_1 и x_2 планируемые объемы производства продукции вида P_1 и P_2 соответственно. Тогда по условию расходы ресурсов R_1, R_2, R_3 и R_4 составят $2x_1 + 3x_2$; $2x_1 + x_2$; $0 \cdot x_1 + 3x_2$ и $3x_1 + 0 \cdot x_2$ соответственно, а реализация продукции принесет доход $F = 7x_1 + 5x_2$. Таким образом, все величины выражаются через x_1 и x_2; переменные x_1, x_2 и будут переменными модели. Пару чисел $X = (x_1,\ x_2)$ естественно назвать **планом производства** (или просто **планом**).

2. **Целевая функция.** Целью планирования является максимизация величины $F = 7x_1 + 5x_2$ (**целевой функции**).

3. **Ограничения на переменные**. Возможность осуществления плана $X=(x_1,x_2)$ эквивалентна выполнению следующих условий: расходы ресурсов $2x_1+3x_2$, $2x_1+x_2$, $3x_2$, $3x_1$ не превосходят соответствующих запасов 19, 13, 15, 18; объемы производств x_1,x_2 - неотрицательные числа.

Все изложенное в 1 - 3 позволяет записать математическую модель рассматриваемой задачи в виде

$$F=7x_1+5x_2 \quad -\max, \tag{1}$$

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2\le 19, \\ 2x_1+\ \ x_2\le 13, \\ \qquad 3x_2\le 15, \\ 3x_1 \qquad \le 18, \end{cases} \tag{2}$$

$$x_1\ge 0, \quad x_2\ge 0. \tag{3}$$

Более подробно задача (1) – (3) понимается следующим образом: среди всех пар чисел $X=(x_1,x_2)$ (планов задачи), удовлетворяющих ограничениям (2) и (3), найти такую, для которой функция $F=F(X)=F(x_1,x_2)$ принимает наибольшее значение.

Для n видов продукции и m видов ресурсов математическая модель задачи о ресурсах имеет вид

$$F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \max, \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, \quad 1\le i\le m, \tag{5}$$

$$x_j\ge 0, \quad 1\le j\le n, \tag{6}$$

где a_{ij} - расход i-го ресурса на производство единицы j - й продукции; b_i - запас i-го ресурса; c_j - доход от реализации единицы j - й продукции. В плане задачи $X=(x_1,\dots,x_n)$ компонента x_j означает планируемый объем производства j-й продукции. Матрицу $A=(a_{ij})$ принято называть **технологической матрицей** задачи о ресурсах.

Пример 2. Задача о диете (витаминах, смесях). Имеется n видов продуктов питания $P_1, P_2, \dots, P_n$, содержащих питательные вещества (витамины) $V_1, V_2, \dots, V_m$. Известно, что единица продукта P_j имеет стоимость c_j и содержит $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$ единиц витаминов $V_1, V_2, \dots, V_m$, $1\le j\le n$; необходимый минимум витамина V_i составляет b_i единиц в день, $1\le i\le m$. Требуется составить дневной рацион питания минимальной стоимости, содержащий необходимое количество каждого витамина.

Дневной рацион характеризуется набором из n чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где x_j - количество продукта P_j в рационе, и математическая модель задачи имеет вид

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad - \min, \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad 1 \leq i \leq m, \tag{8}$$

$$x_j \geq 0, \;\; 1 \leq j \leq n. \tag{9}$$

Пример 3. Транспортная задача. Имеются m пунктов $A_1, A_2, \ldots, A_m$ производства однородного продукта (например, угля), объем производства в пункте A_i равен a_i единиц. Произведенный продукт потребляется в пунктах $B_1, B_2, \ldots, B_n$, и потребность в пункте B_j составляет b_j единиц. Общий объем производства $a_1 + a_2 + \ldots + a_m$ совпадает с общей потребностью $b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ (сбалансированность задачи). Стоимость перевозки одной единицы продукта из A_i в B_j равна c_{ij}, $1 \leq i \leq m,\; 1 \leq j \leq n$. Требуется составить план перевозок из пунктов A_i в пункты B_j так, чтобы вывезти всю произведенную продукцию из каждого пункта A_i, удовлетворить потребности в каждом из пунктов B_j и минимизировать транспортные расходы.

Пусть x_{ij} - планируемый объем перевозок из A_i в B_j, $1 \leq i \leq m,\; 1 \leq j \leq n$. Тогда план перевозок задается набором (матрицей) из $m \cdot n$ чисел x_{ij} и модель транспортной задачи имеет вид

$$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \quad - \min, \tag{10}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad 1 \leq i \leq m, \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \;\; 1 \leq j \leq n, \tag{12}$$

$$x_{ij} \geq 0, \;\; 1 \leq i \leq m, \; 1 \leq j \leq n. \tag{13}$$

Другие важные примеры экономических задач, приводящих к аналогичным математическим моделям, можно найти, например, в книгах [2, 3, 5, 6, 8, 11].

2. Постановка задачи ЛП. Различные формы задач ЛП и их эквивалентность

Математические модели различных по содержательному смыслу экономических задач, рассмотренных выше, имеют много общего. Во всех примерах соответствующая математическая задача может быть сформулирована следующим образом: **Максимизировать или минимизировать заданную линейную функцию**

нескольких переменных при заданных линейных ограничениях на переменные.

Это и есть постановка задачи ЛП в самом общем виде. При этом под линейным ограничением понимается любое линейное уравнение или линейное неравенство.

Функция, которую требуется максимизировать (минимизировать), называется **целевой функцией задачи.**

Любой набор значений всех переменных задачи ЛП называется **планом** задачи. План, удовлетворяющий всем ограничениям задачи, называется **допустимым.** Допустимый план, на котором достигается наибольшее (наименьшее) среди всех допустимых планов значение целевой функции, называется **оптимальным.**

Решить задачу ЛП – это значит найти ее оптимальный план $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ и соответствующее значение целевой функции $F^* = F(X^*)$ или доказать, что оптимальных планов нет.

Задачу ЛП в общей постановке всегда можно свести к любой из двух следующих форм (частных случаев общей задачи ЛП).

Стандартная задача ЛП:

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \quad - \max, \tag{14}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \tag{15}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \ldots, \quad x_n \ge 0. \tag{16}$$

Каноническая задача ЛП:

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \quad - \max, \tag{17}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{18}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \ldots, \quad x_n \ge 0. \tag{19}$$

Эти две формы задачи ЛП удовлетворяют следующим условиям:

1. В качестве **направления оптимизации** в них выбрана **максимизация** целевой функции.

2. В ограничениях присутствуют требования неотрицательности (16) и (19) для **всех** переменных задачи.

3. Все остальные ограничения, кроме требования неотрицательности всех переменных, однотипны: линейные неравенства (15) – в стандартной задаче, линейные равенства (18) – в канонической.

Замечание. Любое неравенство со знаком $\geq$ можно преобразовать в эквивалентное ему неравенство со знаком $\leq$, умножая обе части неравенства на множитель (-1). Поэтому без ограничения общности можно считать, что все неравенства в ограничениях задачи ЛП имеют знак $\leq$ (или, наоборот, все неравенства имеют знак $\geq$).

Чтобы добиться выполнения условия 1 задачу **минимизации** целевой функции $F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ заменяют на задачу **максимизации** функции $G = -F = (-c_1)x_1 + (-c_2)x_2 + \ldots + (-c_n)x_n$ при тех же ограничениях на переменные. Легко проверяется (проделайте это самостоятельно), что оптимальные планы преобразованной задачи совпадают с оптимальными планами исходной и при этом $\min F = -\max G$.

Выполнение условия 2 достигается следующим образом: в целевую функцию и все ограничения задачи вместо каждой переменной x_k произвольного знака (т. е. такой, что требование неотрицательности $x_k \geq 0$ отсутствует среди ограничений) подставляется выражение $x'_k - x''_k$; для всех вновь введенных переменных в ограничения вводятся требования неотрицательности $x'_k \geq 0$, $x''_k \geq 0$. Смысл такой замены очевиден: число произвольного знака можно представить в виде разности двух неотрицательных чисел. Ясно, что оптимальные значения x^*_k переменных исходной задачи находятся по формулам $x^*_k = (x'_k)^* - (x''_k)^*$, где $(x'_k)^*, (x''_k)^*$ - оптимальные значения переменных преобразованной задачи.

После выполнения двух описанных выше преобразований задача ЛП общего вида сведется к задаче максимизации с требованием неотрицательности всех ее переменных; среди остальных ограничений задачи могут встречаться как равенства, так и неравенства. Чтобы свести такую задачу ЛП к стандартной форме, надо исключить все ограничения – равенства; для сведения к канонической форме – заменить систему ограничений – неравенств на эквивалентную систему ограничений, записанную в виде равенств и требований неотрицательности некоторых (дополнительно введенных) переменных.

При исключении ограничений – равенств используются известные методы линейной алгебры. Если все ограничения-равенства образуют несовместную систему линейных уравнений, то задача ЛП не имеет допустимых и тем более оптимальных планов. Если эта система совместна и имеет ранг r, то с помощью метода Гаусса некоторые r переменных задачи можно выразить через остальные. Подстановка этих выражений в целевую функцию и все ограничения-неравенства (включая и требования неотрицательности переменных) сводит задачу к **стандартной** форме; при этом число переменных уменьшается на r.

Для приведения задачи ЛП к **канонической** форме вводятся дополнительные, так называемые **балансовые**, переменные; число таких переменных равно числу ограничений-неравенств (без учета требований неотрицательности переменных) исходной задачи. Каждое ограничение – неравенство $a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i$

заменяется на эквивалентную ему пару ограничений $a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n + S_i = b_i$, $S_i \ge 0$. В случае неравенства со знаком $\ge$ балансовая переменная S_i включается в соответствующее равенство со знаком минус.

Рассмотрим примеры применения описанных выше преобразований формы задач ЛП.

Пример 4. Привести к стандартной форме задачу ЛП

$$F = -6{,}5x_1 + 7{,}5x_3 - 23{,}5x_4 + 5x_5 \quad - \min,$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 12, \\ 2x_1 - x_3 + 12x_4 - x_5 = 14, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 - x_5 = 6, \\ 2x_1 + x_3 + x_4 \ge 10, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0, \;\; x_3 \ge 0, \;\; x_4 \ge 0, \;\; x_5 \ge 0.$$

Решение. Решаем методом Гаусса систему ограничений-равенств

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 & -1 & 12 \\ 2 & 0 & -1 & 12 & -1 & 14 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & -1 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 & -1 & 12 \\ 0 & -6 & -3 & 4 & 1 & -10 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -6 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_5 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & -6 & -3 & 4 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -6 \end{array}\right). \end{array}$$

Из полученной трапециевидной формы системы последовательно выражаем x_2, x_5 и x_1 через x_3 и x_4 (обратный ход метода Гаусса):

$$x_2 = 6 - x_3 - x_4;$$
$$x_5 = -10 + 6(6 - x_3 - x_4) + 3x_3 - 4x_4 = 26 - 3x_3 - 10x_4;$$
$$x_1 = 12 + (26 - 3x_3 - 10x_4) - 3(6 - x_3 - x_4) - x_3 - 4x_4 = 20 - x_3 - 11x_4.$$

Подставим полученные выражения в целевую функцию и ограничения-неравенства; одновременно заменим задачу минимизации F на максимизацию $G = -F$:

$$G = 6{,}5(20 - x_3 - 11x_4) - 7{,}5x_3 + 23{,}5x_4 - 5(26 - 3x_3 - 10x_4) \quad - \max,$$

$$\begin{cases} 2(20 - x_3 - 11x_4) + x_3 + x_4 \ge 10, \\ 20 - x_3 - 11x_4 \ge 0, \\ 6 - x_3 - x_4 \ge 0, \\ x_3 \ge 0, \quad x_4 \ge 0, \\ 26 - 3x_3 - 10x_4 \ge 0. \end{cases}$$

После упрощений получим задачу ЛП

$$G = x_3 + 2x_4 \quad - \max,$$

$$\begin{cases} x_3 + \ \ 21x_4 \le 30, \\ x_3 + \ \ 11x_4 \le 20, \\ x_3 + \ \ \ \ \ x_4 \le 6, \\ 3x_3 + 10x_4 \le 26, \end{cases}$$

$$x_3 \ge 0, \quad x_4 \ge 0,$$

в стандартной форме, эквивалентную исходной. Если оптимальный план (x_3^*, x_4^*) и экстремальное значение целевой функции $G^* = x_3^* + 2x_4^*$ задачи ЛП в стандартной форме уже найдены, то решением исходной задачи будет план $(20 - x_3^* - 11x_4^*,\ 6 - x_3^* - x_4^*,\ x_3^*, x_4^*\ ,\ 26 - 3x_3^* - 10x_4^*)$ и значение $F^* = -G^*$.

Пример 5. Привести к канонической форме задачу ЛП

$$F = 3x_1 - 2x_2 - x_3 \quad - \min,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - \ \ x_2 + x_3 \ge 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 6, \\ x_1 + \ \ \ x_2 + x_3 = 4, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Решение. В данной модели нарушены следующие требования к канонической форме: направление оптимизации минимизация ($\min$), а не максимизация ($\max$); отсутствует требование неотрицательности переменной x_3; кроме требований неотрицательности переменных $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$ среди ограничений имеются еще два неравенства. Поэтому для сведения данной задачи ЛП к канонической форме надо последовательно произвести следующие три преобразования: заменить $F = 3x_1 -$ $_1 - 2x_2 - x_3 \quad - \min$ на $G = -3x_1 + 2x_2 + x_3 \quad - \max;$ везде, как в целевой функции, так и в ограничениях, заменить x_3 на $x_3' - x_3''$ и добавить к ограничениям требования $x_3' \ge 0, x_3'' \ge 0;$ преобразовать два первых ограничения – неравенства в равенства с помощью балансовых переменных $S_1 \ge 0,\ S_2 \ge 0$ (S_1 вводится в первое неравенство со знаком минус, S_2 - во второе со знаком плюс). В результате получим задачу линейного программирования в канонической форме

$$\begin{aligned} G = -3x_1 + 2x_2 + (x_3' - x_3') \quad & - \max, \\ 2x_1 \ - x_2 + (x_3' - x_3') - S_1 &= 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + (x_3' - x_3') + S_2 &= 6, \\ x_1 \ + x_2 + (x_3' - x_3') \quad &= 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3' \ge 0,\ x_3'' \ge 0,\ S_1 \ge 0,\ S_2 \ge 0, & \end{aligned}$$

эквивалентную исходной.

Если $\left(x_1^*, x_2^*, (x_3')^*, (x_3'')^*, S_1^*, S_2^*\right)$ и $G^* = -3x_1^* + 2x_2^* + (x_3')^* - (x_3'')^*$ – оптимальный план и значение задачи в канонической форме, то $\left(x_1^*, x_2^*, \left(x_3'\right)^* - \left(x_3''\right)^*\right)$ и и $\left(-G^*\right)$– оптимальный план и значение исходной задачи.

Модель (4) - (6) задачи о ресурсах из примера 1 предыдущего параграфа представляет собой задачу ЛП в стандартной форме. Фактически модель (4) - (6) просто совпадает с (14) - (16), только в первом случае использованы сокращенные записи для сумм и из экономического смысла задачи о ресурсах в (4) - (6) предполагается, что $a_{ij} \ge 0$, $b_i \ge 0$, $c_j \ge 0$, а в (14) – (16) числа a_{ij}, b_i, c_j могут быть любого знака. Так как любую задачу ЛП можно свести к стандартной форме (14) - (16), можно сказать, что любая задача ЛП эквивалентна задаче о ресурсах, если в последней допускаются отрицательные значения ее параметров a_{ij}, b_i, c_j.

Сведение задачи о ресурсах (4) - (6) к каноническому виду требуют только введения балансовых переменных S_i, $1 \le i \le m$, и приводит к модели

$$F = \sum_{j=0}^{n} c_j x_j \quad - \max, \tag{20}$$

$$\sum_{j=0}^{n} a_{ij} x_j + S_i = b_i,\ 1 \le i \le m, \tag{21}$$

$$x_j \ge 0,\ 1 \le j \le n;\ S_i \ge 0,\ 1 \le i \le m. \tag{22}$$

При этом балансовые переменные $S_1, S_2, \ldots, S_m$ имеют очевидный экономический смысл:

$S_i = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j =$(запас i-го ресурса) - (расход i-го ресурса)=(остаток i-го ресурса), $1 \le i \le m$.

Модель (7) - (9) задачи о диете имеет «почти» стандартную форму. Надо только умножить неравенства (8) на (-1) и заменить минимизацию F на максимизацию (-F). Модель (10) - (13) транспортной задачи принимает канонический вид после замены F - min на (-F) - max.

Упражнения

1. Привести модель (7) - (9) задачи о диете к каноническому виду. Какой содержательный смысл имеют балансовые переменные?

2. Привести к канонической форме следующие задачи ЛП:

а) $F = 2x_1 + x_2 \quad - \max,$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 16, \\ 4x_1 + x_2 \leq 12, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

б) $F = 8x_1 + x_2 + 4x_3 \quad - \min,$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 \leq -1, \\ -3x_1 + x_3 \geq 0, \\ x_1 + 2x_2 = 4, \\ x_1 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

в) $F = x_1 - x_2 + 3x_3 \quad - \min$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 5 \\ x_1 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

г) $F = 4x_1 - x_2 + 3x_3 \quad - \max$
$$\begin{cases} 4x_1 + x_3 \leq 16 \\ 6x_1 - 2x_2 - x_3 \geq 6 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

3. Привести к стандартной форме следующие задачи ЛП:

а) $F = 2x_1 + x_2 + 8x_3 \quad - \max,$
$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 + 2x_3 = 12, \\ 6x_1 + 5x_3 - x_4 = 30, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0. \end{cases}$$

б) $F = x_1 - x_2 + 3x_4 + x_5 \quad - \min,$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 = 15, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_5 = 8, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0. \end{cases}$$

в) $F = x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 \quad - \min,$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 6, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0. \end{cases}$$

г) $F = x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 \quad - \max,$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = -2, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 - x_5 = 6, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0. \end{cases}$$

3. Геометрическая интерпретация и графическое решение задачи ЛП

При изучении задач ЛП важную роль играет возможность геометрического описания множества всех допустимых планов и целевой функции рассматриваемой задачи. И хотя в общем случае это приводит к сложным построениям в многомерном пространстве, все главные особенности задач ЛП можно увидеть уже на простых примерах.

Пример 6. Рассмотрим задачу (1) - (3) из примера 1.

$$F = 7x_1 + 5x_2 \quad - \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 19, \\ 2x_1 + \ x_2 \le 13, \\ \qquad 3x_2 \le 15, \\ 3x_1 \qquad \le 18, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Каждому плану (x_1, x_2) задачи соответствует вполне определенная точка на плоскости x_1Ox_2, именно точка с координатами x_1 и x_2. Допустимым планам соответствуют точки, координаты которых удовлетворяют всем ограничениям-неравенствам. Решениями первого неравенства $2x_1 + 3x_2 \le 19$ будут все решения уравнения $2x_1 + 3x_2 = 19$ и все решения неравенства $2x_1 + 3x_2 < 19$. Как известно из аналитической геометрии, линейное уравнение $2x_1 + 3x_2 = 19$ задает на плоскости определенную прямую L_1. Эту прямую можно построить, например, по двум точкам ее пересечения с осями координат: $(0;19/3)$ и $(19/2;0)$. Прямая L_1 делит всю плоскость на две полуплоскости: для точек одной из них выполнено неравенство $2x_1 + 3x_2 < 19$, для точек другой – неравенство $2x_1 + 3x_2 > 19$. Начало координат $(0;0)$ расположено в первой из этих полуплоскостей, так как $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 < 19$. Из сказанного выше ясно, что геометрически множество всех планов, удовлетворяющих неравенству $2x_1 + 3x_2 \le 19$, представляет собой ту из полуплоскостей с граничной прямой L_1, которая содержит начало координат (сама прямая L_1 включается в эту полуплоскость). Аналогично строятся граничные прямые и полуплоскости, соответствующие остальным ограничениям-неравенствам. Например, для третьего неравенства $3x_2 \le 15$ граничной будет горизонтальная (параллельная оси Ox_1) прямая $L_3 : x_2 = 5$, а «решения» этого неравенства – все точки на прямой L_3 и ниже нее. Граничными прямыми для неравенств $x_1 \ge 0$ и $x_2 \ge 0$ являются координатные оси Ox_2 и Ox_1 соответственно.

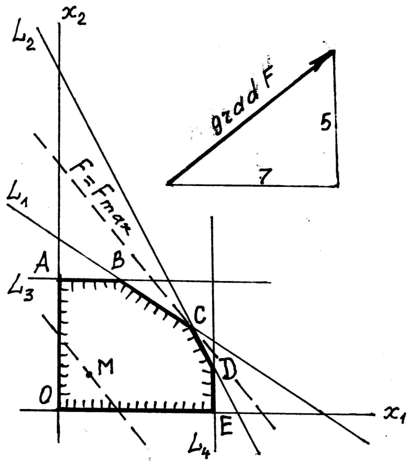

Рисунок 1

На рисунке 1 построены все граничные прямые; расположение соответствующих полуплоскостей показано штрихами. Любой допустимый план содержится в каждой из этих полуплоскостей, а множество (область) всех допустимых планов совпадает с пересечением (общей частью) всех полуплоскостей и в рассматриваемой задаче представляет собой выпуклый шестиугольник OABCDE. Геометрическим описанием целевой функции $F = 7x_1 + 5x_2$ может служить семейство ее линий уровня $7x_1 + 5x_2 = d$, $d = \text{const}$.

Все линии семейства (при различных d) – прямые, перпендикулярные одному и тому же вектору $\text{grad } F$ с координатами $\{\partial F/\partial x_1; \partial F/\partial x_2\} = \{7, 5\}$ и, следовательно, параллельные между собой. Во всех точках прямой $7x_1 + 5x_2 = d$ функция F, по определению, принимает одно и то же значение d; сдвиг этой прямой параллельно самой себе в направлении вектора $\text{grad}\, F$ дает линию уровня $7x_1 + 5x_2 = d_1$, где $d_1 > d$, так как градиент функции указывает направление ее наискорейшего возрастания.

Чтобы найти оптимальный план $X^* = (x_1^*, x_2^*)$ задачи, выберем произвольную точку M внутри области допустимых планов, проведем через нее прямую, перпендикулярную вектору $\text{grad}\, F$ (на рис. 1 изображена пунктиром) и будем перемещать эту прямую параллельно самой себе в направлении $\text{grad}\, F$ до тех пор, пока перемещаемая прямая будет содержать хотя бы одну точку области допустимых планов. В «крайнем» возможном положении (рис. 1) линия уровня пройдет через точку C, в которой и достигается $\max F(x_1, x_2)$ среди всех допустимых планов (x_1, x_2). Координаты точки C находятся из системы

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 19 & (\text{уравнение прямой } L_1) \\ 2x_1 + x_2 = 13 & (\text{уравнение прямой } L_2) \end{cases}$$

Отсюда $X^* = (5, 3)$, $F^* = 7 \cdot 5 + 5 \cdot 3 = 50$.

Задача ЛП (1) - (3) является моделью задачи о ресурсах с исходными данными, представленными в таблице 1. Найденное выше решение задачи (1) - (3) означает, что при данных условиях производства 50 является наибольшим из возможных значений дохода. Такой доход может быть достигнут только тогда, когда производятся 5 единиц продукции P_1 и 3 единицы продукции P_2.

Аналогично разобранному примеру можно дать геометрическую интерпретацию **любой** задачи ЛП с **двумя** переменными и ограничениями-**неравенствами,**

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 \quad - \max(\min), \tag{23}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \\ a_{m1} + a_{m2}x_2 \le b_m \end{cases} \tag{24}$$

(требования неотрицательности $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ считаем включенными в (24) в виде $(-1)x_1 + 0 \cdot x_2 \le 0,\ 0 \cdot x_1 + (-1)\,x_2 \le 0$). **Область допустимых планов** задачи (23) - (24) получается пересечением m **полуплоскостей,** задаваемых неравенствами (24), и представляет собой (в зависимости от расположения этих полуплоскостей) либо пустое множество (рис. 2а), либо единственную точку (рис. 2б), либо выпуклый **многоугольник** (рис. 2в), либо выпуклую **многоугольную область** (рис. 2г).

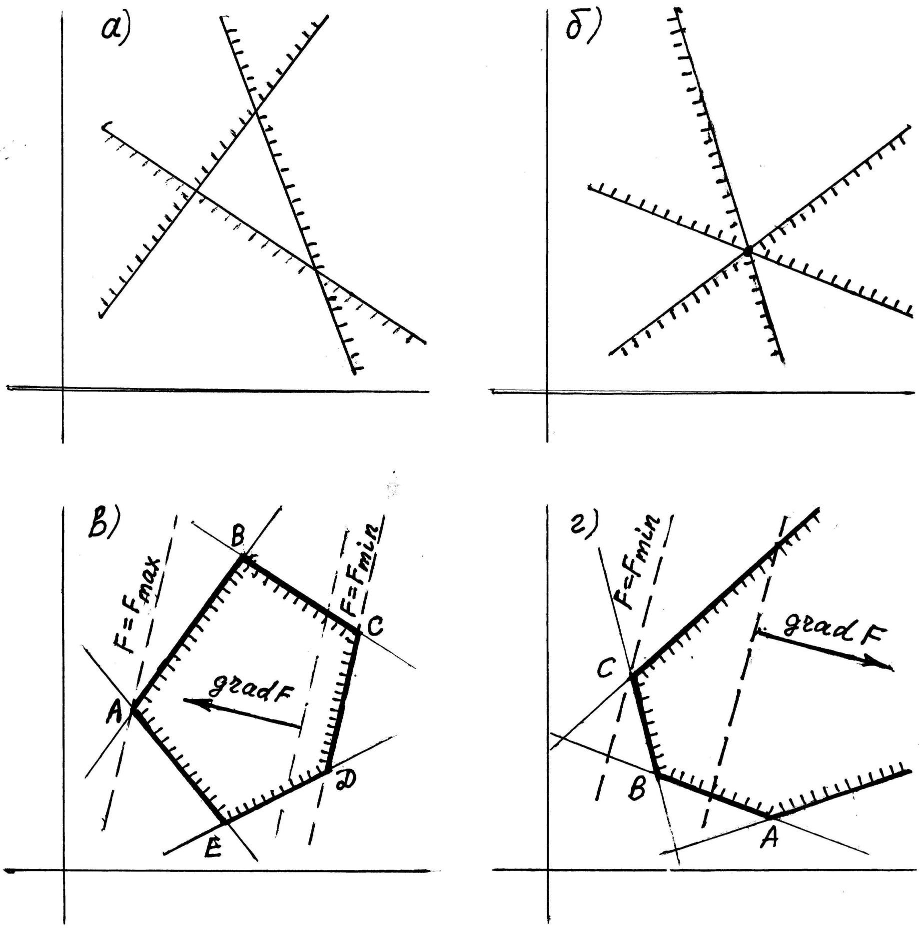

Рис. 2

В первом случае задача ЛП не имеет решения, так как у нее нет допустимых планов; во втором случае единственный допустимый план является оптимальным. В остальных случаях оптимальные планы находятся с помощью **линий уровня** целевой функции (23), пересекающих область допустимых планов. Все эти линии – прямые, перпендикулярные вектору $\operatorname{grad} F = \{c_1; c_2\}$. Оптимальные планы задачи на $\max F$ лежат на прямой, «крайней» в направлении вектора $\{c_1,\ c_2\}$, а задачи на $\min F$ - на прямой, «крайней» в направлении противоположного вектора $\{-c_1,\ -c_2\}$. В зависимости от вида области допустимых планов и направления $\operatorname{grad} F$ возможны следующие случаи:

а) задача ЛП (23) - (24) имеет **единственный** оптимальный план **в вершине** многоугольника или многоугольной области ($\max F$ на рис. 2в достигается в точке A, $\min F$ на рис. 2г– в точке C);

б) множество оптимальных планов **бесконечно** и состоит из всех точек некоторого **ребра** на границе области допустимых планов ($\min F$ на рис. 2в достигается во всех точках ребра CD, включая **вершины** C и D), или в случае неограниченной многоугольной области, из всех точек граничного **луча** (постройте графическое изображение соответствующей задачи ЛП самостоятельно);

в) множество оптимальных планов **пусто** из-за **неограниченности** целевой функции в области допустимых планов ($F \to +\infty$ на рис. 2г).

Для задачи ЛП в стандартной форме (14)-(16) с **тремя** переменными неравенство $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{13}x_3 \le b_i$ определяет одно их двух **полупространств,** на которые делит все пространство **плоскость** $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i$. Изображением области допустимых планов будет выпуклый **многогранник** или неограниченная выпуклая многогранная область. Целевая функция $F = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$ принимает заданное значение d на плоскости $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = d$ (**поверхность уровня).** «Крайняя» в направлении вектора $\operatorname{grad} F = \{c_1, c_2, c_3\}$ из поверхностей уровня, имеющих непустое пересечение с областью допустимых планов, содержит все оптимальные планы. Множество всех оптимальных планов геометрически представляет собой или **грань** (возможно бесконечную), или **ребро** (**луч**), или **единственную вершину** на границе области допустимых планов. Задача ЛП не имеет оптимальных планов, если ее область допустимых планов либо пуста, либо не ограничена в направлении вектора $\operatorname{grad} F$.

Графический метод решения задач ЛП с n = 3 переменными используется очень редко, так как соответствующие построения в пространстве значительно сложнее и менее наглядны, чем на плоскости (при n = 2). При n>3 наглядность пропадает совсем. Тем не менее с помощью геометрической интерпретации удалось разработать методы решения задач ЛП в общем случае. При n = 2 и n = 3 из геометрических соображений очевидно, что для решения задачи ЛП достаточно найти все оптимальные среди **конечного** числа планов, соответствующих **вершинам** многоугольной (многогранной) области допустимых планов.

При n > 3 роль вершин играют **опорные** планы, которые определяются **аналитически,** на языке уравнений и неравенств, по аналогии с аналитическим описанием вершин при n = 2 и n = 3 (см. упр.11). Основная идея решения задач ЛП

симплекс-методом, который будет изложен ниже, заключается в **целенаправленном переборе (последовательном улучшении)** опорных планов.

Замечание. В п. 2 показано, что исключение ограничений-равенств в общей задаче ЛП с n переменными сводит ее к задаче ЛП с $n-r$ переменными, где r - ранг, т. е. число независимых уравнений системы всех ограничений–равенств. Поэтому общая задача ЛП, в которой $n-r=2$, сводится к задаче вида (23)-(24) и, следовательно, допускает графическое решение.

Упражнения

4. Каждая из деталей А и В должна пройти обработку на каждом из трех станков. Затраты времени на обработку одной детали и максимальное допустимое время работы каждого из станков заданы в таблице:

Станки	Норма времени на обработку детали, ч		Время работы станка, ч
	A	B	
1	0,2	0,1	100
2	0,2	0,5	180
3	0,1	0,2	100

Деталей А требуется произвести не менее 300, деталей В не более 200. Прибыль при реализации детали А составляет 10 руб., детали В – 16 руб. Определить производственную программу, максимизирующую прибыль.

5. На мебельной фабрике из стандартных листов фанеры вырезаются заготовки трех типов А, В, С. Используются два способа раскроя листа. Количество получаемых из одного листа заготовок и отходы для каждого способа раскроя, а также минимальная потребность в заготовках заданы в таблице:

Вид заготовки	Потребность в заготовках	Кол-во заготовок из одного листа	
		1-й способ	2-й способ
A	24	2	6
B	31	5	4
C	18	2	3
Отходы, см^2		12	16

Как получить необходимое количество заготовок типов А, В, С с минимальными отходами?

6. При разведении лисиц и песцов на звероферме используют три вида кормов. Расходы кормов на одно животное , запасы кормов и прибыль от реализации одной шкурки заданы в таблице:

Вид корма	Запасы кормов	Потребность в корме на одно животное	
		Лисица	Песец
1	180	2	3
П	240	4	1
Ш	426	6	7
Прибыль		16	12

Сколько лисиц и песцов надо содержать на ферме для получения максимальной прибыли?

7. В суточный рацион включаются два продукта питания $П_1$ и $П_2$, причем продукта $П_1$ не более 200 единиц. Содержание витаминов А и В в единице каждого из продуктов, минимальная суточная потребность в витаминах и стоимость единицы каждого продукта заданы в таблице:

Витамины	Минимальная потребность в витамине	Содержание витамина в единице продукта	
		$П_1$	$П_2$
А	120	0,2	0,2
В	160	0,4	0,2
Стоимость единицы продукта		2	4

Определить рацион минимальной стоимости.

8. Хозяйство имеет 600 га пашни, трудовые ресурсы составляют 4000 чел.-дн. Урожайность зерновых и кормовых культур с 1 га – 28 и 36 ц, затраты труда – 5 и 10 чел.-дн. на гектар. Определить наиболее эффективное сочетание зерновых и кормовых культур при условии, что под кормовые культуры должно быть занято не менее 100 га пашни, а доходы от 1 ц зерновых и 1 ц кормовых культур совпадают.

9. Используя замечание в конце данного параграфа, найти оптимальные планы и значения целевых функций задач ЛП из упражнений 2б), 2в), 3а), 3в), 3г). Во всех случаях рассмотреть оба направления оптимизации.

10. Найти $\max F$, $\min F$ и соответствующие оптимальные планы задачи ЛП с ограничениями $x_1 + x_2 + 2x_3 \le 2$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$, если

а) $F = -x_1 + x_2 + x_3$; б) $F = -x_1 - x_2 + x_3$;

в) $F = x_1 + x_2$; г) $F = 2x_1 + 2x_2 + 4x_3$.

Как изменится решение, если удалить ограничение $x_3 \ge 0$?

11. Показать, что а) для любой вершины шестиугольника OABCDE (пример 6, рис.1) два ограничения-неравенства выполнены как равенства; б) допустимый план $(x_1,\ x_2)$ задачи (23)-(24) является вершиной области допустимых планов тогда и только тогда, когда для x_1, x_2 некоторые два из неравенств (24) выполнены как равенства, причем коэффициенты при x_1 и x_2 в этих неравенствах образуют

отличный от нуля определитель второго порядка. Сформулировать и обосновать утверждение, аналогичное б), для стандартной задачи ЛП с тремя переменными.

4. Симплекс-метод

Рассмотрим задачу ЛП в канонической форме (17)-(19). Без ограничения общности можно считать, что система (18) имеет бесконечное число решений, т. е. ранг системы r меньше числа переменных n, так как в других случаях (каких?) задача ЛП решается тривиально (как?). Можно также считать, что все m уравнений независимы, т. е. $r = m$, так как при $r < m$ лишние уравнения, являющиеся следствиями остальных, можно отбросить, не меняя множества решений системы. Поэтому везде далее будем считать, что $r = m < n$. Для сокращения записей введем еще обозначение $n - m = k$.

При $r = m < n$, по определению ранга, матрица системы содержит хотя бы один (возможно более одного) **не равный нулю** минор m-го порядка – **базисный минор**. Набор из m переменных называется **базисом,** если соответствующие m столбцов матрицы системы (18) образуют базисный минор. Если ясно, о каком именно базисе идет речь, входящие в него m переменных будем называть **базисными,** а остальные $n - m = k$ переменных – **свободными.** Из линейной алгебры известно, что систему (18) можно разрешить относительно базисных переменных. Если, например, $\{x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n\}$- базис, то (18) эквивалентна системе

$$\begin{cases} x_{k+1} = \beta_1 - \alpha_{11}x_1 - \alpha_{12}x_2 - \ldots - \alpha_{1t}x_t - \ldots - \alpha_{1k}x_k, \\ x_{k+2} = \beta_2 - \alpha_{21}x_1 - \alpha_{22}x_2 - \ldots - \alpha_{2t}x_t - \ldots - \alpha_{2k}x_k, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_{k+s} = \beta_s - \alpha_{s1}x_1 - \alpha_{s2}x_2 - \ldots - \alpha_{st}x_t - \ldots - \alpha_{sk}x_k, \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_n = x_{k+m} = \beta_m - \alpha_{m1}x_1 - \alpha_{m2}x_2 - \ldots - \alpha_{mt}x_t - \ldots - \alpha_{mk}x_k, \end{cases} \tag{25}$$

в которой базисные переменные выражены через свободные. Подставим выражение (25) в (17):

$$F = c_1x_1 + c_kx_r + c_{k+1}(\beta_1 - \alpha_{11}x_1 - \ldots - \alpha_{1k}x_k) + \ldots + c_n(\beta_m - \alpha_{m1}x_1 - \ldots - \alpha_{mk}x_k).$$

После приведения подобных получим выражение целевой функции через свободные переменные:

$$F = \gamma_0 - \gamma_1x_1 - \gamma_2x_2 - \ldots - \gamma_kx_k. \tag{26}$$

Систему всех уравнений (25), (26), **эквивалентную** системе (17), (18), можно записать в виде таблицы 2, которая называется **симплексной таблицей** задачи ЛП (17)-(19) в базисе $\{x_{k+1}, \ldots, x_n\}$. Из построения ясно, что симплексная таблица 2, как и любая симплексная таблица в другом базисе, представляет собой просто иную, более удобную запись всех условий задачи (17)-(19), кроме требований неотрицательности переменных (19) (об этих требованиях надо всегда помнить).

Выше намеренно ничего не говорилось о способах вычисления элементов β_i, α_{ij}, γ_j, симплексной таблицы по исходным данным b_i, a_{ij}, c_j, так как это фактически не понадобится в дальнейшем. Понадобится лишь процедура нахождения по уже имеющейся симплексной таблице другой, базис которой отличается от базиса исходной всего одной переменной.

Таблица 2

Базисные переменные	Свободные переменные						1
	$-x_1$	$-x_2$	$\dots$	$-x_t$	$\dots$	$-x_k$	
$x_{k+1} =$	α_{11}	α_{12}	$\dots$	α_{1t}	$\dots$	α_{1k}	β_1
$x_{k+2} =$	α_{21}	α_{22}	$\dots$	α_{2t}	$\dots$	α_{2k}	β_2
$\dots$	.	.	$\dots$	.	$\dots$		.
$x_{k+s} =$	α_{s1}	α_{s2}	$\dots$	α_{st}	$\dots$	α_{sk}	β_s
$\dots$	.	.	$\dots$	.	$\dots$		.
$x_{k+m} =$	α_{m1}	α_{m2}	$\dots$	α_{mt}	$\dots$	α_{mk}	β_m
F=	γ_1	γ_2	$\dots$	γ_t	$\dots$	γ_k	γ_0

Пусть в таблице 2 $\alpha_{st} \neq 0$. Элемент α_{st} называется **разрешающим,** содержащие его строка x_{k+s} (включая β_s) и столбец x_t (включая γ_t) называются **разрешающими.** Разрешающей строке соответствует уравнение

$$x_{k+s} = \beta_s - \alpha_{s1}x_1 - \dots - \alpha_{st}x_t - \dots - \alpha_{sk}x_k,$$

которое можно записать в виде

$$x_t = \frac{\beta_s}{\alpha_{st}} - \frac{\alpha_{s1}}{\alpha_{st}}x_1 - \dots - \frac{1}{\alpha_{st}}x_{k+s} - \dots - \frac{\alpha_{sk}}{\alpha_{st}}x_k. \qquad (27)$$

Во всех остальных уравнениях системы (25), (26) подставим вместо x_t выражение этой переменной через переменные $x_1, x_2, \dots x_{t-1}, x_{k+s}, x_{t+1}, \dots x_k$ из равенства (27). В результате получим систему уравнений, эквивалентную системе (25), (26), а, значит, и системе (17), (18). Новой записи системы соответствует симплексная таблица 3, базис которой получается из базиса таблицы 2 заменой x_{k+s} на x_t.

Таблица 3

	$-x_1$	$-x_2$	$\dots$	$-x_{k+s}$	$\dots$	$-x_k$	
x_{k+1}	$\tilde{\alpha}_{11}$	$\tilde{\alpha}_{12}$	$\dots$	$\tilde{\alpha}_{1t}$	$\dots$	$\tilde{\alpha}_{1k}$	$\tilde{\beta}_1$
$\dots$	.	.	$\dots$	.	$\dots$	.	.
x_t	$\tilde{\alpha}_{s1}$	$\tilde{\alpha}_{s2}$	$\dots$	$\tilde{\alpha}_{st}$	$\dots$	$\tilde{\alpha}_{sk}$	$\tilde{\beta}_s$
$\dots$	.	.	$\dots$	.	$\dots$	.	.
x_{k+m}	$\tilde{\alpha}_{m1}$	$\tilde{\alpha}_{m2}$	$\dots$	$\tilde{\alpha}_{mt}$		$\tilde{\alpha}_{mk}$	$\tilde{\beta}_m$
F	$\tilde{\gamma}_1$	$\tilde{\gamma}_2$	$\dots$	$\tilde{\gamma}_t$		$\tilde{\gamma}_k$	$\tilde{\gamma}_0$

Здесь и в дальнейшем надписи «базисные переменные», «свободные переменные», «1» и знаки «=» в первом столбце опускаются.

Таблица 3 называется **симплексным преобразованием** таблицы 2 с **разрешающим элементом** α_{st} и получается из таблицы 2 по следующим **правилам:**

1) переменные x_{k+s} и x_t меняются местами;
2) разрешающий элемент заменяется обратной величиной $(1/\alpha_{st})$;
3) остальные элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент;
4) остальные элементы разрешающего столбца делятся на разрешающий элемент и меняют знак на противоположный (т. е. делятся на $(-\alpha_{st})$);
5) каждый из оставшихся элементов u (в том числе в строке F и столбце свободных членов), не принадлежащих ни разрешающей строке, ни разрешающему столбцу, заменяется на $\tilde{u}$, который вычисляется по **правилу прямоугольника**,

$$\begin{array}{ccccc} \ldots & . & \ldots & . & \ldots \\ \ldots & v & \ldots & \alpha_{st} & \ldots \\ \ldots & . & \ldots & . & \ldots \\ \ldots & u & \ldots & w & \ldots \\ \ldots & & \ldots & & \ldots \end{array} \qquad \tilde{u} = \frac{u\alpha_{st} - vw}{\alpha_{st}} = u - \frac{vw}{\alpha_{st}}.$$

Здесь v – элемент на пересечении разрешающей строки со столбцом, содержащим u; w - элемент на пересечении разрешающего столбца со строкой, содержащей u.

При **любом** выборе базиса все планы, удовлетворяющие (18), в том числе **все допустимые планы,** можно получить, придавая **свободным** переменным **произвольные** значения и вычисляя значения **базисных** переменных по их выражениям через свободные. Планы, которые получаются указанным способом при **нулевых** значениях свободных переменных, называются **базисными.** Симплексной таблице 2 (уравнениям (25), (26)) соответствует базисный план $X^0 = \left(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots, x_n^0\right)$, в котором $x_1^0 = x_2^0 = \ldots = x_k^0 = 0,\ x_{k+1}^0 = \beta_1, \ldots, x_n^0 = \beta_m$; при этом $F\left(X^0\right) = \gamma_0$. Базисный план X^0 будет допустимым тогда и только тогда, когда значения всех базисных переменных (т. е. свободные члены $\beta_1, \ldots, \beta_m$ симплексной таблицы) неотрицательны. Допустимые базисные планы называются **опорными.** Симплексные таблицы с неотрицательными свободными членами называются **допустимыми.**

Предположим, что таблица 2 допустима и, кроме того, все коэффициенты $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ в строке F неотрицательны (γ_0 может быть и отрицательным). Тогда для любого допустимого плана $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будет выполнено неравенство (учесть, что $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ \ldots,\ x_k \ge 0$)

$$F(X) = \gamma_0 - \gamma_1 x_1 - \gamma_2 x_2 - \ldots - \gamma_k x_k \le \gamma_0 = F\left(X^0\right).$$

Это означает, что $F(X^0)$ - наибольшее из значений целевой функции на допустимых планах, т. е. опорный план X^0 является **оптимальным.** Если все коэффициенты $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ **положительны,** т. е. среди них нет не только отрицательных чисел, но и **нулей**, опорный план X^0 будет **единственным** оптимальным планом задачи (17)-(19). Действительно, в этом случае для любого допустимого плана $X \neq X^0$ среди чисел $x_1, \ldots, x_k$, а значит и среди произведений $\gamma_1 x_1, \ldots, \gamma_k x_k$ есть хотя бы одно положительное, т. е. выполнено **строгое** неравенство $F(X) < F(X^0)$.

Требование неотрицательности (положительности) элементов строки F (не считая свободного члена) называется **условием оптимальности (строгой оптимальности)** симплексной таблицы. Доказанное выше утверждение можно сформулировать следующим образом.

Критерий оптимальности. Если симплексная таблица одновременно допустима и удовлетворяет условию оптимальности, соответствующий ей опорный план является оптимальным. При выполнении условия строгой оптимальности таблицы это единственный оптимальный план задачи ЛП.

Рассмотрим на примерах, как можно использовать критерий оптимальности и введенные выше понятия и определения для решения задач ЛП.

Пример 7. Приведем задачу (1)-(3), уже решенную графически в примере 6, к канонической форме. Выражая балансовые переменные S_1, S_2, S_3, S_4 через x_1 и x_2, получим

$$
\begin{aligned}
S_1 &= 19 - 2x_1 - 3x_2,\\
S_2 &= 13 - 2x_1 - x_2,\\
S_3 &= 15 - 3x_2,\\
S_4 &= 18 - 3x_1,\\
F &= 0 + 7x_1 + 5x_2
\end{aligned}
$$

T_0	$-x_1$	$-x_2$		θ
S_1	2	3	19	$19/2$
S_2	2	1	13	$13/2$
S_3	0	3	15	$-$
S_4	3	0	18	$18/3$
F	-7	-5	0	

Здесь требования неотрицательности опущены; форма записи уравнений означает, что S_1, S_2, S_3, S_4 - базисные, x_1, x_2 - свободные. Справа от уравнений представлена соответствующая симплексная таблица, T_0 в левом верхнем углу–обозначение этой таблицы. В T_0 выделены столбец x_1 и строка S_4, а также добавлен столбец θ.В дальнейшем выяснится, для чего это сделано. В допустимых планах $X = (x_1, x_2, S_1, S_2, S_3, S_4)$ значения свободных переменных x_1 и x_2 неотрицательны и однозначно определяют значения всех остальных переменных, включая F. При $x_1 = 0, x_2 = 0$ получаем опорный план $X^0 = (0, 0, 19, 13, 15, 18)$ (ему соответствует вершина O(0 ,0), рис.1) и $F(X^0) = 0$. Чтобы «улучшить» план X^0 (увеличить значение F), надо заменить хотя бы одно из нулевых значений x_1 и x_2 на положительное. В любом случае F возрастет, т. к. коэффициенты 7 и 5 (-7 и -5 в таблице T_0) при переменных x_1 и x_2 положительны. Будем увеличивать только x_1

(**выделяем** столбец x_1 в T_0), оставляя $x_2=0$ (почему не наоборот?). При $x_2=0$ $S_1=19-2x_1$, $S_2=13-2x_1$, $S_3=15$, $S_4=18-3x_1$, $F=7x_1$. С ростом x_1 значения S_1, S_2 и S_4 убывают (см. положительные элементы в выделенном столбце x_1) и обращаются в нуль при $x_1=19/2$, $x_1=13/2$ и $x_1=18/3$ соответственно (см. столбец θ в T_0; прочерк в строке S_3 соответствует тому, что при $x_2=0$ и возрастании x_1 значение S_3 не убывает и остается неотрицательным). При $x_1 \le \min\{19/2,\ 13/2,\ 18/3\}=6$ все базисные переменные неотрицательны и соответствующие планы задачи ЛП допустимы; при $x_1=6$ первой из базисных обращается в нуль переменная S_4 ($18/3=6$ - минимальное из отношений в столбце θ, **выделяем** строку S_4); при $x_1>6$ планы задачи становятся недопустимыми. Значению $x_1=6$ отвечает $S_1=19-2\cdot 6=7$, $S_2=13-2\cdot 6=1$, $S_3=15$, $S_4=$, $=18-3\cdot 6=0$, $F=7\cdot 6=42$, т. е. допустимый план $X^1=(6,\ 0,\ 7,\ 1,\ 15,\ 0)$ и $F(X^1)=$ $=42>0=F(X^0)$. (На рис.1 плану X^1 соответствует вершина $E(6,0)$, переходу от X^0 к X^1 - движение по ребру OE).

Из уравнения $S_4=18-3x_1$ (выделенная строка в T_0) выразим $x_1=6-(1/3)S_4$ (столбец x_1 также выделен) и подставим полученное выражение в остальные уравнения , т. е. выполним симплексное преобразование таблицы T_0. Получим

$$S_1=19-2(6-(1/3)S_4)-3x_2, \qquad S_2=13-2(6-(1/3)S_4)-x_2,$$
$$S_3=15-3x_2, \qquad F=7(6-(1/3)S_4)+5x_2.$$

После упрощений,

$$S_1=7+(2/3)S_4-3x_2,$$
$$S_2=1+(2/3)S_4-\ x_2,$$
$$S_3=15\qquad -3x_2,$$
$$x_1=6-(1/3)S_4,$$
$$F=42-(7/3)S_4+5x_2$$

T_1	$-S_4$	$-x_2$		θ
S_1	$-2/3$	3	7	$7/3$
S_2	$-2/3$	1	1	$1/1$
S_3	0	3	15	$15/3$
x_1	$1/3$	0	6	$-$
F	$7/3$	-5	42	

(проверьте на примере перехода от T_0 к T_1 правила 1) - 5) симплексного преобразования). Теперь S_1, S_2, S_3, x_1 – базисные, S_4, x_2 – свободные. Полученный ранее план $X^1=(6,\ 0,\ 7,\ 1,\ 15,\ 0)$ оказался опорным для таблицы T_1 (почему?). Этот план можно снова «улучшить», так как в выражении F через свободные переменные S_4 и x_2 есть положительный коэффициент 5 (элемент (-5) в строке F); при $S_4=0$ с ростом x_2 первой обратится в нуль базисная переменная S_2 ($1/1$- наименьшее отношение в столбце θ); к T_1 применим симплексное преобразование с разрешающим элементом на пересечении столбца x_2 и строки S_2. В результате получим таблицу T_2, затем из нее аналогично таблицу T_3 :

T_2	$-S_4$	$-S_2$		θ
S_i	$4/3$	-3	4	3
x_2	$-2/3$	1	1	$-$
S_3	2	-3	12	6
x_1	$1/3$	0	6	18
F	-1	5	47	

T_3	$-S_1$	$-S_2$	
S_4	$3/4$	$-9/4$	3
x_2	$1/2$	$-1/2$	3
S_3	$-3/2$	$3/2$	6
x_1	$-1/4$	$3/4$	5
F	$3/4$	$11/4$	50

(Опорным планам X^2 и X^3 соответствуют вершины D и C, рис. 1). Таблица T_3 не только допустима (T_0, T_1, T_2 тоже допустимы), но и удовлетворяет условию строгой оптимальности ($3/4>0,\ 11/4>0$ в строке F). По критерию оптимальности $X^3 = X^* = (5, 3, 0, 0, 6, 3)$ - единственный оптимальный план, $F(X^*) = 50$. Таким образом, последовательное улучшение опорных планов привело к полному решению задачи ЛП; ответ, конечно, совпал с результатом графического решения. В заключение напомним, что в канонической модели задачи о ресурсах балансовые переменные – это остатки ресурсов. К «экономической» формулировке ответа в конце примера 6 можно добавить: при этом ресурсы R_1 и R_2 будут израсходованы полностью, а остатки ресурсов R_3 и R_4 равны шести и трем соответственно.

Пример 8. Решить задачу ЛП $F = 2x_1 + 4x_2 \quad - \max$ с ограничениями $x_1 + 2x_2 \le 5,\quad x_1 + x_2 \le 4,\quad x_1 \ge 0,\quad x_2 \ge 0.$

Решение. Как и в предыдущем примере, приведем задачу к канонической форме и примем за базисные балансовые переменные. Такой записи задачи соответствует симплексная таблица T_0 и опорный план $X^0 = (0, 0, 5, 4)$, $F(X^0) = 0$. Улучшение плана X^0 приводит к допустимой таблице T_1, удовлетворяющей условию оптимальности,

T_0	$-x_1$	$-x_2$		θ
S_1	1	2	5	$5/2$
S_2	1	1	4	$4/1$
F	-2	-4	0	

T_1	$-x_1$	$-S_1$		θ
x_2	$1/2$	$1/2$	$5/2$	5
S_2	$1/2$	$-1/2$	$3/2$	3
F	0	2	10	

В строке F таблицы T_1 есть нулевой элемент; опорный план $X^1 = (0,\ 5/2,\ 0,\ 3/2)$, , $F(X^1) = 10$ оказывается не единственным оптимальным. Найдем все оптимальные планы. Таблица T_1 соответствует уравнениям

$$x_2 = 5/2 - (1/2)x_1 - (1/2)S_1,\ S_2 = 3/2 - (1/2)x_1 + (1/2)S_1,\ F = 10 - 0 \cdot x_1 - 2S_1.$$

Значения F не зависят от x_1 и убывают с ростом S_1, поэтому в оптимальных планах необходимо, чтобы $S_1 = 0$, а допустимые значения x_1 находятся из неравенств $x_1 \ge 0$, $x_2 = 5/2 - (1/2)x_1 \ge 0$, $S_2 = 3/2 - (1/2)x_1 \ge 0$, т. е. $0 \le x_1 \le 3$. Таким образом, все оптимальные планы имеют вид $X^* = (x_1, 5/2 - (1/2)x_1, 0, 3/2 - (1/2)x_1)$, $F(X^*) = 10$, $0 \le x_1 \le 3$. При $x_1 = 0$ получаем опорный план X^1. План $X^2 = (3, 1, 0, 0)$, который получается при $x_1 = 3$, так же будет опорным (почему?). В графическом решении исходной задачи ЛП оптимальным планам X^* соответствует ребро четырехугольной области допустимых планов с вершинами в точках $(0; 5/2)$ и $(3; 1)$ (проверьте).

Пример 9. Решить задачу ЛП $F = 2x_1 + x_2 - \max$ с ограничениями $x_1 - x_2 \le 10$, $x_1 \le 20$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

Решение. Здесь так же, как и в двух предыдущих примерах, легко получаются «начальная» форма уравнений и соответствующая симплексная таблица:

$$S_1 = 10 - x_1 + x_2,$$
$$S_2 = 20 - x_1 + 0 \cdot x_2,$$
$$F = 0 + 2x_1 + x_2.$$

T_0	$-x_1$	$-x_2$	
S_1	1	−1	10
S_2	1	0	20
F	−2	−1	0

Обратим внимание на коэффициенты при свободной переменной x_2 (столбец x_2 в T_0): коэффициент в выражении F положителен (в таблице $-1 < 0$), а среди коэффициентов при x_2 в выражениях S_1 и S_2 нет отрицательных (в столбце x_2 таблицы нет положительных элементов). Поэтому при $x_1 = 0$ и неограниченном возрастании $x_2 > 0$ значения S_1 и S_2 остаются неотрицательными, а значения F неограниченно возрастают, т. е. F не ограничена на допустимых планах, и задача ЛП не имеет оптимальных планов. Этот результат очевиден и при графическом решении исходной задачи (убедитесь в этом).

В разобранных примерах (см. также упр. 11) хорошо видна тесная связь опорных планов с вершинами многоугольной области допустимых планов. Оказывается, что опорные планы в общем случае играют такую же роль, как вершины в задачах ЛП с наглядной геометрической интерпретацией. Это подтверждается следующими утверждениями, доказанными в теории ЛП.

Теорема о допустимых опорных планах. Если каноническая задача ЛП имеет допустимые планы, то среди них найдется опорный план.

Теорема об оптимальных опорных планах. Если каноническая задача ЛП имеет оптимальные планы, то среди них найдется опорный план.

Эти теоремы показывают, что при решении задач ЛП фактически можно рассматривать только опорные планы, а не все допустимые. В примерах 7 – 9 рассматривались изменения значений целевой функции и базисных переменных при возрастании одной из свободных переменных. Из анализа этих изменений ясно, как надо выбирать разрешающий элемент «текущей» симплексной таблицы, чтобы улучшить соответствующий опорный план, и как определить, получен ли уже оптимальный план и существуют ли вообще оптимальные планы. Такое **последовательное улучшение опорных планов** - главная идея основного алгоритма численного решения задач ЛП, получившего название **симплекс-метода.**

Для применения симплекс-метода задачу ЛП надо **привести к каноническому виду** (см. п.2). Кроме того, предполагается, что **уже найдена** одна из допустимых симплексных таблиц – **начальная симплексная таблица.** Ниже будет показано, как можно найти такую таблицу или установить, что задача ЛП не имеет допустимых планов.

Алгоритм симплекс-метода

Шаг 1. Объявить начальную симплексную таблицу и соответствующий опорный план **текущими.**

Шаг 2 (Проверка оптимальности). Просмотреть строку F текущей таблицы (кроме свободного члена).

а) Если в строке F нет отрицательных элементов (все ≥ 0), то текущий опорный план – оптимальный; если при этом нет и нулевых элементов, то оптимальный план - единственный, если нулевые элементы есть, то множество оптимальных планов бесконечно.

б) Если в строке F есть отрицательные элементы, выбрать среди них наибольш ий по модулю и объявить соответствующий столбец **разрешающим.**

Шаг 3 (Выбор разрешающего элемента). Просмотреть разрешающий столбец текущей таблицы (кроме элемента строки F).

а) Если в разрешающем столбце нет положительных элементов (все ≤ 0), то целевая функция не ограничена и оптимальных планов нет.

б) Если в разрешающем столбце есть положительные элементы, то для всех содержащих эти элементы строк вычислить и записать в столбец θ отношения свободных членов таблицы к соответствующим элементам разрешающего столбца - **симплексные отношения** (в строках, содержащих нулевые или отрицательные элементы разрешающего столбца, если такие имеются, вместо симплексных отношений поставить прочерки). Строку с **минимальным** симплексным отношением объявить **разрешающей,** элемент на пересечении разрешающей строки с разрешающим столбцом объявить **разрешающим.**

Шаг 4 (Улучшение плана). Выполнить симплексное преобразование текущей таблицы с разрешающим элементом, выбранным на шаге 3б); объявить полученную таблицу и соответствующий опорный план **текущими.**

Шаг 5. Перейти к шагу 2.

Результатом применении симплекс-метода будет цепочка допустимых симплексных таблиц $T_0, T_1, T_2, \ldots$ и соответствующих опорных планов

$X^0, X^1, X^2, \ldots$, такая, что $F(X^0) \le F(X^1) \le F(X^2) \le \ldots$. В **большинстве** задач ЛП значения целевой функции $F(X^0)$, $F(X^1)$, $F(X^2), \ldots$ **строго** возрастают и решение задачи завершается через **конечное** число шагов на таблице, удовлетворяющей требованиям шага 2а) или шага 3а). **Особые** случаи всегда связаны с **вырожденностью** решаемой задачи. Задача ЛП называется **вырожденной,** если у нее есть опорные планы, в которых кроме всех свободных переменных **равны нулю** и некоторые **базисные.** Разберем подробно простейший из таких особых случаев.

Пример 10. Решить симплекс-методом задачу ЛП $F = 3x_1 + 2x_2 - \max$ с ограничениями $4x_1 + 3x_2 \le 12$, $4x_1 + x_2 \le 8$, $4x_1 - x_2 \le 8$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

Решение. Начальная таблица T_0 находится так же, как в предыдущих примерах. Одна из возможных цепочек состоит из трех таблиц: T_0, T_1, T_2.

T_0	$-x_1$	$-x_2$		θ
S_1	4	3	12	3
S_2	4	1	8	2
S_3	4	-1	8	2
F	-3	-2	0	

T_1	$-S_2$	$-x_2$		θ
S_1	-1	2	4	2
x_1	$1/4$	$1/4$	2	8
S_3	-1	-2	0	–
F	$3/4$	$-5/4$	6	

T_2	$-S_2$	$-S_1$	
x_2			2
x_1			$3/2$
S_3			4
F	$1/8$	$5/8$	$17/2$

Начальной таблице T_0 соответствует опорный план $X^0 = (0, 0, 12, 8, 8)$, $F(X^0) = 0$. В строке F таблицы T_0 есть отрицательные элементы, (-3) – наибольший из них по модулю, поэтому столбец x_1 – разрешающий (выделен). В разрешающем столбце x_1 есть положительные элементы (в данном случае все). Вычисляем симплексные отношения 12/4, 8/4, 8/4 (столбец θ). Здесь оказались **две** строки S_2 и S_3 с минимальным симплексным отношением $\theta = 2$, выбираем в качестве разрешающей одну из них, например S_2 (выделена). Элемент 4 на пересечении строки S_2 и столбца x_1 – разрешающий. Далее выполняем симплексное преобразование таблицы T_0 по правилам 1) - 5) и переходим к T_1: меняем местами S_2 и x_1; заменяем разрешающий элемент 4 на 1/4; остальные элементы разрешающей строки, 1 и 8, делим на 4; остальные элементы разрешающего столбца, 4, 4 и (-3), делим на (-4); все оставшиеся элементы, не принадлежащие ни строке S_2, ни столбцу x_1, пересчитываем по правилу четырехугольника. Например, -2 в строке F заменяем на $((-2) \cdot 4 - 1 \cdot (-3))/4 = -5/4$; 3 в столбце x_2 – на $(3 \cdot 4 - 1 \cdot 4)/4 = 2$. Теперь таблица T_1 и опорный план $X^1 = (2, 0, 4, 0, 0)$ – текущие, $F(X^1) = 6$, и все операции начиная с шага 2 повторяются с таблицей T_1. В строке F таблицы T_1 еще есть отрицательный элемент $(-5/4)$, в разрешающем столбце x_2 есть положительные элементы 2 и 1/4. После вычисления симплексных отношений (почему в строке S_3 вместо отношения стоит прочерк?) и выбора разрешающего элемента 2 надо выполнить симплексное преобразование таблицы T_1, т. е. перейти к T_2. При этом целесообразно начать вычисления с элементов строки F: если они окажутся неотрицательными (в данном случае так и будет: получатся $1/8$ и $5/8$), то T_2 будет **заключительной**, ей соответствует оптимальный опорный план. Чтобы выписать этот план и $\max F$, нужен только столбец свободных членов таблицы, «внутренние» элементы T_2 можно не вычислять. Итак, в данной задаче $X^2 = X^* = (3/2,\ 2,\ 0,\ 0,\ 4)$ – единственный оптимальный план и $F^* = F(X^*) = 17/2$.

При **втором** варианте выбора разрешающей строки в T_0, S_3 вместо S_2, получается другая цепочка таблиц: $T_0, \tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{T}_3$, где

$\tilde{T}_1$	$-S_3$	$-x_2$	
S_1	-1	4	4
S_2	-1	$\boxed{2}$	0
x_1	$1/4$	$-1/4$	2
F	$3/4$	$-11/4$	6

$\tilde{T}_2$	$-S_3$	$-S_2$	
S_1	$\boxed{1}$	-2	4
x_2	$-1/2$	$1/2$	0
x_1	$1/8$	$1/8$	2
F	$-5/8$	$11/8$	6

$\tilde{T}_3$	$-S_1$	$-S_2$	
S_3			4
x_2			2
x_1			$3/2$
F	$5/8$	$1/8$	$17/2$

Здесь и в дальнейшем столбцы симплексных отношений опущены и сразу выделены разрешающие элементы. Вторая цепочка тоже приводит к оптимальному плану (конечно, тому же самому X^* – ведь он единственный!). Заметим, что в каждом из опорных планов $X^1, \tilde{X}^1, \tilde{X}^2$ таблиц $T_1, \tilde{T}_1, \tilde{T}_2$ есть базисное переменное с нулевым значением (см. столбцы свободных членов) - задача вырождена. Более того, $X^1 = \tilde{X}^1 = \tilde{X}^2 = (2,\ 0,\ 4,\ 0,\ 0)$, хотя таблицы $T_1, \tilde{T}_1, \tilde{T}_2$, различные.

Пример 10 показывает, что при применении симплекс-метода к **вырожденной** задаче нескольким последовательным таблицам может соответствовать один и тот же опорный план ($\tilde{T}_1$ и $\tilde{T}_2$ во второй цепочке). Оказывается, что в других (более сложных) вырожденных задачах возможна следующая ситуация: нескольким таблицам соответствует один и тот же опорный план и на некотором шаге очередная из этих таблиц повторяет одну из предыдущих – происходит **зацикливание.** В теории ЛП разработаны различные варианты уточнения основного алгоритма симплекс-метода, позволяющие избежать зацикливания, но при решении практических задач они применяются очень редко, так как их использование сильно замедляет вычислительный процесс, а вероятность зацикливания ничтожно мала.

В заключение приведем пример решения задачи о ресурсах с помощью симплекс-метода.

Пример 11. В таблице 4 представлены исходные данные задачи о ресурсах: запасы ресурсов (последний столбец), доходы от реализации одной единицы каждого вида продукции (последняя строка), технологическая матрица (остальная часть таблицы). Построить математическую модель задачи. Найти оптимальный план производства, максимальный доход и остатки ресурсов.

Таблица 4

2	0	1	9
2	1	0	10
2	1	1	11
1	2	2	13
12	4	5	

Решение. Обозначим x_1, x_2, x_3 планируемые объемы производства по видам продукции. Математической моделью будет задача ЛП в стандартной (записана слева) или канонической (справа) форме:

$$F = 12x_1 + 4x_2 + 5x_3 \quad - \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 \qquad + x_3 \le 9, \\ 2x_1 + \ x_2 \qquad \le 10, \\ 2x_1 + \ x_2 + \ x_3 \le 11, \\ \ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 13, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,$$

$$F = 12x_1 + 4x_2 + 5x_3 \quad - \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 \qquad + x_3 + S_1 = 9, \\ 2x_1 + \ x_2 \qquad + S_2 = 10, \\ 2x_1 + \ x_2 + \ x_3 + S_3 = 11, \\ \ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + S_4 = 13, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,$$
$$S_1 \ge 0,\ S_2 \ge 0, S_3 \ge 0, S_4 \ge 0,$$

Смысл переменных S_1, S_2, S_3, S_4 - остатки ресурсов. В стандартной форме - три переменные, графическое решение практически невозможно (попробуйте). Решим задачу симплекс-методом. Начальная таблица T_0 здесь (как и в любой задаче о ресурсах) находится просто: за базисные надо выбрать переменные S_1, S_2, S_3, S_4. Далее цепочка таблиц определяется шагами симплекс-метода однозначно.

T_0	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	
S_1	$\boxed{2}$	0	1	9
S_2	2	1	0	10
S_3	2	1	1	11
S_4	1	2	2	13
F	-12	-4	-5	0

T_1	$-S_1$	$-x_2$	$-x_3$	
x_1	$1/2$	0	$1/2$	$9/2$
S_2	-1	$\boxed{1}$	-1	1
S_3	-1	1	0	2
S_4	$-1/2$	2	$3/2$	$17/2$
F	6	-4	1	54

T_2	$-S_1$	$-S_2$	$-x_3$	
x_1	$1/2$	0	$1/2$	$9/2$
x_2	-1	1	-1	1
S_3	0	-1	$\boxed{1}$	1
S_4	$3/2$	-2	$7/2$	$13/2$
F	2	4	-3	58

T_3	$-S_1$	$-S_2$	$-S_3$	
x_1	$1/2$	$1/2$	$-1/2$	4
x_2	-1	0	1	2
x_3	0	-1	1	1
S_4	$3/2$	$3/2$	$-7/2$	3
F	2	1	3	61

Таблица T_3 допустима и удовлетворяет условию строгой оптимальности. По критерию оптимальности $x_1^* = 4,\ x_2^* = 2,\ x_3^* = 1,\ S_1^* = S_2^* = S_3^* = 0, S_4^* = 3$ - единственный оптимальный план и $F^* = 61$. В экономических терминах это означает, что максимальный доход равен 61 и достигается только одним способом – объемы производства трех видов продукции должны быть равны 4, 2 и 1(в соответствующих единицах). При этом ресурсы первых трех видов будут израсходованы полностью, а остаток четвертого ресурса составит три единицы.

Упражнения

12. В хозяйстве имеются 850 га пашни, 15000 т органических удобрений, трудовые ресурсы составляют 50 000 чел.-дн. Хозяйство специализируется на производстве трех культур: капусте, картофеле и многолетних травах на сено. Затраты труда (чел.-дн.), расход удобрений (т) и выход валовой продукции в денежном выражении (руб.) в расчете на 1 га составляют: для капусты – 50, 20, 1000; для картофеля – 30, 15, 800; для трав – 10, 10, 200. Найти оптимальное сочетание посевов трех культур.

13. Цех выпускает три вида изделий, располагая при этом сырьем четырех видов А, Б, В, Г в количествах 18, 16, 8, 6 ед. соответственно. Нормы затрат каждого вида сырья на одно изделие первого вида составляют соответственно 1, 2, 1 , 0; второго вида 2, 1, 1, 1 и третьего вида 1, 1, 0, 1. Прибыль от реализации одного изделия первого вида равна 3 руб., второго – 4 руб., третьего – 2 руб. Составить план производства трех видов изделий, максимизирующий прибыль.

14. Механический завод при изготовлении двух типов деталей использует токарное, фрезерное и сварочное оборудование. Обработку каждой детали можно вести двумя различными технологическими способами. Полезный фонд времени работы каждой группы оборудования (в станко-часах), нормы расхода времени при обработке детали на соответствующем оборудовании по данному технологическому способу и прибыль от выпуска единицы детали каждого вида по каждому из способов приведены в таблице:

Оборудование	Детали				Полезный фонд времени, станко-ч
	1		2		
	Технологические способы				
	1-й	2-й	1-й	2-й	
Фрезерное	2	2	3	0	20
Токарное	3	1	1	2	37
Сварочное	0	1	1	4	30
Прибыль, руб	11	6	9	6	

Составить оптимальный план загрузки оборудования, обеспечивающий заводу максимальную прибыль.

15. Привести (если требуется) к каноническому виду, найти начальную симплексную таблицу и решить симплекс-методом следующие задачи ЛП:

а) $F = 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 3x_4 \quad - \max$ с ограничениями

$x_1 + x_2 + x_3 = 4; \quad x_1 + 4x_2 + x_4 = 8; \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0;$

б) $F = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \quad - \min$ с ограничениями

$x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 7; \; 2x_1 + x_2 + x_4 \geq 10; \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0;$

в) $F = x_1 - 3x_2 - 2x_3 - \quad \min$ с ограничениями

$3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 7; \quad -2x_1 + 4x_2 \leq 12; \; -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 10; \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0;$

г) $F = 3x_1 + x_2 + 2x_3 \quad - \max$ с ограничениями $4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 3;$

$8x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_5 = 10; \; 3x_1 - x_6 = 0; \; x_1, x_2, \ldots, x_6 \geq 0$.

16. Решить графически задачу из примера 10. Какие особенности ограничений-неравенств обуславливают вырожденность этой задачи?

5. Нахождение начальной симплексной таблицы

Допустимая симплексная таблица, с которой начинаются вычисления симплекс-метода, не всегда находится так просто, как в примерах 7-11. В задаче о диете (7) - (9), например, после ее приведения к канонической форме, ограничения – равенства имеют вид $a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n - S_i = b_i, \; 1 \leq i \leq m$. Очевидный выбор переменных $S_1, \ldots, S_m$ в качестве базисных (тогда $x_1, \ldots, x_n$ - свободные) приводит к недопустимой таблице: при $x_1 = \ldots = x_n = 0$ значения $S_i = -b_i$ базисных переменных отрицательны. Изложим один из методов нахождения начальной симплексной таблицы в общем случае.

Пусть требуется найти начальную симплексную таблицу задачи ЛП в канонической форме (17) – (19). Без ограничения общности будем предполагать, что все правые части уравнений (18) неотрицательны, $b_i \geq 0, 1 \leq i \leq m$: если $b_i < 0$, достаточно умножить соответствующее уравнение на (-1). Введем в левые части уравнений (18) **искусственные** переменные $u_1, \ldots, u_m$ и рассмотрим **вспомогательную** каноническую задачу ЛП:

$$H = -u_1 - u_2 - \ldots - u_m \quad - \max; \tag{28}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + u_i = b_1, \;\; 1 \le i \le m; \tag{29}$$

$$x_j \ge 0, \;\; 1 \le j \le n, \;\; u_i \ge 0, \;\;\; 1 \le i \le m. \tag{30}$$

В задаче (28) – (30) выбор начальной симплексной таблицы очевиден из самой формы уравнений (29) - за базисные надо принять искусственные переменные $u_1, \ldots, u_m$; предположение $b_i \ge 0$ обеспечивает допустимость этой таблицы. В результате применения симплекс-метода к **невырожденной** вспомогательной задаче (ограничимся только таким случаем) через конечное число шагов будет найдена заключительная симплексная таблица $\tilde{T}$. В задаче (28) – (30) целевая функция $H = -u_1 - \ldots - u_m$ ограничена сверху: $H \le 0$ в силу требований $u_1 \ge 0, \ldots, u_m \ge 0$ из (30). Поэтому выполнение условий шага 3а) невозможно, таблица $\tilde{T}$ удовлетворяет условиям шага 2а) и ей соответствует оптимальный опорный план $\tilde{X}^* = \left(x_1^*, \ldots, x_n^*, u_1^*, \ldots, u_m^*\right)$, $H\left(\tilde{X}^*\right) = -u_1^* - \ldots - u_m^* = H^* \le 0.$

Исследуем связь **исходной** задачи (17) – (19) и **вспомогательной** (28) – (30). Пусть исходная задача имеет допустимые планы и $X = (x_1, \ldots, x_n)$ – один из них. Тогда план $\tilde{X} = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$ (с теми же, что и в X, значениями переменных исходной задачи и нулевыми значениями искусственных переменных) будет допустимым для вспомогательной задачи, т. к. при $u_1 = \ldots = u_m = 0$ ограничения вспомогательной задачи совпадают с ограничениями исходной. При этом $H\left(\tilde{X}\right) = 0.$ Учитывая, что $H \le 0$ на всех допустимых планах, заключаем, что $\tilde{X}$ - оптимальный и $H\left(\tilde{X}\right) = H^* = 0.$ Итак, в случаях, когда исходная задача **имеет** допустимые планы, во вспомогательной задаче обязательно получится $H^* = 0.$ Последнее утверждение можно сформулировать таким образом.

Если во вспомогательной задаче $H^* < 0,$ то в исходной задаче нет допустимых планов и она не имеет решения.

Осталось выяснить, что дает для исходной задачи результат $H^* = 0$ во вспомогательной. Так как $u_1^*, \ldots, u_m^*$ неотрицательны, равенство $H^* = -u_1^* - \ldots - u_m^* = 0$ возможно только при $u_1^* = \ldots = u_m^* = 0.$ Но тогда в силу невырожденности вспомогательной задачи ни одна из искусственных переменных не может оказаться базисной в заключительной таблице $\tilde{T}$, т. е. все они свободные (записаны в верхней строке таблицы $\tilde{T}$). Таблица $\tilde{T}$ (без строки H) – одна из форм записи системы (29). При $u_1 = \ldots = u_m = 0$ система (29) превращается в систему (18). Легко понять, что, вычеркивая из $\tilde{T}$ строку H и столбцы $u_1, \ldots, u_m$, получим одну из записей системы (18), т. е. симплексную таблицу T_0 исходной задачи (17) – (19) (без строки F). Таблица T_0 допустима, так как столбец свободных членов остался тем же, что и в допустимой таблице $\tilde{T}$. Строку F можно найти, подставляя в выражение (17) целевой функции исходной задачи вместо базисных переменных таблицы T_0 их выражения через свободные (эти выражения содержатся в самой T_0). Таким образом, приходим к следующему выводу.

Если во вспомогательной задаче $H^* = 0$, то ее заключительная симплексная таблица $\tilde{T}$ легко перестраивается в начальную допустимую симплексную таблицу исходной задачи.

Замечание. При вырожденности вспомогательной задачи возможна ситуация, когда $u_1^* = \ldots = u_m^* = 0$, но не все искусственные переменные оказались свободными в заключительной таблице $\tilde{T}$. В таких случаях всегда существует последовательность симплексных преобразований (не изменяющих опорный план), после выполнения которых все искусственные переменные становятся свободными. В данных указаниях примеры с вырожденными вспомогательными задачами не рассматриваются.

Разберем несколько примеров решения задач ЛП с использованием описанного выше метода нахождения начальной допустимой симплексной таблицы.

Пример 12. Решить задачу ЛП $F = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \quad - \max$ с ограничениями $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 9, \quad 2x_1 + 5x_2 + x_3 \le 8, \quad x_1 + 2x_2 + 4x_3 \ge 7, \quad x_1, x_2, x_3 \ge 0.$

Решение. Приведем задачу к канонической форме

$$
\begin{gathered}
F = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \quad - \max \\
3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + S_1 = 9, \\
2x_1 + 5x_2 + x_3 + S_2 = 8, \\
x_1 + 2x_2 + 4x_3 - S_3 = 7. \\
x_1 \ge 0,\, x_2 \ge 0,\; x_3 \ge 0,\; S_1 \ge 0,\; S_2 \ge 0,\, S_2 \ge 0.
\end{gathered}
$$

Воспользуемся тем, что в первом и втором уравнении есть «очевидные» базисные переменные S_1 и S_2, каждая из них входят только в одно уравнение, причем с положительным коэффициентом. Введем всего одну искусственную переменную u в третье уравнение. Вспомогательная задача имеет следующий вид (требования неотрицательности опущены):

$$
\begin{gathered}
H = -u \quad - \max \\
3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + S_1 = 9 \\
2x_1 + 5x_2 + x_3 + S_2 = 8 \\
x_1 + 2x_2 + 4x_3 - S_3 + u = 7.
\end{gathered}
$$

В начальной таблице T_0 с базисными переменными S_1, S_2, u целевую функцию H надо выразить через свободные переменные x_1, x_2, x_3, S_3: $H = -u = -(7 - x_1 - 2x_2 - 4x_3 + S_3) = -7 + x_1 + 2x_2 + 4x_3 - S_3$. Решение вспомогательной задачи заканчивается на таблице T_1.

T_0	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-S_3$	
S_1	3	4	2	0	9
S_2	2	5	1	0	8
u	1	2	$\boxed{4}$	-1	7
H	-1	-2	-4	1	-7

T_1	$-x_1$	$-x_2$	$-u$	$-S_3$	
S_1	$5/2$	3	$-1/2$	$1/2$	$11/2$
S_2	$7/4$	$9/2$	$-1/4$	$1/4$	$25/4$
x_3	$1/4$	$1/2$	$1/4$	$-1/4$	$7/4$
~~H~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~$0=H^*$~~

Здесь $H^*=0$, T_1 перестраиваем в начальную таблицу T_2 для исходной задачи – вычеркиваем строку H и столбец u и находим выражение F через свободные переменные x_1, x_2, S_3:

$$F=3x_1+5x_2+4\left(7/4-(1/4)\,x_1-(1/2)x_2+(1/4)\,S_3\right)=7+2x_1+3x_2+S_3.$$

Затем записываем T_2, следующая таблица T_3 уже удовлетворяет условию оптимальности .

T_2	$-x_1$	$-x_2$	$-S_3$	
S_1	$5/2$	3	$\boxed{1/2}$	$11/2$
S_2	$7/4$	$9/2$	$1/4$	$25/4$
x_3	$1/4$	$1/2$	$-1/4$	$7/4$
F	-2	-3	-1	7

T_3	$-x_1$	$-x_2$	$-S_1$	
S_3				11
S_2				$7/2$
x_3				$9/2$
F	3	3	2	18

Обратите внимание на «неправильный» выбор разрешающего столбца в T_2, что было бы при «правильном»? В T_3, как и в примере 10, внутренние элементы не вычисляются.

Ответ: $F^*=18,\ x_1^*=0,\ x_2^*=0,\ x_3^*=9/2,\ \left(S_1^*=0,\ S_2^*=7/2, S_3^*=11\right)$.

Пример 13. Решить задачу ЛП

$$F=2x_1+x_2-x_3-x_4 \quad -\max,$$
$$x_1+x_2+2x_3+x_4=2,$$
$$2x_1+x_2+3x_3+x_4=6,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0,\ x_4\ge 0.$$

Решение. Исходная задача уже дана в канонической форме. Вводим искусственные переменные u_1 и u_2 в оба уравнения, для вспомогательной задачи сразу записываем начальную симплексную таблицу T_0. Обратите внимание на строку H.

T_0	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	
u_1	1	1	$\boxed{2}$	1	2
u_2	2	1	3	1	6
H	-3	-2	-5	-2	-8

Так как $H=-u_1-u_2$, строка H получается просто сложением строк u_1 и u_2 с последующим изменением знака: $-3=-(1+2)$, $-2=-(1+1)$ и т.д.

Далее симплекс-методом получаем T_1 и T_2:

T_1	$-x_1$	$-x_2$	$-u_1$	$-x_4$	
x_3	$\boxed{1/2}$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	1
u_2	$1/2$	$-1/2$	$-3/2$	$-1/2$	3
H	$-1/2$	$1/2$	$5/2$	$1/2$	-3

T_2	$-x_1$	$-x_2$	$-u_1$	$-x_4$	
x_1					2
u_2					2
H	1	1	3	1	$-2<0$

В T_2 решение вспомогательной задачи закончено, $H^* = -2 < 0.$

Ответ: в задаче нет допустимых планов, она не имеет решения.
Заметим, что противоречивость ограничений можно обнаружить, вычитая из удвоенного 1-го уравнения 2-е. Получим $x_2 + x_3 + x_4 = -2,$ что противоречит $x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0.$

Пример 14. Решить задачу ЛП

$$
\begin{aligned}
&F = x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \quad - \max,\\
&x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 11,\\
&x_1 - 2x_2 \qquad\quad + x_4 \qquad = 2,\\
&x_1 + \ \ x_2 \qquad\qquad\quad + x_5 = 3,\\
&x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Решение. Задача имеет каноническую форму , x_3 можно использовать как начальную базисную, искусственные переменные u_1 и u_2 вводим только во второе и третье уравнения.

T_0	$-x_1$	$-x_2$	$-x_4$	$-x_5$	
x_3	$1/2$	$1/2$	1	$1/2$	$11/2$
u_1	$\boxed{1}$	-2	1	0	2
u_2	1	1	0	1	3
H	-2	1	-1	-1	-5

T_1	$-u_1$	$-x_2$	$-x_4$	$-x_5$	
x_3	$-1/2$	$3/2$	$1/2$	$1/2$	$9/2$
x_1	1	-2	1	0	2
u_2	-1	$\boxed{3}$	-1	1	1
H	2	-3	1	-1	-1

T_2	$-u_1$	$-u_2$	$-x_4$	$-x_5$	
x_3			1	0	4
x_1			$1/3$	$2/3$	$8/3$
x_2			$-1/3$	$1/3$	$1/3$
H	1	1	0	0	$0 = H^*$

T_3	$-x_4$	$-x_5$	
x_3	1	0	4
x_1	$1/3$	$2/3$	$8/3$
x_2	$-1/3$	$1/3$	$1/3$
F	$5/3$	$1/3$	$22/3$

Решение вспомогательной задачи заканчивается в T_2, $H^* = 0$, T_2 перестраивается в начальную T_3 для исходной задачи. Функцию F выражаем через свободные переменные x_4, x_5 таблицы T_3: $F = x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = (8/3 - (1/3)x_4 -$
$- (2/3)x_5) + 2(1/3 + (1/3)x_4 - (1/3)x_5) + (4 - x_4) - x_4 + x_5 = 22/3 - (5/3)x_4 - (1/3)x_5$.

Начальная таблица T_3 уже удовлетворяет условию оптимальности.

Ответ: $F^* = 22/3$, $x_1^* = 8/3$, $x_2^* = 1/3$, $x_3^* = 4$, $x_4^* = 0$, $x_5^* = 0$.

Упражнения

17. Найти с помощью вспомогательной задачи начальную симплексную таблицу и решить симплекс–методом следующие задачи ЛП:

а) $F = -2x_1 + x_2 + x_3 + 6 - \max$ с ограничениями $3x_1 + x_2 - x_3 = 6$, $4x_1 + 5x_2 - x_4 = 19$, $4x_1 + 3x_2 + x_5 = 24$, $x_1, \dots, x_5 \geq 0$;

б) $F = x_1 - 2x_2 + 3x_3 - \min$ с ограничениями $-2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2$, $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1$, $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$;

в) $F = -x_1 - 2x_2 + x_4 + 2x_5 - \max$,

$$
\begin{aligned}
3x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 10,\\
2x_1 + 5x_4 &\geq 10,\\
2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_5 &\leq 20,\\
x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 4x_5 &\geq 15,\\
-3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 &\leq 25.\\
x_1, \dots, x_5 &\geq 0;
\end{aligned}
$$

Библиографический список

1. Акулич И. А. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высш. шк., 1986.
2. Ашманов С. А. Линейное программирование. – М.: Наука, 1981.
3. Вентцель Е. С. Исследование операций. – М.: Сов. радио, 1972.
4. Вентцель Е. С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология.– М.: Наука, 1980.
5. Горелик А. А., Ушаков И. А. Исследование операций. – М.: Машиностроение, 1986.
6. Зайченко Ю. П. Исследование операций. – Киев: Вища школа, 1986.
7. Зайченко Ю. П., Шумилова С. А. Исследование операций. Сб. задач. – Киев: Вища школа, 1984.
8. Исследование операций в экономике / Под ред. Н. Ш. Крамера. – М.: Банки и биржи,1997.
9. Калихман И. Л. Сборник задач по математическому программированию. – М.: Высш. шк., 1975.
10. Капустин В. Ф. Практические занятия по курсу математического программирования. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1976.
11. Кузнецов А. В., Новикова Г. И., Холод Н. И. Сборник задач по математическому программированию. – Минск: Вышэйш. школа, 1985.
12. Таха Х. Введение в исследование операций. – М.: Мир, 1985.–Т.1.

Редактор Г. М. Кляут
ИД 06039 от 12.10.01 .
Подписано в печать 17.04.03. Формат 60x84x1/16. Бумага офсетная.
Отпечатано на дупликаторе. Усл. печ. л. 2,25. Уч.-изд. л. 2,25.
Тираж 100 экз. Заказ

Издательство ОмГТУ. 644050, г. Омск, пр-т Мира, 11
Типография ОмГТУ