Министерство образования Российской Федерации
Омский государственный технический университет

РЯДЫ ФУРЬЕ
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ
ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

Методические указания к практическим занятиям
для студентов технических вузов

Омск-2003

Составители: Геннадий Николаевич Бояркин, канд.физ.-мат.наук, профессор
Владимир Николаевич Степанов, канд.физ.-мат.наук, доцент
Любовь Степановна Рыженко, ст. преподаватель

1. РЯДЫ ФУРЬЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ С ПЕРИОДОМ 2π и 2ℓ

Рядом Фурье периодической функции $f(x)$ с периодом 2π, определенной на сегменте $[-\pi, \pi]$, называется ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right), \tag{1}$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n = 0,1,2...), \tag{2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n = 1,2...). \tag{3}$$

Если ряд (1) сходится, то его сумма $S(x)$ есть периодическая функция с периодом 2π, т.е. $S(x + 2\pi) = S(x)$.

Теорема Дирихле. Пусть функция $f(x)$ на сегменте $[-\pi, \pi]$ имеет конечное число экстремумов и является непрерывной за исключением конечного числа точек разрыва 1-го рода (т.е. удовлетворяет так называемым условиям Дирихле). Тогда ряд Фурье этой функции сходится в каждой точке сегмента $[-\pi, \pi]$ и сумма этого ряда $S(x)$ вычисляется:

1) $S(x) = f(x)$ во всех точках неразрывности $f(x)$, лежащих внутри сегмента $[-\pi, \pi]$;

2) $S(x_0) = \frac{1}{2}[f\ x_0 - 0] + f(x_0 + 0)$, где x_0 - точка разрыва 1-го рода функции $f(x)$;

3) $S(x) = \frac{1}{2}[f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)]$ на концах промежутка, т.е. при $x = \pm\pi$.

В случае, когда $f(x)$ - четная функция, ее ряд Фурье содержит только свободный член и косинусы, т.е.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \tag{4}$$

где

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n = 0,1,2...). \tag{5}$$

В случае, когда $f(x)$ - нечетная функция, ее ряд содержит только синусы, т.е.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx\,dx, \qquad (6)$$

где

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx. \qquad (7)$$

Часто приходится разлагать в тригонометрический ряд функции периода, отличного от 2π. В этом случае, если $f(x)$ - периодическая функция с периодом 2ℓ, для которой выполняются на сегменте $[-\ell,\ell]$ условия Дирихле, то указанная функция может быть представлена в виде суммы ряда Фурье:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right), \qquad (8)$$

где

$$a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx, \qquad (9)$$

$$b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx. \qquad (10)$$

В случае, когда $f(x)$ - четная функция, как (4) – (5), ее ряд Фурье содержит только свободный член и косинусы, т.е.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx, \qquad (11)$$

где

$$a_n=\frac{2}{\ell}\cdot\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx\,.$$

(12)

В случае, когда $f(x)$- нечетная функция, ее ряд Фурье содержит только синусы, т.е.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx, \qquad (13)$$

где

$$b_n=\frac{2}{\ell}\cdot\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx. \qquad (14)$$

При разложении в ряд Фурье целесообразно придерживаться следующей схемы. Вначале проверяем, что данная функция удовлетворяет условиям Дирихле; затем вычисляем коэффициенты a_n и b_n по соответствующим формулам; подставляя их в ряд, получаем искомое разложение; наконец, основываясь на теореме Дирихле, определяем, при каких x полученный ряд сходится к данной функции. Рассмотрим примеры разложения в ряд Фурье периодических функций.

1. Разложить в ряд Фурье функцию периода 2π, заданную на интервале $-\pi < x \le \pi$ формулой: $f(x) = x$ (рис. 1).

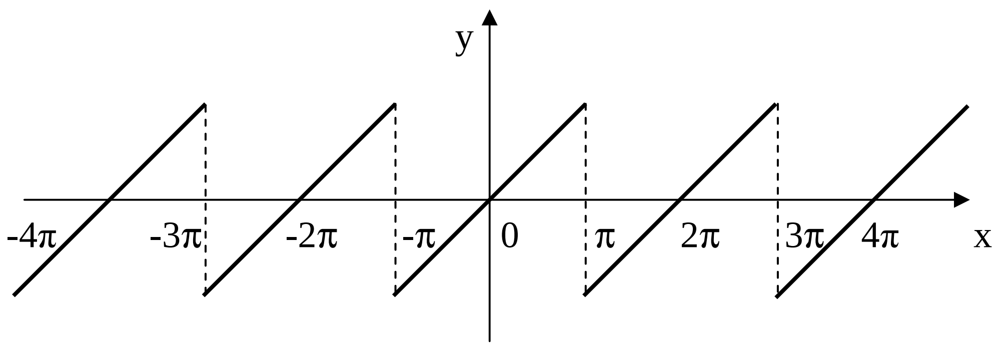


Рис. 1

Решение. Эта функция удовлетворяет условиям Дирихле и, следовательно, может быть разложена в ряд Фурье. Применяя формулу (7), найдем коэффициенты Фурье $\left(\text{интегрируем по частям} \left\| \begin{matrix} x = u, & \sin nx\,dx = dv \\ dx = du, & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{matrix} \right\| \right)$:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-x\cos nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx}_{0}\right] = -\frac{2}{\pi}\cos n\pi = -\frac{2(-1)^n}{n},$$

т.к. $-\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\, dx = -\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$.

Следовательно, ряд Фурье функции $f(x)$ будет иметь вид

$$2\left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + ... + \frac{(-1)^n}{n}\sin nx + ...\right].$$

Так как функция $f(x) = x$ удовлетворяет условиям Дирихле, то в любой точке непрерывности $f(x)$ сумма ряда равна значению функции. В точках $-n\pi$ и $n\pi$ сумма ряда равна нулю. На рис. 2 показаны графики: функции $f(x)$ и частичных сумм ряда, содержащие 1, 2 и 3 члена. Из рисунка видно, как график частичных сумм ряда приближается к графику функции $f(x)$ при увеличении членов суммы.

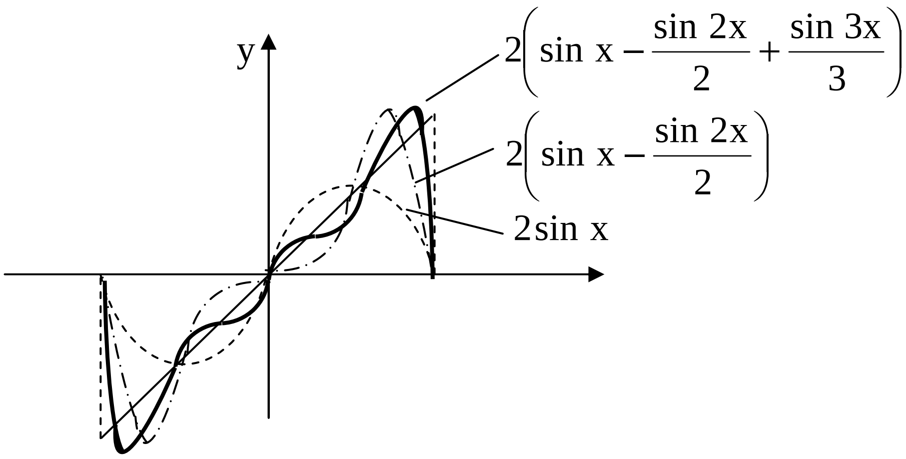


Рис. 2

2. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π, заданную на интервале $[-\pi,\pi]$ формулой

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0;\quad a<x\le\pi\\ 1, & 0<x<a\\ \frac{1}{2}, & x=0,\ x=a\end{cases}.$$

Построим график функции (рис. 3).

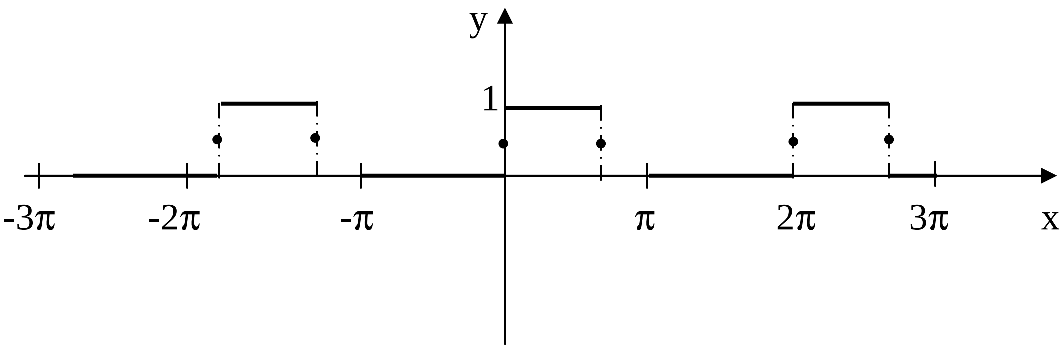


Рис. 3

Решение. Функция удовлетворяет условиям Дирихле. Применяя формулы (2) и (3), находим коэффициенты Фурье

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^a dx=\frac{x}{\pi}\Big|_0^a=\frac{a}{\pi},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^a 1\cdot\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi n}\sin nx\Big|_0^a=\frac{\sin na}{n\pi},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^a f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^a 1\cdot \sin\,nx\;dx = \frac{1}{\pi}\frac{1}{n}\left(-\cos\,nx\right)\Big|_0^a = \frac{\cos\,nx}{\pi n}\Big|_0^a = \frac{1-\cos na}{n\pi}.$$

Разложение в ряд Фурье $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \frac{a}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin na}{n\pi}\cdot\cos nx + \frac{1-\cos na}{n\pi}\cdot\sin na\,.$$

3. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом $T = 4$, заданную на интервале $(0;4)$ формулой $f(x) = \begin{cases} 6, & 0 < x < 2, \\ 3x, & 2 < x < 4. \end{cases}$

Построим график функции (рис. 4).

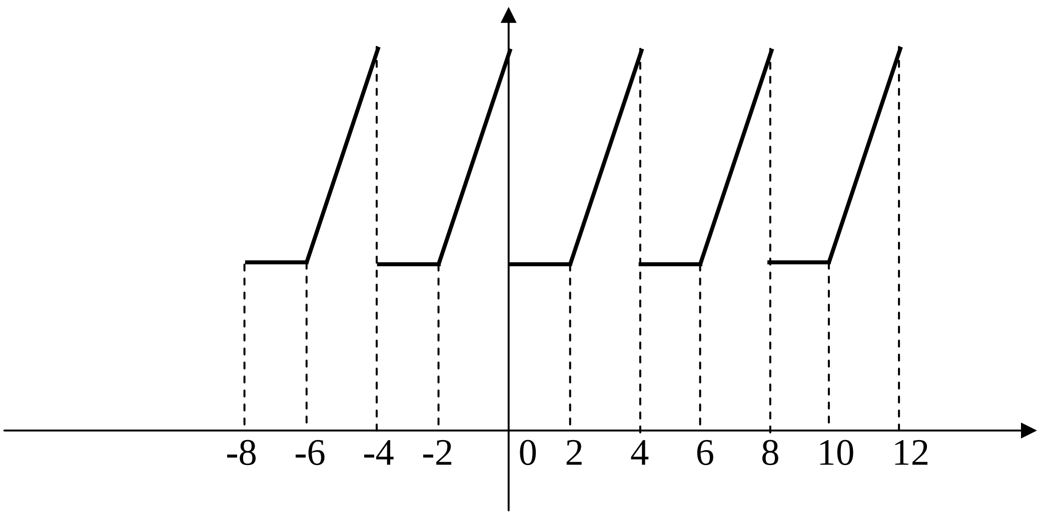


Рис. 4

Решение. Пользуясь формулами (9) и (10), полагая $\ell = 2$ и разбивая интервал интегрирования точкой $x = 2$ на две части, поскольку в каждой из них функция задана различными формулами, получим

$$a_n = \frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^2 6\cos\frac{n\pi x}{2}dx + \int_2^4 3x\,\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{12}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 + 3\left(\frac{2\pi}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_2^4\right] = \frac{6}{n^2\pi^2}\left(1-\cos n\pi\right),\quad n \neq 0\,.$$

При a – четном $\cos\,n\pi = 1$ и $x_n = 0$, при n – нечетном $\cos\,n\pi = -1$ и $a_n = \dfrac{12}{n^2\,\pi^2}$.

При n=0

$$a_0=\frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\,dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^2 6\,dx+\int_2^4 3x\,dx\right)=\frac{1}{2}\left(6x\Big|_0^2+\frac{3x^2}{2}\Big|_2^4\right)=15,$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^2 6\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx+\int_2^4 3x\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{12}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2+3\left(\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}-\frac{2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_2^4\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi n}\cdot 12\cos\frac{\pi n x}{2}\Big|_2^0+\frac{3}{2}\left[\frac{2x}{\pi n}\left(-\cos\frac{\pi n x}{2}\right)\Big|_2^4+\underbrace{\int_2^4\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{2}dx}_{=0}\right]=$$

$$=\frac{1}{2n\pi}\left[12(1-\cos n\pi)-3(2\cdot 4\cos 2\pi n-4\cos \pi n)\right]=$$

$$=\frac{1}{2n\pi}\left[12-\cancel{12\cos n\pi}+24+\cancel{12\cos n\pi}\right]=\frac{-12}{2n\pi}=-\frac{6}{n\pi}.$$

Искомое разложение данной функции имеет вид

$$f(x)=\frac{15}{2}+\frac{12}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{9}\cos\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{25}\cos\frac{5\pi x}{2}+\ldots\right)-$$

$$-\frac{6}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}+\ldots\right).$$

Оно справедливо во всей области определения данной функции: в интервале $(0,2)$ сумма ряда $S(x)=6$, в интервале $(2,4)$ - $S(x)=3x$. В точке разрыва $x=2$,

$$S(x)=\frac{1}{2}\left[f(2-0)+f(2+0)\right]=6.$$

4. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом $T = 2$, заданную на интервале $(-1,1)$ формулой $f(x) = |x|$ (рис. 5).

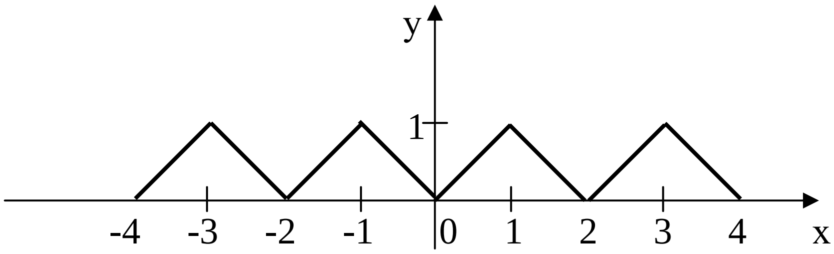


Рис. 5

Решение. Функция удовлетворяет условиям Дирихле. Применяя формулу (12), (функция $f(x)$ - четная), полагая $\ell = 1$, получим $a_0 = 2\int_0^1 x\,dx = 2\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = 1$,

$$a_n = 2\int_0^1 x\cos n\pi x\,dx = 2\left(\frac{x}{n\pi}\sin n\pi x + \frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} 0, & n - \text{четные}, \\ -\dfrac{4}{n^2\pi^2}, & n - \text{нечетное}. \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}.$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π, заданную на интервале $[-\pi,\pi]$ уравнением $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{при} \quad -\pi \le x < 0, \\ 3x & \text{при} \quad 0 \le x \le \pi. \end{cases}$.

Ответ: $f(x) = \frac{5\pi}{4} - \frac{10}{\pi}\left(\frac{\cos x}{12} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right) +$

$+\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right).$

2. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π, заданную на интервале $[0, 2\pi]$ формулой $f(x) = \frac{x}{2}$.

Ответ: $f(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$

3. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом 2π, заданную на интервале $[-\pi,\pi]$ формулой $y=|\sin x|$.

Ответ: $f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos 2x}{1\cdot 3}+\frac{\cos 4x}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{\cos 2kx}{(2k-1)\cdot(2k+1)}+\ldots\right]$.

4. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π, заданную на интервале $[-\pi,\pi]$ уравнением $f(x)=\pi+x$.

Ответ: $f(x)=\pi+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$.

5. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{при} \quad 0\le x<1, \\ 2-x & \text{при} \quad 1\le x\le 2, \end{cases} \qquad f(x+2)=f(x).$$

Ответ: $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}$.

6. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad -3<x\le 0, \\ x & \text{при} \quad 0<x<3, \end{cases} \qquad f(x+6)=f(x).$$

Ответ: $f(x)=\frac{3}{4}-\frac{6}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{3}-\frac{3}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{3}$.

7. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию
$f(x)=10-x$ при $5<x<15$, $f(x+10)=f(x)$.

Ответ: $f(x)=\frac{10}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\frac{n\pi x}{5}}{n}$.

2. РЯД ФУРЬЕ ДЛЯ НЕПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ. РЯДЫ ФУРЬЕ В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

Пусть $y = f(x)$ – непериодическая функция, заданная на всей числовой оси. Так как сумма тригонометрического ряда является периодической функцией, то очевидно, что данная непериодическая функция не может быть разложена в ряд Фурье. Но если функция задана на конечном интервале $-\ell \le x \le \ell$, то для нее можно построить ряд Фурье, который имел бы ее своей суммой на этом интервале.

Для этого рассматривают вспомогательную функцию $\varphi(x)$ периода 2ℓ, значения которой на интервале $-\ell \le x \le \ell$ совпадают со значениями функции $f(x)$ (рис. 6).

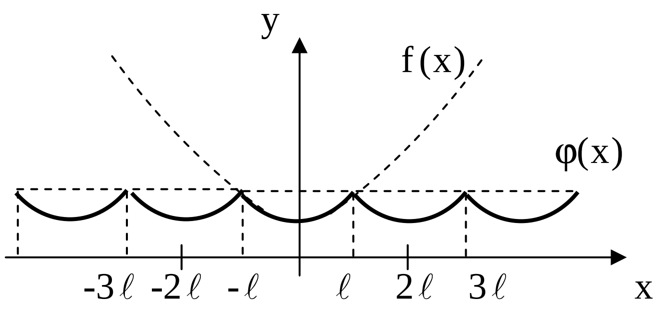


Рис. 6

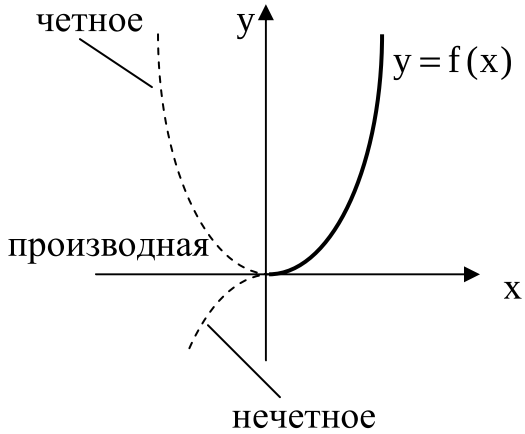


Рис. 7

Если для функции $\varphi(x)$ выполняется условие теоремы Дирихле, то ее можно представить соответствующим рядом Фурье. Этот ряд на интервале $-\ell \le x \le \ell$ во всех точках непрерывности функции будет иметь своей суммой $\varphi(x) = f(x)$.

Иногда приходится иметь дело с функциями, заданными только в интервале $0 < x \le \ell$. В этом случае мы можем сначала продолжить по какому-либо закону фукнцию на интервал $-\ell < x \le 0$, а затем продолжить на всю числовую прямую периодически с периодом 2ℓ. Удобнее всего продолжить функцию на интервал $-\ell < x \le 0$ четным или нечетным образом (рис. 7). В первом случае ряд Фурье будет содержать только косинусы и свободный член. Во втором случае ряд Фурье будет содержать только синусы.

Рассмотрим примеры разложения в ряд Фурье непериодической функции.

1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[0,2]$ уравнением $f(x)=x-\dfrac{x^2}{2}$.

Решение. Функция может быть разложена в ряд Фурье бесчисленным количеством способов. Рассмотрим два наиболее важных варианта разложения.

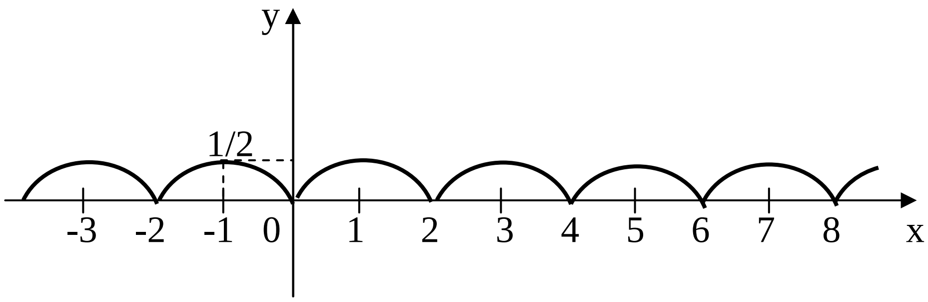


Рис. 8

А. Доопределим функцию $f(x)$ на отрезке $[-2,0]$ четным образом (рис. 8).

Имеем $\ell=2$.

$$a_0=\int_0^2\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{6}x^3\right)\Bigg|_0^2=\frac{2}{3};$$

$$a_n=\int_0^2\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\overbrace{\frac{2}{n\pi}\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^2}^{0}-\frac{2}{n\pi}\int_0^2(1-x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\int_0^2(1-x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx.$$

Еще раз интегрируем по частям:

$$a_n=\frac{4}{n^2\pi^2}(1-x)\cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^2+\overbrace{\frac{4}{n^2\pi^2}\int_0^2\cos\frac{n\pi x}{2}dx}^{0}=$$

$$=-\frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi-\frac{4}{n^2\pi^2}=-\frac{4}{n^2\pi^2}\left[1+(-1)^n\right]. \qquad b_n=0.$$

Итак,

$$f(x)=\frac{1}{3}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2}=\frac{1}{3}-\frac{8}{\pi^2}\left(\frac{1}{2^2}\cos\pi x+\frac{1}{4^2}\cos 2\pi x+\frac{1}{6^2}\cos 3\pi x+\dots\right).$$

Б. Доопределим функцию $f(x)$ на отрезке $[2,0]$ нечетным образом (рис. 9).

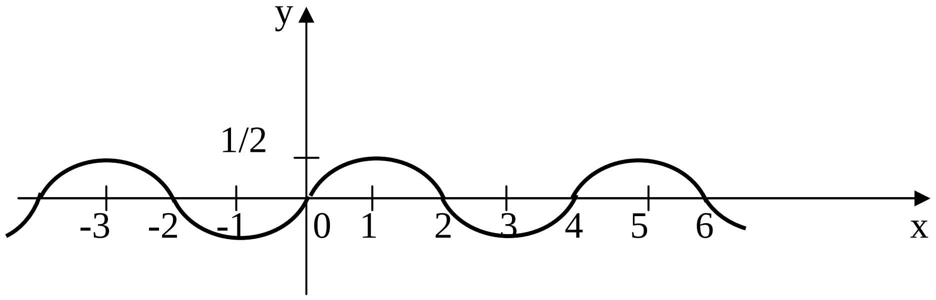


Рис. 9

$$b_n=\int_0^2\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=-\frac{2}{n\pi}\overset{0}{\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)}\cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^2+\frac{2}{n\pi}\int_0^2(1-x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=$$

$$=\frac{2}{n\pi}\int_0^2(1-x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{2}{n\pi}\left[(1-x)\cdot\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^2-\int_0^2\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}(-dx)\right]=$$

$$=\frac{4}{n^2\pi^2}(1-x)\underset{0}{\sin\frac{n\pi x}{2}}\Bigg|_0^2+\frac{4}{n^2\pi^2}\int_0^2\sin\frac{n\pi x}{2}dx=$$

$$=\frac{-8}{n^3\pi^3}\cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^2=-\frac{8}{n^3\pi^3}[\cos n\pi-1]=\frac{8}{n^3\pi^3}\left[1-(-1)^n\right].$$

Итак, $a_n=0,\ a_0=0$.

$$f(x)=\frac{8}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\left(-1^0\right)^n}{n^3}\sin\frac{n\pi x}{2}=\frac{16}{\pi^3}\left(\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{3^3}\sin\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{5^3}\sin\frac{5\pi x}{2}+\ldots\right).$$

2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, заданную на интервале $[0,\pi]$ уравнением $f(x)=x^2$.

Решение. Рассмотрим два возможных (из бесчисленных) способа разложения этой функции в ряд Фурье на заданном интервале.

А. Будем полагать, что функция задана на отрезке длиной, равной периоду $T=\pi$, и периодически продолжить ее на всю числовую ось с этим периодом (рис. 10).

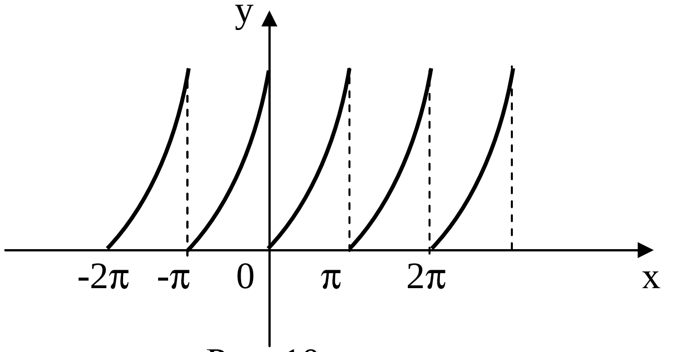


Рис. 10

Вычисляем коэффициенты Фурье полученной функции по общим формулам (9), (10), полагая $\ell = \frac{\pi}{2}$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2x^3}{3\pi}\bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^2 \; ;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos 2nx\, dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{2n^2}\cos 2nx + \left(\frac{x^2}{2n} - \frac{1}{4n^3}\right)\sin 2nx\right]\bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{\cos 2n\pi}{n^2} = \frac{1}{n^2}, \quad (n \neq 0);$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \sin 2nx\, dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{2n^2}\sin 2nx + \left(\frac{x^2}{2n} - \frac{1}{4n^3}\right)\cos 2nx\right]\bigg|_0^{\pi} = -\frac{\pi}{n};$$

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cos 2nx - \frac{\pi}{n}\sin 2nx\right).$$

Б. Доопределим функцию $f(x)$ на отрезке $[-\pi, 0]$ четным образом и периодически на всю числовую ось. В данном случае $T = 2\pi$. Вычисляем коэффициенты Фурье полученной функции по формулам (5).

График функции представлен на рис. 11.

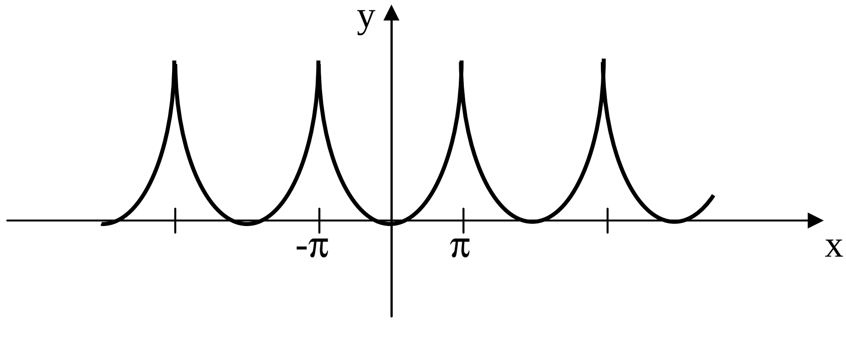


Рис. 11

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2x^3}{3\pi}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3};$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx\,dx = \begin{vmatrix} x^2 = u, & \cos nx\,dx = dv \\ du = 2x\,dx, & v = \dfrac{1}{n}\sin nx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{n}\sin nx\Bigg|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx \cdot 2x\,dx\right) = -\frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = \begin{vmatrix} u = x, & dv = \sin nx\,dx \\ du = dx, & v = -\dfrac{1}{n}\cos nx \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{4}{\pi n}\left(x\cdot\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)\Bigg|_0^{\pi} + \cancelto{0}{\int_0^{\pi}\frac{1}{n}\cos nx\,dx}\right) = \frac{4\cos n\pi}{n^2} = (-1)^n\frac{4}{n^2}, \quad n \neq 0.$$

Итак, $f(x) = \dfrac{\pi^3}{3} - 4\left[\dfrac{\cos x}{1^2} - \dfrac{\cos 2x}{2^2} + \dfrac{\cos 3x}{3^2} - \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{\cos nx}{n^2} + \ldots\right].$

Заметим, что ряды Фурье, полученные в пп. А и Б, сходятся на отрезке $[0,\pi]$ к одной и той же формуле $f(x) = x^2$, во втором случае вычислений нужно проводить меньше, чем в первом.

Во многих случаях удобно использовать комплексную формулу ряда Фурье, которую можно получить с помощью формул Эйлера:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x; \qquad\qquad e^{-ix} = \cos x - i\sin x.$$

Для функций с произвольным периодом $T = 2\ell$ ряд Фурье в комплексной форме имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\frac{in\pi x}{\ell}}, \tag{15}$$

где

$$C_n = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x) e^{-\frac{in\pi x}{\ell}}\,dx. \tag{16}$$

3. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, заданную на интервале $(-\pi,\pi)$ уравнением $y=e^{-x}$.

Решение. В данном случае удобно использовать комплексную форму ряда Фурье. По формуле (16)

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-x}\,e^{-inx}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-(1+in)x}\,dx=-\left.\frac{e^{-(1+in)x}}{2\pi(1+in)}\right|_{\pi}^{-\pi}=\left.\frac{e^{-(1+in)x}}{2\pi(1+in)}\right|_{\pi}^{-\pi}=$$

$$=\frac{e^{(1+in)\pi}-e^{-(1+in)\pi}}{2\pi(1+in)}=\frac{e^{\pi}e^{in\pi}-e^{-\pi}e^{-in\pi}}{2\pi(1+in)}.$$

По формулам Эйлера

$$e^{\pm in\pi}=\cos n\pi\pm i\sin n\pi=(-1)^n.$$

Следовательно, $C_n=\dfrac{(-1)^n\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)}{2\pi(1+in)}$,

$$e^{-x}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n\,e^{inx}=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n e^{inx}}{1+in}.$$

В интервале $(-\pi,\pi)$ ряд представляет функцию e^{-x}, а в точках $x=\pm\pi$ его сумма равна $\frac{1}{2}\left(e^{-\pi}+e^{-\pi}\right)$.

Заметим, что полученный ряд в комплексной форме можно преобразовать к обычной тригонометрической форме ряда Фурье, для этого следует объединить слагаемые с индексами n и $-n$ и заменить в результате по формулам Эйлера показательные функции тригонометрическими:

$$u_n+u_{-n}=\frac{(-1)^n e^{inx}}{1+in}+\frac{(-1)^{-n}e^{-inx}}{1-in}=(-1)^n\frac{(1-in)e^{inx}+(1+in)e^{-inx}}{1+n^2}=$$

$$=2\cdot(-1)^n\frac{\cos nx+n\sin nx}{1+n^2},\quad n=1,2,3,\ldots$$

при $n=0$ $\qquad a_0=\dfrac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{2\pi}.$

Следовательно,

$$e^{-x}=\frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}(\cos nx+n\sin nx)\right].$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Разложить в интервале $(0,\pi)$ по синусам кратных дуг функцию

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{при} \quad 0<x\le\dfrac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при} \quad \dfrac{\pi}{2}<x<\pi. \end{cases}.$$

Ответ: $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$, где $b_{2k}=(-1)^{k-1}\dfrac{1}{2k}$; $b_{2k+1}=(-1)^k\dfrac{2}{\pi(2k+1)^2}$.

2. Разложить в интервале $(0,\pi)$ по косинусам кратных дуг функцию

$$f(x)=\begin{cases} \cos x & \text{при} \quad 0<x\le\dfrac{\pi}{2}, \\ -\cos x & \text{при} \quad \dfrac{\pi}{2}<x<\pi. \end{cases}$$

Ответ: $f(x)=\dfrac{4}{\pi}\left[\dfrac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\cos 2nx}{4n^2-1}\right].$

3. Разложить в интервале $(0,1)$ в ряд Фурье функцию $f(x)=2x$.

Ответ: $f(x)=1-\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin 2n\pi x}{n}.$

4. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную на интервале $(-\pi,\pi)$ уравнением

$$f(x)=\begin{cases} -x & \text{при} \quad -\pi<x<0, \\ 0 & \text{при} \quad 0<x<\pi. \end{cases}$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin nx}{n}.$

5. Разложить в интервале $(0,1)$ в неполный ряд Фурье, содержащий только косинусы или только синусы, функцию

$$f(x)=\begin{cases} 0{,}3 & \text{при} \quad 0<x<0{,}5, \\ -0{,}3, & \text{при} \quad 0{,}5<x<1. \end{cases}$$

Ответ: а) $f(x)=\dfrac{1{,}2}{\pi}\left[\dfrac{\cos \pi x}{1}-\dfrac{\cos 3\pi x}{3}+\dfrac{\cos 5\pi x}{5}-\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{\cos(2n-1)\pi x}{2n-1}+\ldots\right];$

б) $f(x)=\dfrac{1{,}2}{\pi}\left[\dfrac{\sin 2\pi x}{1}+\dfrac{\sin 6\pi x}{3}+\dfrac{\sin 10\pi x}{5}+\ldots+\dfrac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1}+\ldots\right].$

6. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)=e^x$ при $-2<x<2$, $f(x)=f(x+4)$.

Ответ: $f(x)=\dfrac{e^4-1}{2e^2}\left[\dfrac{1}{2}+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{4+n^2\pi^2}\left(2\cos\dfrac{n\pi x}{2}-n\pi\sin\dfrac{n\pi x}{2}\right)\right].$

7. Разложить функцию $f(x)=1$ в интервале $(0,\ell)$ в неполный ряд Фурье, содержащий только синусы.

Ответ: $f(x)=\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}\sin\dfrac{(2n-1)\pi x}{\ell}$.

3. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

Пусть функция (сигнал) $y=f(t)$ описывает некоторый периодический процесс. С целью исследования этого процесса часто представляют функцию $f(t)$ в виде суммы постоянного члена и гармонических составляющих с частотами ω_0, $\omega_1=2\omega_0,\ldots$:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t\right),\ \omega_0=\frac{\pi}{\ell}. \tag{17}$$

Совокупность коэффициентов Фурье периодической функции называется ее спектром. Спектр периодической функции дискретный. С точки зрения физики разложение в ряд Фурье можно трактовать как представление периодического сигнала в виде суммы гармонических колебаний.

Если на числовой оси $(-\infty,\infty)$ задан <u>непериодический</u> сигнал $f(t)$, то для исследования такого процесса представим $f(t)$ на промежутке $[-\ell,\ell]$ в виде ряда (17). За пределами рассматриваемого промежутка сумма тригонометрического ряда будет повторять значения функции $f(t)$ в промежутке $[-\ell,\ell]$. После этого естественно сделать предельный переход при $\ell\to+\infty$. Оказывается, что в результате такого предельного перехода произойдет качественный скачок. Непериодическая функция, заданная на всей оси, представится в виде интеграла, который является непрерывным аналогом ряда Фурье и представляет собой “сумму гармонических составляющих”, частоты которых заполняют всю действительную полуось $0\le\omega<\infty$. А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема. (О представимости функции интегралом Фурье).

Если функция $f(t)$ абсолютно интегрируема на всей числовой оси, т.е. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt<\infty$ и удовлетворяет условиям Дирихле на любом конечном промежутке этой оси, то при всех t имеет место равенство

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau. \tag{18}$$

Если t_0 - точка разрыва первого рода функции $f(t)$, то левую часть формулы (18) следует понимать как $\dfrac{f(t_0-0)+f(t_0+0)}{2}$, что мы всегда будем иметь в виду.

Формула (18) называется интегральной формулой Фурье, а ее правая часть – двойным интегралом Фурье.

Обозначая

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau \quad \text{и} \quad B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\sin\omega\tau\,d\tau, \tag{19}$$

запишем интегральную формулу Фурье (18) в виде

$$f(t)=\int\limits_0^{\infty}[A(\omega)\cos\omega t+B(\omega)\sin\omega t]d\omega. \tag{20}$$

Интегральная формула Фурье (20) аналогична разложению периодической функции в ряд Фурье. Подынтегральная функция формулы (20) напоминает общий член ряда Фурье, только здесь частота ω, непрерывно изменяясь, пробегает все значения от 0 до ∞, и потому суммирование заменяется интегрированием от 0 до ∞. Функции $A(\omega), B(\omega)$, определенные формулами (19), аналогичными формулам для коэффициентов ряда Фурье, дают закон распределения амплитуд и начальных фаз в зависимости от частоты ω.

Смысл интегральной формулы Фурье состоит в следующем: интегральная формула Фурье представляет непериодическую функцию как наложение гармоник с непрерывной последовательностью частот.

С физической точки зрения это означает, что непериодический процесс уже нельзя построить из гармонических колебаний только с определенными изолированными частотами $\omega_n = n\frac{\pi}{\ell}$, теперь для его построения необходимы гармонические колебания всех частот.

Рассмотрим частные случаи применения формулы (20).

1. Пусть $f(t)$ - четная функция. Тогда $A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau, \quad B(\omega) = 0$.

Формула (20) в этом случае принимает вид

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(\tau)\cos\,\omega\tau\, d\tau \right) \cos\,\omega t\, d\omega. \tag{21}$$

Запишем эту формулу в симметричном виде, положив $f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_C(\omega)\cos\,\omega\, t\, d\omega$,

где $F_C(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(\tau)\cos\,\omega\tau\, d\tau$.

$F_C(\omega)$ называется косинус-преобразованием Фурье функции $f(t)$.

2. Пусть $f(t)$ - нечетная функция. В этом случае $A(\omega) = 0$,

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\tau)\sin\omega\tau\, d\tau \quad ,$$

тогда

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(\tau)\sin\,\omega\tau\, d\tau \right) \sin\,\omega t\, d\omega. \tag{22}$$

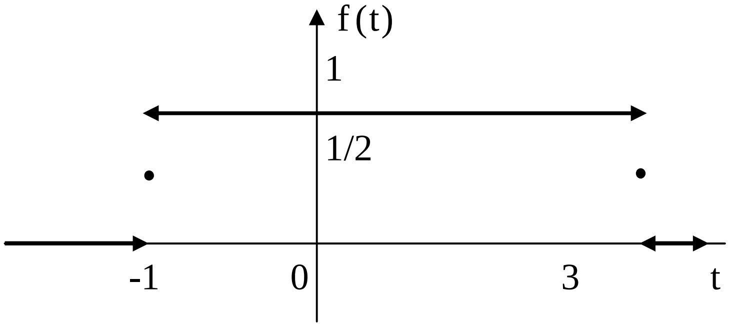
Введем синус-преобразование Фурье, положив $F_S(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(\tau)\sin\,\omega\tau\, d\tau$, тогда формула (22) принимает вид $f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_S(\omega)\sin\,\omega\, t\, d\omega$.

3. Пусть $f(t)$ определена только в интервале $(0, \infty)$. Тогда ее можно представить при $t > 0$ как формулой (21), так и формулой (22). Для этого следует функцию

$f(t)$ продолжить на промежуток $(-\infty, 0)$ так, чтобы она стала или четной или нечетной на всей действительной оси.

Теперь рассмотрим примеры представления непериодических функций интегралом Фурье.

1. Представить интегралом Фурье функцию



$$f(t)=\begin{cases}1, & -1<t<3,\\ \dfrac{1}{2}, & t=-1,\ t=3,\\ 0, & t>3,\ t<-1.\end{cases}$$

Рис. 12

График функции представлен на рис. 12.

Решение. Данная функция на любом конечном промежутке числовой оси $(-\infty, \infty)$ удовлетворяет условиям Дирихле. Очевидно, что $f(t)$ является абсолютно интегрируемой функцией на всей числовой оси, так как

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt=\int_{-1}^{3}1\cdot dt=t\Big|_{1}^{3}=4<\infty .$$

Следовательно, данная функция может быть представлена интегралом Фурье; по формуле (17) имеем

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\,d\tau=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\omega\int_{-1}^{3}1\cdot\cos\omega(t-\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{-\sin\omega(t-\tau)}{\omega}\Bigg|_{-1}^{3}d\omega=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{-\sin\omega(t-3)+\sin\omega(t+1)}{\omega}d\omega=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega(t-1)\cdot\sin 2\omega}{\omega}d\omega .$$

В точках разрыва $f(t)$, т.е. при $t=-1$ и $t=3$, полученное представление сохраняется, т. к. в этих точках $\frac{1}{2}[f(t-0)+f(t+0)]=\frac{1}{2}f(t)$.

В частности, при $t=3$ имеем $f(3)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos 2\omega\cdot\sin 2\omega}{\omega}d\omega=\frac{1}{2}$, отсюда легко находим значение интеграла: $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$.

Таким образом, в результате решения основной задачи – представления заданной функции интегралом Фурье – мы смогли вычислить интеграл от функции, первообразная которой через элементарные функции не выражается. И еще одна характерная особенность. Как видно из данного примера, интеграл Фурье может представлять функцию, которая на разных промежутках числовой оси задается разными аналитическими выражениями.

2. Представить интегралом Фурье заданную на всей оси функцию

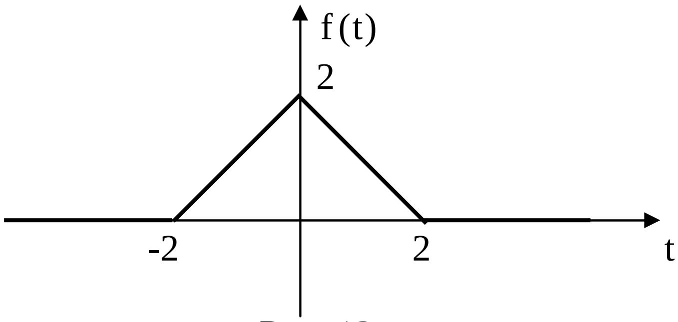


Рис. 13

$$f(t)=\begin{cases} t+2, & -2\le t<0,\\ -t+2, & 0\le t<2,\\ 0, & |t|\ge 2.\end{cases}$$

График функции представлен на рис. 13.

Решение. Условия представимости данной функции интегралом Фурье выполняются. Эта функция – четная, поэтому воспользуемся формулой (21):

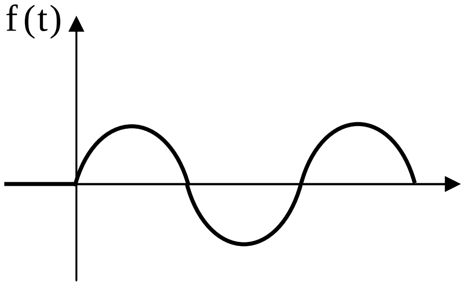
$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_0^\infty f(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau\right)\cos\omega t\,d\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_0^2[2-\tau]\cdot\cos\omega\tau\,d\tau\right)\cdot\cos\omega t\,d\omega=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left(2\cdot\frac{\sin\omega\tau}{\omega}\Big|_0^2-\frac{\cos\omega\tau}{\omega^2}\Big|_0^2-\frac{\tau\sin\omega\tau}{\omega}\Big|_0^2\right)\cos\omega t\,d\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{1-\cos 2\omega}{\omega^2}\cos\omega t\,d\omega=$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^\infty\left(\frac{\sin\omega}{\omega}\right)^2\cos\omega\,t\,d\omega\ .$$

В частности, полагая $t=0$, найдем $\int_0^\infty\left(\frac{\sin\omega}{\omega}\right)^2 d\omega=\frac{\pi}{2}$.

3. Представить интегралом Фурье функцию



$$f(t)=\begin{cases}\sin t, & 0<t<\pi n,\\ 0, & t<0,\ t>\pi n.\end{cases}$$

n - целое число.

Рис. 14

График функции представлен на рис. 14.

Решение. Функция $f(t)$ непрерывна на всей числовой оси и абсолютно интегрируема, поскольку

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt = \int_{0}^{\pi n} |\sin t|\,dt < \pi n < \infty.$$

Следовательно, возможно представление этой функции интегралом Фурье. Согласно формуле (18)

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\omega \int_{0}^{\pi n} \sin\tau \cdot \cos\omega(t-\tau)\,d\tau.$$

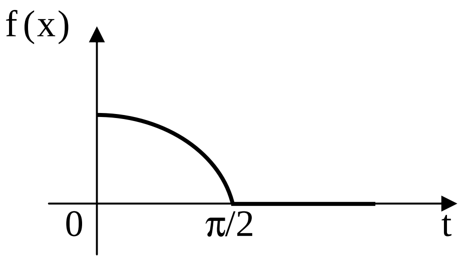
Используя равенство

$$\sin\tau \cdot \cos\omega(t-\tau) = \frac{1}{2}\left[\sin(\tau - \omega t + \omega\tau) + \sin(\tau + \omega t - \omega\tau)\right],$$

интегрируя и производя несложные преобразования, получим

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{\cos\omega t + (-1)^{n+1}\cos\omega(t-\pi n)}{1-\omega^2}\,d\omega.$$

4. Представить интегралом Фурье функцию, продолжив ее на всю числовую ось: а) четным, б) нечетным образом.



$$f(t) = \begin{cases} \cos t, & 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & t > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Рис. 15

График функции представлен на рис. 15.

Решение. Функции, получаемые продолжением $f(t)$ на $(-\infty, 0)$ четным и нечетным образом, удовлетворяют условиям теоремы. Для четного продолжения воспользуемся формулой (21)

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{0}^{\pi/2} \cos\tau \cdot \cos\omega\tau\,d\tau\right)\cos\omega t\,d\omega.$$

Вычислим отдельно внутренний интеграл:

$$\int_0^{\pi/2} \cos\tau \cdot \cos\omega\tau\, d\tau = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos(1-\omega)\tau\, d\tau + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos(1+\omega)\tau\, d\tau =$$

$$= \frac{\sin(1-\omega)\tau}{2(1-\omega)}\Bigg|_0^{\pi/2} + \frac{\sin(1+\omega)\tau}{(1+\omega)}\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\omega\right)}{2(1-\omega)} +$$

$$+ \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\omega\right)}{2(1+\omega)} = \frac{\cos\frac{\pi}{2}\omega}{2(1-\omega)} + \frac{\cos\frac{\pi}{2}\omega}{2(1+\omega)} = \frac{\cos\frac{\pi}{2}\omega}{\left(1-\omega^2\right)}.$$

Следовательно, при четном продолжении

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\cos\frac{\pi}{2}\omega}{1-\omega^2}\cos\omega t\, d\omega.$$

Если $f(t)$ продолжена нечетным образом, то следует применить формулу (22). Получим

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\pi/2}\cos\tau\cdot\sin\omega\tau\, d\tau\right)\sin\omega t\, d\omega.$$

Производя аналогичные вычисления, придем к следующему представлению функции $f(t)$:

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{2}\omega}{1-\omega^2}\sin\omega t\, d\omega.$$

Таким образом, для $t > 0$

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{2}\omega}{1-\omega^2}\sin\omega t\, d\omega = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\cos\frac{\pi}{2}\omega}{1-\omega^2}\cos\omega t\, d\omega.$$

5. Найти косинус- и синус-преобразования Фурье функции

$$f(t) = \exp(-at), \ a > 0, \ t \ge 0.$$

Решение.

$F_C(\omega) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty f(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau$, следовательно, используя формулу для вычисления циклического интервала, получим

$$F_C(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-a\tau}\cos\omega\,\tau d\tau = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\left[\frac{e^{-a\tau}}{(a^2+\omega^2)}(-a\cos\omega\tau + \omega\sin\omega\tau)\right]\Bigg|_0^\infty = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+\omega^2}.$$

Аналогично

$$F_S(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-a\tau}\sin\omega\,\tau d\tau = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\left[\frac{e^{-a\tau}}{(a^2+\omega^2)}(-a\sin\omega\tau - \omega\cos\omega\tau)\right]\Bigg|_0^\infty = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega}{a^2+\omega^2}.$$

Если теперь к полученным функциям применить обратные косинус- и синус-преобразования Фурье, то найдем

$$\frac{2a}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\cos\omega t}{a^2+\omega^2}d\omega = e^{-at}, \quad t > 0,$$

и

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\omega\sin\omega t}{a^2+\omega^2}d\omega = e^{-at}, \quad t > 0.$$

Применяя косинус- и синус-преобразования Фурье, можно получить таблицу значений несобственных интегралов, зависящих от параметра. Однако основное назначение косинус- и синус-преобразований Фурье состоит в применениях к решению задач математической физики.

6. Найти функцию $\varphi(t)$, если $\int\limits_0^\infty \varphi(\tau)\sin\omega\tau\, d\tau = e^{-\omega}, \quad \omega > 0$.

Решение. Функция $F(\omega) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}e^{-\omega}$, как это видно из представленного уравнения, является синус-преобразованием Фурье функции $\varphi(t)$. Поэтому и на основании формулы обратного синус-преобразования Фурье находим

$$\varphi(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-\omega}\sin\omega\, t\, d\omega = \frac{2}{\pi}\frac{e^{-\omega}}{t^2+1}[-\sin\omega\, t - t\cos\omega\, t]\Big|_0^\infty = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{t}{t^2+1}.$$

7. Вычислить интеграл $I=\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin\alpha\omega}{\omega}\cos\omega t\, d\omega$.

Решение. Замечая, что $\frac{\sin\alpha\omega}{\omega}=\int\limits_0^{\alpha}\cos\omega\tau\, d\tau$, можем записать

$$\frac{1}{\pi}\cdot I=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\left(\int\limits_0^{\alpha}\cos\omega\tau\, d\tau\right)\cdot\cos\omega t\, d\omega.$$

Если ввести функцию $f(t)=\begin{cases}1, & 0<t<\alpha,\\ 0, & t\ge\alpha,\ t\le 0,\end{cases}$ то предыдущее равенство примет

вид $\frac{1}{\pi}\cdot I=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau\right)\cdot\cos\omega t\, d\omega=f(t)$, т.е. $I=\begin{cases}\pi, & 0<t<\alpha,\\ 0, & t\ge\alpha,\ t\le 0.\end{cases}$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Представить интегралом Фурье функции:

1. $f(t)=\begin{cases}1, & 0<t<1,\\ \frac{1}{2}, & t=0,\ t=1,\\ 0, & t<0,\ t>1.\end{cases}$

Ответ: $f(t)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin\frac{\omega}{2}\cdot\cos\frac{\omega(1-2t)}{2}}{\omega}d\omega$.

2. $f(t)=\begin{cases}1-t, & 0<t<1,\\ -1-t, & -1<t<0,\\ 0, & t\ge 1,\ t\le -1.\end{cases}$

Ответ: $f(t)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\omega-\sin\omega}{\omega^2}\sin\omega t\, d\omega$.

3. $f(t)=\begin{cases} |t|, & |t|<1, \\ 0, & |t|\ge 1. \end{cases}$

Ответ: $f(t)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\omega\sin\omega+\cos\omega-1}{\omega^2}\cos\,\omega t\,d\omega.$

4. $f(t)=\begin{cases} e^{-t}, & t>0, \\ 0, & t=0, \\ e^{-t}, & t<0. \end{cases}$

Ответ: $f(t)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\omega\sin\omega t}{1+\omega^2}\,d\omega.$

5. Найти косинус-преобразование Фурье функции $f(t)=\begin{cases} 2t-3, & 0\le t\le \dfrac{3}{2}, \\ 0, & \dfrac{3}{2}<t<\infty. \end{cases}$

Ответ: $F_C(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cdot\dfrac{2\left(\cos\dfrac{3\omega}{2}-1\right)}{\omega^2}.$

6. Найти синус-преобразование Фурье функции $f(t)=a^{-t},\quad 0<t<\infty,\quad a>0$.

Ответ: $F_C(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cdot\dfrac{\ln a}{\ln a^2+\omega^2}.$

7. Найти функцию $\varphi(t)$, если $\displaystyle\int_0^{\infty}\varphi(\tau)\cos\,\omega\,\tau\,d\tau=\frac{1}{1+\omega^2}$.

Ответ: $\varphi(t)=\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{1}{1+t^2}.$

8. Вычислить интеграл $I=\displaystyle\int_0^{\infty}\left(\frac{1-\cos h\omega}{\omega}\right)\sin\,\omega t\,d\omega.$

Ответ: $I=\begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & 0<t<h, \\ 0, & t>h. \end{cases}$

4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Интегральную формулу Фурье можно записать в виде

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{j\omega(t-\tau)}\,d\tau . \tag{23}$$

Это есть комплексная форма интеграла Фурье. Введем функцию

$$F(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,e^{-j\omega\tau}\,d\tau , \tag{24}$$

то согласно (23) получим

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega . \tag{25}$$

Переход от $F(\tau)$ к $F(\omega)$ по формуле (24) называется прямым преобразованием Фурье. Восстановление $f(t)$ по $F(\omega)$ с помощью формулы (25) называется обратным преобразованием Фурье. Функция $F(\omega)$ называется спектральной функцией или спектральной плотностью сигнала $f(t)$. Функция $|F(\omega)|$ называется амплитудным спектром, функция $\Psi(\omega)=-\arg F(\omega)$ называется фазовым спектром функции $f(t)$.

$|F(\omega)|$ и $\Psi(\omega)$ - спектральные характеристики сигнала $f(t)$ соответственно амплитудная и фазовая $|F(\omega)|$ - четная, а $\Psi(\omega)$ - нечетная функция.

$$F(\omega)=|F(\omega)|\cdot\exp(-j\Psi(\omega)).$$

Рассматривая интеграл Фурье как предельный случай ряда Фурье при $\ell\to\infty$, можно заметить, что спектральные линии в пределе сливаются. Поэтому амплитудный спектр непериодической функции будет сплошным и его изображают непрерывной линией.

Формулы (24) и (25) показывают, что если известна спектральная плотность сигнала $f(t)$, то можно восстановить сигнал $f(t)$, и, наоборот, по известному сигналу $f(t)$ можно определить его спектральные характеристики. Таким образом, описания процессов временными функциями (сигналами) и спектральными функциями равноправны. При решении конкретных задач, связанных с распространением сигналов, используют ту или иную форму представления, исходя из простоты математического анализа.

Рассмотрим важные для практики примеры нахождения спектральной плотности и спектральных характеристик непериодических сигналов.

1. Единичная функция $\chi(t)$ изображается графиком, как показано на рис. 16.

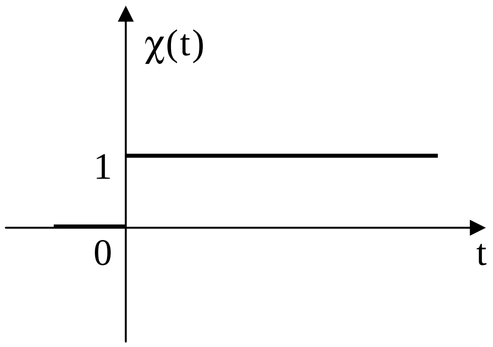


Рис. 16

Единичная функция $\chi(t)$ определяется следующим образом: $\chi(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & t\ge 0.\end{cases}$. Если попытаться вычислить спектральную плотность единичной функции $\chi(t)$ “напрямую”, возникает затруднение, связанной с тем, что эта функция не является абсолютно интегрируемой.

В этом случае умножают заданную функцию на затухающую экспоненту $e^{-\alpha t}$, $\alpha>0$. Вычислив спектральную плотность функции $\chi(t)e^{-\alpha t}$, искомую спектральную плотность находят предельным переходом при $\alpha\to 0$.

$$F(\omega)=\lim_{\alpha\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\chi(\tau)\,e^{-\alpha\tau}\cdot e^{-j\omega\tau}\,d\tau=\lim_{\alpha\to 0}\int_{0}^{\infty}e^{-(\alpha+j\omega)\tau}\,d\tau=$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{-1}{(\alpha+j\omega)}e^{-(\alpha+j\omega)}\Bigg|_0^{\infty}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha+j\omega}=\frac{1}{j\omega}\ .$$

Таким образом, амплитудная характеристика единичной функции $|F(\omega)|=\dfrac{1}{\omega}$ изображается графиком, как показано на рис. 17.

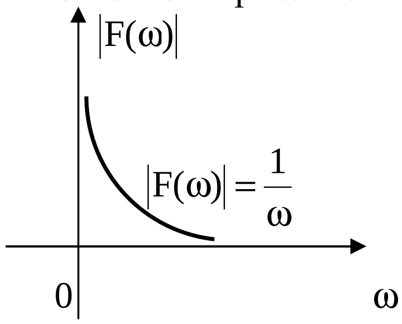


Рис. 17

2. Прямоугольный импульс.

Сигнал, определяемый выражением: $S(t)=\begin{cases}h, & |\,t\,|\le\dfrac{\tau}{2},\\ 0, & |\,t\,|>\dfrac{\tau}{2},\end{cases}$

находит широкое распространение как в технике, так и в теории сигналов и цепей. Прямоугольный импульс высотой h, длительностью τ изображен на рис. 18.

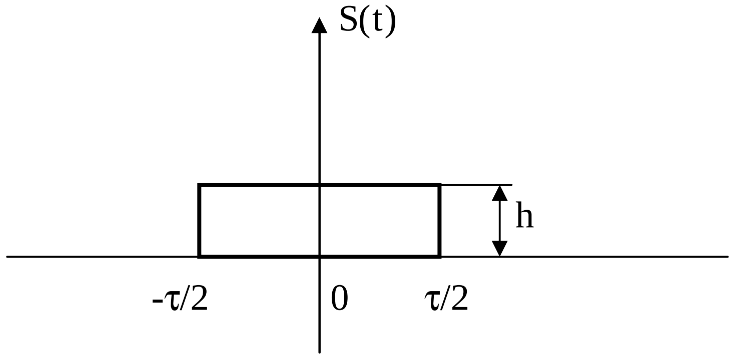


Рис. 18

Применяя формулу (24), находим спектральную плотность этого импульса.

$$F\omega = h\int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega\tau}\,dt = -\frac{h}{j\omega}\left(e^{-\frac{j\omega\tau}{2}} - e^{\frac{j\omega\tau}{2}}\right) = \frac{2h}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2} = h\tau\left[\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}\right].$$

Далее на рис. 19 представлены графики спектральной плотности, амплитудного и фазового спектров прямоугольного импульса. На графике фазового спектра каждая перемена знака $F(\omega)$ учитывается приращением фазы на π.

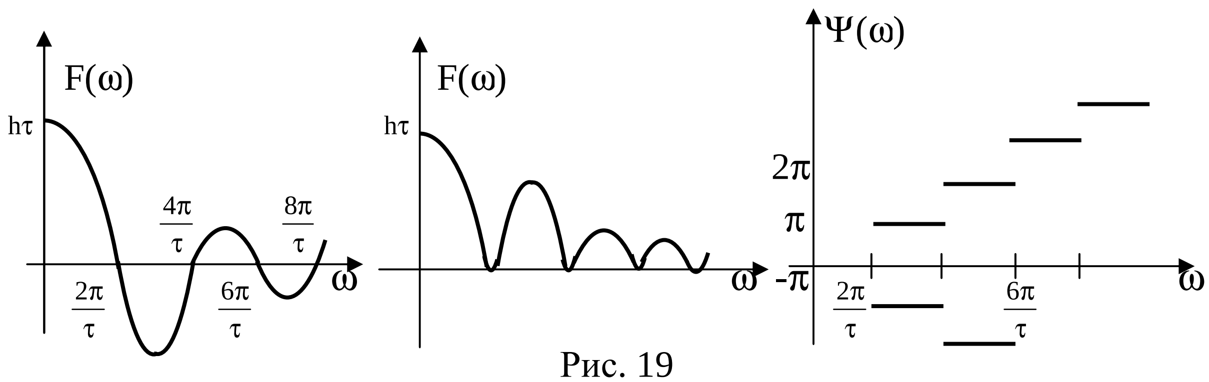


Рис. 19

3. Треугольный импульс.

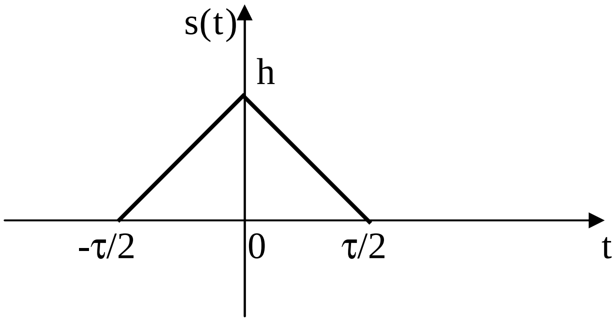


Рис. 20

$$S(t) = \begin{cases} h\left(1+\dfrac{t}{\tau/2}\right), & -\dfrac{\tau}{2} \le t \le 0, \\ h\left(1-\dfrac{t}{\tau/2}\right), & 0 \le t \le \dfrac{\tau}{2}, \\ 0, & t > \dfrac{\tau}{2}, t < -\dfrac{\tau}{2}. \end{cases}$$

График функции представлен на рис. 20.

Решение. Вычисляем спектральную плотность $F(\omega)$.

$$F(\omega)=\int\limits_{-\tau/2}^{0} h\left(1+\frac{t}{\tau/2}\right)e^{-j\omega t}\,dt+\int\limits_{0}^{\tau/2} h\left(1-\frac{t}{\tau/2}\right)e^{-j\omega t}\,dt=$$

$$=h\cdot\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\Bigg|_{-\tau/2}^{0}+\frac{2h}{\tau}\cdot\frac{e^{-j\omega t}}{(-j\omega)^2}(-j\omega t-1)\Bigg|_{-\tau/2}^{0}+h\cdot\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\Bigg|_{0}^{\tau/2}-$$

$$-\frac{2h}{\tau}\cdot\frac{e^{-j\omega t}}{(-j\omega)^2}(-j\omega t-1)\Bigg|_{0}^{\tau/2}=\ldots=\frac{h\tau}{2}\left(\frac{\sin\frac{\omega\tau}{4}}{\omega\tau/4}\right)^2 .$$

График спектральной плотности $F(\omega)$ изображен на рис. 21.

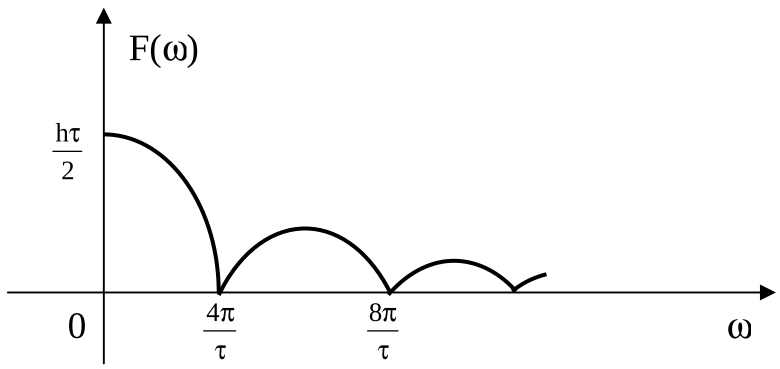


Рис. 21

4. Колоколообразный импульс.

$S(t)=A\cdot e^{-\frac{t^2}{2a^2}}$, $-\infty<t<\infty$. Этот импульс совпадает по форме с графиком нормального (гауссовского) закона распределения вероятностей и называется также гауссовским импульсом. Колоколообразный импульс и его спектральная плотность изображены на рис. 22.

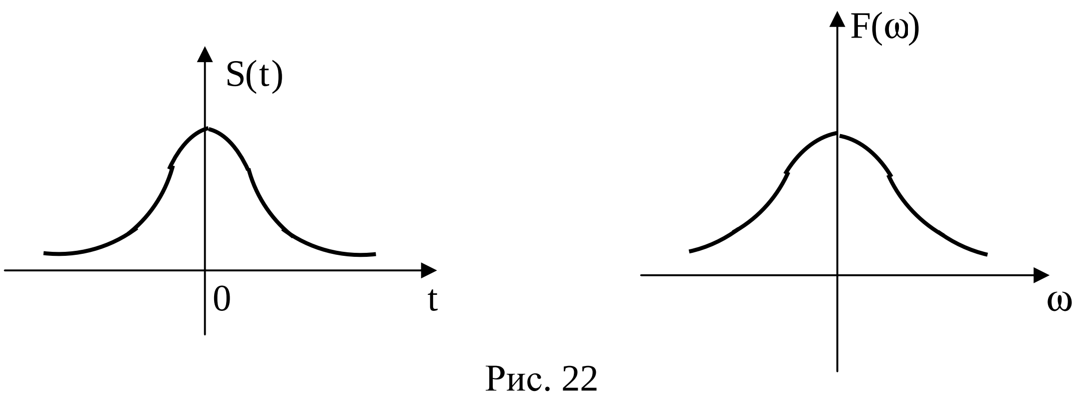


Рис. 22

Будем находить спектральную плотность данного импульса. По формуле (24) имеем

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot e^{-\frac{t^2}{2a^2}} \cdot e^{-j\omega t}\, d\tau .$$

Для вычисления интеграла удобно в подынтегральной функции дополнить показатель степени до квадрата суммы

$$-\left(\frac{t^2}{2a^2} + j\omega t\right) = -\left[\left(\frac{t^2}{2a^2} + j\omega t + d^2\right) - d^2\right] = -\left[\left(\frac{t}{\sqrt{2}a} + d\right)^2 - d^2\right],$$

где величина **d** определяется из условия

$$j\omega t = 2\frac{t}{\sqrt{2}\,a} \cdot d, \text{ т.е. } d = \frac{j\omega a}{\sqrt{2}} .$$

Таким образом, выражение для $F(\omega)$ приводится к виду

$$F(\omega) = A e^{d^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{t}{\sqrt{2}\,a} + d\right)^2} dt .$$

Перейдем к новой переменной $x = \frac{t}{\sqrt{2}\,a} + d$, получим

$$F(\omega) = A e^{d^2} \sqrt{2}\,a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx .$$

Так как $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, то окончательно $F(\omega) = A\sqrt{2\pi}\,a\, e^{-\frac{a^2\omega^2}{2}} = B e^{-\frac{\omega^2}{2b^2}}$, где $b = \frac{1}{a}$,

$B = \sqrt{2\pi}\,a\,A$.

Полученный результат имеет важное значение для теории сигналов. Оказывается, что гауссовский импульс и его спектр выражаются одинаковыми функциями и обладают свойством симметрии: для получения одной из них по заданной другой достаточно совершить замену t на ω и наоборот.

5. Волновой цуг. Так называют функцию, определяемую равенством:

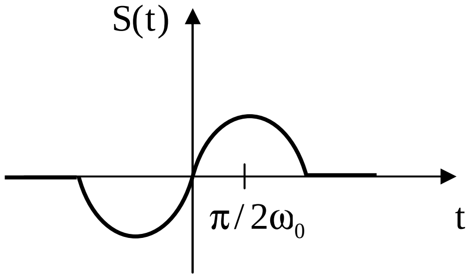


Рис. 23

$$S(t)=\begin{cases} h\cdot\sin\,\omega_0\,t, & |\,t\,|<\dfrac{\pi}{\omega_0}, \\ 0, & |\,t\,|>\dfrac{\pi}{\omega_0}. \end{cases}$$

График функции представлен на рис. 23.
Рассматриваемый сигнал играет в теории связи большую роль. Находим его спектральную плотность.

$$F(\omega)=h\int\limits_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0}\sin\,\omega_0\,t\,e^{-j\omega t}\,dt=h\,\frac{e^{-j\omega t}}{(-j\omega)^2+\omega_0{}^2}\left[-j\omega\cdot\sin\,\omega_0\,t-\omega_0\cos\,\omega_0\,t\right]\Bigg|_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0}=$$

$$=\frac{h}{\omega_0{}^2-\omega^2}\left\{e^{-\frac{j\omega\pi}{\omega_0}}\cdot\omega_0-e^{\frac{j\omega\pi}{\omega_0}}\cdot\omega_0\right\}=\frac{-2h\omega_0\,j}{\omega_0{}^2-\omega^2}\cdot\sin\frac{\pi\omega}{\omega_0}=\frac{2h\omega_0\,j}{\omega^2-\omega_0{}^2}\cdot\sin\frac{\pi\omega}{\omega_0}.$$

ПРИМЕРЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Найти спектральные плотности и спектральные характеристики следующих непериодических сигналов.

1. Косинусоидальный импульс.

$$S(t)=\begin{cases} h\,\cos\dfrac{\pi t}{\tau}, & |\,t\,|<\dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & |\,t\,|>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $F(\omega)=\dfrac{2\pi h}{\tau}\cdot\dfrac{\cos\dfrac{\omega\tau}{2}}{\left(\dfrac{\pi}{\tau}\right)^2-\omega^2}.$

2. Экспоненциальный импульс.

$$S(t) = \begin{cases} e^{-a\,t}, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Ответ: $F(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}.$

3. Линейно-экспоненциальный импульс.

$$S(t) = \begin{cases} h\,t\,e^{-h\,t}, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Ответ: $F(\omega) = \dfrac{h}{h^2 + \omega^2}\,e^{-j\,\mathrm{arctg}\frac{2h\,\omega}{h^2 - \omega^2}}.$

4. $f(t) = \begin{cases} \sin^2 t, & |t| < \pi, \\ 0, & |t| \ge \pi. \end{cases}$

Ответ: $F(\omega) = \dfrac{4\sin \pi\omega}{\omega\left(4 - \omega^2\right)}.$

5. $f(t) = \begin{cases} \sin 2m\,t, & |t| = \pi, \\ 0, & |t| \ge \pi, \end{cases}$ $m -$ натуральное число.

Ответ: $F(\omega) = \dfrac{4m\,j}{4m^2 - \omega^2} \cdot \sin \omega\pi.$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Радио и связь, 1986. – 512 с.

2. Колобов А.М. Избранные главы высшей математики. – Ч. 1. Ряд Фурье. Интеграл Фурье. Операционные исчисления. – Минск: Высшая школа, 1985. – 220 с.

3. Ефимов А.В. Математический анализ (специальные разделы) – Ч. 1. Общие функциональные ряды и их приложение. – М.: Высшая школа, 1980. – 279 с.

4. Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. – М.: Наука, 1965. – – 607 с.